UO‘K:524.4

Fazliddin SHAMSHIYEV,
Ozbekiston Milliy unversiteti dotsenti, f.-m.f.n.
E-mail: shamshiyev_f@nuu.uz
Tel:(93) 3967498

O‘zRFA Astronomiy instituti direktori o‘rinbosari, f.-m.f.n., dotsent Y.A.Tillayev taqrizi asosida

BA’ZI LOKAL INTEGRALLARINING YULDUZLAR DINAMIKASIDA MAVJUDLIGI HAQIDA

Annotatsiya

Bu ishda yulduz harakati uchun ba’zi lokal integrallarining mavjudligini ta’minlab beradigan potentsiallar sinfi o‘rganilgan. Tezlik komponentlari bo‘yicha energiya integraliga, aylanuvch sistemalar uchun esa Yakobi integraliga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli yoki kvadrat integrallar, haqiqiy integrallarga qaraganda ancha kengroq ekanligi ko‘rsatilgan. Lokal integralning maxsus holatlar, ya’ni uch o‘lchovli gravitatsion maydonida mavjudligi ham ko‘rib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: yulduzlar dinamikasi, gravitatsion maydon, harakat lokal integrali.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКЕ

Аннотация

В работе приводится исследования класс таких потенциалов, для которых движение звезды допускает некоторые локальные интегралы движения. Показано, что линейные или квадратичные по компонентам скорости интегралы, независимые от интеграла энергии, или при наличии вращения интеграла Якоби весьма шире чем истинные интегралы движения. Рассмотрен также специальные случаи существования локального интеграл в трехмерном гравитационном поле.

Ключевые слова: звездная динамика, гравитационный потенциал, локальный интеграл движения.

ON THE EXISTENCE OF SOME LOCAL INTEGRALS IN STELLAR DYNAMICS

Annotation

The paper presents studies of a class of such potentials for which the motion of a star admits some local integrals of motion. It is shown that linear or quadratic integrals in terms of velocity components, independent of the energy integral, or in the presence of rotation of the Jacobi integral, are very wider than the true integrals of motion. Special cases of the existence of a local integral in a three-dimensional gravitational field are also considered.

Key words: stellar dynamics, gravitational potential, local integral of motions.

Введение. Задача описания движения материальной точки в гравитационном поле, с достаточно сложной структурой несомненно важна для всех ветвей небесной механики и звездной динамики. Однако в полном своем виде эта задача не разрешима. Поэтому конкретные исследования посвящены анализу частных случаев или хотя бы доказательству регулярности движения в определенных случаях. Наши исследования локального интеграла как раз и относится поиску его специальных форм. Хотя, в принципе, возможны другие формы. Действительно, теория КАМ гарантирует при определенных условиях существование локального интеграла в виде разложения по компонентам скорости только с помощью бесконечных рядов. Мы же исследуем случаи, когда достаточно полиномы конечном виде по компонентам скорости.

В этой работе мы причислим все рассмотренные нами случаи существования локального интеграла.

Квадратичный локальный интеграл. Само понятие локального интеграла в том смысле, как употребляем здесь, введено для системы с двумя степенями свободы В.А.Антоновым [1]. То есть речь идет об отдельной инвариантной гиперповерхности в фазовом пространстве. В работе [1] уравнение такой поверхности задается квадратичной форме

$$A(x,y)u^2 + 2B(x,y)uv + C(x,y)v^2 = 1. \tag{1}$$

В (1) и далее x, y означают декартовы координаты, u, v – соответствующие скорости, A, B, C – некоторые функции подлежащие определению. Выражение (1) можно назвать локальным интегралом. Его существование уже дает некоторую ориентировку в свойствах множества возможных траекторий, поскольку поверхность в фазовом пространстве играет роль барьера, через который изображающая точка не может никогда перейти. Правдоподобно, что и темп перемешивания, если таковое существует, в каждом из поучающихся полупространства оказывается, вообще говоря, более замедленным, чем в сходных задачах без такого барьера.

Отыскивается те потенциалы, для которых условие (1) сохраняет силу при любых t на всех тех траекториях, у которых оно справедливо при $t = 0$. Для формулировки решения в [1], задаются сперва две произвольные функции $f(\sigma)$ и $f(\tau)$ с периодами 2π. С их помощью в неявном виде определяются σ и τ как функции координат из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x sin\sigma - y cos\sigma = f'(\sigma) \\ x sin\tau - y cos\tau = f_1{}'(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Далее строятся функции координат

$$\left.\begin{aligned} \Phi = \tfrac{1}{2}\left[(x cos\sigma + y sin\sigma + f(\sigma)) + (x cos\tau + y sin\tau + f_1(\tau))\right] \\ \Phi_1 = \tfrac{1}{2}\left[(x cos\sigma + y sin\sigma + f(\sigma)) - (x cos\tau + y sin\tau + f_1(\tau))\right] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

А тогда, при задании еще двух произвольных функций F и F_1 потенциал строится в виде

$$U = F(\Phi)cos^2\frac{\sigma-\tau}{2} + F_1(\Phi)sin^2\frac{\sigma-\tau}{2}\,. \tag{4}$$

Возможны вырождения типа $\sigma = const$, тогда отбрасываются первое уравнение (2) и члены $f(\sigma)$ в (3). Аналогично рассматривается случай $\tau = const$.

Траектория заполняет кольцо или ящик с четырьмя прямыми углами. Стороны ящиков образованы ортогональной сетью кривых $\Phi = const$ и $\Phi_1 = const$, не имеющих, однако, в общем случае отношения к конформным преобразованиям. Траектории не выражаются в квадратурах, но, как всегда при задании поля скоростей, уравнения движения сводятся к одному дифференциальному уравнению первого порядка.

Интеграл Кузмина можно рассматривать как частный случай, отвечающий выбору функций

$$f(\sigma) = z_0 sin\sigma,\quad f_1(\sigma) = -z_0 sin\tau\,.$$

Для линейного интеграла

$$A(x,y)u + B(x,y)v = 1$$

сходные выкладки показывают, что надо исходить опять из периодической функции $f(\theta)$, задавать с ее помощью $\theta(x,y)$ из уравнения

$$xsin\theta - ycos\theta = f'(\theta),$$

затем строить

$$\Phi_0 = xcos\theta + ysin\theta + f(\theta)$$

и, наконец образовывать потенциал

$$U = \mathrm{K}(\Phi_0) + \frac{L(\theta)}{[\Phi_0 - f(\theta) - f''(\theta)]^2} \tag{5}$$

($\mathrm{K}(\Phi_0)$ и $L(\theta)$ – произвольные функции). Ротационная симметрия получается при $f(\theta) \equiv 0$ и $L(\theta) \equiv 0$.

Линейный локальный интеграл. В [2] мы ищем линейный относительно компонентов скорости локальный интеграл

$$A(x,y)u + B(x,y)v - \varphi = 0. \tag{6}$$

В отличие от [1], потенциал считается стационарным только по отношению к системе координат, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω.

Строится потенциал допускающий такой линейный локальный интеграл

$$U = \frac{1}{2}[S(\psi) + \varphi^2 - \Omega^2(x^2+y^2)], \tag{7}$$

где

$$\varphi = \frac{\Omega[x^2+y^2-2\psi f''(\sigma)] + N(\sigma)}{xcos\sigma + ysin\sigma - f''(\sigma)},$$

$$\psi = xcos\sigma + ysin\sigma + f(\sigma),$$

$f(\sigma)$, $N(\sigma)$, $S(\psi)$ произвольные функции, а σ неявно определяется из

$$xsin\sigma - ycos\sigma = f'(\sigma).$$

В принципе, этим решается задача описания всех потенциалов, допускающих локальный интеграл первой степени.

Заметим, что при $\Omega = 0$ как непосредственно проверяется, общие формулы [2] переходят в соответствующие соотношения того пункта статьи [1], который говорит о частном случае линейного локального интеграла.

В [2] доказано также существование периодического решения с отношением частот 1:3, причем траектории заключена в кольце $\psi_1 < \psi < \psi_2$. Этот факт удается подтвердить также численно.

Локальный интеграл в трёхмерном случае. В [3] мы исследовали случаи существования локального интеграла в трехмерном потенциальном поле. Пусть при каком то определенном классе начальных условий возникло поле скоростей, всего лишь двузначное, т.е. скорости (u, v, w) подчиняются соотношениям

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \pm \alpha\sqrt{S+2h} \\ v &= v_0 \pm \beta\sqrt{S+2h} \\ w &= w \pm \gamma\sqrt{S+2h} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $u_0, v_0, w_0, \alpha, \beta, \gamma, S$ – функции координат, h - произвольная постоянная энергии. Найден класс потенциалов, допускающих локальный интеграл вида (8)

$U = \frac{1}{2}[(\nabla\Phi)^2 + U_0(L)]$,

где Φ и L – произвольные функции подчинены дополнительным условиям

$\nabla\Phi \cdot \nabla L = 0$, $\Phi = \Phi(n_x, n_y, n_z)$,
$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = 1$, $L = L(x, y, z)$,

а (n_x, n_y, n_z) вспомогательные единичные векторы, в оптике задающий направление пучка лучей.

Локальный интеграл в трехмерном при наличии вращения. Аналогическая задача для вращающихся систем рассматривается в [4]. В этой работе, в отличие [3], мы рассмотрим случаи, когда система вращается с постоянной угловой скорости Ω. Предполагаем, что поле скоростей представляется в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \pm \alpha\sqrt{S + 2h} + \Omega y \\ v &= v_0 \pm \beta\sqrt{S + 2h} - \Omega x \\ w &= w_0 \pm \gamma\sqrt{S + 2h} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Предположим, что для функции α, β, γ справедливо равенство

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Известен для таких систем интеграл Якоби

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\Omega^2\,(x^2+y^2)}{2} - U(x, y, z) = h, \tag{10}$$

Проверкой условие существования такого поля скоростей, дает общую форму потенциала

$$U = \frac{1}{2}\left[(grad\Phi)^2 + U_0(L) + \Omega\left(y\frac{\partial\Phi}{\partial x} - x\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right]. \tag{11}$$

В ротационной симметрии имеем

$$L = L(r, z),\ \text{где},\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Получены выражения для неизвестных функций получили следующие выражения ψ , L и Φ

$$r sin\psi - z cos\psi = f'(\psi). \tag{12}$$

$$L = \int(cos\psi dr + sin\psi dz) = r cos\psi + z sin\psi + f(\psi) \tag{13}$$

$$\Phi = F(\psi, \theta) + C,\ (C = const.) \tag{14}$$

где $F(\psi, \theta)$ – некоторая произвольная функция.

Заключение. Таким образом эта частная задача полностью решена. ψ определяется из (12), L и Φ соответственно из (13) и (14) тогда из (11) можем найти класс потенциалов, допускающих поле скоростей (9), хотя и не самый общий. В принципе, ротационная симметрия для L не обязательна, но для таких несимметричных $L(x, y, z)$ выкладки существенно сложнее. Однако рассмотренный случай должен представлять определенный интерес, поскольку в нем сохраняются некоторые динамические черты ротационно-симметричных систем. Наш случай дает, соответственно, своеобразное обобщение таких симметричных моделей.

По определению локальный интеграл не позволяет найти траекторию, но это возможно посредством решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt\ ,$$

где u, v, w как функции координат берутся из (8) или (9), что облегчает решения исходной системы 6-го порядка.

Благодарность. Автор выражают свою признательность д.-ф. м. н. Ахунову Т.А. за обсуждение данной статьи. Работа выполнена в рамках гранта FZ-20200929344.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов В.А. «Локальный квадратичный интеграл в звездной динамике», Вестник ЛГУ, №19, 1981
2. Antonov V.A., Shamshiev F.T. «Local integrals and the plane motion of a point in rotating systems», Celest. Mech. And Dyn. Astron., v.56, p.451, 1993
3. Антонов В.А., Шамшиев Ф.Т. «Специальный класс потенциалов, допускающих локальный интеграл», Астрономический журнал, 1992, т.69, вып. 5, стр. 971-977.
4. Shamshiev F.T. «On The Potential of a Rotating Bar of Regular Galaxies», Journal of The Korean Astronomical Society, 29, pp. 73-74, 1996