



O'ZMU XABARLARI

ВЕСТИК НУУЗ

АСТА NUUZ

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

**JURNAL 1997
YILDAN
CHIQA
BOSHLAGAN**

**2024
2/1.1
Aniq
fanlar**

Bosh muharrir:

MADJIDOV I. U. — t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

ERGASHOV Y. S. — f.-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

Ayupov Sh. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Alimov Sh. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Sadullayev A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Roziqov O'. A. – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

Aripov M. M. – f.-m.f.d., prof.

Ashurov R. R. – f.-m.f.d., prof.

Abdushukurov A. A. – f.-m.f.d., prof.

Zikirov O. S. – f.-m.f.d., prof.

Aloyev R. J. – f.-m.f.d., prof.

Ganixodjayev R. N. – f.-m.f.d., prof.

Narmonov A. Y. – f.-m.f.d., prof.

Omirov B. A. – f.-m.f.d., prof.

Raximov A. A. – f.-m.f.d., prof.

Beshimov R. B. – f.-m.f.d., prof.

Shoimqulov B. A. – f.-m.f.d., prof.

Xayotov A. – f.-m.f.d., prof.

Xudoyberdiyev A. – f.-m.f.d. prof.

Xudoyberganov G. – f.-m.f.d., prof.

Matyakubov A. S. – f.-m.f.d., prof.

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) **G'aybullayev R.Q.**

MUNDARIJA
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Abdullayev J. I., Ergashova Sh. H. Uch fermionli sistemaga mos Shryodinger operatori uchun Faddeev tenglamalari	3
Akhadkulov H. A. Approximations for Rauzy-Veech reonmalizations of the generalized interval exchange maps	16
Akhralov Kh. Z., Lakaev Sh. S. The essential spectrum of the three-particle Schrödinger operator for a system comprising two identical bosons and one fermion on \mathbb{Z}	27
Erkinboyev Q. S. Uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlarining ba'zi xossalari .	43
Gaybullaev R. Kh., Redjepov Sh. B., Usmonov J. B. 2D CA with new boundary condition	34
Jabborov N. M., Narmanov A. J. O'zbekiston aholisi o'sishining matematik modeli va ba'zi ko'rsatkich tahlillari	50
Jabborov N. M., Mirzamurodov O. S. O'zbekiston fond bozoridagi aksiyalarni bahosini o'zgarishini prognoz qilishda Markov zanjirini qo'llash	58
Jo'raqulova F. Uchinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektrining tuzilishi .	64
Kurbonov O. I., Akhralov Kh. Z. On the negative eigenvalues of the discrete Laplacian with potential in three-dimensional case	72
Qurbonov H., Bozorova O'. $M G 1 N$ sistemaning bandlik davri o'rta qiymati uchun limit teoremlar va ularning tadbiqlari	82
Turaev R., Seytov A., Haydarova R., Abduraxmonov O., Choriyorov N. Optimal water management in the channels of machine water raise systems	90
Yilihamujiang Yusupu, Matyakubov A. Matrix in Intelligent Technology for Automatic Plant Species Recognition in Application System	102
Алиев Н. О дискретном спектре гамильтониана трех частиц на двухмерной решетке	112
Джамалов С. З., Сипатдинова Б. К. О линейной обратной задаче с периодическим краевым условием для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде	130
Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х.Я. Задача преследования для дифференциально-разностных игр нейтрального типа	143
Собиров З. А. Начально-краевые задачи для уравнения Шредингера на звездообразном графе	157
Rajabov Sh. Sh. Simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun o'rama tushunchasi, uning asosiy xossalari va Dyamel formulasining analogi	166

UDC 517.55

UCH FERMIONLI SISTEMAGA MOS SHRYODINGER OPERATORI UCHUN FADDEEV TENGLAMALARI

Abdullayev J.I., Ergashova Sh.H. *

REZYUME

Bu ishda bir o‘lchamli panjarada uch fermionli sistemaga mos Shryodinger operatori $H_\mu(K)$ qaralgan. Zarrachalar juft-jufti bilan faqat qo‘shni tugunlarda bo‘lgandagina ta’sirlashadi deb hisoblanadi. Barcha $k \in \mathbb{T}$ va μ larda $H_\mu(K)$ operatorga mos Faddeev tipidagi integral operator ikki xil usulda qurilgan.

Kalit so‘zlar: Shryodinger operatori, panjara, fermion, xos qiymat, xos funksiya, kvaziimpuls, invariant qism fazo, Faddeev tipidagi integral operator, bog‘langan holat.

KIRISH

Ikki fermionli sistemaning bog‘langan holatlari bir o‘lchamli panjarada [1] ishda o‘rganilgan. Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemaning bog‘langan holatining mavjudlik masalasi [2] ishda cheksiz ko‘p bo‘lishi [3] ishda o‘rganilgan. Tashuvchisi chekli potensial bo‘lgan Shryodinger operatorining invariant qism fazolari [4] da o‘rganilgan. d - o‘lchamli panjara \mathbb{Z}^d da o‘zaro qo‘shni tugunlarda ta’sirlashuvchi uch fermionli sistemaga mos $H_\mu(K)$ operatorning muhim spektri [5] ishda tavsiflangan.

Uch zarrachali sistemaning bog‘langan holatlarining mavjudligi bir qator ishlarda o‘rganilgan, masalan, [6, 7, 8, 9, 10, 11]. [6] ishda sferik simmetrik potensial bilan juft-juft bo‘lib ta’sirlashuvchi uch fermionli sistema ikki o‘lchamli Evklid fazosida qaralgan. Agar sistemada ikki zarrachali qism sistemalar manfiy energiyali bog‘langan holatlarga ega bo‘lmasdan nol energiyali rezonansga ega bo‘lsa, u holda bu sistema cheksiz ko‘p uch zarrachali bog‘langan holatlarga ega bo‘ladi. $N(E)$ bilan energiya operatorining $-E < 0$ dan kichik xos qiymatlari soni belgilansa, u holda $\lim_{E \rightarrow 0} |\ln |\ln E||^{-1} N(E) \geq 8/(3\pi)$ ekanligi isbotlangan.

Ushbu ishda bir o‘lchamli panjara \mathbb{Z} da o‘zaro juft-jufti bilan qo‘shni tugunlarda ta’sirlashuvchi massasi bir bo‘lgan uch fermionli sistemaga mos energiya operatori H_μ qaralgan. Impuls tasvirda uch fermionli sistemaning energiya operatori H_μ to‘g‘ri integralga yoyiladi ([9, 12, 13] ga qarang):

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K) dK.$$

Bizning tadqiqotlarimiz shuni ko‘rsatadiki, Shryodinger operatori $H_\mu(K)$ ning muhim spektri ikkita kesmaning birlashmasidan iborat bo‘ladi. Ularning joylashuv o‘rni va kesmalarining kengligi kvaziimpuls K va μ parametriga bog‘liq bo‘ladi.

Biz panjarada uch fermionli sistema Hamiltoniani H_μ ni chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida aniqlaymiz. Ikki zarrachali $h_\mu(k)$ operatorning yagona xos qiymatining

* **Abdullayev J.I., Ergashova Sh.H.** – Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Universitet xiyoboni Bulvar 15, Samarqand 140104, O‘zbekiston. jabdullaev@mail.ru. sh.ergashova@mail.ru

xossalarini o'rganamiz. Keyinchalik, uch zarrachali Shryodinger operatori $H_\mu(K)$ ning muhim spektrining tuzilishini tasvirlaymiz.

Shryodinger operatori $H_\mu(K)$ ning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlarini topish masalasi Faddeev tipidagi $A_\mu(K, z)$ operatorning qo'zg'almas nuqtalarini topish masalasiga keltiriladi. Faddeev tipidagi operator ikki xil usul bilan qurilgan.

MASALANING QO'YILISHI

Biz quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: \mathbb{Z} bir o'lchamli panjara, $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ esa \mathbb{Z}^3 da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi. $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3) \subset \ell_2(\mathbb{Z}^3)$ fazo esa istalgan ikki koordinatasiga nisbatan antisimmetrik funksiyalardan tashkil topgan qism fazo bo'lsin.

Biz bu ishda bir o'lchamli panjara \mathbb{Z} da qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi uch fermionli sistemaga mos energiya operatori H_μ ni qaraymiz.

Koordinatali tasvirda bir o'lchamli panjara \mathbb{Z} da ikki fermionli sistema kinetik energiyasiga mos \hat{h}_0 operator $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2)$ fazoda o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{h}_0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta.$$

Bu yerda Δ – panjaradagi Laplas operatori, I esa $\ell_2(\mathbb{Z})$ fazodagi birlik operator.

Qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi ikki fermionli sistemaga mos to'la energiya operatori \hat{h}_μ ham $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2)$ fazoda ta'sir qiladi va kinetik energiya operatori \hat{h}_0 ning qo'zg'alishidir, ya'ni

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}_0 - \mu\hat{v}.$$

Bu yerda μ – ikki fermionning ta'sir energiyasi va \hat{v} operator zarrachalarning qo'shni tugunlarda ta'sirlashishini quyidagicha ifodalaydi:

$$(\hat{v}\hat{\psi})(x, y) = \hat{v}(x - y)\hat{\psi}(x, y),$$

bu yerda

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} 1, & |x| = 1, \\ 0, & |x| \neq 1. \end{cases}$$

Shunga o'xshash bir o'lchamli panjara \mathbb{Z} da uch fermionli sistema kinetik energiyasiga mos \hat{H}_0 operator $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3)$ fazoda quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta \otimes I \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes \Delta \otimes I - \frac{1}{2}I \otimes I \otimes \Delta.$$

Qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi uch fermionli sistema to'la energiyasiga mos \hat{H}_μ operator \hat{H}_0 ning qo'zg'alishidir, ya'ni

$$\hat{H}_\mu = \hat{H}_0 - \mu(\hat{V}_{12} + \hat{V}_{23} + \hat{V}_{31}),$$

bu yerda

$$(V_{\alpha\beta}f)(x_1, x_2, x_3) = \vartheta(x_\alpha - x_\beta)f(x_1, x_2, x_3), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

$\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ –bir o‘lchamli tor, $L_2^{as}(\mathbb{T}^3) \subset L_2(\mathbb{T}^3)$ esa \mathbb{T}^3 da aniqlangan istalgan ikkita koordinatasiga nisbatan antisimmetrik bo‘lgan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalardan tashkil topgan fazo bo‘lsin. Impuls tasvirda ikki va uch zarrachali energiya operatorlari mos ravishda $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{as}(\mathbb{T}^3)$ fazolarda aniqlanadi.

Ikki zarrachali sistemaning energiya operatori h_μ va uch zarrachali sistemaning energiya operatori H_μ larining spektrini o‘rganish masalasi mos ravishda $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}$ va $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}$ operatorlar oilalalarining spektrini o‘rganish masalasiga keltiriladi [4, 7, 8].

Ikki zarrachali $h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v$ Shryodinger operatori $L_2^{(k)}(\mathbb{T}) := \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(k - p) = -f(p)\}$ fazoda quyidagi formula bilan ta’sir qiladi:

$$(h_\mu(k)f)(q) = \mathcal{E}_k(q)f(q) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q - t)f(t)dt. \quad (1)$$

Bu yerda

$$\mathcal{E}_k(q) = \varepsilon(q) + \varepsilon(k - q), \quad \varepsilon(q) = 1 - \cos q.$$

Uch zarrachali $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$ Shryodinger operatori

$$L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^2) : f(p, q) = -f(q, p) = -f(K - p - q, q) = -f(p, K - p - q)\}$$

fazoda quyidagi formula bilan ta’sir qiladi:

$$(H_0(K)f)(p, q) = E_K(p, q)f(p, q), \quad E_K(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K - p - q),$$

$$(V_1f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q - t)f(p, t)dt, \quad (2)$$

$$(V_2f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - t)f(t, q)dt, \quad (V_3f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(p - t)f(t, p + q + t)dt.$$

Shuni ta’kidlaymizki, V_1, V_2 va V_3 operatorlar unitar ekvivalent. V_α , $\alpha = 1, 2, 3$ operatorlar proyektordir.

IKKI ZARRACHALI $h_\mu(k)$ OPERATORNING SPEKTRI

Biz (1) tenglik bilan aniqlangan ikki fermionli sistemaga mos $h_\mu(k)$ operatorning spektri bilan qiziqamiz. Kompakt qo‘zg‘alishda muhim spektrning turg‘unligi haqidagi Veyl teoremasiga [13] ko‘ra $h_\mu(k)$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ qo‘zg‘almas $h_0(k)$ operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi, ya’ni

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\mathcal{E}_{min}(k), \mathcal{E}_{max}(k)].$$

Bu yerda

$$\mathcal{E}_{min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2} = 2\varepsilon \left(\frac{k}{2} \right), \quad \mathcal{E}_{max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(q) = 2 + 2 \cos \frac{k}{2} = 4 - 2\varepsilon \left(\frac{k}{2} \right).$$

Bu ifodadan ko'rinadiki, $\mathcal{E}_{min}(\cdot)$ va $\mathcal{E}_{max}(\cdot)$ funksiyalar $k \in (-\pi, \pi]$ ning juft funksiyasi, $\mathcal{E}_{min}(\cdot)$ funksiya $[0, \pi]$ da o'suvchi, $\mathcal{E}_{max}(\cdot)$ esa kamayuvchidir. Bundan

$$\min_{k \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_{min}(k) = \mathcal{E}_{min}(0) = 0, \quad \max_{k \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_{max}(k) = \mathcal{E}_{max}(0) = 4.$$

Har bir $z \in \mathbb{R} \setminus [\mathcal{E}_{min}(k), \mathcal{E}_{max}(k)]$ da $\Delta_\mu(k, z)$ bilan $I - \mu v r_0(k, z)$ operatorga mos Fredholm determinantini belgilaymiz. Bu yerda $r_0(k, z)$ qo'zg'almas $h_0(k)$ operatorning rezolventasi. v operator rangi birga teng proyektor bo'lganligi uchun Fredholm determinanti quyidagicha sodda ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s ds}{\mathcal{E}_k\left(\frac{k}{2} - s\right) - z} = 1 - \frac{2\mu}{2 - z + \sqrt{(2 - z)^2 - 4 \cos^2 \frac{k}{2}}}. \quad (3)$$

3-lemma. $z < \mathcal{E}_{min}(k)$ soni $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_\mu(k, z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

1-teorema. Faraz qilaylik, $k \in \mathbb{T}$ va $\mu > \cos \frac{k}{2}$ bo'lsin. U holda $h_\mu(k)$ operatorning muhim spektrdan chapda yagona

$$z_\mu(k) = 2 - \mu - \frac{1}{\mu} + \frac{\varepsilon(k)}{2\mu} \quad (4)$$

xos qiymati bor.

Agar $\mu > 1$ bo'lsa, xos qiymat barcha $k \in (-\pi, \pi]$ larda mavjud bo'ladi va bu xos qiymat $\mu \in (1, \infty)$ ning funksiyasi sifatida kamayuvchi.

(4) tenglikdan ko'rinadiki, $z_\mu(k)$ xos qiymat $[-\pi, \pi]$ da juft va $[0, \pi]$ da o'suvchi.

UCH ZARRACHALI $H_\mu(K)$ OPERATORNING MUHIM SPEKTRI

Biz qarayotgan uch zarrachali sistemada uchta bir xil (fermion) zarracha bo'lganligi uchun V_1, V_2 va V_3 operatorlar unitar ekvivalent (1-lemmaga qarang). Demak, $H_\mu^{(1)}(K) = H_0(K) - \mu V_1$, $H_\mu^{(2)}(K) = H_0(K) - \mu V_2$ va $H_\mu^{(3)}(K) = H_0(K) - \mu V_3$ operatorlar ham unitar ekvivalent bo'ladi. Shuning uchun biz ulardan birini $H_\mu^{(1)}(K)$ kanal operatorni qaraymiz. $H_\mu^{(1)}(K)$ operatorning impuls fazodagi tasviri o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi va $L_2^{(1)}(\mathbb{T}^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi.

$$H_\mu^{(1)}(K) = H_0(K) - \mu V_1.$$

Kanal operatori $H_\mu^{(1)}(K)$ va $L_2^{(1)}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(p, q) = -f(p, K - p - q)\}$ fazoni quyidagi ko'rinishda to'g'ri integralga yoyish mumkin [13].

$$H_\mu^{(1)}(K) = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu^{(1)}(K, p) dp, \quad L_2^{(1)}(\mathbb{T}^2) = \int_{\mathbb{T}} \oplus L_2^{(K-p)}(\mathbb{T}) dp. \quad (5)$$

(5) ifodada $H_\mu^{(1)}(K)$ operatorni to'g'ri integralga yoyishdan hosil qilingan qatlam operatori $H_\mu^{(1)}(K, p)$ Hilbert fazosi $L_2^{(K-p)}(\mathbb{T})$ da quyidagicha aniqlanadi.

$$H_\mu^{(1)}(K, p) = h_\mu(K - p) + \varepsilon(p)I,$$

bu yerda I – birlik operator, $h_\mu(k)$ esa (1) ko‘rinishda aniqlangan ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatori.

$H_\mu^{(1)}(K, p)$ operatorning spektri barcha $\mu > 1$ va $p \in \mathbb{T}$ larda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sigma(H_\mu^{(1)}(K, p)) = \{z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)\} \cup [\mathcal{E}_{\min}(K - p) + \varepsilon(p), \mathcal{E}_{\max}(K - p) + \varepsilon(p)],$$

bu yerda $z_\mu(k)$ ikki zarrachali $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymati (1 – teorema qarang).

$H_\mu(K)$ operatorning muhim spektri $E_K(p, q)$ va $\lambda_{\mu, K}(p) = z_\mu(K - p) + \varepsilon(p)$ funksiyalarning qiymatlar sohasidan iborat bo‘ladi, ya’ni

$$\sigma_{ess}(H_\mu(K)) = ImE_K \cup Im\lambda_{\mu, K}.$$

Muhim spektrning birinchi qismi ImE_K kesma $H_\mu(K)$ operator muhim spektrining uch zarrachali shoxchasi deyiladi va u μ parametrdan bog‘liq emas, ikkinchi qismi $Im\lambda_{\mu, K}$, esa $H_\mu(K)$ operator muhim spektrining ikki zarrachali shoxchasi deyiladi va u μ parametrning ortishi bilan $-\infty$ ga qarab siljiydi.

Biz bir o‘lchamli holni qarayatganlimiz uchun $z_\mu(k)$ xos qiymat aniq topiladi. Shuning uchun biz muhim spektrning joylashuvini aniq topa olamiz. Masalan, $K = 0$ bo‘lsin. U holda

$$\sigma_{ess}(H_\mu(0)) = \left[2 - \mu - \frac{1}{\mu}, 4 - \mu\right] \cup \left[0, \frac{9}{2}\right].$$

Agar $\mu > 4$ bo‘lsa, ikki va uch zarrachali shoxchalar kesishmaydi, ya’ni

$$\left[2 - \mu - \frac{1}{\mu}, 4 - \mu\right] \cap \left[0, \frac{9}{2}\right] = \emptyset.$$

$H_\mu(K)$ operatorning muhim spektri tasnifini keltirib o‘tdik endi bu operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari bilan qiziqamiz.

FADDEEV TIPIDAGI TENGLAMALAR

Ma’lumki, $H_\mu(K)$ operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlarini topish masalasi o‘z-o‘ziga qo‘shma, kompakt Faddeev tipidagi $T_\mu(K, z)$ operatorning qo‘zg‘almas nuqtalarini topish masalasiga keltiriladi.

Barcha $z < \Lambda_{\min}(\mu, K) = \min\{\lambda_{\min}(\mu, K), E_{\min}(K)\}$, lar uchun

$$L_2^{(2)}(\mathbb{T}) := \left\{(\psi_1, \psi_2) : \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{T})\right\} = L_2(\mathbb{T}) \times L_2(\mathbb{T})$$

fazoda quyidagi Faddeev tipidagi $T_\mu(K, z)$ operatorni aniqlaymiz:

$$T_\mu(K, z) = \begin{pmatrix} T_{11}(K, z) & T_{12}(K, z) \\ T_{21}(K, z) & T_{22}(K, z) \end{pmatrix},$$

bu yerda

$$(T_{11}(K, z)\psi_1)(p) = \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(K - p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(K - p - t)[\cos p - \cos t]\psi_1(t)dt}{(E_K(p, t) - z)\sqrt{\Delta_\mu(K - t, z - \varepsilon(t))}},$$

$$(T_{12}(K, z)\psi_2)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos t \sin(K-p-t) + \sin p \cos(K-p-t)]\psi_2(t)dt}{(E_K(p, t) - z)\sqrt{\Delta_\mu(K-t, z-\varepsilon(t))}},$$

$$(T_{21}(K, z)\psi_1)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos p \sin(K-p-t) + \sin t \cos(K-p-t)]\psi_1(t)dt}{(E_K(p, t) - z)\sqrt{\Delta_\mu(K-t, z-\varepsilon(t))}},$$

$$(T_{22}(K, z)\psi_2)(p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(K-p-t)[\sin p + \sin t]\psi_2(t)dt}{(E_K(p, t) - z)\sqrt{\Delta_\mu(K-t, z-\varepsilon(t))}}.$$

$T_\mu(K, z)$ operatorning aniqlanish sohasi

$$D(T_\mu(K, z)) = \left\{ (\psi_1, \psi_2) : \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos t \psi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(K-t, z-\varepsilon(t))}} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin t \psi_2(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(K-t, z-\varepsilon(t))}} = 0 \right\}.$$

Endi quyidagi lemmani isbotlaymiz.

4-lemma. V_1, V_2, V_3 operatorlarni quyidagi ko‘rinishlarda ham tasvirlash mumkin:

$$(V_1 f)(p, q) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(K-p-q-t)f(p, t)dt, \quad (6)$$

$$(V_2 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(K-p-q-t)f(q, t)dt \quad (7)$$

$$(V_3 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-t)f(K-p-q, t)dt \quad (8)$$

Isbot. Biz bu lemmaning isbotini faqat V_1 operator uchun keltiramiz. V_2 va V_3 operatorlar uchun ham xuddi shunday isbotlanadi. $f(p, q) = -f(p, K-p-q)$ tenglikdan foydalansak, V_1 operatorni quyidagicha yozish mumkin:

$$(V_1 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-t)f(p, t)dt = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-t)f(p, K-p-t)dt.$$

Endi integralda $K-p-t = s$ almashtirish bajarsak, (6) tenglikka ega bo‘lamiz. \square

1-eslatma. Agar

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos s f(p, s)ds \quad \text{va} \quad \varphi_2(p) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin s f(p, s)ds \quad (9)$$

deb belgilasak, u holda (2) va (6) tengliklarga asosan bu funksiyalar orasida quyidagi bog‘lanish mavjud:

$$\varphi_1(p) = -\frac{\sin \frac{K-p}{2}}{\cos \frac{K-p}{2}} \varphi_2(p). \quad (10)$$

2-teorema. $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ soni $H_\mu(K)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun 1 soni $T_\mu(K, z)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ soni $H_\mu(K)$ operatorning xos qiymati va $f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ unga mos xos funksiya bo‘lsin. U holda quyidagi tenglik o‘rinli:

$$H_0(K)f - \mu(V_1 + V_2 + V_3)f = zf. \quad (11)$$

(2), (7), (8) tengliklardan foydalanib (11) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} E_K(p, q)f(p, q) - \mu \left[\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-t)f(p, t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(K-p-q-t)f(q, t)dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos(q-t)f(K-p-q, t)dt \right] = zf(p, q). \end{aligned}$$

U holda f funksiyaning antisimmetriklik xossasidan va (9) belgilashdan

$$\int_{\mathbb{T}} \cos p \varphi_1(p) dp = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \cos p \cos t f(p, t) dp dt = 0, \quad \int_{\mathbb{T}} \sin p \varphi_2(p) dp = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \sin p \sin t f(p, t) dt = 0 \quad (12)$$

tengliklar kelib chiqadi. Bu belgilashlar yordamida (11) dan $f \in L_2^{as}(\mathbb{T})$ uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} f(p, q) = \frac{\mu}{E_K(p, q) - z} \left[\cos q \varphi_1(p) + \sin q \varphi_2(p) + \cos(K-p-q) \varphi_1(q) + \sin(K-p-q) \varphi_2(q) + \right. \\ \left. + \cos q \varphi_1(K-p-q) + \sin q \varphi_2(K-p-q) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

(13) ifodani (9) belgilashlarga olib borib qo‘ysak, hosil bo‘lgan

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 t dt}{E_K(p, (K-t)/2) - z} \right) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(K-p-t)(\cos p + \cos t)\varphi_1(t) dt}{E_K(p, t) - z} + \\ + \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos t \sin(K-p-t) + \sin p \cos(K-p-t)]\varphi_2(t) dt}{E_K(p, t) - z}, \\ \varphi_2(p) \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 t dt}{E_K(p, (K-t)/2) - z} \right) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos p \sin(K-p-t) + \sin t \cos(K-p-t)]\varphi_1(t) dt}{E_K(p, t) - z} + \\ + \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(K-p-t)(\sin p + \sin t)\varphi_2(t) dt}{E_K(p, t) - z} \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasi nolmas $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2^{(2)}(\mathbb{T})$ yechimga ega. (3) tenglikdan foydalanib yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &= \frac{\mu}{\pi \Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(K-p-t)(\cos p + \cos t)\varphi_1 t dt}{E_K(p, t) - z} + \\ &+ \frac{\mu}{\pi \Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos t \sin(K-p-t) + \sin p \cos(K-p-t)]\varphi_2(t) dt}{E_K(p, t) - z}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(p) &= \frac{\mu}{\pi \Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\cos p \sin(K-p-t) + \sin t \cos(K-p-t)]\varphi_1(t) dt}{E_K(p, t) - z} + \\ &+ \frac{\mu}{\pi \Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(K-p-t)(\sin p + \sin t)\varphi_2(t) dt}{E_K(p, t) - z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Quyidagi

$$\psi_1(p) = \sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \varphi_1(p), \quad \psi_2(p) = \sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \varphi_2(p) \quad (16)$$

belgilashlarni kiritib, (12) dan ψ_1 va ψ_2 lar uchun quyidagi shartni olamiz:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos p \psi_1(p) dp}{\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} = 0, \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin p \psi_2(p) dp}{\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} = 0.$$

ψ_1 va ψ_2 lar tilida (14) va (15) tengliklarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\psi_1(p) = (T_{11}(K, z)\psi_1)(p) + (T_{12}(K, z)\psi_2)(p),$$

$$\psi_2(p) = (T_{21}(K, z)\psi_1)(p) + (T_{22}(K, z)\psi_2)(p),$$

ya'ni $\lambda = 1$ soni $T_\mu(K, z)$ uchun xos qiymat bo'ladi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, biror $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ uchun 1 soni $T_\mu(K, z)$ operatorining xos qiymati va unga mos xos funksiya $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ bo'lsin, ya'ni,

$$\psi = T_\mu(K, z)\psi, \quad \psi \in D(T_\mu(K, z))$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda (13) tenglik bilan aniqlanuvchi f funksiya $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ fazoda yotadi hamda (11) tenglikni qanoatlantiradi. Qaysikim φ_1 va φ_2 funksiyalar (16) tenglikdan aniqlanadi. \square

Agar P bilan $L_2^{(2)}(\mathbb{T})$ fazoni $D(T_\mu(K, z))$ qism fazoga proyeksiyalash operatorini belgilasak, u holda $T_\mu^D(K, z) := PT_\mu(K, z)P$ operatorni $L_2^{(2)}(\mathbb{T})$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi operator sifatida qarash mumkin.

1-tasdiq. Agar biror $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ uchun $T_\mu^D(K, z)\psi = \psi$ tenglama noldan farqli yechimga ega bo'lsa, u holda $H_\mu(K)f = zf$ tenglama ham nolmas yechimga ega va aksincha.

$H_\mu(K)$ operatorga mos Faddeev tipidagi tenglamani yana boshqa usul bilan ham olish mumkin. Shu maqsadda quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

5-lemma. V_1, V_2 va V_3 operatorlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$(V_1 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{K-p}{2} - q\right) \sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) f(p, s) ds, \quad (17)$$

$$(V_2 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{K-q}{2} - p\right) \sin\left(\frac{K-q}{2} - s\right) f(s, q) ds, \quad (18)$$

$$(V_3 f)(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2} - s\right) f(s, K-p-q) ds. \quad (19)$$

$L_2(\mathbb{T})$ fazoda quyidagi integral operatorni aniqlaymiz:

$$(A_\mu(K, z)\psi)(p) = \frac{-2\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) \sin\left(\frac{K-s}{2} - p\right) \psi(s) ds}{(E_K(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(K-s, z-\varepsilon(s))}}.$$

3-teorema. $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ soni $H_\mu(K)$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun 1 soni $A_\mu(K, z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ soni $H_\mu(K)$ operatorning xos qiymati va $f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ unga mos xos funksiya bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$H_0(K)f - \mu(V_1 + V_2 + V_3)f = zf. \quad (20)$$

(17), (18), (19) tengliklardan foydalanib (20) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$E_K(p, q)f(p, q) - \frac{\mu}{\pi} \sin\left(\frac{K-p}{2} - q\right) \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) f(p, s) ds - \frac{\mu}{\pi} \sin\left(\frac{K-q}{2} - p\right) \times \\ \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{K-q}{2} - s\right) f(s, q) ds - \frac{\mu}{\pi} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{p+q}{2} - s\right) f(s, K-p-q) ds = zf(p, q).$$

Quyidagi

$$\varphi(p) = \int_{\mathbb{T}} \sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) f(p, s) ds \quad (21)$$

belgilashni kiritib, (20) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(p, q) = \frac{\mu}{\pi} \frac{\left[\varphi(p) \sin\left(\frac{K-p}{2} - q\right) - \varphi(q) \sin\left(\frac{K-q}{2} - p\right) - \varphi(K-p-q) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \right]}{E_K(p, q) - z}. \quad (22)$$

(22) ifodani (21) belgilashga olib borib qo'ysak, hosil bo'lgan

$$\varphi(p) \left(1 - \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s ds}{E_K(p, (K-s)/2) - z} \right) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2} - s\right) \sin\left(\frac{K-s}{2} - p\right) \varphi(s) ds}{E_K(p, s) - z}$$

tenglama nolmas $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$ yechimga ega bo'ladi. (3) belgilashdan foydalanib yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi(p) = \frac{-2\mu}{\pi\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2}-s\right)\sin\left(\frac{K-s}{2}-p\right)\varphi(s)ds}{E_K(p, s)-z}. \quad (23)$$

(23) tenglik $\psi(p) = \sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}\varphi(p)$ tilida quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\psi(p) = \frac{-2\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(\frac{K-p}{2}-s\right)\sin\left(\frac{K-s}{2}-p\right)\psi(s)ds}{E_K(p, s)-z},$$

ya'ni $\lambda = 1$ soni $A_\mu(K, z)$ operator uchun xos qiymat bo'ladi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $z < \Lambda_{\min}(\mu, K)$ uchun 1 soni $A_\mu(K, z)$ operatorning xos qiymati va $\psi \in L_2(\mathbb{T})$ unga mos xos funksiya bo'lsin. U holda (22) tenglik bilan aniqlanuvchi f funksiya $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$ fazoda yotadi hamda (20) tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda $\varphi(p) = \psi(p)/\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}$ \square

INVARIANT QISM FAZOLAR

Sistema to'la kvaziimpulsi $K = 0$ bo'lganda (10) tenglikdan quyidagi munosabatni olamiz:

$$\varphi_1(p) = \frac{\sin\frac{p}{2}}{\cos\frac{p}{2}}\varphi_2(p) \quad \text{yoki} \quad \varphi_1(p) = \operatorname{tg}\frac{p}{2} \cdot \varphi_2(p).$$

Bu munosabatdan φ_2 funksiya juft bo'lsa, φ_1 funksiyaning toq funksiya ekanligi kelib chiqadi. Agar φ_2 toq bo'lsa φ_1 juft bo'ladi. Shunga ko'ra $D(T_\mu(K, z))$ fazoni quyidagi qism fazolarning to'g'ri yig'indisi shaklida yozish mumkin:

$$L_2^{(2)oe}(\mathbb{T}) = L_2^o(\mathbb{T}) \times L_2^e(\mathbb{T}) := \{(\psi_1, \psi_2) : \psi_1 \in L_2^o(\mathbb{T}), \psi_2 \in L_2^e(\mathbb{T})\},$$

$$L_2^{(2)eo}(\mathbb{T}) = L_2^e(\mathbb{T}) \times L_2^o(\mathbb{T}) := \{(\psi_1, \psi_2) : \psi_1 \in L_2^e(\mathbb{T}), \psi_2 \in L_2^o(\mathbb{T})\}.$$

6-lemma. $L_2^{(2)oe}(\mathbb{T})$, $L_2^{(2)eo}(\mathbb{T})$ qism fazolar $T_\mu^D(0, z)$ operatorga nisbatan invariantdir.

Isbot. $\Delta_\mu(p, z-\varepsilon(p))$ va $\varepsilon(p)$ funksiyaning aniqlanishidan kelib chiqadiki,

$$\Delta_\mu(-p, z-\varepsilon(-p)) = \Delta_\mu(p, z-\varepsilon(p)).$$

Agar $\psi_1 \in L_2^e(\mathbb{T})$ va $\psi_2 \in L_2^o(\mathbb{T})$ bo'lsa, $t = -s$ almashtirish olib, $E_0(-p, -s) = E_0(p, s)$ ekanligidan quyidagi munosabatni olamiz:

$$g_1(-p) = \frac{\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(-p, z-\varepsilon(-p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(-p-s)[\cos(-p)+\cos(-s)]\psi_1(-s)ds}{(E_0(-p, -s)-z)\sqrt{\Delta_\mu(-s, z-\varepsilon(-s))}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(-p, z - \varepsilon(-p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\sin(-p) \cos(-p - s) - \cos(-s) \sin(-p - s)] \psi_2(-s) ds}{(E_0(-p, -s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(-s, z - \varepsilon(-s))}} = \\
& = \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos(p + s) [\cos p + \cos s] \psi_1(s) ds}{(E_0(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(s, z - \varepsilon(s))}} + \\
& + \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(p, z - \varepsilon(-p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\sin p \cos(p + s) - \cos s \sin(p + s)] \psi_2(s) ds}{(E_0(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(s, z - \varepsilon(s))}} = g_1(p), \\
g_2(-p) & = \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(-p, z - \varepsilon(-p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\sin(-s) \cos(-p - s) - \cos(-p) \sin(-p - s)] \psi_1(-s) ds}{(E_0(-p, -s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(-s, z - \varepsilon(-s))}} - \\
& - \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(-p, z - \varepsilon(-p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(-p - s) [\sin(-p) + \sin(-s)] \psi_2(-s) ds}{(E_0(-p, -s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(-s, z - \varepsilon(-s))}} = \\
& = - \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[\sin s \cos(p + s) - \cos p \sin(p + s)] \psi_1(s) ds}{(E_0(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(s, z - \varepsilon(s))}} + \\
& + \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(p + s) [\sin p + \sin s] \psi_2(s) ds}{(E_0(p, s) - z) \sqrt{\Delta_\mu(s, z - \varepsilon(s))}} = -g_2(p).
\end{aligned}$$

Demak, $L_2^{(2)eo}(\mathbb{T})$ qism fazo $T_\mu^D(0, z)$ operatorga nisbatan invariant ekan. $T_\mu^D(K, z)$ operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lgani uchun $L_2^{(2)eo}(\mathbb{T})$ qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchi $L_2^{(2)oe}(\mathbb{T})$ qism fazo ham operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.

Shunga o‘xshash tasdiqni $A_\mu(0, z)$ operator uchun ham keltirish mumkin.

7-lemma. $L_2^o(\mathbb{T})$ va $L_2^e(\mathbb{T})$ qism fazolar $A_\mu(0, z)$ operatorga nisbatan invariantdir.

Isbot. Ma’lumki, o‘z-o‘ziga qo‘shma B integral operatorning yadrosi $K(-p, -q) = K(p, q)$ shartni qanoatlantirsa, $L_2^o(\mathbb{T})$ va $L_2^e(\mathbb{T})$ qism fazolar B operatorga nisbatan invariant bo‘lar edi. $A(-p, -q; z) = A(p, q; z)$ tenglikning bajarilishini tekshiramiz.

$$\begin{aligned}
A(-p, -q; z) & = - \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(-p, z - \varepsilon(-p))}} \frac{\sin\left(\frac{-p}{2} - q\right) \sin\left(\frac{-q}{2} - p\right)}{(E_0(-p, -q) - z) \sqrt{\Delta_\mu(-q, z - \varepsilon(-q))}} = \\
& = - \frac{\mu}{\pi \sqrt{\Delta_\mu(p, z - \varepsilon(p))}} \frac{\sin\left(\frac{p}{2} + q\right) \sin\left(\frac{q}{2} + p\right)}{(E_0(p, q) - z) \sqrt{\Delta_\mu(q, z - \varepsilon(q))}} = A(p, q; z)
\end{aligned}$$

Demak, $L_2^o(\mathbb{T})$ va $L_2^e(\mathbb{T})$ qism fazolar $A_\mu(0, z)$ operatorga nisbatan invariant ekan.

ADABIYOTLAR

1. J. I. Abdullaev, “Bound states of a system of two fermions on a one dimensional lattice,” Theor. and Math. Phys. **147** (1), 486-495 (2006).

2. S. Kh. Abdukhakimov, S. N. Lakaev, “On the existence of bound states of a system of two fermions on the two-dimensional cubic lattice,” Lobachevskii Journal of Mathematics **44** (4), 1241-1250 (2023).
3. J. I. Abdullaev, K. D. Kuliev, B. U. Mamirov, “Infinity of bound states of a system of two fermions on a two dimensional lattice,” Uzbek mathematical journal **4**, 3-16 (2016).
4. J. I. Abdullaev., A. M. Toshturdiyev, “Invariant Subspaces of the Schrödinger Operator with a Finite Support Potential,” Lobachevskii Journal of Mathematics **43** (3), 1481-1490 (2022).
5. A. M. Khalkhuzhaev, “The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice,” Russian mathematics **61** (9), 67-78 (2017).
6. D.K.Gridnev, “Proof of the Super Efimov Effect,” J.Phys. A: Mathematical and Theoretical **47**(50), 76-88 (2014).
7. S.Alberio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov, “Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics,” Ann. Henri Poincar’e **5** (4), 743-772 (2004).
8. J.I.Abdullaev, J.Kh.Boymurodov, A.M.Khalkhuzhaev, “The number of eigenvalues of the three-particle Schrödinger operator on three dimensional lattice,” Lobachevskii Journal of Mathematics **43** (12), 3486-3495 (2022).
9. S.N.Lakaev, M.E.Muminov, “Essential and discrete spectra of the three-particle Schrödinger operator on a lattice,” Theor. and Math. Phys.**135** (3), 849-871 (2003).
10. A.V.Sobolev, “The Efimov efect. Discrete spectrum Asymptotics,” Common. Math. Phys.**156** (1), 101-126 (1993).
11. R.A.Minlos, “A system of three quantum particles with point-like interactions,” Russian Math. Surveys **69** (3), 539-564 (2014).
12. S.N.Lakaev, A.M.Khalkhuzhaev, “Spectrum of the two-particle Schrödinger operator on a lattice,” Theor. and Math. Phys.**155** (2), 754-765 (2008).
13. M.Reed, B.Simon, Methods of Modern Mathematical Physics VI: Analysis of Operators (Academic Press, New York-London, 1979).

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются пространства инвариантных частей, дискретный и непрерывный спектр оператора Шредингера $H_\mu(K)$ соответствующего системе трех частиц (двух фермионов с массой 1 и одной другой частицы с массой $m = 1/\gamma$). Доказано, что оператор $H_\mu(0)$ имеет единственное простое собственное значение, лежащее слева от существенного спектра при достаточно больших $\mu > 0$.

Ключевые слова: Оператор Шредингера на решетке, фермион, собственное

значение, собственная функция, квазиимпульс, связанное состояние, инвариантное подпространство, оператор Фаддеева

RESUME

In this paper, we consider the Schrödinger operator $H_\mu(K)$, corresponding to a three-fermion system on a one-dimensional lattice. It is assumed that particles interact with each other only when they are in neighboring nodes. For all $k \in \mathbb{T}$ and μ , the Faddeev type operator corresponding to the operator $H_\mu(K)$ is constructed in two ways.

Key words: Schrödinger operator, lattice, fermion, eigenvalue, eigenfunction, quasimomentum, bound state, invariant subspace, Faddeev type operator.

UDC 517.9

APPROXIMATIONS FOR RAUZY-VEECH RENORMALIZATIONS OF THE
GENERALIZED INTERVAL EXCHANGE MAPS

Akhadkulov H. A. *

RESUME

Let f be a generalized interval exchange map with bounded combinatorics. Suppose f' satisfies a certain Zygmund condition depending on parameter $\gamma \in (0, 1]$ on each of its continuity intervals. We prove that the Rauzy-Veech renormalisations of f are approximated by Möbius transformations in C^1 -topology. The findings presented in this paper build upon and expand the results previously demonstrated in [1] and [10].

Keywords: generalized interval exchange map, renormalization, Möbius transformations, convergence, Zygmund functions.

1. INTRODUCTION

A standard interval exchange map (i.e.m, in short), denoted as f , defined on a finite-length interval I , is a one-to-one map which is locally a translation except at a finite number of discontinuities. Thus f is orientation-preserving and preserving the Lebesgue measure. By requiring only that f be a locally orientation-preserving homeomorphism, we arrive at the definition of a generalized interval exchange map (g.i.e.m, in short). G.i.e.m's are a natural extension of circle homeomorphisms with the breaks, where f has discontinuities in its first derivative at a finite number of points. Khanin and Vul [3] proved that the circle diffeomorphisms with a single break, the renormalization operator converges to a two-dimensional space of fractional linear transformations in C^2 -topology. In what follows, we underscore the significance of Khanin and Vul's [3] findings within the realms of the renormalization conjecture and rigidity theory. The renormalization conjecture posits the convergence of renormalizations for two break-equivalent circle diffeomorphisms (defined in [4]), while rigidity refers to the occurrence of a smooth conjugacy between maps initially only topologically equivalent. Investigations of these Möbius transformations in [5, 6, 7], and [8] have revealed that the renormalization operator exhibits robust hyperbolic properties within a particular domain of this space. These properties bear a striking resemblance to those anticipated by Lanford [9] in the context of critical rotations. As previously noted, g.i.e.m's represent natural extensions of circle homeomorphisms with singularities of the break type. However, unlike circle diffeomorphisms with a single break point, numerous unresolved problems persist in this scenario. In this paper, we aim to explore g.i.e.m's within the framework of lower smoothness conditions. We will investigate these maps under the constraint imposed by the Zygmund condition depending on a parameter $\gamma \in (0, 1]$, as detailed in Section 2.2. Note that the class of such diffeomorphisms is wider than the class of $C^{2+\nu}$ diffeomorphisms. Our main result is Theorem 1, where we show that, the Rauzy-Veech renormalizations of the g.i.e.m's from our considered class approximate Möbius transformations

*Akhadkulov H. A. – School of Quantitative Sciences, University Utara Malaysia, CAS 06010, UUM Sintok, Kedah Darul Aman, Malaysia.

–National University of Uzbekistan, University Street 4, 100174 Tashkent, Uzbekistan. akhadkulov@gmail.com

with the rate of $\mathcal{O}(n^{-\gamma})$ in C^1 -topology. This finding expands upon the principal outcomes presented in [1] and [10].

2. GENERALIZED INTERVAL EXCHANGE MAPS

Let I be an open bounded interval. A generalised interval exchange map (g.i.e.m) f on I is defined by the following data. Let A be an alphabet with $d \geq 2$ symbols. Consider a partition (*mod* 0) of I into d open subintervals indexed by $I = \cup I_\alpha$. The map f is defined on $\cup I_\alpha$ and its restriction to each I_α is an orientation preserving homeomorphism onto the $f(I_\alpha)$. Let $r > 1$ be an integer. The g.i.e.m f is of class C^r if the restriction of f to each I_α extends to a C^r -diffeomorphism from the closure of I_α onto of closure of $f(I_\alpha)$. The points $u_1 < \dots < u_{d-1}$ separating the I_α are called the singularities (break points) of f .

2.1 RAUZY-VEECH INDUCTION

A pair $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ of bijections $\pi_\varepsilon : A \rightarrow \{1, \dots, d\}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ describing the ordering of the subintervals I_α before and after the map is iterated. For each $\varepsilon \in \{0, 1\}$, define $\alpha(\varepsilon) = \pi_\varepsilon^{-1}(d)$. If $|I_{\alpha(0)}| \neq |f(I_{\alpha(1)})|$ we say that f is Rauzy-Veech renormalisable (or simply renormalisable). If $|I_{\alpha(0)}| > |f(I_{\alpha(1)})|$ we say that the letter $\alpha(0)$ is the winner and the letter $\alpha(1)$ is the loser, we say that f is type 0 renormalisable and we can define a map $R(f)$ as the first return map of f to the interval $I^1 = I \setminus f(I_{\alpha(1)})$. Otherwise $|I_{\alpha(0)}| < |f(I_{\alpha(1)})|$, the letter $\alpha(1)$ is the winner and the letter $\alpha(0)$ is the loser, we say that f is type 1 renormalisable and we can define a map $R(f)$ as the first return map of f to the interval $I^1 = I \setminus f(I_{\alpha(0)})$. We want to see $R(f)$ as a g.i.e.m To this end we need to associate to this map an A -indexed partition of its domain. We do this in the following way. The subintervals of the A -indexed partition P^1 of I^1 are denoted by I_α^1 . If f has type 0, then $I_\alpha^1 = I_\alpha$ when $\alpha \neq \alpha(0)$ and $I_{\alpha(0)}^1 = I_{\alpha(0)} \setminus f(I_{\alpha(1)})$. If f has type 1, $I_\alpha^1 = I_\alpha$ when $\alpha \neq \alpha(1)$, $\alpha(0)$ and $I_{\alpha(1)}^1 = f^{-1}(f(I_{\alpha(1)}) \setminus I_{\alpha(0)})$, $I_{\alpha(0)}^1 = I_{\alpha(1)} \setminus I_{\alpha(1)}^1$. It is easy to see that both cases (type 0 and 1) we have

$$R(f)(x) = \begin{cases} f^2(x), & \text{if } x \in I_{\alpha(1-\varepsilon)}^1, \\ f(x), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

And $(R(f), A, P^1)$ is a g.i.e.m, called the Rauzy-Veech renormalisation (or simply renormalisation) of f . A g.i.e.m is infinitely renormalisable if $R^n(f)$ is well defined, for every $n \in \mathbb{N}$. For every interval of the form $J = [a, b)$ we denote $\partial J = \{a\}$.

Definition 1. We say that a g.i.e.m f has no connection if $f^m(\partial I_\alpha) \neq \partial I_\beta$ for all $m \geq 1$, $\alpha, \beta \in A$ with $\pi_0(\beta) \neq 1$.

Let ε_n be the type of the n -th renormalisation, $\alpha_n(\varepsilon_n)$ be the winner and $\alpha_n(1 - \varepsilon_n)$ be the loser of the n -th renormalisation.

Definition 2. It is said to be that infinitely renormalisable g.i.e.m f has k -bounded combinatorics if for each n and $\beta, \gamma \in A$ there exist $n_1, p \geq 0$ with $|n - n_1| < k$ and $|n - n_1 - p| < k$ such that $\alpha_{n_1}(\varepsilon_{n_1}) = \beta$, $\alpha_{n_1+p}(1 - \varepsilon_{n_1+p}) = \gamma$ and $\alpha_{n_1+i}(1 - \varepsilon_{n_1+p}) = \alpha_{n_1+i+1}(\varepsilon_{n_1+i})$ for every $0 \leq i < p$.

Definition 3. We say that a g.i.e.m $f : I \rightarrow I$ has genus one if f has at most two discontinuities. Note that every g.i.e.m with either two or three intervals has genus one.

2.2 ZYGMUND CLASS

To formulate our results we have to define a new class. For this we consider the function

$Z^\gamma : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ such that $Z^\gamma(0) = 0$ and

$$Z^\gamma(x) = \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\gamma} \quad x \in (0, 1) \text{ and } \gamma > 0.$$

Let $T = [a, b]$ be a finite interval and consider a continuous function $K : T \rightarrow \mathbb{R}$. Denote by $\Delta^2 K(x, \tau)$ the second symmetric difference of f on J , i.e.,

$$\Delta^2 K(x, \tau) = K(x + \tau) + K(x - \tau) - 2K(x),$$

where $x \in T$, $\tau \in \left[0, \frac{|T|}{2}\right]$ and $x + \tau, x - \tau \in T$. Now we are ready to define a new class.

Definition 4. Let $\mathbb{D}_k^{1+Z^\gamma}$, $k \in \mathbb{N}$ and $\gamma > 0$, be the set of g.i.e.m $f : I \rightarrow I$ such that

(i) For each $\alpha \in A$ we can extend f to \bar{I}_α as an orientation preserving diffeomorphism;

(ii) On each \bar{I}_α , f' has bounded variation and satisfies:

$$\|\Delta^2 f'(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\bar{I}_\alpha)} \leq C\tau Z^\gamma(\tau);$$

(iii) The g.i.e.m f has k -bounded combinatorics;

(iv) The map f has genus one and has no connection.

Note that the class of real functions satisfying (ii) inequality is wider than $C^{2+\alpha}$, for any $\gamma > 0$. We remind that the class of real functions satisfying (ii) with $Z^\gamma(\tau) = 1$ is called the *Zygmund class*. Generally speaking, the function satisfying (ii) does not imply the absolute continuity of f' on \bar{I}_α .

3. MAIN RESULT

We need the following notions. Let H be a non-degenerate interval, let $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ be a diffeomorphism and let $J \subset H$ be an interval. We define the Zoom of g in H , denoted by $\Xi_H(g)$ the transformation $\Xi_H(g) = A_1 \circ g \circ A_2$ where A_1 and A_2 are orientation-preserving affine maps, which sends $g(H)$ into $[0, 1]$ and $[0, 1]$ into H respectively. The precise definitions of A_1 and A_2 will be given later in Section 7. Let M_N be a Mobius transformation $M_N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $M_N(0) = 0$, $M_N(1) = 1$ and

$$M_N(x) = \frac{xN}{1 + x(N - 1)}.$$

Denote by $q_n^\alpha \in \mathbb{N}$ the first return time of the interval I_α^n to the interval I^n , i.e., $R^n(f)|_{I_\alpha^n} = f^{q_n^\alpha}|_{I_\alpha^n}$ where $q_n^\alpha \in \mathbb{N}$ is the first return time. Now we define a new quantity as follows:

$$\hat{m}_n^\alpha = \exp \left(- \sum_{i=0}^{q_n^\alpha - 1} \frac{f'(d_\alpha^{n,i}) - f'(c_\alpha^{n,i})}{2f'(d_\alpha^{n,i})} \right)$$

where $c_\alpha^{n,i}$ and $d_\alpha^{n,i}$ are the left and right endpoints of $f^i(\bar{I}_\alpha^n)$, respectively. Now we are ready to formulate our main results.

Theorem 1. Let $f \in \mathbb{D}_k^{1+Z^\gamma}$, $\gamma \in (0, 1]$. Then there exists a constant $C = C(f) > 0$ such that

$$\|\Xi_{I_\alpha^n}(R^n(f)) - M_{\hat{m}_n^\alpha}\|_{C^1([0,1])} \leq \frac{C}{n^\gamma}$$

for all $\alpha \in A$.

We need the following definition.

Definition 5. Let $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^2 -diffeomorphism. The operator $Ng : H \rightarrow \mathbb{R}$ defined as

$$Ng(x) = \frac{g''(x)}{g'(x)}, \quad x \in H$$

is called the non-linearity of g .

4. MODULUS OF CONTINUITY OF ZYGMUND FUNCTIONS

Let $T = [a, b]$ be a finite interval and consider a continuous function $K : T \rightarrow \mathbb{R}$. The following theorem will be used below.

Theorem 2.([1]) Assume that the function $K : T \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\|\Delta^2 K(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(T)} \leq C\tau Z^\gamma(\tau)$$

for some $\gamma \in (0, 1]$. Then

$$\omega(\delta, K) = O\left(\delta |\log \delta|^{1-\delta}\right)$$

if $\gamma \in (0, 1)$ and

$$\omega(\delta, K) = O\left(\delta |\log \log \delta|\right)$$

if $\gamma = 1$ where $\omega(\cdot, K)$ is the modulus of continuity of the function K .

4.1. THE DISTORTION OF INTERVAL AND RELATIVE COORDINATES

In this paragraph we introduce the distortion of interval $T = [a, b]$ with respect to continuous and monotone function $K : T \rightarrow \mathbb{R}$. We obtain some estimates for the distortion of interval. The *distortion* of the interval I with respect to K is

$$D(T; K) = \frac{|K(T)|}{|T|}.$$

The distortion is multiplicative with respect to composition. Henceforth, take any $x \in [a, b]$ and consider the distortions

$$D_a(x) := D([a, x]; K) \quad \text{and} \quad D_b(x) := D([x, b]; K). \quad (1)$$

Below we study the distortions $D_a(x)$ and $D_b(x)$ as the functions of $x \in [a, b]$. Consider the following function $\Omega : (0, 1) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Omega(\delta, \gamma) = \begin{cases} \delta(\log \frac{1}{\delta})^{1-\gamma} & \text{if } (\delta, \gamma) \in (0, 1) \times (0, 1); \\ \delta(\log \log \frac{1}{\delta}) & \text{if } (\delta, \gamma) \in (0, 1) \times \{1\}. \end{cases}$$

The following lemmas will be used in the proof of main theorems.

Lemma 1. Let $K \in \mathbb{D}^{1+\mathcal{Z}^\gamma}(I)$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. We have

$$\frac{D_a(x)}{D_b(x)} - 1 = \frac{K'(a) - K'(b)}{2K'(b)} + \mathcal{O}\left(|I| \cdot \mathcal{Z}^\gamma(|I|) + |K'(a) - K'(b)| \cdot \Omega(|I|, \gamma)\right).$$

For the proof of the lemma see [1]. For $x \in [a, b]$, we define its relative coordinate as follows: $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$. The relative coordinate of x plays an important role in the proof of main theorems.

Lemma 2. Let $K \in \mathbb{D}^{1+\mathcal{Z}^\gamma}(I)$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. We have

$$(x-a)(b-x) \left(\frac{D'_b(x) - D'_a(x)}{b-a} \right) = \frac{1}{2} \left((1-z)K'(a) + zK'(b) - K'(x) \right) + \mathcal{O}\left(|I| \cdot \mathcal{Z}^\gamma(|I|)\right). \quad (2)$$

Proof. By differentiating D_a and D_b we obtain

$$D'_a(x) = \frac{K'(x) - D_a(x)}{x-a} \quad \text{and} \quad D'_b(x) = \frac{D_b(x) - K'(x)}{b-x}.$$

One can easily see that

$$D'_a(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{K'(x) - K'(a)}{x-a} + \frac{1}{z} \mathcal{O}\left(\mathcal{Z}^\gamma(|I|)\right), \quad D'_b(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{K'(b) - K'(x)}{b-x} + \frac{1}{1-z} \mathcal{O}\left(\mathcal{Z}^\gamma(|I|)\right).$$

It implies that

$$(x-a)(b-x) \left(\frac{D'_b(x) - D'_a(x)}{b-a} \right) = \frac{1}{2} \left((1-z)K'(a) + zK'(b) - K'(x) \right) + \mathcal{O}\left(|I| \cdot \mathcal{Z}^\gamma(|I|)\right).$$

Lemma 2 is proven.

Our next goal is to estimate the expression on the right-hand side of equation (2). For this we define the following function $T_\gamma : [0, 1/2] \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$T_\gamma(s, t) = s \int_s^1 \frac{\mathcal{Z}^\gamma(xt) dx}{x} + \int_0^s \mathcal{Z}^\gamma(xt) dx \quad \text{if } s \in (0, 1/2]$$

and $T_\gamma(0, t) = 0$, for any $t \in (0, 1)$.

Lemma 3. Let $K \in \mathbb{D}^{1+\mathcal{Z}^\gamma}(I)$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. There exists a constant $C > 0$ such that

$$|(1-z)K'(a) + zK'(b) - K'(x)| \leq C \begin{cases} |I| \cdot T_\gamma(z, |I|) & \text{if } z \in [0, \frac{1}{2}]; \\ |I| \cdot T_\gamma(1-z, |I|) & \text{if } z \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Proof. The proof of this lemma closely follows that presented in [1]. The only difference lies in the definition of the relative coordinate, which is given as $1-z$ in the referenced work. Thus, by substituting z with $1-z$ we obtain the proof of this lemma.

It is easy to see that the function $T_\gamma(z, |I|)$ is an increasing function of z on $[0, \frac{1}{2}]$. Hence the function $T_\gamma(1-z, |I|)$ is a decreasing function of z on $[\frac{1}{2}, 1]$. Therefore $T_\gamma(z, |I|) \leq T_\gamma(\frac{1}{2}, |I|)$

for all $z \in [0, \frac{1}{2}]$ and $T_\gamma(1 - z, |I|) \leq T_\gamma(\frac{1}{2}, |I|)$ for all $z \in [\frac{1}{2}, 1]$. Moreover, if the length of the interval I is sufficiently small then it can be easily shown that

$$T_\gamma(\frac{1}{2}, |I|) = \mathcal{O}\left(Z^\gamma(|I|)\right).$$

Thus, Lemmas [1] and [2] imply the following.

Corollary. *Let $K \in \mathbb{D}^{1+Z^\gamma}(I)$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. If the length of interval I is sufficiently small then we have*

$$(x - a)(b - x) \left| \frac{D'_b(x) - D'_a(x)}{b - a} \right| = \mathcal{O}\left(|I|Z^\gamma(|I|)\right).$$

Next, consider the sub-case $\gamma \in (1, +\infty)$. We need the following function

$$\mathcal{S}_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z^\gamma(x2^{-n})$$

where $x \in (0, 1)$ and $\gamma > 1$. As we have mentioned above, in this case, the function K' is differentiable, therefore D'_a and D'_b are differentiable as well. Hence, we have

Lemma 4. *Let $K \in \mathbb{D}^{1+Z^\gamma}(I)$ and $\gamma \in (1, +\infty)$. There exists a constant $C > 0$ such that*

$$\left| (x - a)(b - x) \left(D''_a(x) - D''_b(x) \right) \right| \leq C \cdot |I| \mathcal{S}_\gamma(|I|),$$

$$\left| D'_b(x) - D'_a(x) \right| \leq C \cdot \mathcal{S}_\gamma(|I|).$$

Proof. The proof of the lemma is straightforward and relies on simple computations.

5. DYNAMICAL PARTITION OF THE STATE SPACE I .

In this section, we recall the definition of the dynamical partition of I generated by forward dynamics of some fundamental intervals. As we have mentioned in Section 2.1 the Rauzy-Veech renormalization $R(f)$ of f is a g.i.e.m with d intervals and the sub-intervals I_α^1 , $\alpha \in A$ of $I^1 \subset I$ denoted by P^1 . By induction, we can derive the n -th renormalization $R^n(f)$ of f , and the sub-intervals $P^n = \{I_\alpha^n, \alpha \in A\}$ of $I^n \subset I^{n-1}$. Denote by q_n^α , $\alpha \in A$ the first return time of the interval I_α^n to the interval I^n . The intervals of P^n are said to be fundamental intervals of rank n .

Definition 6. *The system of intervals*

$$\xi_n = \{f^i(I_\alpha^n), 0 \leq i < q_n^\alpha, \alpha \in A\}$$

is called n -th dynamical partition of I . Note that interiors of dynamical partition are mutually disjoint and cover the whole interval I . The dynamical partitions ξ_n are refined, that means, any element of ξ_n is a union of a number of elements of the next partition ξ_{n+1} .

6. ESTIMATES FOR THE RATIO DISTORTION OF $R^n(f)$

Consider the g.i.e.m $f \in \mathbb{D}_k^{1+Z^\gamma}$. Note that g.i.e.m f is infinitely many times renormalizable i.e. $R^n(f)$ is well defined for any $n \geq 1$ since there is no connection due to condition (iv). Consider $I_\alpha^n \in P^n$, $\alpha \in A$ a fundamental interval of rank n . Let $A_1 : \bar{I}_\alpha^n \rightarrow [0, 1]$ be an orientation-preserving affine map as described in Section 3. For the convenience of notation, we will use

z_0^α instead of A_1 and denote by z_i^α the orientation-preserving affine maps that transform the intervals $\bar{I}_\alpha^{n,i} := f^i(\bar{I}_\alpha^n)$ to $[0,1]$. One can easily see that

$$z_i^\alpha = \frac{x - c_\alpha^{n,i}}{d_\alpha^{n,i} - c_\alpha^{n,i}}, \quad x \in \bar{I}_\alpha^{n,i}, \quad \alpha \in A, \quad 0 \leq i < q_n^\alpha$$

where $c_\alpha^{n,i}$ and $d_\alpha^{n,i}$ are the end points of the interval $\bar{I}_\alpha^{n,i}$. To formulate the following lemmas, we introduce additional notation.

$$\Upsilon_n(x) = \log \frac{D([d_\alpha^{n,0}, x]; f^{q_n^\alpha})}{D([x, c_\alpha^{n,0}]; f^{q_n^\alpha})} + \log \hat{m}_n^\alpha, \quad x \in \bar{I}_\alpha^{n,0}. \quad (3)$$

To simplify notation, let us denote

$$z_i := z_i^\alpha, \quad \alpha_i := c_\alpha^{n,i}, \quad \beta_i := d_\alpha^{n,i} \quad \text{and} \quad x_i := f^i(x) \in \bar{I}_\alpha^{n,i}, \quad 0 \leq i < q_n^\alpha.$$

and

$$\Upsilon_n(z_0) := \Upsilon_n(\beta_0 + z_0(\alpha_0 - \beta_0)).$$

We have

Lemma 5. *Let $f \in \mathbb{D}_k^{1+\mathcal{Z}^\gamma}$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. There exists a constant $C > 0$ such that*

$$\max_{z_0 \in [0,1]} |\Upsilon_n(z_0)| \leq \frac{C}{n^\gamma}$$

for all $n \geq 1$.

Proof. Given that the distortion ratio multiplies upon composition, we have

$$\Upsilon_n(z_0) = \sum_{i=0}^{q_n^\alpha-1} \log \frac{D_{\alpha_i}(x_i)}{D_{\beta_i}(x_i)} + \log \hat{m}_n^\alpha. \quad (4)$$

According to Lemma [5], we obtain

$$\sum_{i=0}^{q_n^\alpha-1} \log \frac{D_{\alpha_i}(x_i)}{D_{\beta_i}(x_i)} = -\log \hat{m}_n + \mathcal{O}\left(\mathcal{Z}^\gamma(d_n) + \Omega(d_n, \gamma)\right) \quad (5)$$

where d_n is the diameter of the partition of ξ_n that is the maximum of the lengths of its elements.

$$\mathcal{Z}^\gamma(d_n) + \Omega(d_n, \gamma) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right).$$

Thus

$$\max_{z_0 \in [0,1]} |\Upsilon_n(z_0)| \leq \frac{C}{n^\gamma}.$$

Lemma [5] is proven.

In the next section, we will use the following estimates to approximate relative coordinates using Möbius transformations in the C^1 -topology.

Lemma 6. Let $f \in \mathbb{D}_k^{1+\mathcal{Z}^\gamma}$ and $\gamma \in (0, +\infty)$. There exists a constant $C > 0$ and a natural number $N_0 = N_0(f)$ such that

$$\max_{z_0 \in [0,1]} \left| z_0(1-z_0) \frac{d\Upsilon_n(z_0)}{dz_0} \right| \leq \frac{C}{n^\gamma}$$

for all $n \geq N_0$.

Proof. Setting

$$\Psi(x_i) := \log \frac{D_{\alpha_i}(x_i)}{D_{\beta_i}(x_i)} \quad (6)$$

we rewrite Υ_n as follows

$$\Upsilon_n(z_0) = \sum_{i=0}^{q_n-1} \Psi(x_i) + \log \hat{m}_n^\alpha. \quad (7)$$

It is evident

$$\frac{d\Upsilon_n(z_0)}{dz_0} = (\alpha_0 - \beta_0) \cdot \frac{d\Upsilon_n(x)}{dx} \quad \text{and} \quad \frac{d\Psi(x_i)}{dx} = \frac{d\Psi(x_i)}{dx_i} \cdot (f^i(x))'. \quad (8)$$

Since q_n^α iterations of the interval $[\alpha_0, \beta_0]$ are pairwise disjoint due to Finzi's inequality (see [2]) we get the following

$$e^{-\nu} \leq \frac{(f^i(x))'(\alpha_0 - \beta_0)}{(\alpha_i - \beta_i)} \leq e^\nu \quad \text{and} \quad e^{-2\nu} \leq \frac{z_0(1-z_0)}{z_i(1-z_i)} \leq e^{2\nu} \quad (9)$$

where ν is the total variation of $\log f'$. Relations (7) through (9) imply

$$\left| z_0(1-z_0) \frac{d\Upsilon_n(z_0)}{dz_0} \right| \leq e^{3\nu} \left| \sum_{i=0}^{q_n^\alpha-1} z_i(1-z_i)(\alpha_i - \beta_i) \frac{d\Psi(x_i)}{dx_i} \right|. \quad (10)$$

Differentiating (6), we obtain

$$\frac{d\Psi(x_i)}{dx_i} = \left(\frac{1}{D_{\alpha_i}(x_i)} - \frac{1}{D_{\beta_i}(x_i)} \right) \cdot \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} + \frac{1}{D_{\beta_i}(x_i)} \cdot \left(\frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right). \quad (11)$$

By employing the mean value theorem and Theorem 2, we obtain

$$\left| \frac{1}{D_{\alpha_i}(x_i)} - \frac{1}{D_{\beta_i}(x_i)} \right| = \left| \frac{1}{f'(\check{\alpha}_i)} - \frac{1}{f'(\check{\beta}_i)} \right| \leq C \cdot \Omega(d_n, \gamma) \quad (12)$$

for any $\gamma \in (0, +\infty)$, where $\check{\alpha}_i \in [\alpha_i, x_i]$ and $\check{\beta}_i \in [x_i, \beta_i]$. Next we estimate $\left| \frac{d\Psi(x_i)}{dx_i} \right|$. Using (12) we have

$$\left| \frac{d\Psi(x_i)}{dx_i} \right| \leq C \cdot \Omega(d_n, \gamma) \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} \right| + \frac{1}{\inf_I f'(\xi)} \cdot \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right|. \quad (13)$$

Applying this inequality to the right-hand side of (10), we obtain

$$\left| z_0(1-z_0) \frac{d\Upsilon_n(z_0)}{dz_0} \right| \leq C e^{3\nu} \Omega(d_n, \gamma) \sum_{i=0}^{q_n^\alpha-1} z_i(1-z_i) |\alpha_i - \beta_i| \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} \right| \quad (14)$$

$$+ \frac{e^{3\nu}}{\inf_I f'(\xi)} \sum_{i=0}^{q_n^\alpha - 1} z_i(1 - z_i) |\alpha_i - \beta_i| \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right| := A_n + B_n.$$

Next we estimate A_n and B_n . To estimate A_n , we utilize the straightforward equality

$$z_i(1 - z_i) |\alpha_i - \beta_i| \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} \right| = z_i |f'(x_i) - f'(\check{\alpha}_i)|$$

and get $A_n = \mathcal{O}(\Omega(d_n, \gamma))$, since f' has bounded variation and the system of intervals $\{[x_i, \check{\alpha}_i], 0 \leq i < q_n^\alpha\}$ do not intersect. Next we estimate B_n . By the definition of z_i

$$z_i(1 - z_i) |\alpha_i - \beta_i| \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right| = \frac{(x_i - \alpha_i)(\beta_i - x_i)}{\beta_i - \alpha_i} \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right|.$$

By Corollary, we have

$$\frac{(x_i - \alpha_i)(\beta_i - x_i)}{\beta_i - \alpha_i} \left| \frac{dD_{\alpha_i}(x_i)}{dx_i} - \frac{dD_{\beta_i}(x_i)}{dx_i} \right| = \mathcal{O}\left(|\bar{I}_\alpha^{n,i}| \mathcal{Z}^\gamma(|\bar{I}_\alpha^{n,i}|)\right)$$

for sufficiently large n . Hence $B_n = \mathcal{O}(\mathcal{Z}_\gamma(d_{n-1}))$ and $A_n + B_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ for sufficiently large n . Lemma 6 is proven.

7. PROOF OF THEOREM 1

Proof. Let us revisit again the definition of the zoom for the n th renormalization of f and the associated relative coordinates. n th renormalization of f on the interval I_α^n is $R^n(f)|_{I_\alpha^n} = f^{q_n^\alpha}|_{I_\alpha^n}$ where q_n^α is the first return time of the interval I_α^n to the interval I^n . Zoom Ξ of $R^n(f)$ in I_α^n is

$$\Xi(R^n(f))(z_0) = \frac{f^{q_n^\alpha}(c_\alpha^{n,0} + z_0(d_\alpha^{n,0} - c_\alpha^{n,0})) - f^{q_n^\alpha}(c_\alpha^{n,0})}{f^{q_n^\alpha}(d_\alpha^{n,0}) - f^{q_n^\alpha}(c_\alpha^{n,0})}$$

where z_0 is the relative coordinate of x in I_α^n that is

$$z_0 = \frac{x - c_\alpha^{n,0}}{d_\alpha^{n,0} - c_\alpha^{n,0}}$$

After performing straightforward calculations, we obtain

$$\frac{1 - \Xi(R^n(f))(z_0)}{\Xi(R^n(f))(z_0)} \cdot \frac{z_0}{1 - z_0} = \frac{D([d_\alpha^{n,0}, x]; f^{q_n^\alpha})}{D([x, c_\alpha^{n,0}]; f^{q_n^\alpha})} + \log \hat{m}_n^\alpha, \quad x \in \bar{I}_\alpha^{n,0}.$$

The relationship (3) implies

$$\frac{D([d_\alpha^{n,0}, x]; f^{q_n^\alpha})}{D([x, c_\alpha^{n,0}]; f^{q_n^\alpha})} = \frac{1}{\hat{m}_n^\alpha} \exp(\Upsilon_n(z_0)).$$

Consequently, the last two relationships imply

$$\frac{1 - \Xi(R^n(f))(z_0)}{\Xi(R^n(f))(z_0)} \cdot \frac{z_0}{1 - z_0} = \frac{1}{\hat{m}_n^\alpha} \exp(\Upsilon_n(z_0)).$$

By solving for $\Xi(R^n(f))(z_0)$, we obtain

$$\Xi(R^n(f))(z_0) = \frac{z_0 \hat{m}_n^\alpha}{(1 - z_0) \exp(\Upsilon_n(z_0)) + z_0 \hat{m}_n^\alpha}. \quad (15)$$

This and Lemma 5 implies

$$\max_{z_0 \in [0,1]} \left| \Xi(R^n(f))(z_0) - M_{\hat{m}_n^\alpha}(z_0) \right| \leq \frac{C}{n^\gamma}. \quad (16)$$

for all $n \geq 1$. Next we estimate the derivative of $\Xi(R^n(f))(z_0)$. Differentiating (15) we obtain

$$\Xi'(R^n(f))(z_0) = \frac{\left(1 - z_0(1 - z_0)\Upsilon_n'(z_0)\right) \hat{m}_n^\alpha \exp(\Upsilon_n(z_0))}{\left((1 - z_0) \exp(\Upsilon_n(z_0)) + z_0 \hat{m}_n^\alpha\right)^2}. \quad (17)$$

Applying Lemmas 5 and 6 for the last relation we get

$$\max_{z_0 \in [0,1]} \left| \Xi'(R^n(f))(z_0) - M'_{\hat{m}_n^\alpha}(z_0) \right| \leq \frac{C}{n^\gamma}$$

for all $n \geq 1$. Inequalities (16) and (17) imply the proof of Theorem 1.

CONCLUSION

In conclusion, this paper has established significant advancements in our understanding of generalized interval exchange maps with bounded combinatorics. By imposing a Zygmund condition on the derivative of f' with a parameter $\gamma \in (0, 1]$ across its continuity intervals, we have demonstrated that the Rauzy-Veech renormalisations of such maps converge to Möbius transformations in C^1 -topology. This conclusion not only provides valuable insights into the dynamics of generalized interval exchange maps but also offers practical implications for strategic planning and analysis. The results presented here not only corroborate but also extend the earlier findings documented in [1] and [10]. Through rigorous mathematical analysis, this paper contributes to the broader discourse on the behaviour of interval exchange maps and lays the groundwork for further exploration in this intriguing field.

REFERENCES

1. Habibulla Akhadkulov, Mohd Salmi Md Noorani and Sokhobiddin Akhatkulov. Renormalization of circle diffeomorphisms with a break-type singularity. *Nonlinearity* **30**, 2687-2717, (2017).
2. H. Akhadkulov, A. Dzhililov, D. Mayer. On conjugations of circle homeomorphisms with two break points, *Ergodic Theory Dynam. Systems.* **34**,(3), 725-741, (2014).
3. K. M. Khanin and E. B. Vul. Circle homeomorphisms with weak discontinuities, *Dynamical systems and statistical mechanics (Moscow, 1991)*, Adv. Soviet Math., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

4. K. Cunha, D. Smania, Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle. *Advances in Mathematics* **250**, 193-226, (2014).
5. K. Khanin and D. Khmelev, Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type, *Commun. Math. Phys.*, **235**(1), 69-124, (2003).
6. K. Khanin, A. Teplinsky, Renormalization Horseshoe and Rigidity for Circle Diffeomorphisms with Breaks. *Commun. Math. Phys.* **320**, 347-377, (2013).
7. K. Khanin, M. Yampolsky, Hyperbolicity of renormalization of circle maps with a break-type singularity. *Moscow Mathematical Journal*. **15**,(1), 107-121, (2015).
8. O.Yu. Teplins'kyi. Hyperbolic horseshoe for circle diffeomorphisms with break. *Nonlinear Oscillations* **11**(1), 114-134, (2008).
9. O. E. Lanford, Renormalization group methods for critical circle mapping. *Nonlinear evolution and chaotic phenomena*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., **176**, 25-36, (1988).
10. K. Cunha, D. Smania, Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle. *Ann. I. H. Poincaré - AN* **30**, 441-462, (2013).

РЕЗЮМЕ

Faraz qilaylik f chekli kombinatoriklarga ega bo'lgan umumlashgan interval almashinuvchi akslantirish (u.i.a.a) bo'lsin. Agar ushbu u.i.a.a ning hosilasi f' o'zining har bir uzliksizlik oraliqlarida $\gamma \in (0, 1]$ parametrga bog'liq bo'lgan Zigmund shartini qanoatlantirsa, u holda bu akslantirishning Rauzy-Veech renormalizatsiyasi, C^1 -topologiyada Myobus akslantirishlari bilan approksimatsiya qilinishi ko'rsatildi. Bu natija u.i.a.a dinamikasi haqida qimmatli tushunchalarni beradi va bundan oldingi adabiyotlar [1] va [10] da qilingan ishlarni muhim kengaytiradi.

Kalit so'zlar: umumlashgan interval almashinuvchi akslantirishlar, renormalizatsiya, Myobus akslantirishlari, yaqinlashishlar, Zigmund funktsiyalari.

РЕЗЮМЕ

Пусть f — обобщенное отображение перестановки интервалов с ограниченной комбинаторикой. Предположим, что f' удовлетворяет некоторому условию Зигмунда, зависящему от параметра $\gamma \in (0, 1]$ на каждом из его интервалов непрерывности. Мы доказываем, что перенормировки Розы-Вича f аппроксимируются преобразования Мёбиуса в C^1 -топологии. Результаты, представленные в этой статье, развивают и расширяют результаты, ранее продемонстрированные в [1] и [10].

Ключевые слова. Обобщенное отображение замены интервалов, перенормировка, преобразования Мёбиуса, сходимость, функции Зигмунда.

UDC 517.984

THE ESSENTIAL SPECTRUM OF THE THREE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR FOR A SYSTEM COMPRISING TWO IDENTICAL BOSONS AND ONE FERMION ON \mathbb{Z}

Akhralov Kh. Z. * Lakaev Sh. S. *

RESUME

We consider the Hamiltonian of a system of three quantum mechanical particles (two identical bosons and a fermion) on the one-dimensional lattice interacting by means of zero-range attractive or repulsive potentials. We investigate the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ depending on repulsive or attractive interactions, under the assumption that the bosons in the system have infinite mass.

Key words: Schrödinger operator, dispersion functions, zero-range pair potentials, essential spectrum.

1. Introduction.

One of the remarkable results in the spectral theory of multiparticle continuous Schrödinger operators is the description of the essential spectrum (the HVZ-theorem for honour of W. Hunziker [1], C. van Winter [2] and G. Zhislin [3]): *the essential spectrum of an N -particle Hamiltonian (in the center-off-mass frame) is the half-line whose lowest bound is the lowest possible energy which two independent subsystems can have.* Since then the result has been substantially improved and extended to various classes of operators (see the survey [4] and references therein).

Few results are available in the literature on the essential spectra of the discrete Schrödinger operators associated to the many-body systems on the optical lattice: the essential spectrum of the three-body problem on \mathbb{Z}^3 with analytic dispersion functions was described in [16]; the four-body HVZ theorem with the discrete Laplacian and zero-range potentials was shown in [5]; see also [6] and references therein for other results related to the spectral properties of multiparticle operators in the lattice.

One of the fundamental differences between the multiparticle continuous Hamiltonian in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, and the discrete Hamiltonian in d -dimensional lattice \mathbb{Z}^d is that the latter is not rotationally invariant; however using the technique of separation of variables, the lattice analogue of the center-off-mass frame [7,8,9] the Hamiltonian can be decomposed into the fibers, i.e. it can be represented as a direct integral of a family of discrete Schrödinger operators $H(K)$, parametrized by so-called N -particle quasi-momentum $K \in \mathbb{T}^d$, where \mathbb{T}^d - d -dimensional torus [6,10]. In contrast to the continuous case, the fibers nontrivially depend on the quasi-momentum K and therefore, their spectra is quite sensitive to a change of K : even in two-particle case the essential spectrum may collapse to a point, and hence, it is not absolutely continuous [11]. Moreover, by virtue of the boundedness of $H(K)$, its essential spectrum is no longer the positive

*Akhralov Kh. Z. –Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy, axralovh@mail.ru,

*Lakaev Sh. S. – National university of Uzbekistan, shlakaev@mail.ru

real axis, but an at most countable union of closed segments and in turn this may allow the Efimov effect to appear not only at the lower edge of essential spectrum, but at the edges of the gaps between those segments (see [12]).

The main goal of the paper is to investigate the existence of the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator associated to a system of two identical bosons and a fermion, where the bosons have infinite mass and the fermion has a finite mass. This investigation is conducted on the one-dimensional lattice \mathbb{Z} and involves repulsive or attractive zero-range pairwise interactions.

It should be noted that, unlike the last three articles [13-15], we study eigenvalues below and above the essential spectrum of the unperturbed operator for all repulsive or attractive zero-range pairwise interactions.

The paper is organized as follows. In Section 1, we introduce the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$ and the two-particle discrete Schrödinger operators associated with subsystems of the system of two identical bosons and a fermion. In Section 2, we study the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$.

2. THREE-PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE LATTICE \mathbb{Z} .

Let $L_s^2((\mathbb{T})^2)$ be the linear subspace of the symmetric functions of the Hilbert space $L^2((\mathbb{T})^2)$.

Let us consider the discrete Schrödinger operator $H(K)$, where $K \in \mathbb{T}$, associated with a system consisting of two identical bosons and a fermion moving on the one-dimensional lattice \mathbb{Z} (see [13,15]).

$$H(K) = H_0(K) - V$$

with zero-range attractive potentials

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

where

$$(V_1 f)(p, q) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(p, t) dt, \quad (V_2 f)(p, q) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t, q) dt,$$

$$(V_3 f)(p, q) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t, p + q - t) dt, \quad f \in L_s^2((\mathbb{T})^2), \quad p, q \in \mathbb{T},$$

and numbers λ and μ serve as the parameters of boson-fermion interaction and boson-boson interaction, respectively.

Here the numbers λ and μ indicate repulsive pair-wise interaction when $\mu < 0$ and $\lambda < 0$, and attractive pair-wise interaction when $\mu > 0$ and $\lambda > 0$. The operator $H_0(K)$ is defined on the Hilbert space $L_s^2((\mathbb{T})^2)$ by

$$(H_0(K)f)(p, q) = E(K; p, q)f(p, q), \quad f \in L_s^2((\mathbb{T})^2),$$

and

$$E(K; p, q) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_b(q) + \varepsilon_f(K - p - q), \quad p, q \in \mathbb{T}.$$

Here, the real-valued continuous function $\varepsilon_b(\cdot)$ and $\varepsilon_f(\cdot)$, referred to as *the dispersion relation* associated with the free boson and fermion is defined as

$$\varepsilon_b(p) = \frac{1}{m}\varepsilon(p), \quad \varepsilon_f(p) = \frac{1}{\mathbf{m}}\varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos(p), \quad p \in \mathbb{T}, \quad (1)$$

respectively, and m and \mathbf{m} represents the mass of the boson and fermion, respectively.

Let $k \in \mathbb{T}$ and $L_k^2(\mathbb{T})$ be a linear subspace of the Hilbert space $L^2(\mathbb{T})$ defined by

$$L_k^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) | f(p) = f(k - p)\}.$$

A two-particle discrete Schrödinger operator corresponding to the subsystem {bozon,fermino} and {bozon,bozon}, of the three-particle system acts on the Hilbert space $L^2(\mathbb{T})$ and $L_k^2(\mathbb{T})$ as

$$h_1(k) = h_1^0(k) - v_1, \quad \text{and} \quad h_2(k) = h_2^0(k) - v_2, \quad k \in \mathbb{T}, \quad (2)$$

respectively.

Here, the operators $h_\alpha^0(k)$

$$(h_1^0(k)f)(p) = E_k^{(1)}(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

and

$$(h_2^0(k)f)(p) = E_k^{(2)}(p)f(p), \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}),$$

where

$$E_k^{(1)}(p) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_f(k - p), \quad E_k^{(2)}(p) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_b(k - p), \quad p \in \mathbb{T}. \quad (3)$$

The operators v_1 and v_2 is defined as

$$(v_1f)(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad p \in \mathbb{T}.$$

and

$$(v_2f)(p) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(q) dq, \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}), \quad p \in \mathbb{T},$$

respectively.

2.1. Spectral properties of the two-particle discrete Schrödinger operators when $m = \infty$ and $0 < \mathbf{m} < \infty$.

With $m = \infty$ and $0 < \mathbf{m} < \infty$ and the equality (1), the functions (3) can be written as

$$E_k^{(1)}(p) = \varepsilon_f(k-p) = \varepsilon(k-p)/\mathbf{m}, \quad E_k^{(2)}(p) = 0, \quad p \in \mathbb{T}. \quad (4)$$

Consequently, since the potentials v_α , $\alpha = 1, 2$, have a convolution-type property, all two-particle Schrödinger operators do not depend on the quasi-momentum $k \in \mathbb{T}$,

$$h_1 := h_1(k), \quad \text{and} \quad h_2 = h_2(k).$$

Then, the operators $h_1(k)$ and $h_2(k)$ act as

$$h_1(k)f(p) = \varepsilon_f(p)f(p) - (v_1f)(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}) \quad \text{and} \quad h_2(k)f(p) = -(v_2f)(p), \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}).$$

As v_1 is a finite rank operator, according to the Weyl theorem, the essential spectrum $\sigma_{ess}(h_1(k))$ of the operator $h_1(k)$ in (2) coincides with the spectrum $\sigma(h_1^0(k))$ of the non-perturbed operator $h_1^0(k)$. More specifically,

$$\sigma_{ess}(h_1(k)) = [E_{\min}^{(1)}(k), E_{\max}^{(1)}(k)],$$

where

$$E_{\min}^{(1)}(k) \equiv \min_{p \in \mathbb{T}} E_k^{(1)}(p), \quad E_{\max}^{(1)}(k) \equiv \max_{p \in \mathbb{T}} E_k^{(1)}(p).$$

Therefore, in our case we have

$$\sigma_{ess}(h_1(k)) = [0, 2/\mathbf{m}] \quad \text{and} \quad \sigma_{ess}(h_2(k)) = \{0\}.$$

The Fredholm determinants associated with the operators $h_1(k)$ are defined as

$$\Delta(\lambda; z) = 1 - \lambda d_0(z), \quad d_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\varepsilon_f(s) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2/\mathbf{m}].$$

Lemma 1. (a) The number $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2/\mathbf{m}]$ is an eigenvalue of $h_1(k)$ if and only if $\Delta(\lambda; z) = 0$.

(b) If $\lambda < 0$ and $\lambda > 0$, then there exists a unique simple eigenvalue $z = z_1^0$ of $h_1(k)$ in the interval $(-2/\mathbf{m} - \mu, \infty)$ and $(-\infty, 0)$, respectively. Moreover, z_1^0 does not depend on $k \in \mathbb{T}$.

Proof. (a) The equation

$$h_1(k)f = zf \quad \text{i.e.,} \quad f = \lambda(h_1^0(k) - z)^{-1}vf$$

has a non-trivial solution if and only if

$$\Delta(\lambda; z)C = 0, \quad C \in \mathbb{C},$$

has a non-trivial solution.

Therein, the solutions $C \in \mathbb{C}$ and $f \in L^2(\mathbb{T})$ are connected by the following relations

$$C = v_1f \quad \text{and} \quad f = \lambda(h_1^0(k) - z)^{-1}C.$$

(b) Let $\lambda > 0$. The function $\Delta(\lambda; z)$ is monotonic decreasing in $(-\infty, 0)$ and $\Delta(\lambda; z) > 1$ in $(-2/\mathbf{m} - \mu, \infty)$. Since

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(\lambda; z) = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} \Delta(\lambda; z) = -\infty,$$

the intermediate-value theorem implies the existence of a unique simple zero $z = z_1^0, z_1^0 \in (-\infty, 0) \cup (-2/\mathbf{m} - \mu, \infty)$ of the function $\Delta(\lambda; \cdot)$, and furthermore $z_1^0 \in (-\infty, 0)$.

The lemma can be proven in a similar way when $\lambda < 0$.

Now we can summarize the results of this section in the following lemma.

Lemma 2. *We have*

$$\sigma_{\text{disc}}(h_1(k)) = \{z_1^0\}, \quad \text{if } \lambda \neq 0,$$

$$\sigma(h_1(k)) = \{z_1^0\} \cup [0, 2/\mathbf{m}], \quad \text{if } \lambda \neq 0$$

and

$$\sigma_{\text{disc}}(h_2(k)) = \{-\mu\}, \quad \sigma(h_2(k)) = \{-\mu\} \cup \{0\}.$$

3. ESSENTIAL SPECTRUM OF $H(K)$.

One of the notable outcomes in the spectral theory of multi-particle continuous Schrödinger operators involves characterizing the essential spectrum of the Schrödinger operators in terms of cluster operators (the HVZ-theorem. See Refs. [16-19] for the discrete case and [20] for a pseudo-relativistic operator).

Lemma 3. *The essential spectrum of $H(K)$ satisfies the relation*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ \sigma(h_1(K - k)) + \varepsilon_b(k) \right\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ \sigma(h_2(K - k)) + \varepsilon_f(k) \right\}.$$

Proof. The proof can be found in [15,17].

3.1. The essential spectrum of $H(K)$ with $m = \infty$, and $\mathbf{m} < \infty$.

Due to Lemma 2 and the relations $\varepsilon_b(p) = 0$ and $\varepsilon_f(p) = \varepsilon(p)/\mathbf{m}$, we obtain

$$\bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ \sigma(h_1(K - k)) + \varepsilon_b(k) \right\} = \sigma(h_1(k)) = \{z_1^0\} \cup [0, 2/\mathbf{m}],$$

$$\bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ \sigma(h_2(K - k)) + \varepsilon_f(k) \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{T}} \left\{ \{-\mu\} \cup \{0\} + \varepsilon_f(k) \right\} = [-\mu, 2/\mathbf{m} - \mu] \cup [0, 2/\mathbf{m}].$$

According the last two relations and Lemma 3 we have

Theorem 1.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \{z_1^0\} \cup ([-\mu, 2/\mathbf{m} - \mu] \cup [0, 2/\mathbf{m}]).$$

CONCLUSION

The discrete Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of three quantum mechanical particles (two identical bosons and a fermion) three arbitrary particles (with masses $m = \infty$ and $m < \infty$) is considered on the one-dimensional lattice for all non-zero point interactions. The essential spectrum of the Schrödinger operator, has been studied for all non-zero point interactions.

REFERENCES

1. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multiparticle Hamiltonians. *Helv. Phys. Acta.*, 1966, V.39, P.451-462.
2. Van Winter C. Theory of finite systems of particles. I. *Mat.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.* 1960, V.1, P.1-60.
3. Zhislin G. Investigation of the spectrum of the Schrodinger operator for a many particle system. *Trudy Moskov. Mat. Ob-va.* 1960, V.9, P.81-120.
4. Hunziker W., Sigal I. The quantum N -body problem. *J. Math. Phys.* 2000, V.41, P.3448-3510.
5. Muminov M. A Hunziker-Van Winter-Zhislin theorem for a four-particle lattice Schrödinger operator. *Theor. Math. Phys.* 2006, V.148, P.1236-1250.
6. Mogilner A. Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results. *Adv. in Sov. Math.* 1991, V.5, P.139-194.
7. Graf G., Schenker D. 2-magnon scattering in the Heisenberg model. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* 1997, V.67, P.91-107.
8. Lakaev S. The Efimov effect of a system of three identical quantum lattice particles. *Funkcional. Anal.Prilozhen.*, 1993, V.27(3), P.166-175.
9. Yafaev D. *Scattering Theory: Some Old and New Problems.* Springer-Verlag, Berlin, 2000, Lecture Notes in Mathematics 1735, P.176.
10. Mattis D. The few-body problem on a lattice. *Rev. Mod. Phys.* 1986, V.58(2), P.361-379.
11. Lakaev S., Kholmatov Sh. Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2011, V.44(13), P.19.
12. Muminov M. The infiniteness of the number of eigenvalues in the gap in the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Teoret. Mat. Fiz.* 2009, V.159, P.299-317.
13. Muminov M., Aliev N. Discrete spectrum of a noncompact perturbation of a three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Theor. Math. Phys.*, 2015, V.1823(3), P.381-396.

14. Muminov Z. I., Aliev N. M., Radjabov T. On the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator on a two-dimensional lattice. Lob. J. Math., 2022, V.43(11), P.3239–3251.
15. Aliev N. M. Asymptotic of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Operator on a One-Dimensional Lattice. Lob. J. Math., 2023, V.44(2), P.491–501.
16. Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices. Math. Nachr., 2007, V.280, P.699–716.
17. Kholmatov Sh. Yu., Muminov Z. E. The essential spectrum and bound states of N -body problem in an optical lattice. J.Phys.A: Math. Theor., 2018, V.51, P.265202.
18. Muminov Z., Lakaev Sh., Aliev N. On the Essential Spectrum of Three-Particle Discrete Schrödinger Operators with Short-Range Potentials. Lob. J. Math., 2021, V.42(6), P.1304–1316.
19. Lakaev S. N., Boltaev A. T. The Essential Spectrum of a Three Particle Schrödinger Operator on Lattices. Lob. J. Math., 2023, V.44(3), P.1176–1187.
20. Jakubaba-Amundsen D. H. The HVZ Theorem for a Pseudo-Relativistic Operator. Ann. Henri Poincaré, 2007, V.8, P.337–360.

REZYUME

Biz bir o'lvovli panjarada kontaktli tortishuvchi yoki itarishuvchi uchta kvant zarrachalari (ikkita bir xil bozon va bitta fermion) sistemasining Hamiltonianini ko'rib chiqamiz. Bunda, sistemadagi bozonlar cheksiz massaga ega bo'lgan hol uchun, uch zarrachali $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ diskret Shredinger operatorining muhim spektrini o'zaro ta'sir kuchlariga bog'liq holda o'rganiladi.

Kalit so'zlar: Shrodinger operatori, dispersiya funksiyalari, kontaktli juft potentsiallari, muhim spektr.

РЕЗЮМЕ

Мы рассмотрим гамильтониан системы трех квантов механических частиц (двух одинаковых бозонов и фермиона) на одномерной решетке, взаимодействующие посредством нулевых потенциалов притяжения или отталкивания. Мы исследуем существенный спектр трёхчастичного оператора Шрёдингера $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ в зависимости отталкивающего или притягивающего взаимодействия в предположении, что бозоны в системы имеют бесконечную массу.

Ключевые слова: Оператор Шрёдингера, дисперсионные функции, потенциалы контактной пары, существенный спектр.

UDC 004.94

2D CA WITH NEW BOUNDARY CONDITION

Gaybullaev R. Kh.¹ Redjepov Sh. B.² Usmonov J. B.³

RESUME

In this paper, under certain conditions, two-dimensional cellular automata (2D CA) with a Moore neighborhood are considered. Namely, we study rule matrices of two-dimensional linear cellular automata defined by the Moore neighborhood with some mixed boundary conditions over the field \mathbb{Z}_p . In addition, we present conditions under which the resulting rule matrices for two-dimensional finite CAs are reversible.

Key words: cellular automata, boundary conditions, rule matrix, reversibility.

Introduction

It is known that a cellular automaton (CA) is a set of cells arranged in a grid of a certain shape, so that each cell changes its state over time according to a certain set of rules governed by the states of neighboring cells. CAs have been proposed for possible use in public-key cryptography as well as applications in geography, anthropology, political science, sociology, physics and others (see [1]). Cellular automata were studied in the early 1950s as a possible model for biological systems by J. Von Neumann and Stan Ulam ([11], [12]). Two most common types of CA used by different authors are: one-dimensional CA (1D CA) and two-dimensional CA (2D CA). As a famous example of 2D CA, John Conway's Game of Life (also known simply as Life) is a two-dimensional, totalistic CA that introduces more complexity than an elementary CA, since each cell in the grid has a bigger neighborhood.

A configuration of the system is an assignment of states to all the cells. Every configuration determines the next configuration via a transition rule that is local in the sense that the state of a cell at time $(t + 1)$ depends only on the states of some of its neighbors at time t . When the transition rule is linear and under some boundary conditions there are several results (see [9]). Usually, 2D CA is considered with triangular, square, hexagonal, and pentagonal lattices (see [2], [3], [6], [7], [8]). In the paper [10] investigated the evolution of image patterns corresponding to the uniform linear rules of 2D CA with the reflexive and adiabatic boundary conditions over \mathbb{Z}_2 . Moreover, the linear rules of CA can be found to be some image copies of a given first image depending on the special boundary types. The reversibility is the important character of the CAs which characterizes the non existence of Gardens of Eden (see [5], [6], [7], [9]). A reversible cellular automaton is a cellular automaton in which every configuration has a unique predecessor.

Preliminary

The von Neumann and Moore neighborhood on CA lattice.

The 2D finite CA consists of $m \times n$ cells arranged in m rows and n columns, where each cell takes one of the values of the field \mathbb{Z}_p . From now on, we will denote 2D finite CA order to

¹Gaybullaev R. Kh. – National University of Uzbekistan, r_gaybullaev@mail.ru

²Redjepov Sh. B. – Tashkent University of Information Technologies, sh.redjepov@gmail.com

³Usmonov J. B. – National University of Uzbekistan, javohir0107@mail.ru

$m \times n$ by 2D $CA_{m \times n}$. A configuration of the system is an assignment of the states to all cells. Every configuration determines a next configuration via a linear transition rule that is local in the sense that the state of a cell at time $(t + 1)$ depends only on the states of some of its neighbors at the time t using modulo p algebra.

In 2D CA's theory, there are some classic types of neighborhoods, but in this paper we only restrict ourselves to the Moore neighborhood. This neighborhood was used in the well known Conway's Game of Life. It is similar to the notion of 8-connected pixels in computer graphics. In Figure 1, we illustrate the von Neumann and Moore neighborhoods. The von Neumann neighborhood the center cell is surrounded by four square cells (see Figure 1 (left)). The Moore neighborhood comprises eight square cells which surround the center cell $x_{(i;j)}$ (see Figure ?? (right)). From now on, we deal only with Moore neighborhood. Then the state $x_{i;j}^{(t+1)}$ of the cell $(i; j)$ th at time $(t + 1)$ is defined by the local rule function $\psi : \mathbb{Z}_p^8 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ as follows:

$$x_{i;j}^{(t+1)} = \psi(x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j}, x_{i-1,j+1}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j-1}, x_{i,j-1}) = ax_{i-1,j-1}^{(t)} + bx_{i-1,j}^{(t)} + cx_{i-1,j+1}^{(t)} + dx_{i,j+1}^{(t)} + ex_{i+1,j+1}^{(t)} + fx_{i+1,j}^{(t)} + gx_{i+1,j-1}^{(t)} + hx_{i,j-1}^{(t)} \pmod{p}$$

where $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$

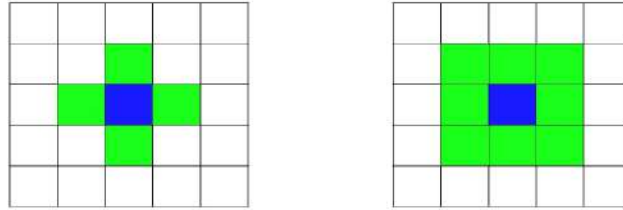


Рис. 1: von Neumann and Moore neighborhoods

The value of each cell for the next state may not depend upon all eight neighbors.

Remark If we assume $a = c = e = g = 0$, then all obtained above results hold for von Neumann neighborhood.

Note that it is impossible to simulate a truly infinite lattice on a computer (unless the active region always remains finite). Therefore, we have to prescribe some boundary conditions (BC). Regarding the neighborhood of the boundary cells, four approaches exist:

- If the boundary cells are connected to 0-state, then CA is called *null boundary (NB) CA*.
- If the boundary cells are adjacent to each other, then CA is called *periodic boundary (PB) CA*.
- An *Adiabatic Boundary (AB) CA* is duplicating the value of the cell in an extra virtual neighbor.
- A *Reflexive Boundary (RB) CA* is designed for the value of the left and right neighbors to be equal concerning the boundary cell.

The rule matrix of Moore CA and mixed boundary condition

Now, we can characterize the rule matrix T_R under null boundary conditions. In order to characterize the corresponding rule, first we represent each state matrix of size $m \times n$ as a column vector of size $mn \times 1$. If the same rule is applied to all the cells in each evaluation, then those CA is called *uniform or regular*. Throughout the paper we deal with uniform CA.

Thus, the problem of finding a rule matrix of the corresponding rule is taken from the space of $m \times n$ matrices to the space of \mathbb{Z}_p^{mn} . In order to describe this problem more detailly we define the following map:

$$\Phi: \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathbf{M}_{mn \times 1}(\mathbb{Z}_p)$$

which takes the t -th state $X^{(t)}$ given by

$$C(t) := \begin{pmatrix} x_{11}^{(t)} & x_{12}^{(t)} & \cdots & x_{1n}^{(t)} \\ x_{21}^{(t)} & x_{22}^{(t)} & \cdots & x_{2n}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1}^{(t)} & x_{m2}^{(t)} & \cdots & x_{mn}^{(t)} \end{pmatrix} \longrightarrow X^{(t)} := (x_{11}^{(t)}, x_{12}^{(t)}, \dots, x_{1n}^{(t)}, \dots, x_{m1}^{(t)}, \dots, x_{mn}^{(t)})^T.$$

where the superscript T denotes the transpose and $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$ is the set of matrices with entries $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Thus, local rules will be assumed to act on \mathbb{Z}_p^{mn} rather than $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$. The matrix $C(t)$ is called *the configuration matrix (or information matrix)* of the 2-D finite CA at the time t and $C(0)$ is the initial information matrix of the 2-D finite CA. Therefore, one can conclude that $\Phi(C(t)) = X^{(t)}$.

Using the identification above, we can define

$$T_R \cdot X^{(t)} = X^{(t+1)} \pmod{p}.$$

Let $e_{i,j} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p^*)$ be the matrix units. Consider the following two sets:

$$X = \{e_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

$$Y = \{e_{0,i}, e_{m+1,i}, e_{j,0}, e_{j,n+1}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

We define $\alpha, \eta, \pi, \rho: Y \rightarrow X$ mappings by the boundary conditions in above. Namely, α is adiabatic BC, η is null BC, π is periodic BC and ρ is reflexive BC.

Now consider a mapping $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ where $\Gamma = \{\alpha, \eta, \pi, \rho\}$. Then we study the CA under boundary conditions that depends on the mapping φ . In other words, the boundary cells are evaluated depending upon $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$ (see Figure 2). In the paper [4] for the bijective function φ the characterization problem of 2D finite von Neumann CA is completely solved. Let us define ϕ is non-bijective maps on Γ as

$$\phi(\alpha) = \eta, \quad \phi(\rho) = \phi(\eta) = \phi(\pi) = \rho, \quad (1)$$

Note that if we consider Moore neighborhood under the condition (1) there is ambiguity with setting boundary condition in the cells $x_{0,0}$, $x_{0,n+1}$. In order to distinguish this unclearness

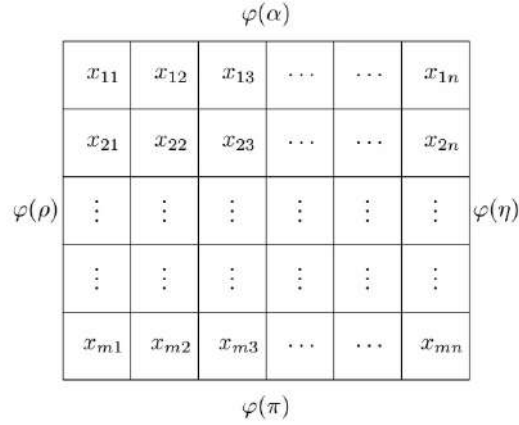


Рис. 2: Mixing boundary condition

on the condition (1) we define *strong right null* and *strong left null* boundary conditions for those cells, i.e. there is null boundary condition in the cells $x_{0,0}$ and $x_{0,n+1}$ have null boundary condition.

To establish the transition rule matrix T_R structure, it is needed to specify the action of T_R on the basis matrices $e_{i,j}$, respectively. Firstly, let us take the linear transition T_R from $m \times n$ matrix space structure to itself. The images $T_R(e_{i,j})$ of $e_{i,j}$ are connected to the four nearest neighbor elements considering the Moore neighborhood. Note that the boundary condition ϕ does not play role for non-border cells. Hence, $T_R(e_{i,j})$ elements are equal to a linear sum of its eight neighbor elements. Thus, for non-border elements we have

$$T_R(e_{i,j}) = ae_{i-1,j-1} + be_{i-1,j} + ce_{i-1,j+1} + de_{i,j+1} + ee_{i+1,j+1} + fe_{i+1,j} + ge_{i+1,j-1} + he_{i,j-1}. \quad (2)$$

Now, we define the action of T_R on the border elements. All border cells have three neighbors out of the configuration, but we should define what is the boundary condition in the neighbor cells $e_{0,0}, e_{0,n+1}, e_{m+1,0}, e_{m+1,n+1}$ of $e_{1,1}, e_{1,n}, e_{m,1}, e_{m,n}$ out of the configuration. Without loss of generality, we obtain

$$\begin{aligned} T_R^\phi(e_{1,1}) &= (d+h)e_{1,2} + (e+g)e_{2,2} + fe_{2,1}, \\ T_R^\phi(e_{1,n}) &= (d+h)e_{1,n-1} + (e+g)e_{2,n-1} + fe_{2,n}, \\ T_R^\phi(e_{m,1}) &= (a+c+e+g)e_{m-1,2} + (b+f)e_{m-1,1} + \\ &\quad (d+h)e_{m,2}, \\ T_R^\phi(e_{m,n}) &= (a+c+e+g)e_{m-1,n-1} + (b+f)e_{m-1,n} + \\ &\quad (d+h)e_{m,n-1}, \end{aligned}$$

where $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

Moreover, the border elements excepting $e_{1,1}, e_{1,n}, e_{m,1}, e_{m,n}$ have three neighbors out of

the configuration. Thus, we get the following:

$$\begin{aligned} T_R^\phi(e_{1,i}) &= de_{1,i+1} + ee_{2,i+1} + fe_{2,i} + ge_{2,i-1} + he_{1,i-1}, \\ T_R^\phi(e_{m,i}) &= (a+g)e_{m-1,i-1} + (b+f)e_{m-1,i} + \\ &\quad (c+e)e_{m-1,i+1} + de_{m,i+1} + he_{m,i-1}, \\ T_R^\phi(e_{j,1}) &= (a+c)e_{j-1,2} + be_{j-1,1} + (d+h)e_{j,2} + \\ &\quad (e+g)e_{j+1,2} + fe_{j+1,1}, \\ T_R^\phi(e_{j,n}) &= (a+c)e_{j-1,n-1} + be_{j-1,n} + (d+h)e_{j,n-1} + \\ &\quad (e+g)e_{j+1,n-1} + fe_{j+1,n}, \end{aligned}$$

where $2 \leq i \leq n-1$, $2 \leq j \leq m-1$ and $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

Set

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = dP + hQ, \quad B = fI + eP + gQ, \quad C = bI + cP + aQ,$$

where $P, Q, I \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, I is the identity matrix and $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p^*$.

Let ϕ be the function in (1), then the following result is true.

Theorem 1. Let $T_R^\phi: \mathbb{Z}_p^{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{mn}$ be the rule matrix which takes the finite Moore CA over the configuration $C(t)$ of order $m \times n$ to the configuration $C(t+1)$ under the boundary condition of ϕ . Then T_R^ϕ has the following matrix form:

$$T_R^\phi = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & D_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where $A_1 = A + h\epsilon_{1,2} + d\epsilon_{n,n-1}$, $B_1 = B + g\epsilon_{1,2} + e\epsilon_{n,n-1}$, $C_1 = C + a\epsilon_{1,2} + c\epsilon_{n,n-1}$, $D_1 = B + C + (a+g)\epsilon_{1,2} + (c+e)\epsilon_{n,n-1}$,

$O, \epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1}$ are unit matrices.

Proof. Firstly, let us take the linear transition $T_R^\phi: \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$. The image $T_R^\phi(e_{i,j})$ of $e_{i,j}$ is connected to the four nearest neighbor elements considering the von Neumann neighborhood. Hence $T_R^\phi(e_{i,j})$ elements are equal to a linear sum of its five neighbor elements.

Let us denote by $E_{(i-1)n+j} = e_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, the column vector $mn \times 1$ whose has the $((i-1)n+j)$ -th (or (i,j) -th in matrix form) entry equals to 1 and the others are equal

to zero. Then we have

$$\begin{aligned}
T_R^\phi \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{mn} \end{pmatrix} &= T_R^\phi \cdot \begin{pmatrix} e_{1,1} \\ \vdots \\ e_{1,n} \\ \vdots \\ e_{i,j} \\ \vdots \\ e_{m,1} \\ \vdots \\ e_{m,n} \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} T_R^\phi(e_{1,1}) \\ \vdots \\ T_R^\phi(e_{1,n}) \\ \vdots \\ T_R^\phi(e_{i,j}) \\ \vdots \\ T_R^\phi(e_{m,1}) \\ \vdots \\ T_R^\phi(e_{m,n}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} de_{1,2} + ee_{2,2} + fe_{2,1} \\ \vdots \\ (h+d)e_{1,n-1} + (e+g)e_{2,n-1} + fe_{2,n} \\ \vdots \\ ae_{i-1,j-1} + be_{i-1,j} + ce_{i-1,j+1} + de_{i,j+1} \\ + ee_{i+1,j+1} + fe_{i+1,j} + ge_{i+1,j-1} + he_{i,j-1} \\ \vdots \\ (b+f)e_{m-1,1} + (c+e+g)e_{m-1,2} + de_{m,2} \\ \vdots \\ (a+c+e+g)e_{m-1,n-1} + (b+f)e_{m-1,n} + \\ + (d+h)e_{m,n-1} \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & D_1 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hence, the transition of the representation of matrix related to the equations above presented in (3) is obtained. So, the proof is complete.

Rule matrices Moore 2D CA under boundary conditions with associated rotation

Now we consider boundary conditions ϕ by rotating to 90° . Let us define ϕ^{90° as follow:

$$\phi^{90^\circ}(\eta) = \eta, \quad \phi^{90^\circ}(\rho) = \phi^{90^\circ}(\alpha) = \phi^{90^\circ}(\pi) = \rho, \quad (4)$$

The ambiguity in the cells $x_{0,0}$, $x_{0,n+1}$ will move to the cells $x_{0,n+1}$, $x_{m+1,n+1}$. Then we use *strong up null* and *strong down null*. It's meaning that null boundary conditions would be applied for the cells $x_{0,n+1}$, $x_{m+1,n+1}$.

To establish the transition rule matrix T_R structure for new boundary conditions, it is also needed to specify the action of T_R on the basis matrices $e_{i,j}$. For non-border elements we hold (2). Then we calculate the action of T_R for boundary cells.

$$\begin{aligned}
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{1,1}) &= (a+c+e+g)e_{2,2} + (b+f)e_{2,1} + (d+h)e_{1,2}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{1,n}) &= (a+g)e_{2,n-1} + (b+f)e_{2,n} + he_{1,n-1}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{m,1}) &= (a+c+e+g)e_{m-1,2} + (b+f)e_{m-1,1} + (d+h)e_{m,2}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{m,n}) &= (a+g)e_{m-1,n-1} + (b+f)e_{m-1,n} + he_{m,n-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{1,i}) &= (a+g)e_{2,i-1} + (b+f)e_{2,i} + (c+e)e_{2,i+1} + de_{1,i+1} + he_{1,i-1}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{m,i}) &= (a+g)e_{m-1,i-1} + (b+f)e_{m-1,i} + (c+e)e_{m-1,i+1} + de_{m,i+1} + he_{m,i-1}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{j,1}) &= (a+c)e_{j-1,2} + be_{j-1,1} + (d+h)e_{j,2} + (e+g)e_{j+1,2} + fe_{j+1,1}, \\
T_R^{\phi^{90^\circ}}(e_{j,n}) &= ae_{j-1,n-1} + be_{j-1,n} + fe_{j+1,n} + ge_{j+1,n-1} + he_{j,n-1},
\end{aligned}$$

where $2 \leq i \leq n-1$, $2 \leq j \leq m-1$ and $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

Then the following result is true.

Theorem 2. Let $T_R^{\phi^{90^\circ}} : \mathbb{Z}_p^{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{mn}$ be the rule matrix which takes the finite Moore CA over the configuration $C(t)$ of order $m \times n$ to the configuration $C(t+1)$ under the boundary condition of ϕ^{90° . Then $T_R^{\phi^{90^\circ}}$ has the following matrix form:

$$T_R^{\phi^{90^\circ}} = \begin{pmatrix} A_2 & D_2 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_2 & A_2 & B_2 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_2 & A_2 & B_2 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_2 & A_2 & B_2 \\ O & O & O & O & \dots & O & D_2 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where $A_2 = A + h\epsilon_{1,2}$, $B_2 = B + g\epsilon_{1,2}$, $C_1 = C + a\epsilon_{1,2}$, $D_1 = B + C + (a+g)\epsilon_{1,2}$, $O, \epsilon_{1,2} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{1,2}$ is a unit matrix.

The proof is similar to the proof of Theorem 1.

Now we give the following results without proof for the boundary conditions ϕ^{180° and ϕ^{270° :

$$\phi^{180^\circ}(\eta) = \eta, \quad \phi^{180^\circ}(\rho) = \phi^{180^\circ}(\alpha) = \phi^{180^\circ}(\pi) = \rho,$$

$$\phi^{270^\circ}(\eta) = \eta, \quad \phi^{270^\circ}(\rho) = \phi^{270^\circ}(\alpha) = \phi^{270^\circ}(\pi) = \rho.$$

Theorem 3. Let the boundary conditions generated by ϕ^{180° and ϕ^{270° . Then $T_R^{\phi^{180^\circ}}$ and $T_R^{\phi^{270^\circ}}$ have the following matrix forms:

$$T_R^{\phi^{180^\circ}} = \begin{pmatrix} A_1 & D_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_1 & A_1 \end{pmatrix},$$

$$T_R^{\phi^{270^\circ}} = \begin{pmatrix} A_3 & D_3 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_3 & A_3 & B_3 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_3 & A_3 & B_3 \\ O & O & O & O & \dots & O & D_3 & A_3 \end{pmatrix},$$

where $A_3 = A + d\epsilon_{n,n-1}$, $B_3 = B + e\epsilon_{n,n-1}$, $C_3 = C + c\epsilon_{n,n-1}$, $D_3 = B + C + (c + e)\epsilon_{n,n-1}$, $O, \epsilon_{n,n-1} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{n,n-1}$ is a unit matrix.

Conclusion

In the present we investigate 2D finite linear Moore CA with mixed boundary condition over the p -ary field \mathbb{Z}_p (i.e. p -state spin values). Here, the mixed boundary condition contains reflexive and null boundary conditions. We construct the transition rule matrix corresponding to the model for Moore CA. After that, we change the boundary condition by rotation. Then we find all rule matrices for these type boundary conditions. Note that the four types of boundary conditions mentioned above are studied in theory of CA. But we are satisfied with using null and reflexive. But for the structure of mixed boundary conditions we may study other possible cases. We shall plan to study these type problems in forthcoming works.

Acknowledgment

This work has been supported by Ministry of Innovative Development of Uzbekistan, grant FZ- 20200930492.

REFERENCES

1. A. Adamatzky, Game of life cellular automata Springer, London, 2010.
2. C. Bays, "Cellular Automata in Triangular, Pentagonal and Hexagonal Tessellations," Encyclopedia of Complexity and Systems Science, ed. Meyers, R. Springer, New York, 2009.
3. D. Jumaniyozov, B. Omirov, Sh. Redjepov, S. Uguz, "Irreversibility of 2D Linear CA and Garden of Eden, Intern. J. Bifur. and Chaos, vol. 33 (06), 2350065, 2023.
4. D. Jumaniyozov, J.M. Casas, M. Ladra, B. Omirov, Sh. Redjepov, "2D Linear CA with Mixing Boundary Conditions and Reversibility Intern. J. Bifur. and Chaos, vol. 33 (08), 2350094, 2023.
5. J. Kari, "Reversibility of 2D cellular automata is undecidable," Physica D: Nonlinear Phenomena, vol. 45, 379–385, 1990.
6. I. Siap, H. Akin, S. Uguz, "Structure and reversibility of 2D hexagonal cellular automata," Comput. Math. Applications, vol. 62, 4161–4169, 2011.
7. S. Uguz, H. Akin, I. Siap, "Reversibility algorithms for 3-state hexagonal cellular automata with periodic boundaries," Intern. J. Bifur. and Chaos, vol. 23, 1350101-1-15, 2013.
8. S. Uguz, E. Acar, Sh. Redjepov, "2D Triangular von Neumann Cellular Automata with Periodic Boundary," Intern. J. Bifur. and Chaos, vol. 29 (03), 1950029, 2019.
9. S. Uguz, S. Redjepov, E. Acar, H. Akin, "Structure and Reversibility of 2D von Neumann Cellular Automata Over Triangular Lattice," Intern. J. Bifur. and Chaos, vol. 27, 1750083, 2017.

10. S. Uguz, and S. Redjepov, "Reflexive and adiabatic boundary 2D linear cellular automata and evolution of image patterns," International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT), pp. 1–7, 2021.
11. S.M. Ulam, "On some mathematical problems connected with patterns of growth of figures," Proc. Symp. Appl. Math., vol. 14, pp. 215–224, 1962.
12. J. Von Neumann, The Theory of Self-reproducing Automata, A.W. Burks (Ed.), Univ. of Illinois Press, Urbana, 1966.

REZYUME

Ushbu maqolada, ma'lum chegaraviy shartlarda Mur qo'shnilari bo'yicha ikki o'lchovli kletkali avtomatlar (2D KA) qaraladi. Jumladan, \mathbb{Z}_p maydoni ustida ba'zi aralash chegaraviy shartlari bilan Mur qo'shnilari bo'yicha aniqlangan ikki o'lchovli chiziqli kletkali avtomatlarning qoida matritsalarini o'rganamiz. Bundan tashqari, ikki o'lchovli chekli KA uchun olingan qoida matritsalarini teskarilanuvchan bo'lishlik shartlarni aniqlaymiz.

Kalit so'zlar: kletkali avtomatlar, chegaraviy shartlar, qoida matritsasi, teskarilanuvchanlik.

РЕЗЮМЕ

В данной работе при определенных условиях рассматриваются двумерные клеточные автоматы (2D КА) с окрестностью Мура. А именно, мы изучаем матрицы правил двумерных линейных клеточных автоматов, заданных окрестностью Мура с некоторыми смешанными граничными условиями над полем \mathbb{Z}_p . Кроме того, мы представляем условия, при которых полученные матрицы правил для двумерных конечных КА являются обратимыми.

Ключевые слова: клеточные автоматы, граничные условия, матрица правил, реверсивность.

UDC 517.9

UCHINCHI TIP KLASSIK SOHA AVTOMORFIZMLARINING BA'ZI
XOSSALARI

Erkinboyev Q. S. *

REZYUME

Bu maqolada Rudin [2] kitobidagi Teorema 2.2.2 ning Kartanning uchinchi tip klassik sohasidagi analogi keltirilgan.

Kalit so'zlar: Bir jinsli soha, Simmetrik soha, Klassik soha, Avtomorfizm.

Ma'lumki, Riman teoremasiga asosan chegarasi bir nuqtadan ko'p bo'lgan ixtiyoriy bir bog'lamli soha $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birlik doiraga bigolomorf ekvivalent bo'ladi. Ammo $\mathbb{C}^n (n > 1)$ fazoda bunday xossa (xususiyat) umuman olganda o'rinli emas. Masalan shar va polidaira o'zaro bigolomorf ekvivalent emas. Shuning uchun, \mathbb{C}^n fazoda bigolomorf sohalar sinfi muhim hisoblanadi.

Aytaylik, $a \in \mathbb{C}^n$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin ([2]). Ushbu

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}$$

to'plam \mathbb{C}^n fazoda markazi a nuqtada, radiusi r bo'lgan shar deyiladi. \mathbb{C}^n kompleks fazoda $B(a, r)$ sharning avtomorfizmi quyidagi formula orqali aniqlanadi[2]:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - s_a Q_a z}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

Bu yerda

$$P_a z = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, Q_a = I - P_a, s_a = \sqrt{1 - |a|^2}.$$

Teorema[2]. $\forall a \in B$ uchun $\varphi_a(z)$ akslantirish quyidagi xossalarga ega:

- 1) $\varphi_a(0) = a$ va $\varphi_a(a) = 0$;
- 2) $\varphi'_a(0) = -s^2 P - sQ$ va $\varphi'_a(a) = -\frac{P}{s^2} - \frac{Q}{s}$;
- 3) $\forall z \in \bar{B}, \omega \in \bar{B}$ lar uchun ushbu

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(\omega) \rangle = \frac{(1 - \langle a, a \rangle)(1 - \langle z, \omega \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, \omega \rangle)}$$

tenglik o'rinli;

- 4) $\forall z \in \bar{B}$ uchun quyidagi

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}$$

*Erkinboyev Q. S. – Urganch davlat universiteti qerkinboyev@gmail.com

munosabat o'rinli;

- 5) $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$ (involyutsiya bo'lish xossasi);
- 6) $\varphi_a(z)$ gomeomorfizm bo'ladi: $\varphi_a(z) \in Aut(B)$.

Endi yuqorida keltirilgan teoremaning 3-tip klassik soha uchun analogini keltiramiz. Buning uchun bizga quyidagi ta'riflar zarur bo'ladi.

Ta'rif 1. Berilgan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha bir jinsli soha deyiladi, agar bu soha avtomorfizmlari gruppasi $Aut(D)$ tranzitiv bo'lsa. Ya'ni ixtiyoriy $z_1, z_2 \in D$ nuqtalar uchun shunday $\varphi \in Aut(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lib $\varphi(z_1) = z_2$ munosabat o'rinli bo'lsa.

Ta'rif 2. Bir jinsli $D \subset \mathbb{C}^n$ soha simmetrik soha deyiladi, agar har qanday $\varsigma \in D$ nuqta uchun shunday $\varphi \in Aut(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lib quyidagi munosabatlarda o'rinli bo'lsa:

- 1) $\varphi(\varsigma) = \varsigma$, $z \neq \varsigma$ nuqtalar uchun $\varphi(z) \neq z$.
- 2) $\varphi \circ \varphi = e$, bu yerda $e \in Aut(D)$ birlik akslantirish.

Ta'rif 3. G matritsalar gruppasi Li gruppasi tashkil qiladi deyiladi faqat va faqat shu holdaki nosingulyar limitlarga nisbatan yopiq bo'lsa, ya'ni agar $A_1, A_2, \dots \in G$ matritsalar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ va $\det(A) = 0$ munosabatlarning o'rinli ekanidan $A \in G$ ekani kelib chiqsa.

Ta'rif 4. Chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha klassik soha deyiladi, agar bu sohaning golomorf avtomorfizmlari to'la gruppasi klassik Li gruppasini tashkil qilsa va tranzitiv bo'lsa.

Bir jinsli, simmetrik, qavariq va chegaralangan kompleks sohalar turli nuqtai nazardan katta qiziqish uyg'otadi. Buning sababi shundaki, ular yordamida bir qator muhim, asosan ko'p o'lchovli natijalar olingan ([1], [2], [3] va boshqalar).

Bir jinsli sohalarda integral formulalar qurishda avtomorfizmlar gruppasidan foydalaniladi. Bunda avtomorfizmlar gruppalarini([4], [5]) keng bo'lgan elementi matritsalaridan iborat sohalar ([1], [6]) qaraladi. Matritsaviy sohalar birinchi bo'lib E.Kartan va K.Zigel tomonidan chuqur o'rganilgan. Jumladan, ular to'rtta klassik sohalar avtomorfizmlarining umumiy ko'rinishlarini tasvirlashgan. Xua Lo-Ken esa klassik sohalar uchun ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida garmonik analizni qurgan (1944-1957 yillarda) va ular bo'yicha natijalar Xua Lo-Kenning 1958-yilda xitoy tilida chop etilgan (1959-yilda rus tilida chop etilgan [1]) monografiyasida keltirilgan.

Klassik sohalarning Zigel sohalari bilan bigolomorf akslantirish mavjudligi [7] da keltirilgan. Bunday bigolomorf akslantirishlar yozilgan va ularning chegaralanmagan sohalarga golomorf davom qildirishlar masalalariga tadbirlari keltirilgan ([9], [10]). Shuning uchun klassik sohalar ko'p o'lchovli kompleks analizda muhim o'rin tutadi.

Uchinchi tip klassik soha: $\mathfrak{R}_3(m, m)$ -sohaning har bir elementi ushbu[1]:

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0$$

munosabatni qanoatlantiruvchi m -tartibli kososimmetirik kvadrat matritsalaridan iborat. Bunda $I^{(m)}$ - m -tartibli birlik kvadrat matritsa, \bar{Z} esa Z ga qo'shma matritsa.

$\mathfrak{R}_3(m, m)$ uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi[1]:

$$\varphi(Z) = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZA' - B') . \quad (1)$$

Bu avtomorfizmlarning koeffitsiyentlari mos ravishda

$$A^*A - B^*B = I^{(m)}, \quad A'B = -B'A \text{ va } A^*A - B'\bar{B} = I^{(m)}, \quad B^*A = -A'\bar{B} \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Agar $A = Q$, $A^{-1}B = -P$ deb belgilab (1) akslantirishni soddalashtirsak quyidagi

$$\varphi(Z) = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ushbu

$$\varphi_P(Z) = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \quad (3)$$

(bu yerda: $Z \in \mathfrak{R}_3(m, m)$, $\bar{Q}(I + P\bar{P})Q' = I^{(m)}$, $QP + P\bar{Q} = 0$, $Q = Q^*$ (4)) akslantirish berilgan bo'lsin.

Teorema. $\varphi_P(Z)$ akslantirish uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1⁰. $\varphi_P(P) = 0$, $\varphi_P(0) = P$;

2⁰. $d(\varphi_P(P)) = QdZQ'$, $d(\varphi_P(0)) = (Q^*)^{-1}dZ\bar{Q}^{-1}$;

3⁰. Ixtiyoriy $Z, W \in \mathfrak{R}_3(m, m)$ uchun ushbu:

$$\det(I - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, W \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, W \rangle)} \quad (5)$$

munosabat o'rinli;

4⁰. Ixtiyoriy $Z \in \mathfrak{R}_3(m, m)$ uchun

$$\det(I - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, Z \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, Z \rangle)}$$

5⁰. $\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$ (involuytsiya bo'lish xossasi);

6⁰. $\varphi_P(Z)$ - gomeomorfizm bo'ladi. $\varphi_P(Z) \in \text{Aut}(\mathfrak{R}_3(m, m))$.

Isbot. 1⁰. $\varphi_P(Z)$ akslantirishning $Z = P$ va $Z = 0$ nuqtalardagi qiymatini hisoblaymiz:

$$\varphi_P(P) = 0, \quad \varphi_P(0) = -QP\bar{Q}^{-1}.$$

Endi $QP + P\bar{Q} = 0$ shartga ko'ra $P = -QP\bar{Q}^{-1}$ tenglik o'rinli. Bundan

$$\varphi_P(P) = 0, \quad \varphi_P(0) = P$$

ekani kelib chiqadi.

2⁰. $\varphi_P(Z)$ akslantirishning differensialini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} d(\varphi_P(Z)) &= d\left(Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}\right) = \\ &= QdZ(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} + Q(Z - P)d\left((I + \bar{P}Z)^{-1}\right)\bar{Q}^{-1} = \\ &= QdZ(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} - Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{P}dZ(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}. \end{aligned}$$

$\varphi_P(Z)$ akslantirish differensialining $Z = P$ va $Z = 0$ nuqtadagi qiymatlarini topamiz

$$d(\varphi_P(P)) = QdZ(I + \bar{P}P)^{-1}\bar{Q}^{-1}, \quad d(\varphi_P(0)) = Q(I + P\bar{P})dZ\bar{Q}^{-1}.$$

(4) munosabatlarga ko'ra

$$(I + \bar{P}P)^{-1}\bar{Q}^{-1} = Q', Q(I + P\bar{P}) = (Q^*)^{-1}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Demak

$$d(\varphi_P(P)) = QdZQ', d(\varphi_P(0)) = (Q^*)^{-1}dZ\bar{Q}^{-1}.$$

3⁰. Bu xossani isbotlash uchun avvalo ushbu

$$\varphi(Z) = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZA' - B'), \varphi(W) = (WB^* + A^*)^{-1}(WA' - B')$$

(bu yerda $A^*A - B^*B = I^{(m)}$, $A'B = -B'A$ va $A^*A - B'\bar{B} = I^{(m)}$, $B^*A = -A'\bar{B}$) munosabatlar uchun $I - \langle \varphi(Z), \varphi(W) \rangle$ ifodani hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} I - \langle \varphi(Z), \varphi(W) \rangle &= I - (ZB^* + A^*)^{-1}(ZA' - B')(\bar{A}W^* - \bar{B})(BW^* + A)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}((ZB^* + A^*)(BW^* + A) - (ZA' - B')(\bar{A}W^* - \bar{B}))(BW^* + A)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}(ZB^*BW^* + ZB^*A + A^*BW^* + A^*A - ZA'\bar{A}W^* + ZA'\bar{B} + B'\bar{A}W^* - \\ &\quad - B'\bar{B})(BW^* + A)^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(Z(B^*B - A'\bar{A})W^* + Z(B^*A + A'\bar{B}) + \\ &\quad + (A^*B + B'\bar{A})W^* + (A^*A - B'\bar{B}))(BW^* + A)^{-1} \end{aligned}$$

(2) munosabatlarga ko'ra quyidagilar o'rinli

$$B^*B - A'\bar{A} = -I, B^*A + A'\bar{B} = 0, A^*B + B'\bar{A} = 0, A^*A - B'\bar{B} = I$$

demak

$$\begin{aligned} I - \langle \varphi(Z), \varphi(W) \rangle &= (ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZIW^*)(BW^* + A)^{-1} = \\ &= (ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZW^*)(BW^* + A)^{-1} \end{aligned}$$

ya'ni

$$I - \langle \varphi(Z), \varphi(W) \rangle = (ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZW^*)(BW^* + A)^{-1}$$

tenglik o'rinli. Bundan esa

$$\det(I - \langle \varphi(Z), \varphi(W) \rangle) = \det((ZB^* + A^*)^{-1}(I - ZW^*)(BW^* + A)^{-1}) =$$

$$= \frac{\det(I - ZW^*)}{\det(ZB^* + A^*)\det(BW^* + A)} = \frac{\det(I - ZW^*)}{\det((ZB^*(A^*)^{-1} + I)A^*)\det(A(A^{-1}BW^* + I))} \quad (6)$$

munosabatning o'rinli ekani kelib chiqadi. Agar $A^{-1}B = -P$ ekanini inobatga olib $I - PP^*$ ning qiymatini hisoblaydigan bo'lsak

$$I - PP^* = I - A^{-1}B(A^{-1}B)^* = I - A^{-1}BB^*(A^{-1})^* = A^{-1}(AA^* - BB^*)(A^{-1})^* = A^{-1}(A^{-1})^*$$

tenglikning o'rinli ekani va bundan

$$\det(I - PP^*) = \det(A^{-1}(A^{-1})^*) = \det(A^{-1}) \det((A^{-1})^*) \quad (7)$$

munosabatning o'rinli ekani kelib chiqadi. (7) tenglikdan foydalanib (6) ni soddalashtiradigan bo'lsak ushbu

$$\det(I - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, W \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, W \rangle)}$$

tenglikga ega bo'lamiz.

4^o. Bu xossani isbotlash uchun (5) tenglikda $W = Z$ almashtirishning o'zi yetarli.

$$\det(I - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, Z \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, Z \rangle)}.$$

5^o. $\varphi_P(Z)$ akslantirish (bu yerda: $Z \in \mathfrak{R}_3(m, m)$, $\bar{Q}(I + P\bar{P})Q' = I^{(m)}$, $QP + P\bar{Q} = 0$) uchun

$$\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$$

munosabatning o'rinli ekanini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \varphi_P(Z) &= Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \\ \varphi_P(\varphi_P(Z)) &= Q(\varphi_P(Z) - P)(I + \bar{P}\varphi_P(Z))^{-1}\bar{Q}^{-1} = \\ &= Q\left(Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} - P\right)\left(I + \bar{P}Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}\right)^{-1}\bar{Q}^{-1} = \\ &= Q(Q(Z - P) - P\bar{Q}(I + \bar{P}Z))(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}\bar{Q}(I + \bar{P}Z)(I\bar{Q}(I + \bar{P}Z) + \\ &+ \bar{P}Q(Z - P))^{-1}\bar{Q}^{-1} = Q(QZ - QP - P\bar{Q} - P\bar{Q}\bar{P}Z)(\bar{Q} + \bar{Q}\bar{P}Z + \bar{P}QZ - \bar{P}QP)^{-1}\bar{Q}^{-1} = \\ &= Q((Q - P\bar{Q}\bar{P})Z - (QP + P\bar{Q}))((\bar{Q}\bar{P} + \bar{P}Q)Z + (\bar{Q} - \bar{P}QP))^{-1}\bar{Q}^{-1} = \\ &= (Q(Q - P\bar{Q}\bar{P})Z - Q(QP + P\bar{Q}))(\bar{Q}(\bar{Q}\bar{P} + \bar{P}Q)Z + \bar{Q}(\bar{Q} - \bar{P}QP))^{-1}. \end{aligned}$$

Bundan $\varphi_P(Z)$ akslantirishning koeffitsiyentlari uchun (4) munosabatlarning o'rinli ekanini hisobga olsak quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$Q(Q - P\bar{Q}\bar{P}) = I, \bar{Q}(\bar{Q} - \bar{P}QP) = I, Q(QP + P\bar{Q}) = 0, \bar{Q}(\bar{Q}\bar{P} + \bar{P}Q) = 0. \quad (8)$$

Endi (8) munosabatlardan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\varphi_P(Z) = (Q(Q - P\bar{Q}\bar{P})Z - Q(QP + P\bar{Q}))(\bar{Q}(\bar{Q}\bar{P} + \bar{P}Q)Z + \bar{Q}(\bar{Q} - \bar{P}QP))^{-1} = Z,$$

ya'ni

$$\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z.$$

6⁰. Bu xossani isbotlashda dastlab $\varphi_P(Z) \in \text{Aut}(\mathfrak{R}_3(m, m))$ ekanini ko'rsatamiz. Biz yuqorida $\mathfrak{R}_3(m, m)$ uchunchi tip klassik soha avtomorfizmini (1) ko'rinishida $A = Q$, $A^{-1}B = -P$ deb almashtirish bajarish orqali ushbu

$$\varphi(Z) = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \quad (9)$$

ko'rinishiga ega bo'lgan edik. Agar $A = Q$, $A^{-1}B = -P$ almashtirishni e'tiborga olsak (2) munosabatlar quyidagiga

$$\bar{Q}(I + P\bar{P})Q' = I^{(m)} \quad (10)$$

ekvivalent. Biz qarayotgan $\varphi_P(Z)$ akslantirish uchun (4) munobatlarning o'rinli ekanidan va uchinchi tip klassik soha avtomorfizmining (9) ko'rinishi uchun (10) munosabatning o'rinli ekanidan $\varphi_P(Z) \in \text{Aut}(\mathfrak{R}_3(m, m))$ kelib chiqadi.

Demak $\varphi_P(Z)$ -gomeomorfizm bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n . – М.: Мир, 1984. – 456 с.
3. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables. Cham: Springer, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63231-5>
4. Айзенберг Л. А., Формулы Карлемана в комплексном анализе, Наука, Новосибирск, 1990.
5. Айзенберг Л. А, Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979. –366 с.
6. Худайберганов Г., Хидиров Б.Б., Рахмонов У.С. Автоморфизмы матричных шаров. Вестник НУУЗ. 2010. №3. с-205-210.
7. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: ИЛ., 1961 г.
8. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
9. G. Khudayberganov, U.S. Rakhmonov, Z.Q. Matyakubov. Integral formulas for some matrix domains. Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, 2016, pp. 89-95.
10. Г. Х. Худайберганов, Б. Т. Курбанов, Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях Зигеля, Наука –технология – образование – математика – медицина, СМФН, 68, №1, Российский университет дружбы народов, М., 2022, 144–156

РЕЗЮМЕ

В этой статье получен аналог Теоремы 2.2.2 из книги Рудина [2] для классических областей Картана третьего типа.

Ключевые слова: Однородная область, Симметричная область, Классическая область, Автоморфизма.

RESUME

In this paper, we obtain an analog of Theorem 2.2.2 from Rudin's [2] book for classical Cartan domains of the third type.

Key words: Homogeneous domain, Symmetric domain, Classical domain, Automorphism.

UDC 519(6)

**O‘ZBEKISTON AHOLISI O‘SISHINING MATEMATIK MODELINI VA BA‘ZI
KO‘RSATKICH TAHLILLARI****Jabborov N. M. * Narmanov A. J. *****REZYUME**

Ushbu maqola mustaqillikka erishishilgandan keyingi O‘zbekiston Respublikasi aholisi ko‘payishining matematik modelini tavsiflashga bag‘ishlangan. Model uchta chiziqli bo‘lmagan differensial tenglamalardan iborat, ammo oz sonli o‘zgaruvchilar va parametrlarga qaramay, u inson evolyusiyasining eng muhim omillari – demografiya, iqtisodiyot, texnologiya va savodxonlik dinamikasini yuqori aniqlik bilan tavsiflaydi.

Kalit so‘zlar: demografik model, tug‘ilish darajasi, o‘lim darajasi, migratsiya, populyatsiya, giperbolik o‘shish, daromad darajasi.

Kirish

Respublikamizda barqaror va samarali iqtisodiyotni yaratishga qaratilgan iqtisodiy islohotlarning markazida demografik vaziyat turibdi. O‘zbekistonda o‘ziga xos demografik vaziyat mavjud: u aholi o‘shish sur‘atlarining ortishi, uning tug‘ilish darajasi, o‘lim darajasining kamayishi va shu bilan birga, mehnatga layoqatli aholi sonining ko‘payishida namoyon bo‘lmoqda. Aholi jamiyat taraqqiyotida ishlab chiqaruvchi kuch sifatida ham, iste‘molchi sifatida ham hal qiluvchi rol o‘ynaydi.

O‘zbekiston Respublikasi o‘z mustaqilligini e‘lon qilgandan so‘ng 1991-yildan boshlab mamlakatimizda ham demografik vaziyat o‘zgara boshladi. O‘zbekiston aholisi 1991-yildan keyin eng ko‘p miqdorda o‘sgan davlat (+68,4 %) hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasida aholi soni 2024-yil 1-yanvar holatida O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti huzuridagi Statistika agentligi ma‘lumotiga [2] ko‘ra 36 779 800 nafarni tashkil qiladi. Bu aholining yashash dinamikasiga ko‘ra, bu raqam doimo o‘zgarib turadi. 2023-yilda Respublikamizda tug‘ilish 3,2% ni, o‘lim taxminan 0,4 % ni, tabiiy o‘shish esa 3,8 % ni tashkil etdi.

Prezidentimiz Shavkat Mirziyoev 2022-yil 20-dekabr kuni Oliy Majlisga va O‘zbekiston xalqiga Murojaatnomasida [1] o‘tgan yili mamlakatimiz aholisi 36 milliondan oshganini, har yili qariyb 900 ming nafar yangi avlod vakillari bilan to‘ldirilayotganini ta’kidladi. Katta va do‘stona oilamiz – O‘zbekistondagi har bir inson tinch va farovon yashashi uchun barcha sharoitlarni yaratishga harakat qilmoqdamiz. Xalq bizdan maktablar, bolalar bog‘chalari va kasalxonalar qurishni, ta’lim va tibbiyot sifatini oshirishni, ichimlik suvi va elektr energiyasi, yo‘l va transport bilan bog‘liq mahalliy muammolarni hal etishni, ish o‘rinlari sonini ko‘paytirishni, tadbirkorlik uchun yangi imkoniyatlar yaratishni, adolatni ta‘minlashni, byurokratiya va korrupsiyaga

* **Jabborov N. M.** – Toshkent davlat Iqtisodiyot universiteti professori, f.-m.f.d., jabborov61@mail.ru

* **Narmanov A. J.** – Toshkent shahridagi "MEI" milliy tadqiqot universiteti Federal davlat byudjeti oliy ta’lim muassasasi filiali katta o‘qituvchisi, a-narmanov@mail.ru

barham berishni kutmoqda deb aytib o‘tgandi. Binobarin, Yangi O‘zbekistonni o‘zgartirishda "Avvalo, inson, keyin jamiyat va davlat" tamoyili asosiy o‘rin tutadi.

Aholi sonining oshishi birinchi navbatda sog‘liqni saqlash va ta‘lim tizimiga bosim tushadi. Prognozlashtirish va makroiqtisodiy tadqiqotlar institutining ma‘lumotiga ko‘ra: Yevropa mintaqasi mamlakatlarida har 10 ming kishiga o‘rtacha 34 nafar shifokor to‘g‘ri keladi, Amerikada – 24, G‘arbiy Tinch okeani mintaqasida – 19, Sharqiy O‘rtayer dengizida – 10, Janubi-Sharqiy Osiyoda – 8, O‘zbekistonda bu ko‘rsatkich 27 nafarni tashkil etadi. Agar Yevropa va Amerika mamlakatlarida har 10 000 kishiga 80 nafardan ortiq (81 va 83) hamshira to‘g‘ri kelsa, O‘zbekistonda 10 000 kishiga 107 nafar hamshira to‘g‘ri keladi.

Aholi sonining oshishi bilan ta‘lim tizimiga ham bosim tushadi. 2022-yil boshida 3–6 yosh oralig‘idagi bolalar soni 2855,2 ming nafarni tashkil qilgan. Prognozlarga ko‘ra, 2026–yilga borganda ularning soni 3567,3 ming nafarni, 2030–yilda esa 3631,9 ming nafarni tashkil etadi.

3–6 yosh oralig‘idagi bolalarni maktabgacha ta‘lim bilan qamrab olishning erishilgan ko‘rsatkichlarini saqlab qolish va kelajakda respublikaning barcha hududlarida jahonning rivojlanayotgan davlatlaridagi kabi ko‘rsatkichlarni (80 % atrofida) ta‘minlash uchun 1 million 400 ming nafar bola uchun maktabgacha ta‘lim muassasalarida yangi o‘rinlar tashkil etish, malakali mutaxassis-tarbiyachilarni tayyorlash zarur, deb hisoblanadi. 2030-yilga borib, 3–6 yosh oralig‘idagi barcha bolalarni maktabgacha ta‘lim bilan qamrab olish natijasida 28 000 ta ish o‘rni tashkil etish mumkin.

2029/2030–o‘quv yiliga qadar bitiruvchilar hamda 1–sinfga qabul qilinadiganlar o‘rtasidagi tafovut o‘rtacha 162,8 ming o‘quvchini tashkil qiladi. Yiliga o‘rta hisobda qo‘shimcha 162,8 ming o‘quvchi uchun kamida 4500 nafar yangi o‘qituvchi jalb qilish zarur bo‘ladi. 2021/2022–o‘quv yilida jami o‘quvchilar soni 6 mln 304 ming 600 nafar, o‘qituvchilar soni 529,1 ming nafar, ya‘ni bitta o‘qituvchiga 11,9 nafar o‘quvchi to‘g‘ri keladi. Rivojlangan mamlakatlarda ushbu ko‘rsatkich 10 nafardan oshmaydi.

Har yili oliy o‘quv yurtlari o‘rtacha 30 ming nafar oliy ma‘lumotli pedagogni mehnat bozoriga chiqaradi. Oliy ma‘lumot bilan qamrab olish darajasini 50 % ga yetkazish va ayollar uchun kvotalar sonini oshishi natijasida, 2030-yilga borib, oliy o‘quv yurtlari har yili o‘rta hisobda 35?40 ming nafar pedagog kadrlarni tayyorlashi kutilmoqda. Buning natijasida har bir o‘qituvchiga 10 ta o‘quvchi to‘g‘ri keladi. Bugungi kunda respublikada 180 dan ortiq oliy o‘quv yurti faoliyat yuritmoqda. 2021/2022–o‘quv yilida OTMlarga bitiruvchilarni oliy ta‘lim bilan qamrab olish darajasi 38 % ga yetdi. Bitiruvchilarni 50 % oliy ta‘lim bilan qamrab olish uchun zarur bo‘lgan talaba o‘rinlari soni: 2026-yilda jami o‘rta ta‘limni bitiruvchilar soni 619,0 ming nafar, 2030-yilga borib, 615,5 ming nafar bo‘lishi kutilmoqda.

2030-yilda o‘rta ta‘lim bitiruvchilarni 50 % oliy ta‘lim bilan qamrab olish uchun OTMlarning hozirgi quvvatini 8 yil ichida 1,5–1,8 marta oshirish zarur.

Tadqiqotlarga ko‘ra, millat 25 yil yashashi uchun har bir oilada tug‘ilish koeffitsienti bir oilaga 2,11 farzand to‘g‘ri kelishi kerak. Bundan kam bo‘lsa, millat yo‘qoladi. Agar tug‘ilish koeffitsienti 1,9 ga teng bo‘lsa millat qayta tiklanmaydi. Bugungi kunda tug‘ilish koeffitsienti Fransiyada – 1,8 ni, Angliyada – 1,6 ni, Gresiyada – 1,3 ni, Italiyada – 1,2 ni, Ispaniyada – 1,1 ni tashkil etmoqda. Yevropa Ittifoqining 31 davlatida tug‘ilish koeffitsienti har bir oilaga o‘rtacha 1,38 tadan to‘g‘ri kelmoqda.

Matematik modellarning har xil turlari ma‘lum demografik jarayonlarning rivojlanish qonuniyatlarini aniqlash imkonini beradi. So‘nggi o‘n yilliklarda prognozlash nazariyasining

rivojlanishi turli xil parametrlarda prognozlarini tuzishning ko‘plab protseduralari va usullarini ishlab chiqishga olib keldi ([4, 5, 8]).

Ushbu maqola O‘zbekiston Respublikasi aholisi o‘shining ijtimoiy holatini matematik modellashtirish, unga iqtisodiyot, texnologiya va ta‘lim rivojlanishining ta‘sirining ba‘zi ko‘rsatkichlarini tahlil qilishga bag‘ishlangan.

Matematik modellar va demografiya

Ijtimoiy fanlar va matematikaning konstruktiv sintezi ijtimoiy miqdorlarni o‘lchashning adekvat usullarini joriy qilishni talab qiladi. Xuddi fizikada bo‘lgani kabi, ba‘zi miqdorlarni nisbatan oson baholash mumkin, boshqalarni o‘lchash ko‘p vaqt talab qiladigan mehnatni, hatto yordamchi modellarni qurishga to‘g‘ri keladi. To‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘lchash uchun eng qulay ijtimoiy miqdorlardan biri bu odamlar soni. Shu sababli, demografiya sohasi tadqiqotchilarni o‘ziga jalb qiladi. Ma‘lumotlarning o‘lchanishi va demografik dinamikani tavsiflovchi saqlanish qonunidan kelib chiqadigan formulaga ko‘ra:

$$\frac{dN}{dt} = H - D, \quad (1)$$

bu yerda N – Respublikamizdagi umumiy aholi soni, H – tug‘ilganlar soni va D – vaqt birligidagi o‘limlar soni. Tug‘ilganlar soni ham, o‘limlar soni ham boshqa ko‘plab ijtimoiy parametrlarga bog‘liq ekanligi ayon bo‘ladi.

Bundan tashqari, formula (1) migratsiya jarayonlarini hisobga olmaydi va shuning uchun uni kengaytirish kerak:

$$\frac{dN}{dt} = H - D - \text{div}\mathbf{J}$$

bu yerda \mathbf{J} vektor migratsiya oqimiga mos keladi. Migratsiya jarayonlari tashqi omillar ta‘siriga ko‘proq moyil bo‘lganligi sababli vazifa murakkablashadi.

Tug‘ilish va o‘limning biologik jarayonlari nafaqat insonlarga, balki hayvonlarga ham xosdir. Shuning uchun biologiyada qo‘llaniladigan aniq populyatsiya modellaridan foydalangan holda demografik modellarni tavsiflashga urinish mutlaqo tabiiy qadamdir.

Hayvonlar populyatsiyasining dinamikasini tavsiflovchi asosiy model Ferxyulst tomonidan taklif qilingan logistik modeldir:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (2)$$

yoki (2) ni quyidagi ko‘rinishlarda ifodalash mumkin:

$$\frac{dN}{dt} = (a_1N) - (a_2N + bN^2), \quad (3)$$

bu yerda birinchi qavs H tug‘ilganlar soniga, ikkinchisi esa (1) formuladagi D o‘lganlar soniga to‘g‘ri keladi va r , K , a_1 , a_2 , b musbat koeffitsientlar bo‘lib quyidagi munosabatlar orqali o‘zaro bog‘langan.

$$r = a_1 - a_2 \quad \text{va} \quad b = \frac{r}{K}.$$

(3) tenglamaning mantig‘i quyidagicha: tug‘ilish darajasi a_1 doimiy, shuning uchun tug‘ilganlar soni $B = a_1N$ populyatsiya soniga mutanosib, tabiiy o‘lim a_2 ham doimiy

hisoblanadi va kvadratik qo'shilish bN^2 ga teng deb olsak bo'ladi. Yana bir mashhur populyatsiya modeli Lotka-Volterra modeli [3] bo'lib, "Yirtqich-o'lja" modeli sifatida tanilgan. U o'zaro ta'sir qiluvchi ikkita turning populyatsiya dinamikasini tavsiflaydi, ulardan biri ikkinchisi uchun asosiy oziqa hisoblanadi va (1) ko'rinishdagi ikkita tenglamadan iborat:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Bxy, \\ \frac{dy}{dt} = Cxy - Dy. \end{cases} \quad (4)$$

bu yerda x – o'lja soni, y – yirtqichlar soni, A, B, C, D – koeffitsientlar. Ushbu modelni ham aholi o'sishiga tadbiiq qilish mumkin. (4) dan demografik yangi matematik model sifatida foydalanish mumkin. Jabrlanuvchi roliga aholi, yirtqich roliga esa ijtimoiy beqarorlik, urushlar, ocharchiliklar, epidemiyalarni sifatida olamiz.

Respublika aholisining giperbolik o'sishi va S.P. Kapitsa modeli

Agar biz butun insoniyat dinamikasini kuzatsak, inson populyatsiyasi giperbolik qonunga muvofiq o'sishini ko'ramiz. Bu haqdagi birinchi ishlar 1960-yili fon Forrester, Mora va Emietlar tomonidan yozilgan [11]. Ular demografik ma'lumotlarda statistik baholashni amalga oshirdilar va aholining o'sishi eng yaxshi egri chiziq bilan yaqinlashishini aniqladilar.

$$N = \frac{C}{t_0 - t}, \quad (5)$$

bu yerda C va t_0 doimiylar.

Forster (1) va (3) tenglamalardagi ko'rsatkichlarni baholab, aholining o'sish jarayonini tasvirlamaydi degan xulosaga keladi. Forster modelga nochiziqlikni kiritish orqali modellashtirishni taklif qiladi

$$\frac{dN}{dt} = (a_0 N^{\frac{1}{k}})N,$$

bu yerda a_0, k tajribadan aniqlanishi kerak bo'lgan doimiylar.

$$N = N_1 \left(\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t} \right)^k,$$

Forster k ni birga teng deb hisoblab, uning yechimini (5) ko'rinishda yozadi.

(1), (2) biologik taxminlarga asoslangan demografik modellardan farqli o'laroq, S.P.Kapitsa modeli aholi o'sishi tug'ilish va o'lim vaqt o'tishi bilan kam o'zgaradi degan taxminga asoslanadi:

$$\frac{dN}{dt} = aN, \quad (6)$$

a doimiy bo'lsa, S.P.Kapitsa o'sish tezligi uchun kvadratik bog'liqlikdan foydalanishni taklif qiladi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{C}, \quad (7)$$

bu yerda C doimiydir.

(7) ko'rinishdagi tenglamalar [12] da yaxshi o'rganilgan va ularning yechimlari *portlash rejimlari* deb nomlanadi. Bunday tenglamalarning xarakterli xususiyati shundaki, chekli t_0 vaqtda yechim cheksizlikka intiladi.

Demografik o'tishni tavsiflash uchun S.P. Kapitsa modelni quyidagicha o'zgartiradi. Kapitsa modeldagi muhim parametr sifatida "insoniyat tizimi va inson rivojlanishining ichki cheklash qobiliyati"ni ifodalovchi $\tau = 42$ yilni insonning xarakterli hayot davri deb hisoblaydi. S.P.Kapitsa demografik o'sish ikki marta τ ga teng xarakterli vaqt davomida sodir bo'lishini ta'kidlaydi.

Agar (5) yechimni kvadrat o'sish tenglamasiga (7) almashtirsak, u holda uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2}, \quad (8)$$

O'z navbatida, demografik o'tishni tavsiflash uchun S.P.Kapitsa ushbu tenglamaga τ parametrini kiritadi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(t_0 - t)^2 + \tau^2}, \quad (9)$$

Bunday modifikatsiya bilan aholi soni barqarorlashadi, bu demograflarning prognozlariga mos keladi. (9) tenglama aholi sonining analitik formulasini olish imkonini beradi:

$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arctg}\left(\frac{t_1 - t}{\tau}\right), \quad (10)$$

bu yerda t_1 qarayotgan vaqt oralig'ining o'rtasiga teng parametr – demografik o'tishning o'rtasi. Demografik o'tish effektini tavsiflovchi asosiy tenglama (7) ham, uning modifikatsiyasi (9) ham mavjud qonunlarning mohiyatini to'liq ochib bermaydi. Har ikkala ifodaning matematik ekvivalentligiga qaramay, yozuv shaklidagi farq ularning talqinidagi farqni belgilaydi.

Olingan empirik qonuniyat va hatto uning muvaffaqiyatli matematik interpolyatsiyasi ham asosiy qonuniyatni bermaydi. Bunday vaziyatdan chiqishning yagona yo'li oltin o'rtalikni topishdir.

O'zbekiston aholisining o'sish modeli va texnologiyalar M. Kremer modeli

Agar avvalgi barcha pasayishlar, birinchi navbatda, turli ofatlar – urushlar, ocharchiliklar, epidemiyalar tufayli o'limning ko'payishi bilan bog'liq bo'lgan bo'lsa hamda bu ofatlar tugashi bilan insoniyat tezda tiklanib, avvalgi traektoriyasiga qaytgan bo'lsa, hozirgi pasayish boshqa sabablarga ko'ra yuzaga kelmoqda. Maykl Kremer [10] tomonidan taklif qilingan eng oddiy model mahsulot ishlab chiqarish ikki omilga bog'liqligini nazarda tutadi: texnologiya darajasi va aholi soni.

M. Kremer Y – ishlab chiqarilgan mahsulot, p – aholi soni, A – texnologiya darajasi uchun belgilarni qo'llaydi.

Kremer, ishlab chiqarilgan umumiy mahsulotni quyidagiga teng deb hisoblaydi, ya'ni

$$G = TN^\alpha V^{1-\alpha},$$

bu yerda G – umumiy mahsulot, T – texnologiya darajasi, V – foydalanilgan yer resurslari, $0 < \alpha < 1$ parametr. Bunda M. Kremer Kobba-Duglas funksiyasidan foydalanadi va bu o'zini to'liq oqlamaydi. Unga ko'ra, normallashtirish natijasida V o'zgaruvchi birga teng. Ishlab chiqarilgan mahsulot tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$G = rTN^\alpha, \quad (11)$$

bu yerda r, α ba'zi doimiylar.

M. Kremer Maltus [7] pozitsiyasidan (11) foydalanib, uni quyidagicha qayta shakllantiradi: modelda aholi o'sishi \bar{N} muvozanat darajasiga yaqinlashadi. Modelidagi muvozanat miqdori aholi jon boshiga to'g'ri keladigan mahsulot ishlab chiqaradigan aholi darajasiga mos keladi, agar jon boshiga to'g'ri keladigan mahsulot \bar{g} yuqori bo'lsa, aholi soni ko'payadi va jon boshiga to'g'ri keladigan mahsulot kamroq bo'lsa, \bar{g} kamayadi. Shunday qilib, populyatsiyaning \bar{N} muvozanat darajasi

$$\bar{N} = \left(\frac{\bar{g}}{T} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (12)$$

ga tengdir.

Avvalroq S.Kuznes [12] va Saymon [9] "Aholining ko'pligi potensial ixtirochilar sonining ko'pligida" degan g'oyani ilgari surishgan edi. Kremer bunga oydinlik kiritadi [10, 685-b]. Matematik jihatdan M. Kremer bu pozitsiyani quyidagicha ifodalaydi:

$$\frac{dT}{dt} = bNT, \quad (13)$$

bu yerda b bitta ixtirochining o'rtacha mahsuldorligi.

O'sish hozirgi darajaga va ixtirolar intensivligiga bog'liqligi aniq bo'lsa-da, bu bog'liqlik chiziqli bo'lishi shart emas. Shuning uchun M. Kremer S. Jonsning texnologik o'sish tenglamasiga murojaat qiladi [6]:

$$\frac{dT}{dt} = bNT^\phi,$$

bu yerda ϕ ko'rsatkich birga teng emas. U texnologiyani hozirgi darajasining o'sish sur'atiga bog'liq.

S. Jonsning o'zi $\phi < 1$ deb hisoblaydi, uning fikricha, urushdan keyingi davrda texnologik o'sish sekinlashadi. Barcha mumkin bo'lgan bog'liqliklarni qoplash uchun Jons umumiy tenglamaga aholi soni uchun kuch qonunini kiritishni taklif qiladi:

$$\frac{dT}{dt} = bN^\psi T^\phi, \quad (14)$$

Ushbu model, aholining o'sishi va texnologiyani hisobga olgan holda, aholining giperbolik o'sishini qoniqarli tarzda tavsiflaydi, ammo $\phi < 1$ bo'lishi bilan o'sish sur'atlarining sun'iy pasayishiga qaramay, u demografik o'tishni to'liq tasvirlamaydi.

O'z modelining kamchiliklarini tushunib, M. Kremer uni o'zgartirishga harakat qiladi. Modelga aholi sonining o'sishiga cheklovlarni kiritish uchun tug'ilish darajasini daromad funksiyasi sifatida tavsiflovchi ancha murakkab funksiyani kiritadi.

Bu yerda A tug'ilish va o'lim o'rtasidagi farq, g - aholi jon boshiga daromad bo'lib, u modelda $g = G/N$ sifatida hisoblanadi.

Xulosa

Maqolada global demografiyaning mavjud matematik prinsiplari tahlil qilindi. Shuningdek, maqolada aholining giperbolik o'sishini tavsiflash demografik-texnologik yondashuvini empirik asoslash orqali amalga oshirildi. Uchta muhim ko'rsatkich – aholi soni,

texnologiya darajasi va savodxonlik darajasini o'z ichiga olgan demografik o'tish modeli taklif qilindi. Model mustaqilligimizning dastlabki yillaridan hozirgi kungacha ko'rib chiqilgan oraliqdagi uch ko'rsatkichning qo'shma dinamikasini aniq tasvirlab beradi.

ADABIYOTLAR

1. Sh. M. Mirziyoyev "O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning Oliy Majlis va O'zbekiston xalqiga Murojaatnomasi" 20.12.2022-y.
2. Демографическая ситуация в Республике Узбекистан. // Агентство Статистики при Президенти Республики Узбекистан. (январь-декабрь 2023 г.), г.Ташкент.
3. Вольгерра В., Математическая теория борьбы за существование, М.Наука, 1976.
4. Капица С. П. Математическая модел роста населения мира. Математическое моделирование 4/6: 65–79. 1992.
5. Подлазов А. В. Основное уравнение теоретической демографии и модел глобального демографического перехода. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, No 88. 2001.
6. Jones, C. R&D Based Models of Economic Growth, unpublished, Massachusetts Institute of Technology, 1992.
7. Malthus, T. Population: The First Essay. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press. 1978.
8. Aghion P. and Howitt P. Endogenous Growth Theory. Cambridge, MA: MIT Press. 1998.
9. Simon J. The Economics of Population Growth. Princeton: Princeton University Press. 1977.
10. Kremer M. Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990. The Quarterly Journal of Economics 108: 681–716. 1993.
11. Foerster von H., Mora P. and Amiot L. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. Science 132:1291–5. 1960.
12. Kuznets S. Population Change and Aggregate Output. in Demographic and Economic Change in Developed Countries. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1960.

РЕЗЮМЕ

Данная статья посвящена описанию математической модели роста населения Республики Узбекистан после обретения независимости. Модель состоит из трех нелинейных дифференциальных уравнений, несмотря на небольшое количество переменных и параметров, с высокой точностью описывает важнейшие факторы эволюции человека – демографию, экономику, динамику технологий и образования.

Ключевые слова: демографическая модел, рождаемость, смертность, миграция, численность населения, гиперболический рост, уровень доходов.

RESUME

This work is devoted to the description of the mathematical model of the development of the population of Republik Uzbekistan after independence. The model includes three nonlinear differential equations and despite its relative simplicity, it describes the dynamics of paramount factors of social evolution, such as demography, economics, technology and education, to high precision.

Key words: demographic model, birth rate, death rate, migration, population, hyperbolic growth, income level.

UDC 519(6)

**O'ZBEKISTON FOND BOZORIDAGI AKSIYALARNI BAHOSINI
O'ZGARISHINI PROGNOZ QILISHDA MARKOV ZANJIRINI QO'LLASH****Jabborov N. M. * Mirzamurodov O. S. *****REZYUME**

Qimmatli qog'ozlar bozori faoliyat tendentsiyalarini bashorat qilish qiyin muammodir. Bu borada turli tadqiqotchilar tomonidan sinab ko'rilgan ko'plab usullar mavjud. Bulardan biri Markov jarayonidir. Biz Markov zanjiridan foydalangan holda O'zbekistonda fond bozoridagi qimmatbaho qog'ozlarni tendentsiyalarini prognoz qilish uchun matematik modelini quramiz, bu investorlarga aksiyalarning keyingi narxlarini tahlil qilish uchun juda muhim hisoblanadi.

Kalit so'zlar: Markov zanjiri, O'tish ehtimoli matritsasi, Fond bozori, qimmatbaho qog'ozlar, aksiyalar.

Kirish

Jahon iqtisodiyotining yuqori tezlikda rivojlanishi bilan odamlarning turmush darajasi va ixtiyorida bo'ladigan daromadlari tez o'sib borayotgani va har bir kishining moliyaviy xabardorligi va investitsiyalarga qiziqishi tobora ortib bormoqda. O'zbekistonning kapital bozorlari xam rivojlanayotgani va odamlarning aksiyaga qiziqishi ortib boryapti. O'zbekiston fond bozorining 1994 yilda tashkil topgan va shundan beri asta sekinlik bilan rivojlanib kelmoqda. 2018 yildan boshlab aksiyalar IPOga chiqarila boshladi.

Rivojlangan mamlakatlarda qimmatbaho qog'ozlar bilan savdo qilish shu yurtda yashaydigan aholining ma'lum bir jamgarmasini qimmatbaho qog'ozlarga almashtirib o'zining ertangi kunini moliyalashtirish yaxshi yolga qo'yilgan. Bizda xam shu kabi aholini passiv daromadlarini oshirish uchun Respublikadagi aksiyadorlik jamiyatlariga xam bo'sh turgan mablag'larni aksiyadorlik jamiyatlarining aksiyalari va obligatsiyalarinii sotib olishga yo'naltirish kapital bozorini rivojlanishiga olib keladi[1].

Investorlar investitsiyalardan katta daromad olish uchun turli xil texnik tahlillar bilan tanishishlari kerak. Asosiy tahlil orqali aksiyalarni tanlash va texnik tahlil orqali aksiyalarni sotib olish va sotish vaqtini tasdiqlash muhim ahamiyatga ega. Narxleri tasodifiy o'zgarib turadigan samarali fond bozori bozor ma'lumotlarining bir xil taqsimlanishini aks ettiradi, ammo biz o'tmishdagi ma'lumotlarni tahlil qilish orqali fond bozorining kelajakdagi tendentsiyasini taxmin qilishimiz mumkin. Ushbu maqolada biz aksiyadorlarni noto'g'ri xatti-harakatlarning oldini olish uchun va to'g'ri qaror qabul qilib qaysi aksiyalarga invitisiya kiritishda muhim bo'ladigan matematik model yaratishga xarakat qilamiz. Biz Markov modelidan foydalanib fond bozori indeksini, aksiya bahosini holatini tahlil qilishni va keying narxleri uchun prognoz qilamiz.

* **Jabborov N. M.** – Toshkent davlat Iqtisodiyot universiteti "Amaliy matematika" kafedrası professori, f.-m.f.d., jabborov61@mail.ru

* **Mirzamurodov O. S.** – Toshkent davlat Iqtisodiyot universiteti "Amaliy matematika" kafedrası assisenti

Markovning bashorat qilish modeli zamonaviy statistikada muhim rol o‘ynaydi. Markov modelining boshqa statistik usullardan (masalan, regressiya tahlili, vaqt seriyasi va boshqalar) farqi shundaki, Markov modelida jamiyki omillar o‘zaro bog‘liqligini hisobga olish shart emas, faqat evolyutsiyaning tarixdagi xususiyatlarini hisobga olish yetarli. Hodisaning o‘zi holati va holatning o‘tish ehtimolini hisoblash orqali qimmatboho qog‘ozlar narxining o‘zgarishini bashorat qilishda, Markov modeli keng qo‘llaniladi.

Adabiyotlar tahlili

Qimmatli qog‘ozlar indeksleri va daromadlari uchun maqbul bashorat qiymatlardagi tasodifiylik tufayli qiyin bo‘lib qolmoqda. Ko‘pgina tadqiqotlarda vaqtli qatorlar yordamida modellashtirish asosiy parameter sifatida qabul qilinadi. Vaqtli qatorlar asosida modellashtirishda ham asosiy parameter sifatida foydalanganda ham qimmatbaho qog‘ozlarning narxining o‘zgarishini to‘liq ifodalay olmaydi. Jumladan O‘zbekiston fond bozoridagi bazi bir aksiyalarni narxini bashorat qilishda vaqtli qatorlar asosida modellashtirishi samarali natija bermaydi. Biz Markov zanjiridan foydalangan xolda taxlil qilmoqchimiz

Markov jarayonidan foydalangan holda tahlil qilishni Zhang Yudong va Wu Lenan aksiya bahosi uchun chiziqli bo‘lmagan dinamik modelni taklif etadi[2]. Deju Zhang va Xiaomin Zhang Markov modeli usulidan foydalanib aksiya bahosini oldindan ko‘rishni Xitoy fond bozoridagi tendentsiyalarini prognoz qilish uchun Markov zanjiri stoxastik modelini taklif qiladilar[3]. Ularning tadqiqoti shuni ko‘rsatdiki, Markov jarayoni oldingi narxlar ta‘siri keyingisi narxiga sezilarli darajada bog‘liq. va Markov modeli fond bozori narxlarini bashorat qilishda qo‘llab yaxshi natijalarga erishish mumkinligini takitlashgan. Luc Tuyen esa seriyadagi o‘zgarishlarning turli darajalarida qurilgan yuqori tartibli yangi Markov modelini taqdim etadi[4]. O‘tish ehtimoli aralash to‘plamlar asosida hisoblanadi va aniqlik ARIMA va ANN kabi boshqa vaqt seriyalari modellari bilan taqqoslanadi. Sang Ho Park, Ju-Hong Lee, Jae Won va boshqalar aksiya baholarining moliyaviy vaqt seriyalarining dinamik xarakterini qo‘lga kiritish uchun Yashirin Markov modelini qo‘llashni taklif qiladi[5]. Katta ma‘lumotlarni tahlil qilish fond bozori tahlilida ham keng tarqalgan. Respublikamizdagi fond bozorida qimmatbaho qog‘ozlar narxining o‘zgarida markov zanjiri modeli qanday o‘rin tutadi ?

Qo‘llanishi

Markov jarayoni stoxastik jarayon bo‘lib, keyingi ta‘sir xususiyatlariga ega emas. Ta‘sirdan keyingi xususiyatlar shuni anglatadiki: t vaqtidagi t_m dan katta bo‘lgan bu holat faqat qaysidir jarayondagi t_m momentidagi holatga bog‘liq lekin jarayonning t_m momentidan oldingi holatga bog‘liq emas.

Ta‘rif. Tasodifiy ketma-ketlikning diskret holat vektori E bo‘lsin. Agar har qanday manfiy bo‘lmagan butun son n_1, n_2, \dots, n_m va ixtiyoriy natural son m uchun, $i_1, i_2, \dots, i_m, j \in E$ qanoatlantiruvchi bo‘lsa:

$$P\{X_{(n_m+k)} = j | X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_m} = i_m\} = P\{X_{(n_m+k)} = j | X_{n_m} = i_m\} \quad (1)$$

u holda bu tasodifiy ketma-ketlik $\{X_{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ **Markov zanjiri** deyiladi[6].

Balanslangan tizimda, agar tizimning i holatidan j holatiga ehtimoli P_{ij} bo'lsa, u holda tizim holatidagi o'tish ehtimoli vektori to'plami uzatish matritsasini hosil qiladi, bu quyidagicha yoziladi:

$$P = [P_{ij}]_{m \times n} \quad (2)$$

Bu yerda uzatish matritsasi ehtimollik matritsasi bo'lishi kerak, uning ishlash qoidalari an'anaviy matritsa bilan bir xil. O'tkazish matritsasi quyidagi xususiyatlarga ega:

$$P^{(k)} = P^{(k-1)} * P = P^{(k)} \quad (3)$$

Markov zanjiri bo'yicha jarayonni tahlil qilish va prognozlashda biz quyidagi bosqichlarni amalga oshiramiz: (1) holatni vektorini qurish va tegishli holat ehtimolini aniqlash; (2) holatga o'tish ehtimoli matritsasi holatini uzatish orqali yozish; (3) O'tish ehtimoli matritsasi bo'yicha holat vektorining barcha turlarini olish; (4) barqaror holatda tahlil qilish, bashorat qilish va qaror qabul qilish.

Fond bozoridagi kvarst aksiyadorlik jamiyatini aksiyalarini empirik tahlil qilish

Toshkent fond birjasidagi aksiyalarning qaysi biri kelajakda investorga yaxshi daromad olib keladi yoki qaysi aksiyalar kelajakda qadirsizlanib investorni daromadini tushishiga tasir qilishini bashorat qilish ob'ekti sifatida qo'llashimiz mumkin.

Misol tariqasida, Toshkent fond birjasidagi "Kvarst aksiyadorlik jamiyati" aksiyalarini ko'raylik. 2024 yil 3 yanvardan 2024 yil 7 fevralgacha bo'lgan jami 27 savdo kunidagi yopilish narxlari o'zgarishini ko'rishimiz mumkin, har bir kunning yopilish narxlari uchta holatga bo'lamiz: yuqoriga, pastga va o'zgarmas (2 so'm farq) bilan yuqoriga va pastga nuqtalar, tahlil qilinadi va prognoz qilinadi[7].

1-jadval

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Holat	Y	Y	P	Y	P	P	Y	P	P	P
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Holat	P	O'	Y	P	P	Y	Y	Y	P	Y
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Holat	Y	P	Y	O'	P	Y	P			

Endi biz Markov zanjiri yordamida yuqoridagi ma'lumotlarni tahlil qilib va kunlar uchun o'shish yoki pastayish mumkinligini prognoz qilamiz.

Agar 1-jadvaldagi har bir yopilish kunini diskret vaqt birliklari sifatida oladigan bo'lsak, yopilish narxlari uchta holatga bo'linadi: x_1 =yuqoriga, x_2 =o'zgarmas va x_3 =pastga bo'lsin, u holda holat vektori $E(x_1, x_2, x_3)$ holat ehtimoli esa turli holatning paydo bo'lish ehtimoli kattaligidir. Holat vektori $\mu_{(i)} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ bilan belgilanadi, bu yerda $i = 1, 2, \dots, n$, p_i a

ehtimoli $j = 1, 2, \dots, n..$ 1-jadvalda 27 savdo kuni bor, bu yerda yuqoriga $x_1 = 11$, o'zgarmas $x_2 = 2$ va pastga $x_3 = 14$, shuning uchun har bir holatning ehtimoli quyidagicha:

$$P_1 = \frac{11}{27} = 0,407, \quad P_2 = \frac{2}{27} = 0,074, \quad P_3 = \frac{14}{27} = 0,519,$$

$$\mu_{(0)} = (0,407; 0,074; 0,519)$$

vektorga boshlang'ich holat vektori deyiladi.(2) holat o'tish ehtimoli matritsasining o'rnatilishi 1-jadvalda hech qanday holatga o'tish bo'lmagan holda oxirgi kun holati pastga bo'lganligi sababli, pastdan pastga ,yani $p_{11} = \frac{5}{14} = 0,357$. Pastdan o'zgarmasgacha bo'lgan holat soni 1 ga teng bo'lgani uchun, mos keladigan o'tish ehtimoli $p_{12} = \frac{1}{14} = 0,071$. Pastdan yuqoriga bo'lgan holat soni 7 ta bo'lgani uchun mos keladigan o'tish ehtimoli $p_{13} = \frac{6}{14} = 0,429$. Qolgan o'tish ehtimolini xam shu usulda qo'llab natijani olishimiz mumkin.

Endi biz yuqoridagi har bir holatga o'tish ehtimolini 2-jadval shaklida ifodalaymiz.

2-Jadval

<u>Ehtimolligi</u>	<u>Pastga</u>	<u>O'zgarmasga</u>	<u>Yuqoriga</u>
<u>Pastdan</u>	0.357	0.071	0.429
<u>O'zgarmasdan</u>	0.5	0	0.5
<u>Yuqoridan</u>	0.636	0.091	0.364

Kvarts aksiyadorlik jamiyati aksiyalarining yopiq holatga o'tish matritsasini 2-jadval orqali olishimiz mumkin.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,357 & 0,071 & 0,429 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,636 & 0,091 & 0,364 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda P matritsasining har bir qatori turli vaziyatlarning holatga o'tish ehtimoli. Markov jarayoniga ko'ra, turli davrlardagi holat ehtimoli $\mu_{(i)}$ bilan belgilanadi, bu yerda

$$\mu_{(i+1)} = \mu_{(i)} * P$$

bu yerda P holat o'tish matritsasi. 1-jadvalga ko'ra, aksiya bahosi 27-kuni pastlagan, ammo keyingi ma'lumot yo'qligi sababli, u boshlang'ich holat vektori sifatida qabul qilinadi. $\mu_{(0)} = (0, 0, 1)$. Vektor va holatga o'tish matritsasi yordamida kelajakda turli xil yopilish sanalarining holati ehtimolini bashorat qilish. Shunday qilib, biz 28-kundagi yopilish narxining holat ehtimollik vektorini olishimiz mumkin.

$$\mu_{(1)} = \mu_{(0)} * P = (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,357 & 0,071 & 0,429 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,636 & 0,091 & 0,364 \end{pmatrix} = (0,636 \ 0,091 \ 0,364).$$

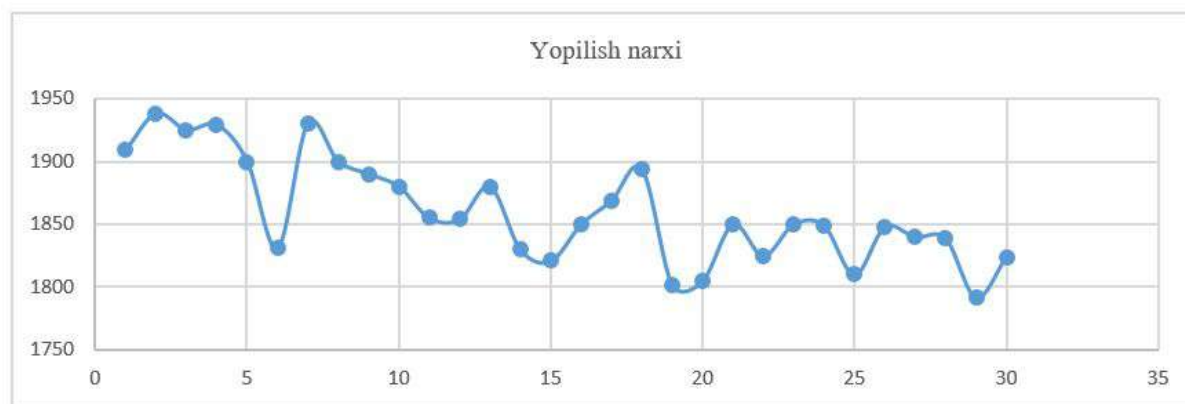
29-kundagi yopilish narxining holat ehtimollik vektori

$$\mu_{(2)} = \mu_{(1)} * P = (0,504 \quad 0,078 \quad 0,418).$$

30-kundagi yopilish narxining holat ehtimoli vektori

$$\mu_{(3)} = \mu_{(2)} * P = (0,504 \quad 0,078 \quad 0,418).$$

Yuqoridagi hisob-kitoblardan biz Kvars aksiyadorlik jamiyatini yopilish narxlari tendentsiyasini ko'rishimiz mumkin:



savdo kunlarining o'sishi bilan, ya'ni i yetarlicha katta, agar holat o'tish matritsasi o'zgaras (ya'ni barqaror sharoitlar), u holda holat ehtimoli tendentsiyaga ega. boshlang'ich holatdan mustaqil bo'lgan va ko'p yoki kamroq barqarorlashgan qiymatga. Ya'ni, Kvarst aksiyadarlik jamiyati oxir-oqibat 50 foizga pastga tushishi ,10 foizga o'zgaras qolishi va 40 foizga yuqoriga narxi o'zgarishi mumkin.matematik modelni qo'llagandan keyin uni prognoz qilingan narx, haqiqiy narxga juda yaqinligini ko'rishimiz mumkin. Bashorat qilish natijasi haqiqiy vaziyatga mos keladi.

Xulosa

Markov zanjiri hech qanday keyingi ta'sirga ega bo'lmaganligi sababli, qimmatbaho qog'ozlar bozorini tahlil qilish va bashorat qilish uchun ushbu usuldan foydalanish samaraliroq bo'ladi. Biroq, Markov zanjirini bashorat qilish usuli faqat prognozlashning ehtimollik usullari bo'lib, bashorat qilingan natijalar mutlaq holatda bo'lishdan ko'ra, kelajakda aksiya bahosining ma'lum bir holatining ehtimolliigi bilan ifodalanadi.Qimmatli qog'ozlar bozorining operatsion holati bozorning turli xil omillarining ta'siriga bog'liq, masalan, har ikki tomonning ko'plab bozor kuchlari, aksiyalarning o'zining asosiy holati, makroiqtisodiy siyosat, savdo-iqtisodiy darajalar va investorlarning psixologik va boshqa omillar. Shuning uchun, hech qanday usul har kuni fond bozoridagi o'zgarishlarni aniq bashorat qila olmaydi, Markov zanjirini bashorat qilish usuli bundan mustasno emas.Ammo biz Markov zanjiridan foydalangan holda bashorat qilish natijalarini boshqa omillar bilan birlashtirib, uni qaror qabul qilish uchun asos sifatida ko'rishimiz mumkin. Ushbu maqolada biz faqat Markov zanjirining fond bozorida qo'llanilishini o'rgandik va nisbatan yaxshi natijalarga erishdik. Markov zanjiri fyuchers bozori, obligatsiyalar bozori va boshqalar kabi boshqa sohalarga ham tarqalishi va qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Shoxa'zamiy Sh.Sh. Moliya bozori va qimmatli qog'ozlar. Toshkent: "Fan va texnologiya" 2012, 93-95 b.
2. Zhang Yudong and Wu Lenan , Stock market prediction of S&P 500 via combination of improved BCO approach and BP neural network:Volume 36, Issue 5, July 2009, Pages 8849–8854.
3. Deju Zhang and Xiaomin Zhang Study on forecasting the stock market trend based on stochastic analysis method; International Journal of Business and Management. Vol 4, No.6 June 2009.
4. Luc Tuyen, A Higher order Markov model for time series forecasting, International Journal of Applied Mathematics and Statistics 57(3):1–18, 2018.
5. Sang-Ho Park, Ju-Hong Lee, Jae-Won Song Tae-Su Park,Forecasting Change Directions for Financial Time Series Using Hidden Markov Model; International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009: Rough Sets and Knowledge Technology pp 184-191. Lecture Notes in Computer Science book series (LNCS), volume 5589, 2009.
6. Feng, Wenquan, Economic forecasting and decision-making technology, Wuhan University Press, 1994.
7. www.uzse.uz

РЕЗЮМЕ

Прогнозирование тенденций активности фондового рынка является сложной проблемой. В этом отношении существует множество методов, опробованных разными исследователями. Одним из них является марковский процесс. Мы строим математическую модель прогнозирования тенденций фондового рынка Узбекистана с использованием цепи Маркова, что очень важно для инвесторов для анализа будущих цен акций.

Ключевые слова: цепь Маркова, матрица вероятностей перехода, фондовый рынок, ценные бумаги, акции.

RESUME

Predicting trends in stock market activity is a difficult problem. There are many methods that have been tried by different researchers in this regard. One of these is the Markov process. We build a mathematical model for forecasting the trends of the stock market in Uzbekistan using the Markov chain, which is very important for investors to analyze the future share prices.

Key words: Markov chain, Transition probability matrix, Stock market, securities, shares.

UDC 517.918

UCHINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSA MUHIM SPEKTRINING
TUZILISHI

Jo'raqulova F. M. *

REZYUME

Ushbu maqolada panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsa Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida qaralgan. Ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma umumlashgan Fridriks modellar oilasining spektral xossalardan foydalanib, qaralayotgan uchinchi tartibli operatorli matritsaning muhim spektri tadqiq qilingan. Muhim spektrning ikki va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. Ikki zarrachali tarmoqlarning uch zarrachali tarmoqga nisbatan joylashuv o'рни o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Hilbert fazo, operatorli matritsa, umumlashgan Fridriks modeli, Fredgolm determinanti, muhim spektr.

1. Kirish

Operatorli matritsalar muhim va diskret spektrlari bilan bog'liq masalalar qattiq jismlar fizikasi [1], kvant maydon nazariyasi [2], statistik fizika [3], magnetogidrodinamika [4], kvant mexanikasi [5] va boshqa ko'plab sohalarda uchrab turadi. Hozirgi kunda operatorli matritsalar muhim spektri va uning xos qiymatlari sonini o'rganishga doir ko'plab tadqiqot ishlar olib borilmoqda. Bunda, umumlashgan Fridriks modellari oilasi uchun bo'sag'aviy hodisalarni tahlil qilish, uchinchi tartibli operatorli matritsalar oilasi muhim spektrining tuzilishini aniqlash [6], xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo'lish shartlarini topishga alohida e'tibor berilmoqda [7], [8].

Operatorli matritsalar spektral xossalari bag'ishlangan ayrim maqolalar tahliliga to'xtalamiz.

[9] maqolada uchinchi tartibli model operatorli matritsa uchun Yefimov hodisasining mavjud bo'lishi (muhim spektrning quyi chegarsiga intiluvchi cheksiz sondagi xos qiymatlarning mavjudligi) isbotlangan, hamda bu xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topilgan. [10] maqolada uchinchi tartibli operatorli matritsalar uchun olingan natijalar yordamida panjaradagi ko'pi bilan ikkita fotonli spin-bozon modelining spektri batafsil o'rganilgan. [11] maqolada esa bu turdagi operatorli matritsalar uchun muhim spektrning ichida (muhim spektrning bo'shlig'ida, muhim spektrdan chapda) cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjud bo'lish shartlari topilgan. [12] maqolada esa soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalarning sistemasi bilan bog'liq ikkinchi tartibli operatorli matritsa uchun ikki yoqlama Yefimov hodisasining mavjudligi isbotlangan.

[13] maqolada dispersiya funksiyasi chegaralangan holda, $\alpha > 0$ ta'sirlashish parametrining ixtiyoriy qiymatida \mathbb{R}^d fazodagi ko'pi bilan ikki fotonli spin-bozon modelining

*Jo'raqulova F. M. – Buxoro davlat universiteti, f.m.juraqulova@buxdu.uz

spektri tahlil qilingan. Bu holda muhim spektrning aniq ko‘rinishi tavsiflangan hamda muhim spektrning ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari ajratilgan. Bundan tashqari, muhim spektr bitta kesmadan yoki oltitadan ko‘p bo‘lmagan kesmalar birlashmasidan iborat bo‘lish shartlari topilgan.

Ushbu maqolada panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchinchi tartibli operatorli matritsa Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator sifatida o‘rganilgan. Uning muhim spektri tarmoqlarning joylashuv o‘rni ikki o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma umumlashgan Fridriks modellar oilasining spektral xossalari orqali tadqiq qilingan.

2. Panjaradagi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos umumlashgan Fridriks modellari oilasi

Dastlab zarur tushunchalarni kiritamiz. $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ orqali bir o‘lchamli torni, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ orqali bir o‘lchamli kompleks fazoni, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ orqali \mathbb{T} torda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida ta‘sir qiluvchi va

$$h_\mu(x) := \begin{pmatrix} h_{00}(x) & \frac{\mu}{\sqrt{2}}h_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}}h_{01}^* & h_{11}(x) \end{pmatrix}$$

tenglik orqali aniqlanuvchi umumlashgan Fridriks modellari oilasi deb ataluvchi ikkinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda $\mu > 0$ ta‘sirlashish parametri bo‘lib,

$$h_{00}(x)f_0 = f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} f_1(t)dt,$$

$$(h_{11}(x)f_1)(y) = \omega(x, y)f_1(y) \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1,$$

$$\omega(x, y) := 3 - \cos x - \cos y - \cos(x + y).$$

$h_\mu(x)$ operatorli matritsa $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekanligini oson ko‘rsatish mumkin.

$h_\mu(x)$ operatorli matritsaning muhim spektrini aniqlash maqsadida $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ Hilbert fazosida

$$h_0(x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(x) \end{pmatrix}$$

tenglik orqali aniqlangan operatorli matritsani (qo‘zg‘almas operator) qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $h_0(x)$ operatorli matritsaning $h_\mu(x) - h_0(x)$ qo‘zg‘alish operatori 2 o‘lchamli operatorli matritsa bo‘ladi. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra $h_\mu(x)$ operatorli matritsaning muhim spektri $h_0(x)$ operatorli matritsaning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi. Aniqlanishiga ko‘ra

$$\sigma_{\text{ess}}(h_0(x)) = [E_1(x); E_2(x)],$$

bu yerda $E_1(x)$ va $E_2(x)$ sonlari

$$E_1(x) := \min_{y \in \mathbb{T}} \omega(x, y) = 3 - \cos x - \sqrt{2 + 2 \cos x},$$

$$E_2(x) := \max_{y \in \mathbb{T}} \omega(x, y) = 3 - \cos x + \sqrt{2 + 2 \cos x}$$

tengliklar yordamida aniqlangan. Demak, $h_\mu(x)$ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(x)) = [E_1(x); E_2(x)]$$

tenglik o'rinlidir. Har bir tayinlangan $\mu > 0$ soni va $x \in \mathbb{T}$ uchun $\mathbb{C} \setminus [E_1(x); E_2(x)]$ sohada analitik bo'lib,

$$\Delta_\mu(x, z) := \begin{cases} 1 - z - \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3-\cos x-z)^2-4\cos^2\frac{x}{2}}}, & z < E_1(x), \\ 1 - z + \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3-\cos x-z)^2-4\cos^2\frac{x}{2}}}, & z > E_2(x) \end{cases} \quad (1)$$

kabi aniqlangan funksiyani qaraymiz. Odatda, $\Delta_\mu(x, \cdot)$ funksiyaga $h_\mu(x)$ operatorli matritsaga mos Fredholm determinanti deyiladi.

1-lemma. Har bir $x \in \mathbb{T}$ uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [E_1(x); E_2(x)]$ soni $h_\mu(x)$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta_\mu(x, z) = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

1-lemmaning isboti [14] ishda keltirilgan.

1-lemmadan $h_\mu(x)$ operatorli matritsaning diskret spektri uchun

$$\sigma_{\text{disc}}(h_\mu(x)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_1(x); E_2(x)] : \Delta_\mu(x, z) = 0\}$$

tenglikni hosil qilamiz.

2-lemma. Har bir $\mu > 0$ soni va $x \in \mathbb{T}$ uchun $h_\mu(x)$ operatorli matritsa $E_1(x)$ dan chapda va $E_2(x)$ o'ngda yotuvchi bittadan oddiy xos qiymatga ega.

Isboti. Aniqlanishiga ko'ra har bir $\mu > 0$ soni va $x \in \mathbb{T}$ uchun $\Delta_\mu(x, \cdot)$ funksiya $(-\infty; E_1(x))$ oraliqda uzluksiz va monoton kamayuvchi bo'lib, ushbu

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\mu(x, z) = +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow E_1(x)-0} \Delta_\mu(x, z) = -\infty \quad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. (2), (3) tengliklar va $\Delta_\mu(x, \cdot)$ funksiya $(-\infty; E_1(x))$ oraliqda uzluksiz, monoton ekanligiga ko'ra shunday yagona $E_\mu^{(1)}(x) \in (-\infty; E_1(x))$ soni topilib, $\Delta_\mu(x, E_\mu^{(1)}(x)) = 0$ tenglik bajariladi. 1-lemmaga ko'ra $E_\mu^{(1)}(x) < E_1(x)$ soni $h_\mu(x)$ operatorli matritsa uchun xos qiymat bo'ladi.

Xuddi shunday, har bir $\mu > 0$ soni va $x \in \mathbb{T}$ uchun $\Delta_\mu(x, \cdot)$ funksiya $(E_2(x); +\infty)$ oraliqda uzluksiz va monoton bo'lib, ushbu

$$\lim_{z \rightarrow E_2(x)+0} \Delta_\mu(x, z) = +\infty, \quad (4)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_\mu(x, z) = -\infty \quad (5)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. $\Delta_\mu(x, \cdot)$ uzluksiz funksiyaning $(E_2(x); +\infty)$ oraliqda monotonligiga va (4), (5) tengliklarga ko‘ra shunday yagona $E_\mu^{(2)}(x) \in (E_2(x); +\infty)$ soni topilib, $\Delta_\mu(x, E_\mu^{(2)}(x)) = 0$ munosabat bajariladi. 1-lemmaga ko‘ra $E_\mu^{(2)}(x) > E_2(x)$ soni $h_\mu(x)$ operatorli matritsa uchun xos qiymat bo‘ladi.

Qulaylik uchun $h_\mu(x)$ operatorli matritsaning $E_1(x)$ dan chapda va $E_2(x)$ dan o‘ngda yotuvchi xos qiymatlarini mos ravishda $E_\mu^{(1)}(x)$ va $E_\mu^{(2)}(x)$ orqali belgilaymiz.

3. Uchinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektrining tuzilishi

$L_2^s(\mathbb{T}^2)$ orqali \mathbb{T}^2 da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosini hamda \mathcal{H} orqali $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ va $\mathcal{H}_2 = L_2^s(\mathbb{T}^2)$ fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, ya‘ni $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

\mathcal{H} Hilbert fazosida ta‘sir qiluvchi quyidagi

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0 \quad (6)$$

uchinchi tartibli operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda matritsaviy elementlar

$$\mathcal{A}_{00}f_0 = af_0, \quad \mathcal{A}_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt, \quad (\mathcal{A}_{11}f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathcal{A}_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t)dt, \quad (\mathcal{A}_{22}f_2)(x, y) = \omega(x, y)f_2(x, y)$$

kabi aniqlanib, $a \in \mathbb{R}$ va $v(\cdot)$ funksiya \mathbb{T} torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya. \mathcal{A}_{01}^* va \mathcal{A}_{12}^* operatorlar mos ravishda \mathcal{A}_{01} va \mathcal{A}_{12} operatorlarga qo‘shma operatorlar bo‘lib,

$$\mathcal{A}_{01}^* : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{01}^*f_0)(x) = v(x)f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

$$\mathcal{A}_{12}^* : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2, \quad (\mathcal{A}_{12}^*f_1)(x, y) = \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

(6) tenglik yordamida aniqlangan \mathcal{A}_μ operatorli matritsa \mathcal{H} Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

1-teorema. \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(x)$$

tenglik o‘rinli.

1-teorema Veyl mezoni, Faddeyev tenglamasining xarakteristik xossasi va Fredgolm teoremasidan foydalanib isbotlanadi.

Endi ushbu maqoladagi asosiy teoremani bayon qilamiz.

2-teorema. a) Agar $\mu \in (0; \frac{2}{\sqrt{\pi}}]$ bo‘lsa, u holda \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = [\min E_\mu^{(1)}(x); \max E_\mu^{(2)}(x)]$$

tenglik o‘rinli;

b) agar $\mu \in (\frac{2}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}]$ bo‘lsa, u holda \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \max E_\mu^{(2)}(x)],$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, $\max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(x) < 0$ bo‘ladi;

c) agar $\mu > \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}$ bo‘lsa, u holda \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, $\max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(x) < 0$ va $\frac{9}{2} < \min_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(x)$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. 1-teoremaga ko‘ra \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(x)$$

to‘plamdan iborat bo‘ladi. Aniqlanishiga ko‘ra $\Delta_\mu(\cdot, z)$ funksiya \mathbb{T} torda uzluksizdir. Shu sababli $E_\mu^{(i)} : \mathbb{T} \rightarrow E_\mu^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$ akslantirish haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyadir. Demak, $\text{Im } E_\mu^{(i)}$ to‘plam yopiq va bir bog‘lamli bo‘ladi, ya‘ni $\text{Im } E_\mu^{(i)} = [\min_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(i)}(x); \max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(i)}(x)]$ bo‘ladi.

a) Faraz qilaylik, $\mu \in (0; \frac{2}{\sqrt{\pi}}]$ bo‘lsin. U holda

$$\max_{x \in \mathbb{T}} \Delta_\mu(x; 0) \geq 0, \quad (7)$$

$$\min_{x \in \mathbb{T}} \Delta_\mu(x; \frac{9}{2}) \leq 0 \quad (8)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Agar $\Delta_\mu(x; \cdot)$ funksiyani $(-\infty; 0)$ va $(\frac{9}{2}; +\infty)$ oraliqlarda monoton va uzluksizligini hamda (2), (5), (7), (8) munosabatlarni inobatga olsak, u holda $\max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(x) \geq 0$

va $\min_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(x) \leq \frac{9}{2}$ tengsizliklar o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Ma‘lumki,

$$\inf_{x \in \mathbb{T}} \Delta_\mu(x; 0) = -\infty \quad (9)$$

va

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} \Delta_\mu(x; \frac{9}{2}) = \infty \quad (10)$$

munosabatlar o‘rinli. Agar $\Delta_\mu(x; \cdot)$ funksiyaning $(-\infty; 0)$ va $(\frac{9}{2}; +\infty)$ oraliqlarda monoton va uzluksizligini hamda (2), (5), (9), (10) tengliklarni inobatga olsak, u holda $\min_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(x) \leq 0$,

$\max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(x) \geq \frac{9}{2}$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Demak, \mathcal{A}_μ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = [\min_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(x); \max_{x \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(x)]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

b) Faraz qilaylik, $\mu \in (\frac{2}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}]$ bo'lsin. U holda $\max_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; 0) < 0$ va (8) tengsizliklar o'rinli bo'ladi. $\Delta_{\mu}(x; \cdot)$ funksiyaning $(-\infty; 0)$ va $(\frac{9}{2}; +\infty)$ oraliqlarda monoton va uzluksizligini hamda $\max_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; 0) < 0$, shuningdek (2), (5), (8) munosabatlarni inobatga olsak, u holda $\max_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(1)}(x) < 0$, $\min_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(2)}(x) \leq \frac{9}{2}$ tengsizliklar o'rinli ekanligi kelib chiqadi. $\max_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(2)}(x) \geq \frac{9}{2}$ tengsizlik bajarilishi a) tasdiqda isbotlangan. Demak, \mathcal{A}_{μ} operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu}) = \text{Im } E_{\mu}^{(1)}(x) \cup [0; \max_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(2)}(x)],$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

c) Faraz qilaylik, $\mu > \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}$ bo'lsin. U holda $\max_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; 0) < 0$ va $\min_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; \frac{9}{2}) > 0$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. $\Delta_{\mu}(x; \cdot)$ funksiyaning $(-\infty; 0)$ va $(\frac{9}{2}; +\infty)$ oraliqlarda monoton, uzluksizligini hamda $\max_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; 0) < 0$, $\min_{x \in \mathbb{T}} \Delta_{\mu}(x; \frac{9}{2}) > 0$ va (2), (5) munosabatlarni inobatga olsak, u holda $\max_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(1)}(x) < 0$, $\min_{x \in \mathbb{T}} E_{\mu}^{(2)}(x) > \frac{9}{2}$ tengsizliklar o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, \mathcal{A}_{μ} operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_{\mu}) = \text{Im } E_{\mu}^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \text{Im } E_{\mu}^{(2)}(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Xulosa. Ushbu maqolada qattiq jismlar fizikasi, kvant maydon nazariyasi va boshqa ko'plab sohalarida uchraydigan panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltonianiga mos \mathcal{A}_{μ} operatorli matritsa qaralgan, bu yerda $\mu > 0$ - ta'sirlashish parametri. \mathcal{A}_{μ} operatorli matritsa muhim spektrining joylashuv o'rni ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega umumlashgan Fridriks modellar oilasini spektral xossalardan foydalanib o'rganilgan.

ADABIYOTLAR

1. D. Mattis. The few-body problem on lattice. Rev. Modern Phys., 58 (1986), 361–379.
2. К.О. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1969
3. В.А. Малышев, Р.А. Минлос. "Кластерные операторы Труды семинара им. И.Г. Петровского, 9 (1983), 63–80.
4. А.Е. Lifschitz. Magnetohydrodynamics and spectral theory, vol. 4 of Developments in Electromagnetic Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
5. В. Thaller. The Dirac equation. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1992.
6. Жуков Ю.В., Минлос Р.А. Спектр и рассеяние в модели "спин-бозон" с не более чем тремя фотонами Теор. и матем. физика, 103:1 (1995), 63–81.

7. Minlos R.A., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons Topics in Statistical and Theoretical Physics, AMS Transl.-Series 2, 177 (1996), 159–193.
8. Хайруллаев И.Н. Некоторые частично-интегральные операторы и их спектральные свойства: Дис. канд. физ. - мат. наук. -Ташкент. 2001.
9. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics J. Stat. Phys. 127:2 (2007), P. 191–220.
10. Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.
11. Muminov M.I., Rasulov T.H. Embedded eigenvalues of an Hamiltonian in bosonic Fock space Communications in Math. Analysis. 17:1 (2014), P. 1–22
12. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Analysis of the spectrum of a operator matrix. Discrete spectrum asymptotics, Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 11:2 (2020), P. 138–144
13. Ibrogimov, O.O. Spectral Analysis of the Spin-Boson Hamiltonian with Two Photons for Arbitrary Coupling Annales Henri Poincare, 2018, 19(11), pp. 3561–3579
14. Jo‘raqulova F.M. Bazonli Fok fazodagi operatorli matritsaga mos Faddeyev tenglamasi. BuxDU. ilmiy axboroti, 2023, 72–77 b.

РЕЗЮМЕ

В данной статье операторная матрица третьего порядка, соответствующий системы с несохраняющимся и не более трех частиц на решетке, рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Используя спектральные свойства линейной, ограниченной и самосопряженной семейства обобщенных семейства моделей Фридриха с двумерным возмущением, исследован существенный спектр рассматриваемой операторной матрицы третьего порядка. Выделены двухчастичные и трехчастичные ветви существенного спектра. Изучено расположение двухчастичных ветвей относительно трехчастичной ветви.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторная матрица, обобщенная модель Фридриха, определитель Фредгольма, существенный спектр.

RESUME

In this paper, operator matrix of order three corresponding to the system with non-conserved and no more than three particles on the lattice is considered as a linear, bounded and self-adjoint operator in Hilbert space. Using the spectral properties of the linear, bounded and self-adjoint a family of generalized Friedrich models with two-dimensional perturbation, the essential spectrum of the considered operator matrix of order was investigated. Two-particle and three-particle branches

of the essential spectrum are singled out. The position of two-particle branches with respect to a three-particle branch is studied.

Key words: Hilbert space, operator matrix, generalized Friedrichs model, Fredholm determinant, essential spectrum.

UDC 65L05

ON THE NEGATIVE EIGENVALUES OF THE DISCRETE LAPLACIAN
WITH POTENTIAL IN THREE-DIMENSIONAL CASE

Kurbonov O. I., Akhralov Kh. Z. *

Abstract

Eigenvalue behaviour of a family of discrete Schrödinger operators H_μ depending on parameter $\mu \in \mathbb{R}$ is studied on the three-dimensional lattice \mathbb{Z}^3 . The non-local potential is described by the Kronecker delta function and the shift operator. The existence of eigenvalues below the essential spectrum and their dependence on the parameters are explicitly proven. We also show that the essential spectrum absorbs the threshold eigenvalue.

Key words: Discrete Schrödinger operators, threshold resonance, eigenvalues, lattice.

1. Introduction.

Cladifying Schrödinger operators' spectral properties is one of the most fierce research areas within mathematical physics and operator theory (for recent results see [1-7]). It gives us to better understand the physical processes integrated to those operators. Especially, In lattices Schrödinger operators' eigenvalue behaviors were discussed in many works [8-13], provided the potential is the Dirac delta function.

In this paper we set a goal to explore the spectrum of the discrete Schrödinger operator with a non-local potential given at the points $x_0, -x_0 \in \mathbb{Z}^3$. We demonstrate the existence of eigenvalues outside the essential spectrum, threshold eigenvalues and resonances depending on the parameter μ , and the sum of coordinates of the point $x_0 \in \mathbb{Z}^3$. We clearly show (Theorem 1) the subsistence of eigenvalues and resonances of the operator and their dependance on the reciprocity parameter $\mu, x_0 \in \mathbb{Z}^3$.

The case of Schrödinger operator given by the non-local potential at one point $x_0 \in \mathbb{Z}^3$ was studied in work [14]. In [15] thorough image of the discrete spectrum of identical operators was described on \mathbb{Z}^d for all dimensions $d \geq 1$. When reciprocity is present at both points x_0 and $-x_0$, the results similar to the cases described above, but adding of μ makes the problem more challenging and expands its application potential.

2. The discrete Schrödinger operator.**2.1. The discrete Schrödinger operator in the position representation.**

For brevity, we use the following notations throughout the paper: \mathbb{Z}^3 is the 3-dimensional lattice and $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3 = (-\pi, \pi]^3$ is the 3-dimensional torus (the first Brillouin zone, i.e., the dual group of \mathbb{Z}^3) equipped with the Haar measure.

*Kurbonov O. I., Akhralov Kh. Z. – V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics , oybekq330@gmail.com, axralovh@mail.ru

Let $T(y), y \in \mathbb{Z}^3$ be the shift operator

$$(T(y)f)(x) = f(x + y), \quad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^3), x \in \mathbb{Z}^3.$$

the discrete Laplacian Δ on the lattice \mathbb{Z}^3 is described by the self-adjoint (bounded) multidimensional Toeplitz-type operator on the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ ([16]) as

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^3 \\ |s|=1}} (T(s) - T(0)).$$

Let V_0 be a multiplication operator in $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ by the Kronecker delta function $\delta[\cdot, 0]$:

$$V_0 f(x) = \delta[x, 0] f(x).$$

Then, for a given point $x_0 \in \mathbb{Z}^3$, we define the non-local potential (see [16]) as

$$\widehat{V}_{x_0} = \mu(V_0 T(x_0) + T^*(x_0) V_0) + \mu((V_0 T(x_0) + T(-x_0)) + (T^*(x_0) + T^*(-x_0) V_0)).$$

The discrete Schrödinger operator \widehat{H}_μ acting in $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$, in the position representation, is defined as a bounded self-adjoint perturbation of $-\Delta$ and is of the form

$$\widehat{H}_\mu = -\Delta - \widehat{V}_{x_0}.$$

2.2. Momentum representation of the discrete Schrödinger operator.

In the momentum representation, the one-particle Hamiltonian H_μ can be expressed as

$$H_\mu = H_0 - V_{x_0},$$

where H_0 and V_{x_0} are respectively defined as

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\Delta)\mathcal{F} \quad \text{and} \quad V_{x_0} = \mathcal{F}^*(\widehat{V}_{x_0})\mathcal{F},$$

with \mathcal{F} being the standard Fourier transform $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}^3) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ and $\mathcal{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^3)$ being its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T}^3)$ as a multiplication operator by the function $\epsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \epsilon(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3),$$

where $\epsilon(p) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos p_j), p \in \mathbb{T}^3$. The function $\epsilon(\cdot)$, being a real valued-function on \mathbb{T}^3 , is referred as the *dispersion relation* of the Laplace operator in the physical literature.

The perturbation V_{x_0} acts on $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ as the two-dimensional integral operator:

$$(V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \mu (e^{i(x_0, p)} + e^{i(-x_0, p)} + e^{-i(x_0, s)} + e^{i(x_0, s)}) f(s) ds,$$

which can be rewritten in a more convenient way as

$$(V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} 2\mu(\cos(x_0, p) + \cos(x_0, s)) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

To avoid writing the factor of 2 before μ in formulas, we keep the notation μ but we mean 2μ everywhere below.

2.3. The essential spectrum of H_μ .

The perturbation V of H_0 is a two dimensional operator, therefore in accordance with the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum, the equality $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$ holds. As H_0 is the multiplication operator by the continuous function $\mathbf{e}(\cdot)$,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu) = [\mathbf{e}_{\min}, \mathbf{e}_{\max}] = [0, 6].$$

2.4. The Fredholm determinant associated with H_μ .

First, for a complex number $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$, let us introduce the following integrals

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\mathbf{e}(t) - z} dt, \\ b(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos(x_0, t)}{\mathbf{e}(t) - z} dt, \\ c(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2(x_0, t)}{\mathbf{e}(t) - z} dt. \end{aligned}$$

Then, for any $\mu \in \mathbb{R}$, the Fredholm determinant associated to the operator H_μ is defined as a regular function in $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathbf{e}_{\min}, \mathbf{e}_{\max}]$:

$$\Delta(\mu; z) = \frac{1}{d(z)} - 2\mu \frac{b(z)}{d(z)} + \mu^2, \quad d(z) = b^2(z) - a(z)c(z). \quad (1)$$

Lemma 1. *The number $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$ is an eigenvalue of H_μ if and only if $\Delta(\mu; z) = 0$.*

Proof. Consider the eigenvalue equation

$$(H_\mu - z)f = 0,$$

which can be rewritten in a more explicit form as

$$[\mathbf{e}(p) - z]f(p) - \frac{\mu \cos(x_0, p)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds - \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \cos(x_0, s) f(s) ds = 0,$$

with $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$. Denote

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(t) dt, \quad C_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \cos(x_0, t) f(t) dt$$

Then, the above equation is equivalent to the system of linear equations with respect to C_1 and C_2

$$\begin{cases} (1 - \mu b(z))C_1 - \mu a(z)C_2 = 0 \\ -\mu c(z)C_1 + (1 - \mu b(z))C_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

The solution f and the solution C_1, C_2 of (2) are related as

$$f(p) = \frac{1}{\mathfrak{e}(p) - z} \left(\mu \cos(x_0, p) \right) (C_1 + \mu C_2).$$

The Fredholm determinant of the system of linear equations (2) is of the form (1), and this fact completes the proof.

3. Properties of $\Delta(\mu; z)$.

For a fixed $x \in \mathbb{Z}^3$ we consider the function

$$r(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{e^{i(x,t)}}{\mathfrak{e}(t) - z} dt, \quad z \in (-\infty, \mathfrak{e}_{\min}), \quad (3)$$

then the functions $a(z)$, $b(z)$ and $c(z)$ can be expressed as $a(z) = r(0, z)$, $b(z) = r(x_0, z)$ and $c(z) = \frac{1}{2} (r(0, z) + r(x_0, z))$ respectively. For the readers convenience we state the lemma from [14] which reveals some useful properties of the function $r(x, z)$:

Lemma 2. *For any $x \in \mathbb{Z}^3$, $r(x, z)$, as a function of z , is positive and monotonically increasing in $(-\infty, 0)$. Moreover, the following asymptotical relation holds*

$$r(x, z) = O\left(\frac{1}{|z|^{|x|_1+1}}\right) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty,$$

where

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

and

$$\lim_{z \rightarrow \mathfrak{e}_{\min}} r(x, z) = r(x, \mathfrak{e}_{\min}).$$

Proof. We represent the function in (3) as

$$r(x, z) = \sum_n^{\infty} \frac{1}{(3-z)^{n+1}} A_n, \quad z \in (\infty; 0) \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(x,t)} \left(\sum_{j=1}^3 \cos(t_j) \right)^n dt \\ &= \frac{1}{2^n (2\pi)^3} \sum_{0 \leq k, k' \in \mathbb{N}_0^3, k_1+k_2+k_3+k'_1+k'_2+k'_3=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k'_1! \cdot k'_2! \cdot k'_3!} \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(x,t)} e^{i(k-k',t)} dt \end{aligned}$$

and

$$\mathbb{N}_0^3 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

According to the identity

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(x,t)} e^{i(k-k',t)} dt = \begin{cases} 1, & \text{for } x+k-k' = 0 \\ 0, & \text{for } x+k-k' \neq 0, \end{cases} \quad k, k' \in \mathbb{N}_0^3,$$

the number A_n is non-negative for any $n \in \mathbb{N}$ and strictly positive if there exist $k, k' \in \mathbb{N}_0^3$ such that $x + k - k' = 0$ with $k_1 + k_2 + k_3 + k'_1 + k'_2 + k'_3 = n$. However, the equalities $x + k - k' = 0$ and $k_1 + k_2 + k_3 + k'_1 + k'_2 + k'_3 = n$ imply that

$$\begin{cases} A_n = 0, & \text{for } n < |x|_1, \\ A_n > 0, & \text{for } n = |x|_1, \\ A_n \geq 0, & \text{for } n > |x|_1. \end{cases} \quad (5)$$

The relation (5) and the expansion (4) prove the first part of the lemma.

As $\epsilon(q) - \epsilon_{\min} \approx \frac{1}{2}q^2$ near the origin $q = 0$, the following relation is satisfied

$$0 < \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\epsilon(q) - \epsilon_{\min}} = +\infty.$$

These prove the second part of the lemma.

Lemma 3. *The functions $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ and $d(z)$ are monotonically increasing and positive in $(-\infty, 0)$, and the followings are valid*

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} a(z) = a(\epsilon_{\min}),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} b(z) = b(\epsilon_{\min}),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} c(z) = c(\epsilon_{\min}),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} d(z) = d(\epsilon_{\min}).$$

We also have the asymptotic relations

$$a(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty,$$

$$b(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{|x_0|_1+1}}\right) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty,$$

$$c(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty,$$

$$d(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{a(z)}{d(z)} = O(|z|) \quad \text{as } z \rightarrow -\infty. \quad (6)$$

Proof. Proofs of the statements involving the functions $a(z)$ and $b(z)$ follow from the equalities $a(z) = r(0, z)$, $b(z) = r(x_0, z)$ and Lemma 2. The relation

$$d(z) = b^2(z) - a(z)c(z),$$

the limits

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{z \rightarrow 0^-} a(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}_{\min}} dt, \\ b_0 &= \lim_{z \rightarrow 0^-} b(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos(x_0, t)}{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}_{\min}} dt, \\ c_0 &= \lim_{z \rightarrow 0^-} c(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2(x_0, t)}{\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}_{\min}} dt \end{aligned}$$

and the properties of $a(z)$ and $b(z)$ yield the proof of the statements related to $d(z)$.

Lemma 4. (a) For any $z \in (-\infty, \mathbf{e}_{\min})$, the numbers

$$\mu_2(z) = \frac{1}{b(z) + \sqrt{a(z)c(z)}} \quad \text{and} \quad \mu_1(z) = \frac{1}{b(z) - \sqrt{a(z)c(z)}} \quad (7)$$

are μ -intercepts.

(b) For any $\xi, z \in (-\infty, \mathbf{e}_{\min})$ with $\xi < z$, the inequalities

$$\mu_1(\xi) < \mu_1(z) < 0 < \mu_2(z) < \mu_2(\xi) \quad (8)$$

and

$$|\mu_1(z)| > \mu_2(z) \quad (9)$$

hold.

Moreover, we have

$$\mu_1^0 := \lim_{z \rightarrow \mathbf{e}_{\min}^-} \mu_1(z) = \frac{1}{b_0 - \sqrt{a_0 c_0}} < 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \mu_1(z) = -\infty \quad (10)$$

and

$$\mu_2^0 := \lim_{z \rightarrow \mathbf{e}_{\min}^-} \mu_2(z) = \frac{1}{b_0 + \sqrt{a_0 c_0}}, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \mu_2(z) = +\infty. \quad (11)$$

Proof. Simple calculations yield the statement (a).

(b) Due to Lemma 3, the functions $a(z) \pm b(z)$ are monotonically increasing in the interval $(-\infty, \mathbf{e}_{\min})$, therefore the relations

$$\sqrt{a(z)c(z)} + b(z) > \sqrt{a(\xi)c(\xi)} + b(\xi) > 0 > b(\xi) - \sqrt{a(\xi)c(\xi)} > b(z) - \sqrt{a(z)c(z)}$$

and

$$0 > b(z) - \sqrt{a(z)c(z)} > -(\sqrt{a(z)c(z)} + b(z))$$

provide the proof of inequalities (8) and (9).

4. Threshold eigenvalues and threshold resonances of H_μ .

So far, we have studied the equation $H_\mu f = zf$ for $z \in (-\infty, \mathbf{e}_{\min})$. Now, we consider it at the left edge $z = \mathbf{e}_{\min}$ of the essential spectrum with $\mu = \mu_1^0$ or $\mu = \mu_2^0$.

Definition.

In the equation $H_\mu f = \mathbf{e}_{\min} f$, \mathbf{e}_{\min} is called

- (1) a lower threshold eigenvalue if $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$,
- (2) a lower threshold resonance if $f \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$,
- (3) a lower super-threshold resonance if $f \in L^\epsilon(\mathbb{T}^3) \setminus L^1(\mathbb{T}^3)$ for any $0 < \epsilon < 1$.

If $H_\mu f = \epsilon_{\min} f$ has no solutions in $L^1(\mathbb{T}^3)$, then ϵ_{\min} is a regular point of H_μ .

For a continuous function

$$\varphi(p) = C_1 \cos(x_0, p) + C_2$$

(where $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ are fixed numbers) define

$$g(p) = \varphi(p)/\epsilon(p).$$

The function $1/\epsilon(p)$ has a unique singular point at the origin $p = 0$, and approximated as $\epsilon(p) \approx |p|^2$ at this point. The lemma below is a straightforward consequence of the definition of g and the properties of $\epsilon(\cdot)$

Lemma 5.

- (a) if $\varphi(0) = 0$, then $g \in L^2(\mathbb{T}^3)$.
- (b) if $\varphi(0) \neq 0$, then $g \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$.

Proof. From the Makloren series expansion of the function $y = \cos x$, the equation

$$\varphi(p) = C_1 + C_2 + (x_0, p)^2 \psi(p) \quad (12)$$

can be written, where $\psi(p)$ is a continuous function. At the same time, it is possible to show

$$\frac{2}{\pi^2} p^2 \leq \epsilon(p) \leq \frac{1}{2} p^2, \quad p \in \mathbb{T}^3 \quad (13)$$

from the relation $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(a) If $\varphi(0) = 0$, then such numbers $B_1 > 0$ and $\delta > 0$ are found, $|\varphi(p)| \leq B_1 |p|^2$, $p \in \mathbb{T}^3$ and

$$\int_{\mathbb{T}^3} (g(p))^2 dp = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\varphi(p))^2}{\epsilon(p)^2} dp \leq B_1 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{p^4}{(\frac{2}{\pi^2} p^2)^2} dp = B_2 \int_{\mathbb{T}^3} 1 dp < \infty.$$

It means that $g \in L^2(\mathbb{T}^3)$.

(b) Let $\varphi(0) \neq 0$, $B_1 > 0$ and $\delta > 0$ numbers. There exist number $B_1 > 0$ and $\delta > 0$, such that

$$|\varphi(p)| \geq B_1, \quad p \in U_\delta(0).$$

Then from (13)

$$\int_{\mathbb{T}^3} (g(p))^2 dp \geq \int_{U_\delta(0)} (g(p))^2 dp \geq \frac{B_1^2}{\frac{1}{4}} \int_{U_\delta(0)} \frac{dp}{p^4} = \infty,$$

and so $g \notin L^2(\mathbb{T}^3)$.

The inequality (13) allows to get estimation.

$$\int_{\mathbb{T}^3} |g(p)| dp \leq \int_{\mathbb{T}^3} \frac{M_0}{\frac{2}{\pi^2 p^2}} dp < \infty.$$

where $M_0 \geq \max |\varphi(p)|$. Namely $g \in L^1(\mathbb{T}^3)$, so $g \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$.

In the theorem below, we describe the conditions for $\epsilon_{\min} = 0$ to be a regular point, an eigenvalue or a threshold resonance.

Theorem. (a) Let $\Delta(\mu, 0) \neq 0$.

The number 0 is a regular point of H_μ .

(b) Let $\Delta(\mu, 0) = 0$.

(b1) The number 0 is an embedded eigenvalue of H_μ , if $\mu = \frac{1}{a_0+b_0}$;

(b2) The number 0 is a threshold resonance of H_μ , if $\mu \neq \frac{1}{a_0+b_0}$.

Proof.

(a) For the equation

$$(H_\mu - 0)f = 0 \tag{14}$$

has a solution, if and only if the system of equation

$$\begin{cases} (1 - \mu b_0)C_1 - \mu a_0 C_2 = 0 \\ -\mu c_0 C_1 + (1 - \mu b_0)C_2 = 0. \end{cases} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \tag{15}$$

has a solution, where the solutions of (14) and (15) are connected by relations

$$f(p) = \frac{\mu}{\epsilon(p)} \varphi(p), \quad \varphi(p) = \cos(x_0, p)C_1 + C_2, \tag{16}$$

and

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(s) ds, \quad C_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \cos(x_0, s) f(s) ds \tag{17}$$

Since the determinant $\Delta(\mu, 0)$ of the system (15) is not zero, equation (14) has nontrivial solution, that is, the number 0 is a regular point of the operator H_μ .

[(b)] Since $\Delta(\mu, 0) = 0$ system of equations (15) has a unique solution, and according to (16)

$$f(p) = \frac{\mu}{\epsilon(p)} \varphi(p), \quad \varphi(p) = \cos(x_0, p)C_1 + C_2$$

where $f(p)$ is a solution of (14).

- (b1) $\mu = \frac{1}{a_0+b_0}$ if and only if $\varphi(0) = 0$ it follows from Lemma 5 that $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$.
- (b2) $\mu \neq \frac{1}{a_0+b_0}$ if and only if $\varphi(0) \neq 0$ it follows from Lemma 5 that $f \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$.

The last relation and the definition complete the proof.

REFERENCES

1. Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S. A. and Kuchment P. A. Quantum Graphs and Their Applications, Contemp. Math. 2006, 415.
2. Berkolaiko G. and Kuchment P. A., Introduction to Quantum Graphs, AMS Mathematical Surveys and Monographs. 2012, 186.
3. Chung F., Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conf. Series Math., Washington DC. 1997.
4. Exner P., Keating J. P., Kuchment P. A., Sunada T. and Teplyaev A. (eds.), Analysis on Graphs and Its Applications, Proc.Symp. Pure Math. 77, AMS Providence, 2008.
5. Grigor'yan A., Heat kernels on manifolds, graphs and fractals, in: European Congress of Mathematics, Barcelona, July 10-14, 2000, Progress in Mathematics 201, Birkhäuser, pp. 2001, p.393-406.
6. Korotyaev E. and Saburova N., Schrödinger operators on periodic discrete graphs, arXiv:1307.1841 2013.
7. Post O., Spectral Analysis on Graph-Like Spaces, Lecture Notes in Mathematics 2039, Springer, 2012.
8. Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I., The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys. 262, 2006, p.91-115.
9. Bellissard J. and Schulz-Baldes H., Scattering theory for lattice operators in dimension $d \geq 3$, arXiv:1109.5459v2, 2012.
10. Exner P., Kuchment P. A. and Winn B., On the location of spectral edges in Z-periodic media, J. Phys. A. 43, 474022 2010.
11. Hiroshima F., Sasaki I., Shirai T. and Suzuki A., Note on the spectrum of discrete Schrödinger operators, J.Math-for-Industry. 4, 2012, p.105-108.
12. Faria da Veiga P. A., Ioriatti L. and Carroll M. O', Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians, Phys. Rev. E. 66(3), 016130, 2002.
13. Lakaev S. N., Bozorov I. N., The number of bound states of one particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Theoretical and Mathematical physics. 158(3), 2009, p.360-376.
14. Muminov Z. E., Alladustov S. U., Lakaev S. S., Threshold Analysis of the Three Dimensional Lattice Schrödinger Operator with Non-Local Potential, Lobachevskii J Math, 41, 2020 p.1094-1102.
15. Muminov Z. E., Alladustov S. U., Lakaev S. S., Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete Laplacian, J. Math. Anal. Appl. 496(2), 124827, 2021.

16. Yafaev D. R., Scattering theory: Some old and new problems, Lecture Notes in Mathematics, 1735. Springer-Verlag, Berlin. 2000, 169 pp.

REZYUME

H_μ diskret Schrödinger operatorlari oilasi xos qiymatlarining o'zgarishi $\mu \in \mathbb{R}$ parametriga qarab \mathbb{Z}^3 uch o'lchovli panjarada o'rganiladi. Potensial, Kronecker delta funksiyasi va siljish operatori bilan tavsiflanadi. Muhim spektrdan chapda xos qiymatlar mavjudligi va ularning parametrlarga bog'liqligi aniq isbotlangan. Shuningdek, bo'sag'a xos qiymatining muhim spektriga yutilishini ko'rsatamiz.

Kalit so'zlar: Diskret Schrödinger operatorlari, chegara rezonansi, xos qiymatlar, panjara.

РЕЗЮМЕ

На трехмерной решетке \mathbb{Z}^3 исследовано поведение собственных значений семейства дискретных операторов Шрёдингера H_μ в зависимости от параметра $\mu \in \mathbb{R}$. Нелокальный потенциал описывается дельта-функцией Кронекера и оператором сдвига. Существование собственных значений ниже существенного спектра и их зависимость от параметров явно доказано. Мы также показываем, что существенный спектр поглощает пороговое собственное значение.

Ключевые слова: Дискретные операторы Шрёдингера, пороговый резонанс, собственные значения, решётка.

UDC 519.21

 $M|G|1|N$ sistemaning bandlik davri o'rta qiymati uchun limit teoremlar va ularning tadbirlari**Qurbonov H., Bozorova O'. *****REZYUME**

Ushbu ishning maqsadi $M|G|1|N$ sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun asimptotik munosabatlarni keltirib chiqarishdir. Statsionar navbat uzunligi taqsimoti bandlik davri o'rta qiymati orqali ifodalanishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Bandlik davri, navbat uzunligi, o'rta qiymat, ikkilanmalik, statsionar taqsimot.

KIRISH

Ma'lumki, xizmat ko'rsatish sistemalarining asosiy xarakteristikalarini bo'lgan bandlik davri va navbat uzunligini tahlil qilish sistemalarni optimal rejalashtirish va xizmat samaradorligini ta'minlashda muhim ahamiyatga ega. Ushbu tasodifiy jarayonlar $M|G|1$ va $GJ|M|1$ sistemalar uchun [3], [4], [5], [6], [7] ishlarda va $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N$ sistemalar uchun [8], [9], [11], [1], [2] ishlarda yetarlicha o'rganilgan.

[8], [9], [1], [2] ishlarda olingan natijalardan ko'rinadiki, statsionar navbat uzunligi taqsimoti bandlik davri o'rta qiymati, nostatsionar navbat uzunligi taqsimoti esa bandlik davri taqsimoti orqali ifodalanadi. Shu sababli kutish joylar soni cheklangan sistemalar navbat uzunliklari taqsimotining tahlilini (ayniqsa, statsionar holatda) bandlik davri va uning o'rta qiymatini o'rganishga olib kelish mumkin.

Ushbu ishda $M|G|1|N$ sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun $N \rightarrow \infty$ da asimptotik munosabatlar o'rnatiladi va ularning ayrim tadbirlari qaraladi. Jumladan, [10] ishda (209-bet) $GJ|M|1|N$ sistema statsionar navbat uzunligi taqsimoti uchun olingan natija keltirib chiqariladi.

Shuningdek, $M|G|1|K$, $k = \overline{1, N+1}$, sistema bandlik davri o'rta qiymatlari $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N - 1$ sistemalar statsionar navbat uzunliklari taqsimotlari o'rtasida ikkilanma munosabatlar o'rnatiladi.

MASALANING QO'YILISHI VA ASOSIY NATIJALAR BAYONI**1. Sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun limit teoremlar**

Bitta xizmat ko'rsatish qurilmasidan iborat bo'lgan ommaviy xizmat ko'rsatish sistemasiga λ parametrli Puasson talablar oqimi kelib tushayotgan bo'lsin, ya'ni talablarning kelib tushish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari bir xil

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \lambda > 0, x > 0, \end{cases}$$

* **Qurbonov H., Bozorova O'.** – Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Universitet xiyoboni Bulvar 15, Samarqand 140104, O'zbekiston. khabibullo.kurbanov@mail.ru. ogiloy.bozorova@mail.ru

taqsimot funksiyasiga ega.

Talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi. Xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil $B(x)[B(+0) = 0]$ taqsimot funksiyasiga hamda μ^{-1} o'rta qiymatga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil qilsin. Sistemaning kutish joylari soni N ga teng, ya'ni sistemada xizmat ko'rsatilayotgan talab bilan birga ko'pi bilan $N + 1$ ta ($N \geq 1$) talab bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan shartlar bajariladigan sistema odatda $M|G|1|N$ deb belgilanadi.

Ushbu ishda qaralayotgan sistema bandlik davri o'rta qiymatining asimptotik holatlari tahlil qilinadi. [11] ishda bandlik davri taqsimotining Laplas-Stil'tes almashtirishini aniqlovchi formula isbot qilingan. Shuningdek, bandlik davri o'rta qiymati ham aniq ko'rinishda emas, balki hosil qiluvchi funksiyalar orqali berilishi sababli ushbu natijalardan bevosita foydalanib bo'lmaydi. Xizmat ko'rsatish sistemasining aksariyat xarakteristikalarining (bandlik davri, navbat uzunligi, kutish vaqti) tahlili ko'pincha aynan bandlik davri o'rta qiymatining asimptotik holatlariga bog'liq bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\zeta_k - M|G|1|k$, $k = \overline{1, N}$, sistemaning bandlik davri,

$b(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$, $Res \geq 0$,

$g_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_k < x)$, $Res \geq 0$,

$\rho = \lambda\mu^{-1}$ - sistemaning yuklanishi,

$r - v = b(\lambda - \lambda v)$ tenglamaning $\rho \neq 1$ da birdan farqli va $\rho = 1$ da birga teng bo'lgan yagona yechimi.

1.1-teorema. Ushbu munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (r^k M\zeta_N - M\zeta_{N-k}) = \frac{1 - r^k}{\mu(\rho - 1)}, \quad (1.1)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r^N (M\zeta_N - M\zeta_{N-k}) = \frac{1 - r^k}{\mu[\lambda b'_v(\lambda - \lambda v)|_{v=r} + 1]}. \quad (1.2)$$

1.2-teorema. Ushbu munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M\zeta_{N-k}}{M\zeta_N} = \begin{cases} r^k, \rho \geq 1, \\ 1, \rho < 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

$\rho > 1$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r^N M\zeta_N = \frac{1}{\mu[\lambda b'_v(\lambda - \lambda v)|_{v=r} + 1]}. \quad (1.4)$$

1.3-teorema. $\rho > 1$ da ushbu munosabat o'rinli:

$$r = 1 + \frac{2(\rho - 1)}{\lambda^2 \sigma^2} + o(\rho - 1). \quad (1.5)$$

1.1-teoremaning isboti. [11] ishda quyidagi munosabat isbotlangan:

$$g_k(s) = \frac{\Delta_{k-1}(s)}{\Delta_k(s)}, \quad (1.6)$$

bu yerda $\Delta_k(s)$ ushbu tenglikdan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k(s) = \frac{v\bar{b}(s) - b(\lambda + \lambda - \lambda v)}{(1-v)[v - b(\lambda - \lambda v)]}. \quad (1.7)$$

Ma'lumki, $M\zeta_k = -g'(0)$. Bunga ko'ra (1.6) dan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$M\zeta_k = \Delta'_k(0) - \Delta'_{k-1}(0), k \geq 1. \quad (1.8)$$

(1.7) tenglikning ikkala tomonini s bo'yicha differensiallab, $s = 0$ da (1.8) munosabatga ko'ra ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k M\zeta_k = \frac{v}{\mu[b(\lambda - \lambda v) - v]}. \quad (1.9)$$

Faraz qilaylik, r miqdor $v = b(\lambda - \lambda v)$ tenglamaning birdan farqli eng kichik yechimi bo'lsin. U holda quyidagi munosabat o'rinli:

$$b(\lambda - \lambda v) - v = a(v)(v - 1)(v - r),$$

bu yerda $v = 1$ va $v = r$ da $a(v) \neq 0$. Bunga va (1.9) tenglikga ko'ra

$$\frac{v}{\mu a(v)} = \frac{(v-1)(v-r)v}{\mu[b(\lambda - \lambda v) - v]} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k e_k, \quad (1.10)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} e_1 &= rM\zeta_1, \\ e_2 &= rM\zeta_2 - (r+1)M\zeta_1, \\ e_k &= rM\zeta_k - (r+1)M\zeta_{k-1} + M\zeta_{k-2}, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

(1.10)munosabatdan mos holda $v = 1$ va $v = r$ larda ushbu tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \frac{1-r}{\mu(\rho-1)} \quad (1.11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k e_k = \frac{r-1}{\mu[\lambda b'_v(\lambda - \lambda v)|_{v=r} + 1]}. \quad (1.12)$$

Boshqa tomondan

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N e_k = (rM\zeta_N - M\zeta_{N-k}), \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^N r^k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N r^k e_k = \lim_{N \rightarrow \infty} r^N (M\zeta_N - M\zeta_{N-1}). \quad (1.14)$$

(1.11)-(1.14) munosabatlardan $k = 1$ holda teoremaning isboti kelib chiqadi. $k \geq 2$ bo'lgan hol uchun teorema matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi.

Darhaqiqat, aytaylik

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (r^{k-1} M\zeta_N - M\zeta_{N-k+1}) = \frac{1 - r^{k-1}}{\mu(\rho - 1)} \quad (1.15)$$

munosabat o'rinli bo'lsin. U holda ushbu munosabat va (1.12) ga ko'ra

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (r^k M\zeta_N - M\zeta_{N-k}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (r^k M\zeta_N - r M\zeta_{N-k+1} + r M\zeta_{N-k+1} - M\zeta_{N-k}) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} r(r^{k-1} M\zeta_N - M\zeta_{N-k+1}) + \lim_{N \rightarrow \infty} (r M\zeta_{N-k+1} - M\zeta_{N-k}) = \\ &= \frac{r(1 - r^{k-1})}{\mu(\rho - 1)} + \frac{1 - r}{\mu(\rho - 1)} = \frac{1 - r^k}{\mu(\rho - 1)}. \blacksquare \end{aligned}$$

1.2-teoremaning isboti. Ma'lumki, ([3], 63-bet)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_N = \begin{cases} \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \rho < 1, \\ \infty, \rho \geq 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

(1.1) tenglikka ko'ra

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_N \left(r^k - \frac{M\zeta_{N-k}}{M\zeta_N} \right) = \frac{1 - r^k}{\mu(1 - \rho)} < \infty.$$

Bundan (1.3)munosabatga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek, (1.16) ga ko'ra (1.2)dan (1.4) munosabat kelib chiqadi.

1.3-teoremaning isboti. Ma'lumki, ([3], 62-bet), $\rho > 1$ da $v = \bar{b}(\lambda - \lambda v)$ tenglama ikkita yechimga ega: $v_1 = 1$ va $v_2 = r$, bu yerda $0 < r < 1$. Shu sababli $\rho > 1$ da

$$v - \bar{b}(\lambda - \lambda v) = a(v)(v - 1)(v - r). \quad (1.17)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan, $v \neq 1$ va $v \neq r$ da $a(v) \neq 0$ bo'lgan funksiya mavjud. Boshqa tomondan, $\bar{b}(\lambda - \lambda v)$ ni v bo'yicha qatorga yoyib,

$$v - \bar{b}(\lambda - \lambda v) = -\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} (v - 1) \left(v - 1 + \frac{2(\rho - 1)}{\lambda^2 \sigma^2} \right) + 0(|1 - v|^2) \quad (1.18)$$

tenglikga ega bo'lamiz. (1.17) va (1.18) ga ko'ra

$$a(v)(v - r) = -\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \left(v - 1 + \frac{2(\rho - 1)}{\lambda^2 \sigma^2} \right) + 0(|1 - v|) \quad (1.19)$$

munosabat o'rinli. Bundan $v = 1$ da

$$r = 1 + a^{-1}(1)(\rho - 1)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Buni e'tiborga olib, (1.19) dan $v = r$ da (1.5) tenglikni hosil qilamiz. \blacksquare

Izoh. Agar $\sigma^2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty$ bo'lsa, u holda ushbu munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1 - r^k}{\mu(\rho - 1)} = \frac{2k}{\mu^3 \sigma^2}, (\lambda \rightarrow \mu),$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1 - r^k}{\mu[\lambda b'_v(\lambda - \lambda v)|_{v=r} + 1]} = \frac{2k}{\mu^3 \sigma^2}.$$

Ushbu munosabatlar bevosita 1.3-teoremaning natijasi sifatida kelib chiqadi.

2. Bandlik davri o'rtta qiymati uchun olingan natijalarning ayrim tadbiqlari.

Yuqorida keltirilgan $M|G|1|N$ xizmat ko'rsatish sistemasi bilan bir qatorda, ushbu sistemada $A(x)$ va $B(x)$ taqsimotlar o'rnini o'zaro almashtirib, hamda kutish joylari soni $(N - 1)$ ga teng deb hisoblab, ikkinchi $GJ|M|1|N - 1$ sistemani hosil qilamiz. Ushbu sistemalar ikkilanma xizmat ko'rsatish sistemalari deb ataladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$\rho_1 = \lambda\mu^{-1}$ va $\rho_2 = \mu\lambda^{-1}$ mos holda $M|G|N$ va $GJ|M|1|N - 1$ tarmoqlarning yuklanishi;

$\xi_{1N}(t)$ va $\xi_{2N}(t)$ mos holda $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N - 1$ sistemalarda t momentda mavjud bo'lgan talablar soni;

$$P_N(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi_{1N}(t) = k), k = \overline{0, N + 1},$$

$$Q_N(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi_{2N}(t) = k), k = \overline{0, N}. \quad (2.1)$$

[8] va [9] ishlarda (2.1) limitlarning (statsionar holat ehtimollarining) mavjudligi isbot qilingan hamda $P_N(k)$ va $Q_N(k)$ taqsimotlarni aniqlovchi formulalar keltirib chiqarilgan. Ushbu ehtimollar hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan miqdorlar orqali ifodalangan va shu sababli ulardan bevosita foydalanish ma'lum qiyinchiliklar bilan bog'liq.

Bu yerda $P_N(k)$ va $Q_N(k)$ ehtimollarning $M\zeta_k(k = \overline{1, N})$ lar orqali ifodalangan ko'rinishlari keltiriladi hamda 1-banddagi natijalarning ayrim tadbiqlari qaraladi. Jumladan, $P_N k$ va $Q_N k$ taqsimotlarning $N \rightarrow \infty$ dagi asimptotik holati aniq ko'rinishda topiladi.

2.1-teorema. Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$a) P_N(0) = (1 + \lambda M\zeta_N)^{-1},$$

$$P_N(k) = \mu(M\zeta_k - M\zeta_{k-1})(1 + \lambda M\zeta_N)^{-1}, k = \overline{1, N}, \quad (2.2)$$

$$P_N(N + 1) = [1 - (\mu - \lambda)M\zeta_N](1 + \lambda M\zeta_N)^{-1}.$$

$$b) Q_N(0) = [1 - (\mu - \lambda)M\zeta_k](\lambda M\zeta_N)^{-1},$$

$$Q_N(k) = \mu(M\zeta_{N-k+1} - M\zeta_{N-k})(\lambda M\zeta_N)^{-1}, k = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

2.2-teorema. $\rho_1 > 1$ ($\rho_2 = \rho_1^{-1} < 1$) da ushbu munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(N + 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(0) = 1 - \rho_1^{-1},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(N - k + 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(k) = \rho_1^{-1} r^{k-1} (1 - r), k \geq 1, \quad (2.4)$$

bu yerda r miqdor $v = b(\lambda - \lambda v)$ tenglamaning birdan farqli eng kichik yechimi.

Izoh. [10] ishda $Q_N(k)$ uchun teoremda keltirilgan munosabat boshqa metodlar yordamida keltirib chiqarilgan.

2.1-teoremaning isboti. [8] va [9] ishlarda $P_N(k)$ va $Q_N(k)$ ehtimollar uchun quyidagi munosabatlar keltirib chiqarilgan:

$$a) P_N(0) = [1 + \frac{\lambda}{\mu}(1 + \lambda f_N)],$$

$$P_N(1) = \lambda f_1 P_N(0), \quad (2.5)$$

$$P_N(k) = \lambda(f_k - f_{k-1})P_N(0), k = \overline{2, N}$$

$$P_N(N + 1) = 1 - (1 + \lambda f_N)P_N(0),$$

$$b) Q_N(0) = 1 - \lambda f_N q_{N-1}^{-1},$$

$$Q_N(k) = \lambda(f_{N-k+1} - f_{N-k})q_{N-1}^{-1}, k = \overline{1, N-1}, \quad (2.6)$$

$$Q_N(N) = \lambda f_1 q_{N-1}^{-1},$$

bu yerda f_k va q_k lar ushbu hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k f_k = \frac{v}{\lambda - \lambda v} \cdot \frac{1 - b(\lambda - \lambda v)}{b(\lambda - \lambda v) - v}, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k q_k = \frac{1}{b(\lambda - \lambda v) - v}. \quad (2.8)$$

(1.8) munosabatga ko‘ra

$$\mu M\zeta_k = q_{k-1}$$

va

$$M\zeta_k = \frac{1}{\mu}(1 + \lambda f_k)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Ushbu tengliklarga ko‘ra, (2.5) va (2.6) dan (2.2) va (2.3) munosabatlar hosil bo‘ladi. ■

2.2-teoremaning isboti. [10] ishdagi (62-bet) tasdiqga ko‘ra $\rho_1 > 1$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_N = \infty. \quad (2.9)$$

Bunga ko‘ra (2.2) tengliklardagi uchinchi va (2.3) tengliklardagi birinchi munosabatlardan 2.2-teoremaning birinchi tasdiqi kelib chiqadi.

(2.2) dan ushbu tenglikga ega bo‘lamiz:

$$P_N(N - k + 1) = \frac{\mu(M\zeta_{N-k+1} - M\zeta_{N-1})}{1 + \lambda M\zeta_N} = \frac{\mu(\frac{M\zeta_{N-k+1}}{M\zeta_N} - \frac{M\zeta_{N-1}}{M\zeta_N})}{\frac{1}{M\zeta_N} + \lambda}.$$

Bu tenglikdan 1.2-teoreмага asosan, $N \rightarrow \infty$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(N - k + 1) = \frac{\mu(r^{k-1} - r^k)}{\lambda} = \rho_1^{-1} r^{k-1} (1 - r) \quad (2.10)$$

natijaga ega bo'lamiz.

(2.2) va (2.3) dan

$$Q_N(k) = P_N(N - k + 1) \cdot \frac{1 + \lambda M \zeta_N}{\lambda M \zeta_N}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bundan (2.10) ga ko'ra (2.9) ni e'tiborga olib, ushbu natijani olamiz: $\rho_2 > 1$ da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(k) = \rho_1^{-1} r^{k-1} (1 - r). \blacksquare$$

Xulosa

Ushbu ishda o'rnatilgan ikkilanma munosabatlar hamda [2] ishda $M|G|1|N$ sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun $N \rightarrow \infty$ va sistema yuklanishi $\rho = \lambda \mu^{-1} \rightarrow 1$ da o'rnatilgan asimptotik formula yordamida $M|G|1|N$ va $GJ|M|1|N - 1$ ikkilanma sistemalar statsionar navbat uzunliklari taqsimoti uchun asimptotik munosabatlarni keltirib chiqarish qiyin emas.

Xulosa qilib aytish mumkinki, yuqorida aytilgan ikkilanma sistemalar statsionar navbat uzunligiga doir deyarli barcha natijalarni $M|G|1|N$ sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun olingan natijalar yordamida nisbatan oson keltirib chiqarish mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Курбанов Х. Переходные явления для распределения остатка периода занятости системы массового обслуживания $M|G|1|N$. Сбр.АН УзССР "Предельные теорема для случайных процессов и стохастические выводы", Ташкент: Фан, 1981, 108-122 стр.
2. Курбанов Х. Соотношение двойственности и переходные явления в системах с ограниченной очередью. Дисс.на соискание уч.ст.кандидата ф.м.н., Ташкент, 1987, 122 стр.
3. Климов Г.Б. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 239 стр.
4. Прабжу Н. Метода теории массового обслуживания и управления запасами. М.: 1976.
5. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами. М.:1973.
6. Риордан Дж. Вероятностные система обслуживания. М.:1966.
7. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания, Т.1, М.:1979.
8. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы, Ташкент, Фан, 1974, 14 стр.

9. Висков О.В., Исмаилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и смежные вопросы, науч.труды.ТашГУ, вып.402, 1972, 17-31 стр.
10. Cohen J.W. The single Server Queue. Willey (New-York), 1969.
11. Harris T.J. The remaining busy period of finite queue. Oper.Res.,v19, 1971, 219-233 pg.
12. Ташманов Х.Т., Курбанов Х. Исследование распределения стационарных длин очередей двойственных систем. Сб.науч.тр. ТашГУ, 1988, 79-82 стр.
13. Солнышкина И.В. Теория систем массового обслуживания. Комсомольск-на-Амуре, 2015.

РЕЗЮМЕ

Цель этой работа показать асимптотические соотношения для среднего значения периода занятости системы $M|G|1|N$. Показано, что распределения стационарной длины очереди выражается через среднего значения периода занятости.

Ключевые слова: Период занятости, длина очереди, средняя величина, двойственность, стационарные распределение.

RESUME

The purpose of this paper is to show asymptotical relations for mean value of busy period of the queueing system $M|G|1|N$. It is shown that the distribution of stationary queue size is expressed in terms of mean value of busy period.

Key words: Busy period, queue length, mean value, duality, stationary distribution.

UDC 517.977.5:631.672.4

OPTIMAL WATER MANAGEMENT IN THE CHANNELS OF MACHINE
WATER RAISE SYSTEMSTuraev R. ⁴, Seytov A. ⁵, Haydarova R. ⁶, Abduraxmonov O. ⁷, Choriyorov N. ⁸

Abstract

The article studies the problem of water resources management in the channels of machine water lifting systems and developed improved modes of water supply to systems of machine water lifting for irrigation, developed on the basis of the use of modern mathematical models, optimal control methods and algorithms will ensure the saving of water and energy resources in the system of machine water lifting.

Key words: mathematical model, unsteady flow of water, main canals, optimal control problems, fundamental solution, differential equations, hydraulic structures

I. Introduction

Once the ecological situation has been assessed, it is important to consider how water can be efficiently managed within the pumping station cascade. This may involve assessing the capacity of each station, as well as the amount of water that is being pumped through the system. It may also involve considering the source of the water, including whether it is being drawn from a local river or other waterway, or from an underground aquifer [25,26].

In addition to the strategies mentioned above, it may also be important to consider the potential impacts of climate change on the water resources in the area. This could include changes in precipitation patterns, increased frequency and intensity of extreme weather events, and changes in the timing and amount of snowmelt. By planning for these potential impacts and implementing adaptation strategies, such as increasing water storage capacity or implementing more flexible pumping schedules, it is possible to ensure that water resources can continue to be managed effectively in the face of changing environmental conditions.

Another important aspect of optimal water management is stakeholder engagement. This may involve consulting with local communities, businesses, and other organizations to understand their needs and priorities related to water resources. By engaging with stakeholders in a transparent and collaborative manner, it is possible to build support for water management strategies and ensure that they are implemented in a way that is equitable and inclusive [27].

⁴**Rasul Turaev** – Associate Professor, Vice-Rector for Academic Affairs, Termiz State University, Tashkent, Uzbekistan, rasul.turaev@mail.ru

⁵**Aybek Seytov** – Associate Professor, Department of Mathematics and Computer Science, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, saybek868@gmail.com

⁶**Roziya Haydarova** – Scientific researcher, Termez State University, Surxandaryo, Uzbekistan, roziyadavronovna0412@gmail.com

⁷**Olim Abduraxmonov** – Scientific researcher, Department of Mathematics and Computer Science, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, abdalim83@mail.ru

⁸**Nurbek Choriyorov** – Scientific researcher, Department of Mathematics and Computer Science, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, nchoriyorov@gmail.com

Finally, it is important to regularly monitor and evaluate water management strategies to ensure that they are achieving their intended goals. This may involve monitoring water quality and quantity, tracking changes in local ecosystems, and assessing the social and economic impacts of water management strategies. By regularly evaluating and adjusting water management strategies based on new information and changing conditions, it is possible to ensure that water resources are being managed in the most effective and sustainable way possible. Any complex hydrographic scheme of the channels of machine water lifting systems can be divided into several simple structures, which are a graph-tree. The tree graph structure is divided into hierarchies. The hierarchy in the graph is defined using two parameters [1-3]

$$\Omega_I = \{[i, K_i^{GP}], \forall i \in I\} \quad (1)$$

i - hierarchy number; K_i^{GP} - number of groups in the given hierarchy.

Groups are a set of sections connected to their beginnings. A group can have one or more parcels.

Each group is defined by the following numbers [3,4]

$$\Omega_G = \{[j_{iG}, n_{ijG}, k_{ijG}], k_{ijG} \in N_{ijG}, \forall j_{iG} \in I_{iG}, \forall i \in I\}, \quad (2)$$

j_{iG} -group number in the hierarchy; n_{ijG} -number of the section connected to this group with its end; k_{ijG} -number of groups in the given hierarchy; N_{ijG} -set of numbers included in this group of sections of the river; I_{iG} -set of group numbers included in this hierarchy.

Each section of the graph is defined as follows [5,6]

$$\Omega_M = \{[m, k_{mB}, k_{mP}, m_y], \forall k_{mB} \in K_{mB}, \forall k_{mP} \in K_{mP}, \forall m \in M\}, \quad (3)$$

m - plot number; k_{mB} , k_{mP} и m_y - respectively, the number of water intakes, tributaries and plots at the end; K_{mB} , K_{mP} и m_y - set of numbers of water intakes, tributaries and numbers of sections located at the end, respectively. Each section of the channel has its own morphological and hydraulic characteristics, which, for example, for trapezoidal prismatic sections, will be written as follows, m -plot number, b_{0m} -bottom width, m_m - slope factor, n_m -roughness factor, i_m - site bottom slope, l_m - section length, η_m - channel section efficiency.

In the case of a non-prismatic section of the channel, the characteristics are given as follows [7,8]

$$\Omega_M^x = \{[m, h_{im}, B_{im}, Q_{im}, l_m], \forall i \in I_m, \forall m \in M\}, \quad (4)$$

where m - is plot number, h_{im} - depth, B_{im} - width on top of plot in vertical section i , Q_{im} - water consumption corresponding to this mode, i.e. consumption characteristics of the canal sections.

Thus, the structure of the main canal is determined by the knowledge of sets (1) - (4) and they fully characterize its topology and hydraulic characteristics [9]

$$\Omega_K = \Omega_I \cup \Omega_G \cup \Omega_M. \quad (5)$$

On the basis of the linear scheme of the main canal, hierarchies, groups are determined and all sections, branches, tributaries of the canal are numbered. After that, the sets Ω_I , Ω_G , Ω_M are compiled in the form of a table with the corresponding fields, these tables are filled in accordance with the accepted numbering of sections, branches, tributaries, groups and hierarchies. This representation of the structure of the main canal is very convenient for developing a database and solving problems of managing the water resources of the main canal.

Let us consider the record in the given terms of the database of balance relations in the channel sections from the condition of the presence of steady modes in the channel sections. The water flow at the beginning of the m - section of the canal is determined as follows [10,11]

$$Q_m^H = \frac{Q_m^K + \sum_{j \in J_m^B} Q_{Bmj} - \sum_{j \in J_m^P} Q_{Pmj}}{\eta_m}, \quad \forall m \in M, \quad (6)$$

where Q_m^H - water flow at the beginning and end, Q_{Pmj} , Q_{Bmj} - water consumption of water intakes and tributaries, η_m - is the efficiency of the m - section of the channel.

In the groups j_{iG} in i - hierarchy of the structure of the main channel, the balance ratios are written as [12]

$$Q_{n_{ijG}}^K = \sum_{k_{ijG} \in N_{ijG}} Q_{ijG}^H, \quad \forall n_{ijG} \in I_{iG}, \quad (7)$$

$Q_{n_{ijG}}^K$ - water flow at the end of the section n_{ijG} - section connected to this group by its end, $Q_{k_{ijG}}^H$ water flow at the end of section k_{ijG} - the section of the canal of group j_{iG} .

For end sections in groups, water flow rates are set at the end of these sections [13,14]

$$Q_{m_k}^K = Q_{m_k}, \quad \forall m_k \in M_k \quad (8)$$

where $Q_{m_k}^K$ - water flow rates at the end of the end sections in the groups of the m_k - section connected to this group by its end, Q_{m_k} - given water flow in the end sections of the main canal, $M_k \in M$ - set of numbers of end sections of the main canal.

Using expressions (6) - (8) with known values of water flow rates at the outlets of water intakes and inflows, as well as at the ends of the final sections of the main canal, starting from the last hierarchy of the canal structure, it is possible to calculate the required water flow rates at the beginning of all sections of the main canal. The resulting water flow rates provide the specified flow rates at the water intakes and end sections of the canals, taking into account the known water flow rates at the inflows at given efficiency values of k.p.d. channel sections.

In the problem of determining water needs in the annual planning of water distribution for the growing season, crop irrigation regimes i are used, in which for each hydromodule region k in each irrigation j , irrigation norms W_{ikjP} , irrigation dates, i.e., start t_{ikjH} , end t_{ikjK} and duration of watering $T_{ikj} = t_{ikjH} - t_{ikjK}$. Irrigation rate W_{ikO} for

the growing season is determined as the sum of irrigation rates, i.e. $W_{ikO} = \sum_{j=1}^{N_i} W_{ikjP}$. For planning water resources for each crop, ten-day hydro- and irrigation modules are calculated. The ten-day hydromodule is the required specific water consumption (l/s/ha) supplied evenly for a given decade of the growing season. A ten-day irrigation module is the required specific area (ha/irrigation) irrigated in a given decade of the growing season.

II. Methods and results

The algorithm for calculating the ten-day hydro - and irrigation module for crop irrigation regimes for the growing season, which is necessary for implementation in the water management database, has the following form: 1. Irrigation regimes for agricultural crops are selected in accordance with the hydromodule area of the region under consideration. 2. For a given hydromodule region of the region, the irrigation regime of the selected crop, starting from the first decade of the growing season, the start and end dates of the decade are compared with the start date of crop irrigation, there may be the following cases:

a. the initial date of irrigation of agricultural crops is outside the decade, in this case, for this decade, the ten-day hydro - q_{ikjnD} and irrigation modules s_{ikjnD} are equal to zero, i.e. [15,16]

$$q_{ikjnD} = 0, \quad (9)$$

$$s_{ikjnD} = 0, \quad (10)$$

where q_{ikjnD} is ten-day hydromodule (l/s/ha), s_{ikjnD} is irrigation module (ha/irrigation), i - is crop, k - is hydromodule area, j - is irrigation number, n - is current decade number.

b. if the start date of irrigation of agricultural crops is between the start and end dates of the decade, then for this decade the ten-day hydromodule q_{ikjnD} and irrigation s_{ikjnD} modules are determined by the following dependencies [17,18]

$$q_{ikjnD} = \frac{W_{ikjnD}(T_{ikj} - t_{ijkH} - 1)}{86,4T_{ikj}} \quad (11)$$

$$s_{ikjnD} = \frac{(T_{ikj} - t_{ijkH} - 1)}{T_{ikj}} \quad (12)$$

t_{nH} is the start date of the decade, n - is the number of the current decade,

c. if the start and end dates of the decade are between the start and end dates of irrigation of crops, then for this decade the q_{ikjnD} hydromodule and s_{ikjnD} irrigation modules are defined as [19,20]

$$q_{ikjnD} = \frac{W_{ikjnD}}{86,4T_{ikj}}, \quad (13)$$

$$s_{ikjnD} = \frac{T_{nD}}{T_{ikj}}, \quad (14)$$

where T_{nD} is the number of days in a given decade.

d. if the end date of irrigation of agricultural crops is between the start and end dates of the decade, then for this decade the ten-day hydromodule is determined as follows [21]

$$q_{ikjnD} = \frac{W_{ikjnD}(t_{ijkH} - t_{nK})}{86,4T_{ikj}}, \quad (15)$$

$$s_{ikjnD} = \frac{(t_{ijkH} - t_{nK})}{T_{ikj}}, \quad (16)$$

where t_{nK} - is the start date of the decade, n is the number of the current decade.

3. Ten-day hydromodule of agricultural crops is determined by summing ten-day irrigation hydromodules

$$q_{iknD} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} q_{ikjnD} \quad (17)$$

$$S_{iknD} = \sum_{n=1}^{N_{ik}} S_{ikjnD}. \quad (18)$$

In (9) - (18) ten-day hydromodules q_{ikjnD} has the dimension (l/s/ha), ten-day irrigation modules S_{ikjnD} (ha/irrigation), irrigation duration T_{ikj} and date differences, for example $t_{ijkH} - t_{nK}$ (days).

Ten-day hydro - and irrigation modules of crops calculated according to the algorithm (9) - (18) are the basis for calculating the water demand of crops for the growing season, depending on the sown areas of the respective crops.

Next, consider the sequence of calculating the needs of the water resources of the main canal consisting of $m \in M$ sections, in each section of the canal there are branches $j \in J_m$, and each branch j irrigates the areas ω_{jmik} where $j \in J_m$ are the numbers of branches in the m -section, J_m are the sets of numbers of branches in the m -section;

- $m \in M$ - numbers of sections of the main canal, M - is the set of numbers of sections of the main canal;
- $i \in I_{mj}$ - types of agricultural crops sown on suspended lands of the j - branch in the section of the canal with the number m ; I_{mj} - a set of types of agricultural crops suspended by the lands of the j - allotment in the section of the canal with the number m ;
- $k \in K_{mjk}$ - types of hydro - modular areas suspended from the lands of the j - branch on the canal section with number m , K_{mjk} - set of types;
- hydromodule areas suspended from the lands of the j - branch in the section of the canal with the number.

Thus, ω_{jmik} is the structure of the sown areas of the entire main canal, then for each branch, taking into account the modes of irrigation of crops, the need for water resources is determined as follows [22]

$$Q_{Omjn}^P = \sum_{i \in I_{mj}} \sum_{k \in K_{mji}} \frac{q_{iknD} \omega_{jmik}}{\eta_{vxmj}}, \quad (19)$$

$$Q_{mjn}^P = Q_{Omjn}^P + q_{Dpmjn}, \quad (20)$$

where q_{iknD} - ten-day hydromodules of the i - crop of the k -hydromodule region for the n - decade; Q_{Omjn}^P is the required flow for irrigation of water, q_{Dpmjn} - is the required flow of non-agricultural consumers, Q_{mjn}^P is the total required water flow of the j - outlet of the m -

section of the main canal for the n - decade; η_{vxjm} is the efficiency factor of the on-farm canals of the j - outlet of the m - section of the main canal.

Irrigated areas by consumers are determined as

$$S_{mjn}^P = \sum_{i \in I_{mj}} \sum_{k \in K_{mji}} s_{iknD} \omega_{mjik}, \quad (21)$$

where S_{mjn}^P – irrigated areas of the j - outlet of the m -section of the main canal for the n - decade of the growing season; s_{iknD} - ten-day irrigation modules of the i - crop of the k - hydromodule region for the n - decade.

Similarly, according to formula (19), the required water flow rates at the end outlets of the main canal are determined.

The required costs and irrigated areas suspended by the m - plot in the n - decade of the growing season on the plots are determined as follows

$$Q_{mn}^P = \sum_{j \in J_m} Q_{mjn}^P, \quad (22)$$

$$S_{mn}^P = \sum_{j \in J_m} S_{mjn}^P, \quad (23)$$

where J_{mj} – are the sets of branch numbers of the m – section of the main canal.

According to expressions (19) - (20), the needs of the canal sections in water resources for the n - decade of the growing season are determined.

The sequence (algorithm) for calculating water flow rates for sections of the main canal is as follows:

1. In accordance with (8) and (19), the required water flow rates are calculated for the n - decade at the end of the final sections of the main canal

$$Q_{nm_k}^{PK} = Q_{nm_k}^P, \quad \forall m_k \in M_k, \quad \forall n \in N_B, \quad (24)$$

2. Then, starting from the last hierarchy by hierarchy groups in the sections, the required water discharges for the n - decade at the beginning of the sections of the main canal are calculated as follows [23]

$$Q_{mn}^{PH} = \frac{Q_{mn}^{PK} + Q_{Bmn}^P - Q_{Pmn}^P}{\eta_m}, \quad \forall m \in I_{iG}, \quad \forall n \in N_B, \quad (25)$$

$$Q_{Bmn}^P = \sum_{j \in J_m^B} (Q_{OBBmj}^P + q_{DPMjn}) = Q_{OBBm}^P + q_{DPMn}, \quad \forall m \in I_{iG}, \quad \forall n \in N, \quad (26)$$

$$Q_{Pmn}^P = \sum_{j \in J_m^P} Q_{Pmjn}^P, \quad \forall m \in I_{iG}, \quad \forall n \in N_B, \quad (27)$$

$$Q_{OBmn}^P = \sum_{j \in J_m^B} Q_{OBmjn}^P, \quad \forall m \in I_{iG}, \quad \forall n \in N_B, \quad (28)$$

$$q_{DPmn} = \sum_{j \in J_m^B} q_{DPmjn}, \quad \forall m \in I_{iG}, \quad \forall n \in N, \quad (29)$$

where Q^{PH}_{mn} , Q^{PK}_{mn} – water flow at the beginning and end of the site, Q^P_{Bmn} , Q^P_{Pmn} – total water consumption of required water intakes and forecast inflows, Q^P_{OBmn} , q_{DPmn} – total water discharges of required water intakes for irrigation and other consumers, J_m^B – set of numbers of water intakes on the site, J_m^P – set numbers of tributaries in the section, I_{iG} – set of section numbers in the group under consideration, η_m – efficiency of the m – section of the canal, N_B – numbers of the decade of the growing season.

3. In the groups j_{iG} in the i hierarchy of the structure of the main channel, the balance ratios are written as [24]

$$Q_{n_{ijG}n}^{PK} = \sum_{k_{ijG} \in N_{ijG}} Q_{k_{ijG}n}^{PH}, \quad \forall n_{ijG} \in I_{iG}, \quad \forall n \in N_B, \quad (30)$$

where $Q_{n_{ijG}}^K$ is the water flow at the end of the n_{ijG} section.

4. Next, the calculation is repeated in steps 2-3 for the next hierarchy in the structure.

Thus, the planned modes of operation of sections of the main canal are calculated to meet the needs of all consumers, which are characterized by the following set:

$$\Omega_M^{BP} = \{ [m, Q_{mn}^{PH}, Q_{mn}^{PK}, Q_{Bmn}^P, Q_{Pmn}^P, Q_{OBmn}^P, q_{DPmn}^P, S_{mn}^P], \quad \forall m \in M, \quad \forall n \in N_B \}, \quad (31)$$

Here Q^{PH}_{mn} , Q^{PK}_{mn} – are the water consumption at the beginning and end of the site, Q^P_{Bmn} , Q^P_{Pmn} – are the total water discharges of water intakes and tributaries, Q^P_{OBmn} , q^P_{DPmn} – are the total water consumption for irrigation and other consumers, S^P_{mn} – are the irrigated areas of agricultural crops suspended on the plot m for the decade n of the vegetation period.

The head required (planned) water flow $Q_{m_g n}^{HP}$ corresponding to the initial section of the canals of the machine water lifting system for decades of the growing season is the required flow for all consumers of the canal. Here m_g – is the number of the initial section of the main channel.

Determining the need for water resources by consumers of the main canal in the non-vegetation period is similar to that for the growing season. The only difference is that instead of irrigation regimes for crops, leaching rates of irrigation of saline lands by types of salinization, the irrigation rate of grain and other crops during the non-vegetation period, and the rates of water-charging irrigation are used.

For the non-vegetation period, leaching regimes for saline areas are determined by salinity types i , in which leaching rates, irrigation rates for grain crops and the rate of water-charging irrigations W_{ikjP} , irrigation periods, i.e. start t_{ikjH} , end t_{ikjK} and duration of irrigation $T_{ikj} = t_{ikjH} - t_{ikjK}$. The leaching rate, irrigation rate for cereals during the non-vegetation period and the rate of water-charging irrigation W_{ikP} are determined as the sum of leaching and irrigation rates, i.e. $W_{ikP} = \sum_{j=1}^{N_i} W_{ikjP}$.

Appendix 6 to Table A1.2 shows the flushing regimes for saline lands during the non-vegetation period. For planning water resources for each type of saline lands, ten-day flushing hydro and irrigation modules are calculated. A ten-day leaching hydromodule is the required

specific water consumption (l/s/ha) supplied evenly for flushing saline lands in a given decade of the non-vegetation period. A ten-day irrigation module is the required specific area (ha/irrigation) irrigated in a given decade of the non-vegetation period. Ten-day hydro and irrigation modules for the non-vegetation period are calculated according to the algorithm (9) - (18) using the data in Table A1.2.

The algorithm for calculating the planned water supply regimes for sections of the main canal for the non-vegetation period, to provide leaching irrigation of saline lands, irrigation of grain water-charging irrigation of all outlet consumers is characterized by the following set [25]

$$\Omega_M^{HBP} = \{ [m, Q_{mn}^{HP}, Q_{mn}^{KP}, Q_{Bmn}^P, Q_{Pmn}^P, Q_{OBmn}^P, q_{DPmn}^P, S_{mn}^P], \forall m \in M, \forall n \in N_{HB} \}, \quad (32)$$

Here Q_{mn}^{PH} , Q_{mn}^{PK} - are the water discharge at the beginning and end of the canal section, Q_{Bmn}^P , Q_{Pmn}^P - are the total water discharges of water intakes and tributaries, Q_{OBmn}^P , q_{DPmn}^P - are the total water discharges for irrigation and other consumers, S_{mn}^P - are the irrigated areas of agricultural crops suspended on the plot m for a decade n outside the growing season, N_{HB} - the numbers of the decade of the growing season.

The elements of the set (32) are calculated on the basis of saline lands leaching regimes, irrigation of crops during the non-vegetation period, according to the structure of areas of saline lands, the structure of crops of grain and other crops irrigated during the non-vegetation period.

With the calculation of all elements of the sets (31) - (32) according to the above algorithm, the problem of determining the planned needs in the annual planning of irrigation of irrigated lands is solved.

III. Conclusion

As a result of the research, the methodology for calculating the improved operating modes of the facilities of the machine water lifting system for irrigation - the cascade of the Jizzakh pumping stations has been refined:

- analysis of water intake and water supply regimes of the Amu Zangsky pumping station cascade;
- parameters of pumping units and pressure pipelines were determined and specified;
- the methodology for calculating the modes of water intake and water supply of pumping stations based on the theoretical-set approach has been refined;
- the methodology for calculating the steady-state operating modes of sections of the cascade channels has been refined.

It should be noted that the developed method for calculating the operating modes of the objects of the machine water lifting system for irrigation, using the example of the Jizzakh pumping station cascade, will improve the operating modes of the system objects, reduce the consumption of water and energy resources during water lifting in the system and increase the operational efficiency of the system objects by increasing the speed of obtaining, storage and processing of necessary information.

REFERENCE

1. S. Rakhimov, A. Seytov, B. Nazarov, B. Buvabekov. Optimal control of unstable water movement in channels of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012065, Dagestan, 2020, IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012065 (5, Scopus, IF=4,652)
2. A. Kabulov, I. Normatov, A. Seytov and A. Kудaybergenov. "Optimal Management of Water Resources in Large Main Canals with Cascade Pumping Stations," 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), Vancouver, BC, Canada, 2020, pp. 1–4, DOI: 10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216402 (5, Scopus, IF= 9.936).
3. Shavkat Rakhimov, Aybek Seytov, Nasiba Rakhimova, Bahrom Xonimqulov. Mathematical models of optimal distribution of water in main channels. 2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), INSPEC Accession Number: 20413548, IEEE Access, Tashkent, Uzbekistan, DOI:10.1109/AICT50176.2020.9368798 (AICT) pp. 1–4, (No. 5, Scopus, IF=3.557)
4. A. V. Kabulov, A. J. Seytov, A. A. Kудaybergenov. Classification of mathematical models of unsteady water movement in the main canals of irrigation systems, International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4, April 2020, ISSN: 2350-0328, India, pp. 13392- 13401. (No. 5, Web of science, IF=3.98).
5. Sh. Kh. Rakhimov, A. J. Seytov, A. A. Kудaybergenov. Optimal control of unsteady water movement in the main canals. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4, April 2020, India, ISSN: 2350–0328, pp. 13380–13391. (No. 6, Web of science, IF=3.98).
6. A. J. Seytov, A. R. Kutlimuradov, R. N. Turaev, N. K. Muradov, A. A. Kудaybergenov, Mathematical model of optimal control of the supply canal to the first pumping station of the cascade of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 8, Issue 3, March 2021. India. ISSN: 2350-0328. pp. 16790–16797. (5, web of science IF=6,646).
7. A. V. Kabulov, A. J. Seytov, and A. A. Kудaybergenov. Mathematical models of the optimal distribution of water in the channels of irrigation systems. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN(P): 2249-6890; ISSN(E): 2249-8001 Vol. 10, Issue 3, June 2020, pp. 14193–14202 (5 Scopus IF = 9.6246).
8. Sh. Kh. Rakhimov, A. J. Seytov, D. K. Jumamuratov, & N. K. Rakhimova. Optimal control of water distribution in a typical element of a cascade of structures of a machine canal pump station, hydraulic structure and pump station. India. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN (P): 2249–6890; ISSN(E): 2249–8001 Vol. 10, Issue 3, June 2020, pp. 11103–11120. (5 Scopus IF = 9.6246).

9. A. Zh. Seitov, BR Khanimkulov. Mathematical models and criteria for water distribution quality in large main irrigation canals. Academic research in educational sciences. Uzbekistan. Ares.uz. Vol. 1. No. 2, 2020. ISSN 2181-1385. Pp.405–415. (5, web of science IF=5.723).
10. A. Zh. Seitov, B. R. Khanimkulov, M. Gaipov, O. Khamidullaeva, and N. K. Muradov. Numerical algorithms for solving problems of optimal control of objects of the Karshi main canal. academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 3 | 2021 ISSN: 2181–1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723 DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00519. pp. 1145–1153. (5, web of science IF=5.723)
11. A. Zh. Seytov, A. R. Kutlimuradov, R. N. Turaev, E. M. Makhkamov, B. R. Khonimkulov. Optimal management of water resources of large main canals with a cascade of pumping stations of irrigation systems. academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 2 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: (5, web of science IF=5.723)
12. Seytov Aybek Jumayevich, Solaeva Mehribon Norimonovna, Tadjibayev Ikram Uralbaevich. The product of a function and its place in physics. Solid State Technology. Vol. 63 no. 4 (2020). (No5 scopus IF=0.3)
13. Sh. Kh. Rakhimov, A. Zh. Seitov, M. R. Sherbaev, D. Zhumamuradov, and F. Zh. Dusiyorov. Database structure and software modules for modeling water resources management of the cascade of pumping stations of the Karshi main canal. Reclamation 2019 3(89) pp. 85-91. (5, web of science IF=0.144).
14. A. V. Kabulov, A. Zh. Seitov, A. A. Kudaibergenov. Criteria for managing the tasks of operational management of water resources of water management systems. ILIM ham JAMIYET. science and society Scientific-methodical journal Series: Natural-technical sciences. Social and economic sciences. Philological sciences No2 2020. Pp.6–7.
15. Sh.Kh. Rakhimov, A.Zh. Seytov, A.A. Kudaibergenov. Optimal management of water distribution in the main canals of irrigation systems. ILIM ham JAMIYET. SCIENCE and SOCIETY Scientific-methodical journal Series: Natural-technical sciences. Social and economic sciences. Philological sciences. pp. 8–10. А.СЕЙТОВ. Оптимальные методы управления водных ресурсов в крупных магистральных каналах ирригационных систем. AGRO ILM – O‘ZBEKISTON QISHLOQ VA SUV XO‘JALIGI. Махсус сон. 2020. Ташкент. Стр. 84–86.
16. Sh. Kh. Rakhimov, A. Zh. Seytov, A. A. Kudaibergenov. Criteria for managing the tasks of operational management of water resources of water management systems. Abstracts of IX International Scientific and Practical Conference Kharkiv, Ukraine 2–4 August 2020. Pp. 125–131.
17. A. Zh. Seytov, A. A. Kudaibergenov, B. R. Khonimkulov. Modeling of two-dimensional unsteady water flow in open channels based on the projection method. collection of reports of the Republican scientific and technical conference "Innovative ideas in the

- development of information and communication technologies and software" May 15–16, 2020. SAMARKAND. Page 60–63.
18. Sh. Kh. Rakhimov, A. Zh. Seytov. Set-theoretic model of a pumping station equipped with axial rotary-vane pumping units. Materials of the republican scientific online conference of young scientists "Modern problems of mathematics and applied mathematics" dedicated to the 100th anniversary of Academician S. Kh. Sirazhdinov (May 21, 2020) Pp. 78–82.
 19. A. J. Seytov, A. J. Khurramov, S. N. Azimkulov, M. R. Sherbaev, A. A. Kudaybergenov, S. Kh. Khasanova. Optimal control of pumping station operation modes by cascades of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. T. 8 No. 2 ISSN: 2350–0328. pp. 17177–17185.
 20. A. A. Kudaybergenov, A. J. Seytov, A. R. Kutlimuradov, R. N. Turaev, N. K. Muradov. Mathematical model of optimal control of the supply canal to the first pumping station of the cascade of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. T. 8 No. 3 pp. 16790–16797.
 21. A. Zh. Seytov, B. R. Khanimkulov, M. A. Gaipov, M. R. Yusupov. ZARFSHON DARYOSI OQIMINING HOSIL BO‘LISHIGA ATMOSFERA YOG‘INLARI VA HAVO HARORATINING TASIRI. Academic research in educational sciences. T.2 No.5. Page 156–162.
 22. AZ. Seitov, BR. Khanimkulov, M. Gaipov, O. Khamidullaeva, NK. Muradov. NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL OF OBJECTS OF THE KARSHI MAIN CANAL. Academic research in educational sciences. T. 2 No. 3 pp. 1145–1145.
 23. A. V. Kabulov, A. Zh. Seytov, A. A. Kudaibergenov. Criterion of management of tasks of operational management of water resources of objects of water management systems. ILIM HAM JAMIYET. Page 6–8.
 24. A. Zh. Seytov, A. R. Kutlimuradov, R. N. Turaev, E. M. Makhkamov, B. R. Khonimkulov. Optimum management of water resources of large main canals with a cascade of pumping stations of irrigation systems. academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 2 | 2021 ISSN: 2181–1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723 DOI: 10.24411/2181–1385–2021–00193. Page 265–273.
 25. R. M. Usmanov, A. B. Abdikamalova, I. D. Eshmetov, S. Kuldashaeva, R. J. Eshmetov, A. I. Sharipova. Obtaining coal adsorbents based on local wood waste, research of their physico-chemical and adsorption properties. Journal of Critical Reviews, 2020, 7(12), pp. 128–135.
 26. Jozil O Takhirov, Rasul N Turaev. The free boundary problem without initial condition. Journal of Mathematical Sciences. Vol.187. No.1, pp. 86–100.
 27. S. Kuldashaeva, B. Jumabaev, A. Agzamkhodjayev, L. Aymirzaeva, K. Shomurodov. Stabilization of the moving sands of the drained and dried aral sea bed. Journal of Chemical Technology and Metallurgy [this link is disabled](#), 2015, 50(3), pp. 314–320.

Аннотация

В статье исследована проблема управления водными ресурсами в каналах машинных водоподъемных систем и разработаны, усовершенствованные режимы подачи воды в системы машинного водоподъема для орошения, разработанные на основе использования современных математических моделей, оптимальных методов управления и алгоритмы обеспечат экономию водных и энергетических ресурсов в системе машинного водоподъема.

Ключевые слова: математическая модель, нестационарный поток воды, магистральные каналы, оптимальные задачи управления, фундаментальное решение, дифференциальные уравнения, гидротехнические сооружения

Аннотация

Maqolada mashinali suv ko'tarish tizimlarining kanallarda suv resurslarini boshqarish muammosi o'rganiladi va sug'orish uchun mexanik suv ko'tarish tizimlarini suv bilan ta'minlashning takomillashtirilgan rejimlari ishlab chiqiladi, zamonaviy matematik modellardan foydalanish asosida ishlab chiqilgan optimal boshqarish usullari va algoritmlari mashina suv ko'tarish tizimida suv va energiya resurslarini tejashni ta'minlaydi.

Kalit so'zlar: matematik model, beqaror suv oqimi, magistral kanallar, optimal boshqaruv masalalari, fundamental yechim, differensial tenglamalar, gidrotexnik inshootlar

UDC 517.55

MATRIX IN INTELLIGENT TECHNOLOGY FOR AUTOMATIC PLANT SPECIES RECOGNITION IN APPLICATION SYSTEM

Yilihamujiang Yusupu * Matyakubov A. *

Abstract

Automatic plant species recognition has become increasingly vital in various domains such as agriculture, biodiversity conservation, and ecological research. The integration of intelligent technology into various domains has revolutionized traditional approaches, enhancing efficiency and accuracy. Traditionally, manual identification of plant species is labor-intensive and time-consuming. However, recent advancements in AI and ML have paved the way for the development of automated recognition systems. This thesis explores the role of matrices in intelligent technology for automatic plant species recognition in application systems. Through an examination of existing literature, this study investigates how matrices are utilized for data representation, feature extraction, classification algorithms, and integration into application systems. Furthermore, it addresses challenges and future directions in the field, emphasizing the importance of interdisciplinary collaboration and technological advancements.

Key words: Automatic plant species recognition, intelligent technology, deep learning, matrices, feature extraction, feature representation, classification.

1. Introduction

Automatic plant species recognition plays a crucial role in addressing global challenges related to biodiversity conservation, agriculture, and environmental monitoring. With the advancement of intelligent technology, particularly in the fields of computer vision and machine learning, the development of application systems for automatic plant species recognition has gained significant traction. Central to these systems is the utilization of matrices, which play a crucial role in processing and analyzing large volumes of botanical data. Matrices serve as foundational elements in these systems, facilitating various aspects of data processing and analysis.

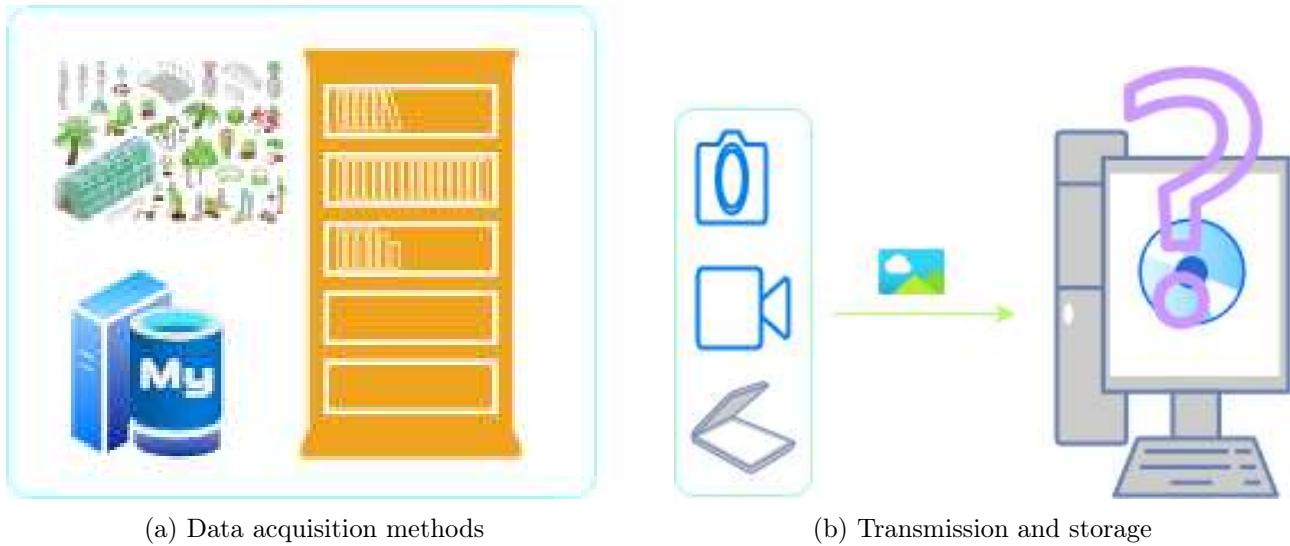
2. The Role of Matrices in Data Representation and Analysis

Matrices serve as fundamental tools for representing and manipulating data in various forms, making them indispensable in the field of intelligent technology. Automatic plant species identification involves several key steps, including data collection, preprocessing, feature extraction using matrix-based algorithms, model training, and evaluation.

We start to understand the matrix from data collection. Plant image data may come from botanical gardens, online repositories, or from collection libraries provided by plant research institutions.

*Yilihamujiang Yusupu – National University of Uzbekistan, alam@asleng.org

* Matyakubov Alisher – National University of Uzbekistan, almasa@list.ru



Data acquisition methods, transmission and storage

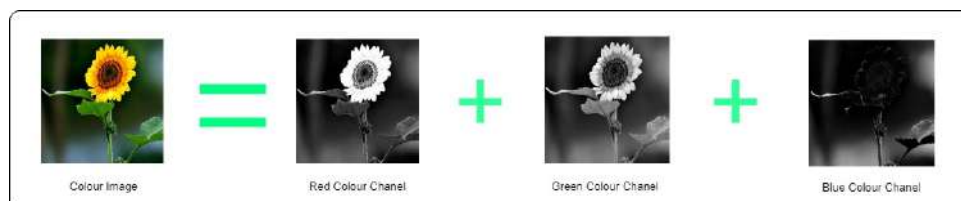
These data will be collected through modern equipment such as cameras, video recorders, scanners, etc., and will eventually be saved to computer hard drives or optical discs. So there is a question in what form and how are these data saved in our computers?

These data will be collected through modern equipment such as cameras, video recorders, scanners, etc., and will eventually be saved to computer hard drives or optical discs. So there is a question in what form and how are these data saved in our computers?

During the 19th century, Thomas Young was proposed[1] and Hermann von Helmholtz[2] elucidated the red, green, and blue, is rooted in the phenomenon of additive color mixing, where different colors are combined to create a broader spectrum of hues.

In 1957, Kirsch created a digital image sequence composed of 30,000 small squares (176 x 176) by scanning photos of his son[3]. And is considered the world's first digital picture. The smallest unit that makes up this digital picture is the 30,000 small squares. Named 'pixel' by Kirsch and his scientific research team. Students who are good at English should easily recognize that it is a compound word consisting of picture and element. Since then, pixels have become one of the most important units of measurement in the digital age.

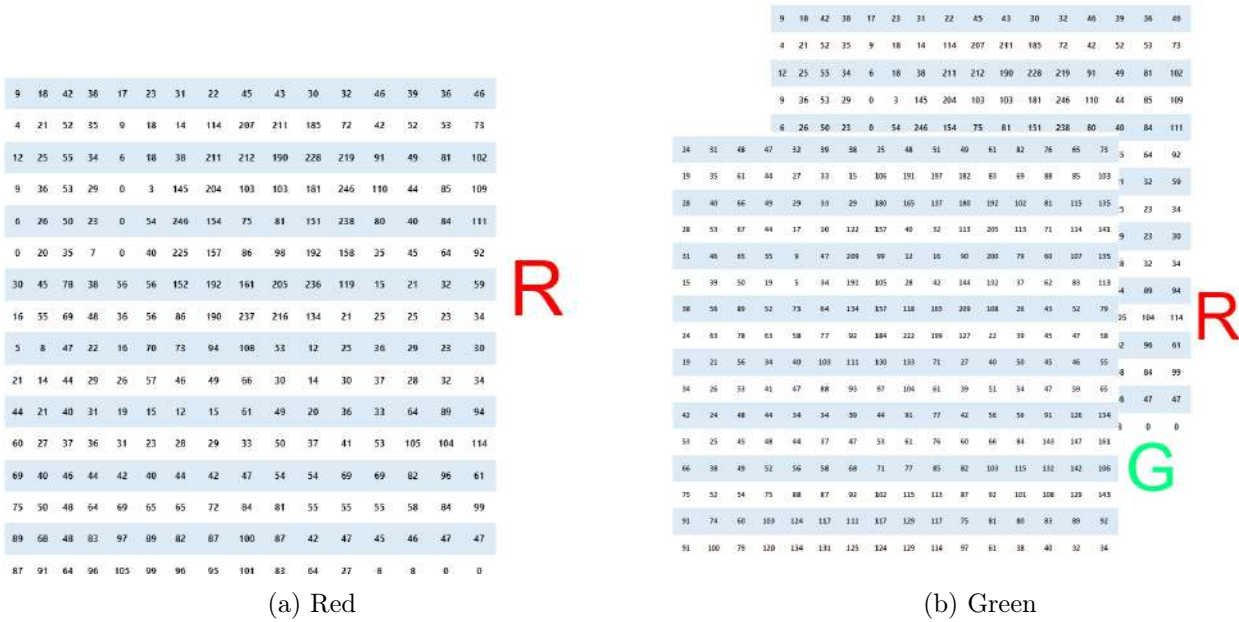
Below we see a colorful picture of a dog. This picture is also displayed by superimposing the three colors of red, green and blue. Let's take a look at this picture in three colors. We



Three primary color decomposition of color images

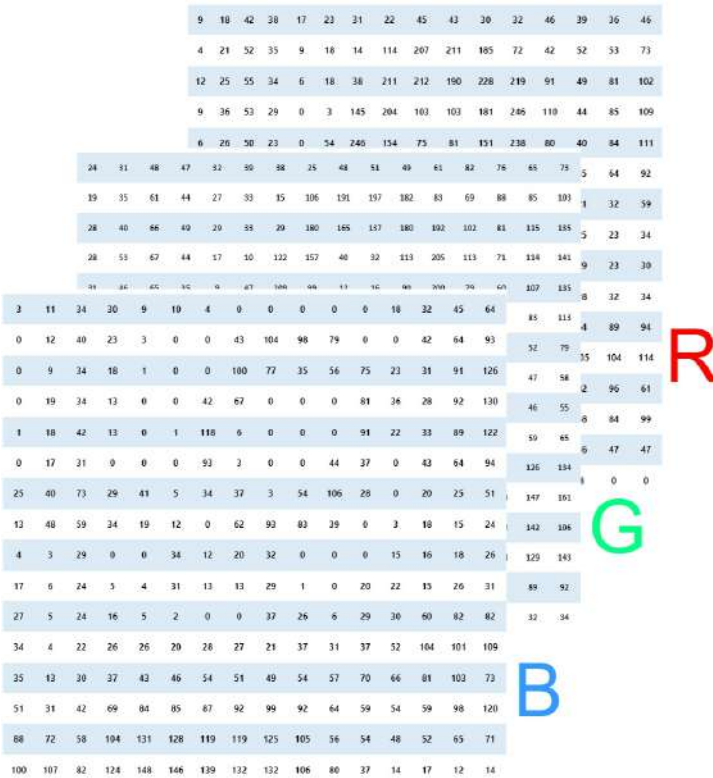
consider the pixel value of each monochrome image to be the intensity value of that color. Generally, the size of the single-color pixel value in RGB format is expressed from 0-255. We

use pixel values to represent each single-color image, and we will see three matrices.



(a) Red

(b) Green



(c) Blue

Pixel value matrix for Red, Green,Blue colors

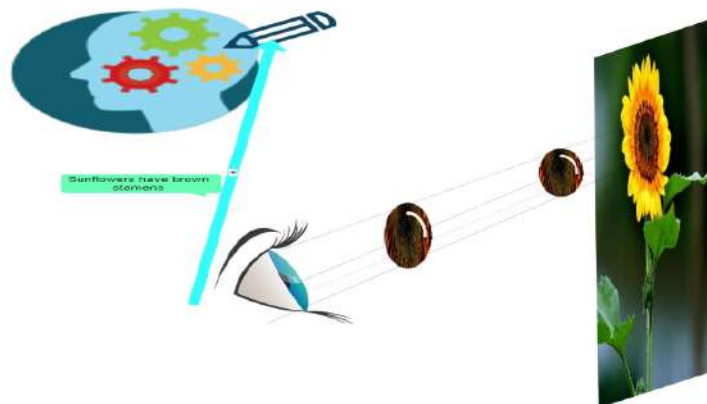
Images are stored in this way and matrices are utilized to represent features extracted from images or sensor data[4]. These features may include color histograms, texture descriptors, or shape characteristics, each of which contributes to the unique identification of plant

species . By organizing data in matrix form, algorithms can efficiently process and analyze information, enabling accurate classification of plant species[5].The use of matrices in image feature extraction and image recognition will be introduced in detail.

3. Feature extraction and flattening of feature maps into vectors

Feature extraction is a crucial step in automatic plant species recognition, where relevant information is extracted from raw data to facilitate classification[6]. Matrices play a pivotal role in this process by representing extracted features in a structured format. Moreover, dimensionality reduction techniques such as Principal Component Analysis (PCA) and Linear Discriminant Analysis (LDA) leverage matrix operations to transform high-dimensional feature vectors into lower-dimensional representations, thereby reducing computational complexity and enhancing classification accuracy[7].

Biologically, memory formation and storage involves changes in synaptic connections between neurons, known as synaptic plasticity[8]. Long-term potentiation (LTP) and long-term depression (LTD) are key processes in memory formation. These processes occur in different areas of the brain, including structures such as the hippocampus and frontal lobes.



Record diagram

Bliss and Collingridge (1993) proposed a model of synaptic plasticity, arguing that long-term potentiation underlies memory formation[9]. In this process, as a neuron's synaptic activity increases, its connections become stronger, promoting long-term storage of information. When humans remember the characteristics of an object, it involves the coordinated action of multiple brain regions. Sensory information is first received and encoded into electrical signals between neurons, and then these signals are processed and integrated in the brain. These properties may involve sensory properties such as the object's appearance, sound, taste, etc., as well as the emotional and situational information associated with it.

Correctly identifying things in memory requires pattern recognition and comparison by the brain. The brain determines whether new information is the same thing or similar by comparing the match between new information and existing memories. This involves the coordinated action of multiple areas in the brain, including areas of vision, hearing, motor control, and more.

The characteristics and validity of information extracted by this multi-sensory system determine the depth of memory.

Image recognition in computer vision is a similar process. In addition to improving the effectiveness of the image in the image acquisition step, a lot of work and parameter adjustments are made in the feature extraction step to improve the accuracy of image recognition. The feature extraction process refers to extracting representative and useful features from raw data for use by machine learning models. In deep learning, feature extraction is usually done through the first few layers of neural networks (convolutional layers), which are able to automatically learn and extract features from the data.

3.1. Convolution operation

Mathematical representation feature extraction process can be described as the original data X Apply a specific feature extraction function f , get the feature representation F . Mathematically it can be expressed as:

$$F = f(X) \quad (1)$$

in, X is the original data, F is the extracted feature representation.

In convolutional neural networks, the feature extraction process usually includes the following steps: Convolution operation: Convolution operation is one of the core steps of feature extraction. It extracts local features at different locations by sliding a convolution kernel (filter) on the input data. Mathematically, the convolution operation can be expressed as:

$$F_{ij}^{(k)} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{c=0}^{C-1} X_{i+m, j+n, c} * K_{m, n, c}^{(k)} \quad (2)$$

Among them, $F_{ij}^{(k)}$ Represents the value at position (i, j) in the convolved feature map F , corresponding to the output of the k -th convolution kernel.

$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1}$ Double summation sign used to traverse each position of the convolution kernel, where M and N are the height and width of the convolution kernel respectively.

$\sum_{c=0}^{C-1}$ Used to iterate over each channel of the input image, where C is the number of channels of the input image.

$X_{i+m, j+n, c}$ Represents the value at position $(i + m, j + n)$ in the input image X , corresponding to the pixel value of the c -th channel.

$K_{m, n, c}^{(k)}$ Represents the weight at position (m, n) in the k -th convolution kernel, corresponding to the weight value of the c -th channel.

3.2. Flatten feature map

After calculating the feature map, you need to convert the multi-dimensional feature map into a one-dimensional vector.

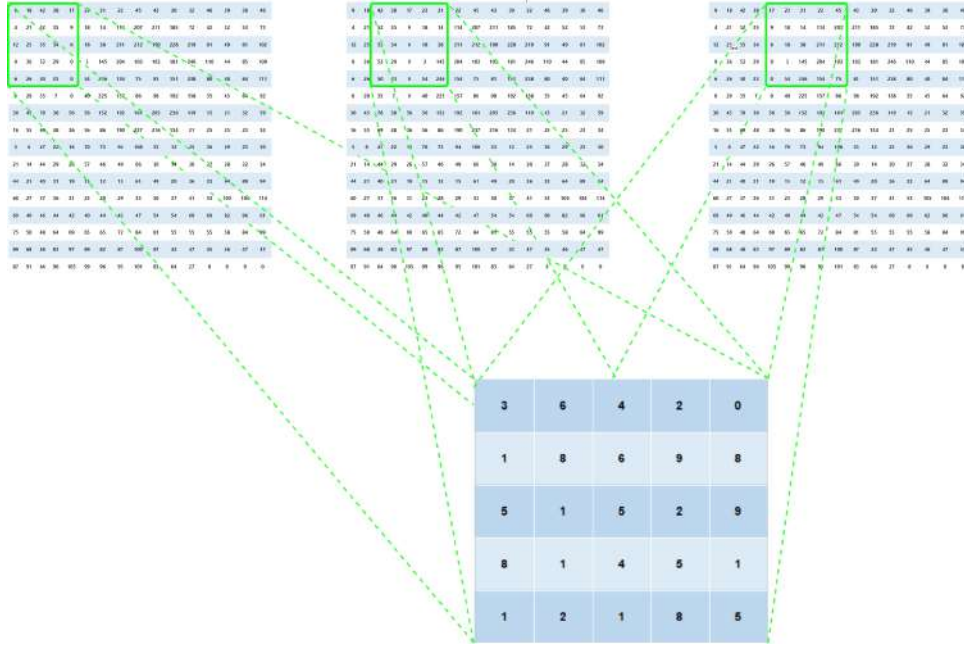
Assume that the shape of the feature map F is $C * H * W$, where:

C is the number of channels (channels).

H is the height of the feature map.

W is the width of the feature map.

The flattening operation converts the feature map into a one-dimensional vector x of length $C * H * W$.



Schematic diagram of the convolution process

$$Fsize = \left\lceil \frac{inputdatasize}{step} \right\rceil + 1 \quad (3)$$

The elements in the feature map F can be expressed as $F_{c,h,w}$, where c represents the c -th channel, h represents the h -th row, and w represents the w -th column. The flattened vector x can be expressed as:

$$x[i] = F_{c,h,w} \quad (4)$$

Among them, i is the flattened one-dimensional index, calculated as

$$i = cHW + hW + w \quad (5)$$

3.3. Fully connected operation

Assuming that the length of the flattened vector x is L (i.e. $L = HWD$), then the output of the fully connected layer. The calculation formula for the value Z_j of the j -th neuron in z is:

$$z_j = \sum_{i=1}^L W_{fc,ji} * x_i + b_{fc,j} \quad (6)$$

z_j : Represents the value of the j -th neuron in the output vector z of the fully connected layer.

$W_{fc,ji}$: Represents the value of the j -th row and i -th column in the weight matrix W_{fc} .

x_i : Represents the value of the i -th element in the flattened vector x .

$b_{fc,j}$: Represents the value of the j -th element in the bias vector b_{fc} .

In this way, by multiplying the flattened feature vector x by the weight matrix W_{fc} , and adding the bias vector b_{fc} , we get the output vector z of the fully connected layer. This output

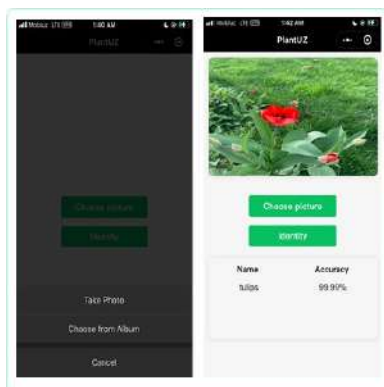
vector z can then be nonlinearly transformed through an activation function (such as ReLU, sigmoid, tanh, etc.) to obtain the activated output a .

4. Classification Algorithms and Matrix Operations

Classification algorithms form the backbone of automatic plant species recognition systems, employing matrices for model representation and optimization[10]. Techniques such as Support Vector Machines (SVM), Random Forests, and Convolutional Neural Networks (CNNs) utilize matrix operations for training and inference, leveraging the rich information encoded within feature matrices[10]. By iteratively adjusting model parameters based on training data, these algorithms learn to discriminate between different plant species with high accuracy.

5. Integration with Application Systems

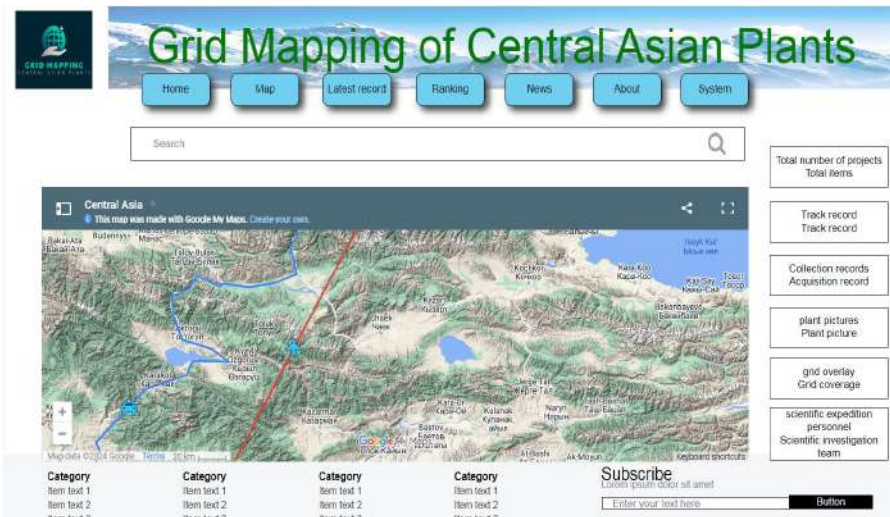
The integration of intelligent technology for automatic plant species recognition into application systems has facilitated real-world deployment in various domains. These systems often employ user-friendly interfaces that allow users to capture or upload plant images, which are then processed using sophisticated algorithms based on matrix computations. The output typically includes the predicted plant species along with confidence scores, providing valuable insights for botanical research, agriculture, and environmental monitoring.



PlantUZ plant species recognition application systems user interface

6. Challenges and Future Directions

Despite the remarkable progress in automatic plant species recognition, several challenges persist, including robustness to variations in environmental conditions, scalability to large-scale datasets, and interpretability of model decisions[?]. Addressing these challenges requires interdisciplinary collaboration between botanists, computer scientists, and domain experts, along with advancements in algorithmic techniques and data collection methodologies. Therefore, we are adopting some new collection methods in terms of data collection. When we develop a platform to conduct scientific research in the field, we collect data in real time and send it back to our server to train our recognition model and classify new species discovered in a timely manner. New categories were also selected for the research objects.



Grid Mapping of Central Asian Plants Scientific Research Field Investigation Information Collection Platform

The previous studies were all about living plants. Now we start to collect images of dried plant samples. Later, we will learn about the eigenvalue matrix of dry plant sample images in the image recognition process. The difference is that we will conduct in-depth research on how to improve the recognition accuracy of dry plant images. Future research directions may involve the exploration of deep learning architectures, multimodal fusion techniques, and transfer learning approaches to further enhance the performance and applicability of intelligent plant species recognition systems.



(a) Plant sample library of the Institute of Botany, Academy of Sciences of Uzbekistan



(b) Plant sample image collection device



(c) Plant sample image example

Data acquisition methods, transmission and storage

7. Conclusion

In conclusion, the integration of intelligent technology with automatic plant species recognition has paved the way for the development of application systems capable of accurately identifying plant species from images or sensor data. Matrices serve as foundational elements in these systems, facilitating data representation, feature extraction, and classification. As research in this field continues to advance, the synergy between intelligent technology and botany holds

tremendous potential for addressing global challenges in biodiversity conservation, agriculture, and environmental sustainability.

REFERENCES

1. Thomas Young. Ii. the bakerian lecture. on the theory of light and colours. Philosophical transactions of the Royal Society of London, (92):12-48, 1802.
2. Hermann LF Helmholtz. On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music. Cambridge University Press, 2009.
3. Fiftieth Anniversary of First Digital Image Marked - nist.gov. <https://www.nist.gov/news-events/news/2007/05/fiftieth-anniversary-first-digital-image-marked>, 2007.
4. Paul T Spellman, Michael Miller, Jason Stewart, Charles Troup, Ugis Sarkans, Steve Chervitz, Derek Bernhart, Gavin Sherlock, Catherine Ball, Marc Lepage, et al. Design and implementation of microarray gene expression markup language (mage-ml). Genome biology, 3:1-9, 2002.
5. Jana WBËaldchen and Patrick MBËader. Plant species identification using computer vision techniques: A systematic literature review. Archives of computational methods in engineering, 25:507-543, 2018.
6. Mohammed Brahim, Kamel Boukhalfa, and Abdelouahab Moussaoui. Deep learning for tomato diseases: classification and symptoms visualization. Applied Artificial Intelligence, 31(4):299-315, 2017.
7. Dengsheng Lu and Qihao Weng. A survey of image classification methods and techniques for improving classification performance. International journal of Remote sensing, 28(5):823-870, 2007.
8. Wickliffe C Abraham, Owen D Jones, and David L Glanzman. Is plasticity of synapses the mechanism of long-term memory storage? NPJ science of learning, 4(1):9, 2019.
9. Robert C Malenka. Synaptic plasticity in the hippocampus: Ltp and ltd. Cell, 78(4):535-538, 1994.
10. Nguyen Van Hieu and Ngo Le Huy Hien. Automatic plant image identification of vietnamese species using deep learning models. arXiv preprint arXiv:2005.02832, 2020.
11. Weibo Liu, Zidong Wang, Xiaohui Liu, Nianyin Zeng, Yurong Liu, and Fuad E Alsaadi. A survey of deep neural network architectures and their applications. Neurocomputing, 234:11-26, 2017.
12. Charuleka Varadharajan, Alison P Appling, Bhavna Arora, Danielle S Christianson, Valerie C Hendrix, Vipin Kumar, Aranildo R Lima, Juliane Muller, Samantha Oliver, Mohammed Ombadi, et al. Can machine learning accelerate process understanding and decision-relevant predictions of river water quality? Hydrological Processes, 36(4):e14565, 2022.

Аннотация

O'simlik turlarini avtomatik aniqlash qishloq xo'jaligi, biologik xilma-xillikni saqlash va atrof-muhitni o'rganish kabi turli sohalarda tobora muhim ahamiyat kasb etmoqda. Aqlli texnologiyalarning turli sohalarga integratsiyasi samaradorlik va aniqlikni oshirish orqali an'anaviy yondashuvlarda o'zgarishlar qildi. An'anaga ko'ra, o'simlik turlarini qo'lda aniqlash ko'p vaqt talab etadi va ko'p vaqt talab etadi. Biroq, sun'iy intellekt va ML sohasidagi so'nggi yutuqlar avtomatlashtirilgan tanib olish tizimlarini ishlab chiqishga yo'l ochdi. Ushbu maqola matritsalarining rolini ko'rib chiqadi amaliy tizimlarda o'simlik turlarini avtomatik aniqlashning aqlli texnologiyasi hisoblanadi. Mavjud adabiyotlarni tahlil qilish asosida ushbu tadqiqot matritsalaridan ma'lumotlarni taqdim etish, xususiyatlarni ajratib ko'rsatish, tasniflash algoritmlari va amaliy tizimlarga integratsiya qilish uchun qanday ishlatilishini ko'rib chiqadi. Bundan tashqari, u ushbu sohadagi muammolar va kelajak yo'nalishlarini bo'yicha takliflar keltirilgan, fanlararo hamkorlik va texnologik yutuqlarning muhimligini ta'kidlaydi.

Kalit so'zlar: o'simlik turlarini avtomatik aniqlash, aqlli texnologiya, chuqur o'rganish, matritsalar, xususiyatlarni ajratib olish, xususiyatlarni taqdim etish, tasniflash.

Аннотация

Автоматическое распознавание видов растений приобретает все большее значение в различных областях, таких как сельское хозяйство, сохранение биоразнообразия и экологические исследования. Интеграция интеллектуальных технологий в различные области произвела революцию в традиционных подходах, повысив эффективность и точность. Традиционно ручная идентификация видов растений является трудоемкой и отнимает много времени. Однако последние достижения в области искусственного интеллекта и ML проложили путь к разработке автоматизированных систем распознавания. В этой статье рассматривается роль матриц в интеллектуальной технологии автоматического распознавания видов растений в прикладных системах. На основе анализа существующей литературы в этом исследовании рассматривается, как матрицы используются для представления данных, выделения признаков, алгоритмов классификации и интеграции в прикладные системы. Кроме того, в нем рассматриваются проблемы и направления на будущее в этой области, подчеркивается важность междисциплинарного сотрудничества и технологических достижений.

Ключевые слова: Автоматическое распознавание видов растений, интеллектуальные технологии, глубокое обучение, матрицы, извлечение признаков, представление признаков, классификация.

УДК 517.55

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТониАНА ТРЕХ ЧАСТИЦ НА ДВУХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Алиев Н. *

РЕЗЮМЕ

Рассматривается гамильтониан системы трех произвольных частиц на двухмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказывается бесконечность дискретного спектра, лежащих левее существенного спектра, соответствующего оператору Шредингера при всех значениях полного квазиимпульса в случае, когда в трехчастичной системе массы двух частиц бесконечные.

Ключевые слова: трехчастичная система на решетке, оператор Шредингера, существенный спектр, дискретный спектр, собственное значение, уравнение типа Фаддеева..

Введение 1.

В физических работах [5], [13] изучалось существование бесконечного числа собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра оператора Шредингера (эффект Ефимова [2]). Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова впервые было проведено в работе Яфаева [11] с использованием методов интегральных уравнений Фаддеева. Затем существование бесконечного числа связанных состояний было установлено в работах [14], [15] и для гамильтониана системы трех частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, доказано в работах [3], [4] при нулевом значении полного квазиимпульса системы. Конечность связанных состояний дискретного оператора Шредингера трех частиц доказывалась в [4] при малых значениях полного квазиимпульса $K \neq 0$. В работе [6] найдено условие появления лакуны существенного спектра и доказано существование бесконечного числа собственных значений в этой лакуне для дискретного оператора Шредингера трех частиц.

В работе [7,8] рассматривается система трех произвольных частиц на одномерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, в случае когда свободный гамильтониан системы трех произвольных квантовых частиц представляет собой решетчатый оператор Лапласа. Доказывается конечность дискретного спектра соответствующего оператора Шредингера при всех значениях полного квазиимпульса в случае, когда массы двух частиц конечные. Показывается бесконечность дискретного спектра оператора Шредингера в случае, когда в трехчастичной системе массы двух частиц бесконечные.

Кроме того, в работе [8] рассмотрено система трех произвольных частиц на одномерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, где свободный гамильтониан \hat{H}_0 системы трех произвольных квантовых частиц

* Алиев Н. – Национальный университет Узбекистана, nialiyev@mail.ru,

с массами $m_\alpha = \infty$, $m_\beta = \infty$ и $m_\gamma < \infty$, и показано что появляется бесконечное число собственных значений оператора $H(K)$, стремящихся к краю существенного спектра.

В настоящей работе рассматривается двумерный аналог трехчастичного оператора в [7] и [8], взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, где свободный гамильтониан \hat{H}_0 системы трех произвольных квантовых частиц определяется дисперсионными соотношениями $\hat{\varepsilon}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$. Получены аналогичные спектральные свойства трехчастичного оператора Шредингера как в работе [7] и [8].

Отметим, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров канальных операторов $H_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 2, 3$. В отличие от трехчастичного оператора Шредингера на трехмерной решетке спектр канального оператора $H_\alpha(K)$ на одномерной решетке при всех значениях энергии взаимодействия $\mu_\alpha > 0$ (а не определенных значениях $\mu_\alpha > 0$) состоит из объединения спектра свободного гамильтониана $H_0(K)$ и некоторого отрезка $[\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)]$, т.е.

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \sigma(H_0(K)) \cup [\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)].$$

С увеличением $\mu_\alpha > 0$ этот отрезок сдвигается влево от $E_{\min}(K)$, а с уменьшением $\mu_\alpha > 0$ приближается к $E_{\min}(K)$, где $E_{\min}(K)$ – левый край спектра свободного гамильтониана.

Доказано, что при $m_\alpha = \infty$, $m_\beta = \infty$ и $m_\gamma < \infty$ отрезок $[\lambda_i^{\min}(K), \lambda_i^{\max}(K)]$, $i = \alpha, \beta$, превращается в точку, т.е. $\lambda_i = \lambda_i^{\min}(K) = \lambda_i^{\max}(K)$, $i = \alpha, \beta$. В этом случае число λ_i является бесконечнократным собственным значением канального оператора $H_i(K)$, $i = \alpha, \beta$, и появляется бесконечное число собственных значений оператора $H(K)$, стремящихся к λ_i , $i = \alpha, \beta$. Вычисляются эти собственные значения и их кратности. Показано, что существование таких собственных значений не зависит от $\mu_\gamma > 0$. Поскольку структура существенного спектра имеет вид

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_0(K)) \cup \{\lambda_\alpha\} \cup \{\lambda_\beta\} \cup [\lambda_\gamma^{\min}(K), \lambda_\gamma^{\max}(K)],$$

$$\lambda_\gamma^{\min}(K) < \lambda_\gamma^{\max}(K),$$

наблюдается интересная картина: при некоторых значениях $\mu_\gamma > 0$ бесконечное число собственных значений оператора $H(K)$ появляется в существенном спектре, точнее, в отрезке $[\lambda_\gamma^{\min}(K), \lambda_\gamma^{\max}(K)]$, а при больших значениях $\mu_\gamma > 0$ найденные собственные значения могут находиться на лакуне (на интервале $(\lambda_\gamma^{\max}(K), E_{\min}(K))$) существенного спектра оператора Шредингера.

Описание трехчастичного оператора и формулировка основных результатов 2.

Пусть \mathbb{Z}^2 – двумерная целочисленная решетка, и $\ell^2((\mathbb{Z}^2)^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^2)^3$.

Свободный гамильтониан \hat{H}_0 системы трех произвольных квантовых частиц на решетке \mathbb{Z}^2 определяется как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$:

$$(\hat{H}_0\hat{\psi})(n_1, n_2, n_3) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2, |s| \leq 1} [\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1 + s, n_2, n_3) + \hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1, n_2 + s, n_3)]$$

$$+\hat{\varepsilon}_3(s)\hat{\psi}(n_1, n_2, n_3 + s)],$$

где $\hat{\varepsilon}_\alpha(s) = \hat{\varepsilon}(s)/m_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) – дисперсионные соотношения, $m_\alpha > 0$ – масса частицы α , $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ – дискретная функция есть чётная функция на \mathbb{Z}^2 :

$$\hat{\varepsilon}(s) < 0 \text{ если } |s| = 1, \quad \hat{\varepsilon}(s) < 0 \text{ если } |s| > 1, \quad \text{и} \quad \hat{\varepsilon}(0) = - \sum_{s \in \mathbb{Z}^2, s \neq 0} \hat{\varepsilon}(s).$$

Трехчастичный гамильтониан \hat{H} системы трех квантовых частиц с парными контактными потенциалами определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана \hat{H}_0 :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3,$$

где

$$(\hat{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) = \delta_{n_\beta n_\gamma} \psi(n_1, n_2, n_3), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}.$$

Здесь $\mu_\alpha > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть $L^2((\mathbb{T}^2)^n)$ ($n = 1, 2, 3$) – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^2)^n$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$.

Используя преобразование Фурье и разложение в прямой операторный интеграл [4],[12], изучение спектральных свойств оператора \hat{H} можно свести к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^2$, действующих в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$H(K) = H_0(K) - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3,$$

где $H_0(K)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_K(x, y) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y) + \varepsilon_3(K - x - y), \quad x, y \in \mathbb{T}^2,$$

$\varepsilon_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2, 3$, преобразования Фурье функцию $\hat{\varepsilon}_\alpha(\cdot)$, т.е.

$$\varepsilon_\alpha(\cdot) = \frac{1}{m_\alpha} \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \hat{\varepsilon}(s) \cos(s, x), \quad x \in \mathbb{T}^2,$$

и

$$(V_1 f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x, s) ds, \quad (V_2 f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(s, y) ds,$$

$$(V_3 f)(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(s, x + y - s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^2).$$

Следующая лемма доказывается совершенно аналогично доказательство Теорема 1.1 работе [4].

Лемма 2.1 Для любого $K \in \mathbb{T}^2$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров операторов каналов

$$H_\alpha(K) = H_0(K) - \mu_\alpha V_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_2(K)) \cup \sigma(H_3(K)).$$

Пусть $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$, – оператор, действующий в $L^2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$h_\alpha(k) = h_0^\alpha(k) - \mu_\alpha v, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\},$$

где $h_0^\alpha(k)$ – оператор умножения на функцию $\varepsilon_k^{(\alpha)}(k) = \varepsilon_\beta(x) + \varepsilon_\gamma(k - x)$ и

$$v f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(s) ds, \quad x \in \mathbb{T}^2. \quad (1)$$

Пусть

$$\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k) = \min_{x \in \mathbb{T}^2} [\varepsilon_\beta(x) + \varepsilon_\gamma(k - x)], \quad \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k) = \max_{x \in \mathbb{T}^2} [\varepsilon_\beta(x) + \varepsilon_\gamma(k - x)],$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

Определим при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k)]$ следующую функцию:

$$\Delta_\alpha(k; z) = 1 - \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\varepsilon_\beta(s) + \varepsilon_\gamma(k - s) - z}.$$

Элементарными методами доказывается следующая [4]

Лемма 2.2 Число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k)]$ является собственным значением оператора $h_\alpha(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha(k; z) = 0$.

Легко проверить, что для всех $\mu_\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{T}^2$ функция $\Delta_\alpha(k; \cdot)$ имеет единственное отрицательное нуль $z = \lambda_\alpha(k)$. Поскольку функция $\varepsilon_\beta(\cdot) + \varepsilon_\gamma(k - \cdot)$ является аналитической, то $\lambda_\alpha(k)$ является непрерывной в \mathbb{T}^2 . При этом оператор $h_\alpha(k)$ имеет единственное отрицательное собственное значение $\lambda_\alpha(k)$.

Оператор $H_\alpha(K)$ представляется в виде прямого интеграла [4], [12]

$$H_\alpha(K) = \int_{\mathbb{T}^2} \oplus [h_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)] dx,$$

следовательно спектр оператора $H_\alpha(K)$ описывается в виде

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} (\sigma(h_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)))$$

или же

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} (\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} (\sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x))).$$

Отметим, что

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(K - x)) = [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K - x), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(K - x)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(K - x)) + \varepsilon_\alpha(x) \\ &= [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K - x) + \varepsilon_\alpha(x), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)]. \end{aligned}$$

Поэтому из аналитичности функции $\varepsilon(\cdot)$ имеем

$$\bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K - x) + \varepsilon_\alpha(x), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)] = [E_{\min}(K), E_{\max}(K)],$$

где

$$E_{\min}(K) = \min_{x,y} \mathcal{E}_K(x, y), \quad E_{\max}(K) = \max_{x,y} \mathcal{E}_K(x, y).$$

По лемме (2.2)

$$\begin{aligned} & \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} (\sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(K - x)) + \varepsilon_\alpha(x)) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{T}^2} \{\lambda_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)\} = [\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)], \end{aligned}$$

где

$$\lambda_\alpha^{\min}(K) = \inf_{x \in \mathbb{T}^2} \{\lambda_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)\}, \quad \lambda_\alpha^{\max}(K) = \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \{\lambda_\alpha(K - x) + \varepsilon_\alpha(x)\}.$$

Поэтому справедлива следующая лемма

Лемма 2.3 Имеет место равенство

$$\sigma(H_\alpha(K)) = [E_{\min}(K), E_{\max}(K)] \cup [\lambda_\alpha^{\min}(K), \lambda_\alpha^{\max}(K)].$$

Теперь сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Предположим, что $m_\alpha < \infty, m_\beta < \infty, m_\gamma \leq \infty$ и $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$. Тогда для любого μ_α и $K \in \mathbb{T}^2$ число собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее существенного спектра, конечно.

В дальнейшем мы предполагаем, что $m_1 = \infty, m_2 = \infty$ и $m_3 < \infty$. При этом

$$\mathcal{E}_K(x, y) = \varepsilon_3(K - x - y).$$

Воспользуясь леммой (2.4) и рассуждая как в доказательстве леммы (2.3) работы [7] получим

Лемма 2.4 Пусть $\mu_\alpha > 0, \alpha = 1, 2$, и $\mu_3 \geq 0$. Тогда для любого $K \in \mathbb{T}^2$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sigma(H_\alpha(K)) &= \{\lambda_\alpha\} \cup [E_{\min}, E_{\max}], & \sigma(H_3(K)) &= \Lambda_3 \cup [E_{\min}, E_{\max}], \\ E_{\min} &= \min_{x \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_3(x), & E_{\max} &= \max_{x \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_3(x), \end{aligned}$$

где λ_α – отрицательное бесконечнократное собственное значение оператора $H_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 2$ и $\Lambda_3 = \{z : z = \varepsilon_3(x) - \mu_3, x \in \mathbb{T}^2\}$. При этом

$$\sigma(H_3(K)) = [E_{\min} - \mu_3, E_{\max}], \quad \mu_3 \leq E_{\max} - E_{\min},$$

$$\sigma(H_3(K)) = [E_{\min} - \mu_3, E_{\max} - \mu_3] \cup [E_{\min}, E_{\max}], \quad \mu_3 > E_{\max} - E_{\min}.$$

Теорема 2. Пусть

$$\lambda_{\min} = \inf\{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \lambda_{\max} = \sup\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Для всякого фиксированного μ_1, μ_2 и μ_3 оператор $H(K)$ имеет бесконечное число собственных значений $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ и $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$, лежащих соответственно в $(-\infty, \lambda_{\min})$ и $(\lambda_{\max}, 0)$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lambda_{\min} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \lambda_{\max}.$$

Для доказательства теоремы (2) сначала строится инвариантное подпространство \mathcal{H}_0 относительно оператора $H(K)$, затем изучается спектр оператора $H(K)$ в этом инвариантном подпространстве \mathcal{H}_0 и его дополнении $L_2((\mathbb{T}^2)^2) \ominus \mathcal{H}_0$. С помощью методов интегральных уравнений показывается существование бесконечного числа собственных значений и определяются соответствующие собственные функции.

Замечание. В теореме (2) числа λ_{\min} и λ_{\max} не зависят от μ_3 . Лемма (2.4) показывает возможность существования таких случаев, когда числа λ_{\min} и λ_{\max} могут находиться в существенном спектре $H(K)$ или же на лакуне существенного спектра. Например, в случае $\mu_1 = \mu_2$ имеет место $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$. При малых значениях μ_1 и $\mu_3 = E_{\max} - E_{\min}$ это число находится в подмножестве $[E_{\min} - \mu_3, E_{\max} - \mu_3]$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}H(K)$, а при больших μ_3 — на интервале (на лакуне существенного спектра) $(E_{\max} - \mu_3, 0)$. При этом по теореме (2) существуют такие случаи, что оператор $H(K)$ имеет бесконечное число собственных значений в существенном спектре или на лакуне существенного спектра.

Конечность дискретного спектра 3.

В этом разделе мы предполагаем, что $m_\alpha < \infty, m_\beta < \infty$, и $m_\gamma \leq \infty$, где $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$.

Пусть

$$\tau(K) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K))$$

и $W_\alpha(z)$ — оператор умножения на функцию $[W_\alpha(x; z)]^{-1}$, где

$$W_1(x; z) = \Delta_1(Kx; z - \varepsilon_2(x)), \quad W_2(y; z) = \Delta_2(K - y; z - \varepsilon_2(y)),$$

$$W_3(x; z) = \Delta_3(x; z - \varepsilon_3(K - x)).$$

Функция $\Delta_\alpha(x; z)$ является положительной при всех $z < \tau(K)$. Поэтому оператор $W_\alpha(z)$ положителен при всех $z \in (-\infty, \tau(K))$.

Определим самосопряженный компактный оператор $\mathbf{T}(z)$, $z < \tau(K)$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2) = L^2(\mathbb{T}^2) \oplus L^2(\mathbb{T}^2) \oplus L^2(\mathbb{T}^2)$, заданный матрицей

$$\mathbf{T}(z) = \left(T_{ij}(z) \right)_{i,j=1}^3, \quad T_{ij}(z) = \begin{cases} W_i^{\frac{1}{2}}(z) K_{ij}(z) W_j^{\frac{1}{2}}(z), & i \neq j \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Здесь $K_{ij}(z)$ – интегральный оператор, порожденный ядром $K_{ij}(z; x, s)$ такой, что $K_{ij}(z) = [K_{ji}(z)]^*$, где

$$K_{12}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1}\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mathcal{E}_K(x, s) - z}, \quad K_{13}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1}\sqrt{\mu_1\mu_3}}{\mathcal{E}_K(x, s - x) - z},$$

$$K_{23}(z; x, s) = \frac{(2\pi)^{-1}\sqrt{\mu_2\mu_3}}{\mathcal{E}_K(s - x, x) - z}.$$

Обозначим через $N(z)$, $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \tau(K)$ число собственных значений оператора $H(K)$ лежащих левее z . Пусть A самосопряженный оператор действующий в гильбертовом пространстве \mathcal{H} и $\mathcal{H}_A(\lambda)$, $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$ подпространство состоящее из векторов $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию $(Af, f) > \lambda(f, f)$.

Положим

$$n(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(\lambda)} \dim \mathcal{H}_A(\lambda).$$

Число $n(\lambda, A)$ совпадает с числом собственных значений (с учетом кратности) оператора A , лежащих правее от λ .

Лемма 3.1 Для числа $N(z)$ (с учетом кратности) собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее от $z < \tau(K)$, имеет место равенство

$$N(z) = n(1, \mathbf{T}(z)), \quad z < \tau(K).$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$N(z) = n(1, R_0^{\frac{1}{2}}(z)VR_0^{\frac{1}{2}}(z)), \quad V = \mu_1V_1 + \mu_2V_2 + \mu_3V_3, \quad (2)$$

где $R_0(z)$ – резольвента оператора $H_0(K)$.

Предположим, что $u \in \mathcal{H}_{-H(K)}(-z)$, т.е. $((H(K) - z)u, u) < (Vu, u)$. Поэтому

$$(y, y) < (R_0^{\frac{1}{2}}(z)VR_0^{\frac{1}{2}}(z)y, y), \quad y = (H(K) - z)^{\frac{1}{2}}u.$$

Таким образом, $N(z) \leq n(1, R_0^{\frac{1}{2}}(z)VR_0^{\frac{1}{2}}(z))$.

Рассуждая аналогично, получим обратное утверждение

$$N(z) \geq n(1, R_0^{\frac{1}{2}}(z)VR_0^{\frac{1}{2}}(z)).$$

Отсюда следует равенство (2).

Рассмотрим уравнение для собственных функций $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ оператора $R_0^{\frac{1}{2}}(z)VR_0^{\frac{1}{2}}(z)$

$$\lambda f = R_0^{\frac{1}{2}}(z) \left[\mu_1V_1 + \mu_2V_2 + \mu_3V_3 \right] R_0^{\frac{1}{2}}(z)f, \quad \lambda \neq 0,$$

т.е. уравнение

$$\lambda f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_K(x, y) - z}} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(x, s)ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(x, s) - z}} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(s, y)ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(s, y) - z}} \right]$$

$$+ \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(s, x + y - s) ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(s, x + y - s) - z}} \Big]. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(x, s) ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(x, s) - z}}, \\ \varphi_2(x) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(s, x) ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(s, x) - z}}, \\ \varphi_3(x) = \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f(s, x - s) ds}{\sqrt{\mathcal{E}_K(s, x - s) - z}} \end{cases} \quad (4)$$

Из равенства (3) имеем

$$\lambda f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_K(x, y) - z}} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \varphi_1(x) + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \varphi_2(y) + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \varphi_3(x + y) \right].$$

Подставим это выражение в (4), тогда функции φ_1 , φ_2 и φ_3 удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \lambda \varphi_1(x) = \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \varphi_1(x) + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(x+s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \\ \lambda \varphi_2(x) = \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \varphi_2(x) + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(s+x) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \\ \lambda \varphi_3(x) = \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(x-s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} \varphi_3(x) \end{cases}$$

последняя система уравнений принимает вид

$$\lambda \varphi = \mathbf{L}(z) \varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2), \quad (5)$$

где $\mathbf{L}(z)$ самосопряженный оператор в $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$, определенный по формуле

$$\mathbf{L}(z) \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \varphi_1(x) + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(x+s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \\ \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \varphi_2(x) + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(s+x) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \\ \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(x-s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} \varphi_3(x) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что уравнения (3) и (5) являются эквивалентными. Отсюда получим равенство

$$N(z) = n(1, \mathbf{L}(z)).$$

Если покажем, равенство

$$n(1, \mathbf{L}(z)) = n(1, \mathbf{T}(z)),$$

то лемма будет доказана.

Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{L}(z)}(1)$, т.е. $(\mathbf{L}(z)\varphi, \varphi) > (\varphi, \varphi)$ или

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \varphi_1(x) + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} + \right. \\ & \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(x+s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \overline{\varphi_1(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} + \right. \\ & \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \varphi_2(x) + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(s+x) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \overline{\varphi_2(x)} dx \\ & + \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(x-s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} \varphi_3(x) \right] \overline{\varphi_3(x)} dx \right. \\ & \left. > \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_1(x) \overline{\varphi_1(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_2(x) \overline{\varphi_2(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} \varphi_3(x) \overline{\varphi_3(x)} dx. \right. \end{aligned}$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(x+s) ds}{\mathcal{E}_K(x, s) - z} \right] \overline{\varphi_1(x)} dx + \\ & \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} + \frac{\mu_3}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_3(s+x) ds}{\mathcal{E}_K(s, x) - z} \right] \overline{\varphi_2(x)} dx + \\ & \int_{\mathbb{T}^2} \left[\frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(x-s) ds}{\mathcal{E}_K(s, x-s) - z} \right] \overline{\varphi_3(x)} dx > \\ & \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_1(K-x; z - \varepsilon_1(x)) \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_2(K-x; z - \varepsilon_2(x)) \varphi_2(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \\ & + \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_3(x; z - \varepsilon_3(K-x)) \varphi_3(x) \overline{\varphi_3(x)} dx. \end{aligned}$$

Обозначив через $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3)$, где

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\hat{\varphi}_\alpha(x)}{\sqrt{\Delta_\alpha(K-x; z - \varepsilon_\alpha(x))}}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \varphi_3(x) = \frac{\hat{\varphi}_3(x)}{\sqrt{\Delta_3(x; z - \varepsilon_3(K-x))}}$$

получим $(\mathbf{T}(z)\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) > (\hat{\varphi}, \hat{\varphi})$, т.е.

$$n(1, \mathbf{L}(z)) \leq n(1, \mathbf{T}(z))$$

Аналогично доказывается обратное утверждение

$$n(1, \mathbf{L}(z)) \geq n(1, \mathbf{T}(z)).$$

Лемма (3.1) доказана. \square

Совершенно аналогично доказательству, приведенному в работе [7], [8], [12] пользуясь методами Фредгольма, можно доказать следующую лемму.

Лемма 3.2 Оператор $T_{\alpha\beta}(z)$, $\alpha \neq \beta$ представляется в виде

$$T_{\alpha\beta}(z) = \tilde{T}_{\alpha\beta}(z) + F_{\alpha\beta}(z), \quad \alpha \neq \beta,$$

где операторнозначная функция $\tilde{T}_{\alpha\beta}(\cdot)$ непрерывна по норме на $(-\infty, \tau(K)]$ и $F_{\alpha\beta}(z)$, $z < \tau(K)$, и независимо от z является конечномерным оператором.

Определим оператор $\tilde{\mathbf{T}}(z)$, $z \leq \tau(K)$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$, заданный матрицей

$$\tilde{\mathbf{T}}(z) = \left(\tilde{T}_{ij}(z) \right)_{i,j=1}^3.$$

Поскольку для каждого ограниченного оператора \mathbf{A} , действующего в гильбертовом пространстве $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$, и для любого $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\Phi\|_{L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)}^2 &= (\mathbf{A}\Phi, \mathbf{A}\Phi)_{L_2^{(3)}(\mathbb{T}^2)} = \sum_{i=1}^3 \|(\mathbf{A}\Phi)_i\|^2 = \sum_{i=1}^3 \left\| \sum_{j=1}^3 A_{ij}\varphi_j \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^3 3 \sum_{j=1}^3 \|A_{ij}\varphi_j\|^2 \leq 3 \sum_{i=1}^3 \sup_j \|A_{ij}(z)\|^2 \|\Phi\|^2. \end{aligned}$$

Справедлива оценка

$$\|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sup_j \|A_{ij}\|^2}.$$

Поэтому

$$\|\tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\| \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{j=1}^3 \sup_i \|\tilde{T}_{ij}(z) - \tilde{T}_{ij}(\tau(K))\|^2}, \quad z < \tau(K). \quad (6)$$

Из неравенства (6) и леммы (3.2) следует

Лемма 3.3 Оператор $\mathbf{T}(z)$, $z < \tau(K)$, представляется в виде

$$\mathbf{T}(z) = \tilde{\mathbf{T}}(z) + \mathbf{F}(z),$$

где операторнозначная функция $\tilde{\mathbf{T}}(\cdot)$ непрерывной по норме на $(-\infty, \tau(K)]$ и $\mathbf{F}(z)$, $z < \tau(K)$, независимо от z является конечномерным оператором.

Доказательство теоремы (1). Пользуясь неравенством Вейля [1] $n(a + b, A + B) \leq n(a, A) + n(b, B)$ для компактных операторов A, B , получим

$$N(z) \leq n\left(\frac{2}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z)\right) + n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right) \leq n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) + n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) +$$

$$n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right).$$

Согласно лемме (3.3) оператор $\tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))$ является компактным, поэтому

$$n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) < \infty$$

и при малых $\tau(K) - z < 0$ имеет место равенство

$$n\left(\frac{1}{3}, \tilde{\mathbf{T}}(z) - \tilde{\mathbf{T}}(\tau(K))\right) = 0.$$

Поскольку $\mathbf{F}(z)$ есть конечномерный оператор и размерность пространства его значений не зависит от z , $z < \tau(K)$, существует число $F > 0$ такое, что для всех $z < \tau(K)$ верно

$$n\left(\frac{1}{3}, \mathbf{F}(z)\right) \leq F < \infty.$$

Таким образом, для всех $z < \tau(K)$ имеет место неравенство $n(1, \mathbf{T}(z)) < \infty$. Следовательно, по лемме (2.4) число собственных значений $H(K)$, лежащих на $(-\infty, \tau(K))$, является конечным.

Теорема (1) доказана. \square

Дискретный спектр оператора $H(K)$ при $m_1 = m_2 = \infty$ и $m_3 < \infty$ 4.

В этом разделе мы предполагаем, что $m_1 = m_2 = \infty, m_3 < \infty$. Тогда оператор $H(K)$ оставляет каждое из подпространств $\mathcal{H}_0 = \{f \in L^2(\mathbb{T}^2) : f(x, y) = g(x + y), g \in L^2(\mathbb{T}^2)\}$ и $\mathcal{H}_0^\perp = L^2(\mathbb{T}^2) \ominus \mathcal{H}_0$ инвариантным. При этом

$$\sigma_{disc}(H(K)) = \sigma_{disc}(H^0) \cup \sigma_{disc}(H^1), \quad (7)$$

где $H^0 = PH(K)P$, $H^1 = P^\perp H(K)P^\perp$, P – ортогональный проектор в \mathcal{H}_0 , $P^\perp = I - P$.

Поскольку \mathcal{H}_0 изоморфно $L^2(\mathbb{T}^2)$, оператор H^0 унитарно-эквивалентен оператору \overline{H}^0 , действующему в $L^2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$\overline{H}^0 = H_K - \mu_3 I - (\mu_1 + \mu_2)v,$$

где H_K – оператор умножения на функцию $\varepsilon_3(K \cdot)$, I – единичный оператор, v – оператор, действующий по формуле (1).

Оператор H^1 действует в \mathcal{H}_0^\perp по формуле

$$H^1 = H_0(K) - \mu_1 V_1 - \mu_2 V_2.$$

Пусть

$$E_{\min}(K) = \min_{s \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_3(K - s), \quad E_{\max}(K) = \max_{s \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_3(K - s).$$

Понятно, что $E_{\min}(K)$ и $E_{\max}(K)$ не зависят от $K \in \mathbb{T}^2$, поэтому мы используем обозначения

$$E_{\min} := E_{\min}(K) \quad E_{\max} := E_{\max}(K).$$

Напомним, что в случае $m_1 = m_2 = \infty, m_3 < \infty$ функция $\Delta_\alpha(x; z)$ не зависит от $x \in \mathbb{T}^2$. Для удобства обозначим ее через $\Delta_\alpha(z)$:

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\varepsilon_3(s) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}, E_{\max}], \quad \alpha = 1, 2$$

Положим

$$Q_n(x) = \int_{\mathbb{T}^2} (\tilde{\varepsilon}(t))^n e^{-i(x,t)} dt, \quad x \in \mathbb{Z}^2, n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(p) = \varepsilon(p) - \hat{\varepsilon}(0) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^2, s \neq 0} (-\hat{\varepsilon}(s)) e^{i(s,p)}. \quad (9)$$

Лемма 4.1 а) Для любых $k \in \mathbb{Z}^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $Q_n(k) \geq 0$;
б) Для любых $k \in \mathbb{Z}^2$ существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $Q_n(k) > 0$.

Доказательство. а) Очевидно, что каждый коэффициент Фурье функции $(\tilde{\varepsilon}(\cdot))^n$ состоит из конечной суммы произведений $(-\hat{\varepsilon}(s_1)) \cdots (-\hat{\varepsilon}(s_n)), s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$.

Поскольку все коэффициенты Фурье функции $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$ являются неотрицательными, то для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ коэффициенты Фурье функции $(\tilde{\varepsilon}(\cdot))^n$ также являются неотрицательными.

Поэтому для любых $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ из равенства

$$\int_{\mathbb{T}^2} e^{i(m,t)} dt = \begin{cases} (2\pi)^2, & \text{если } m = 0; \\ 0, & \text{если } m \neq 0, m \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

и (9) следует

$$Q_n(k) \geq (-\hat{\varepsilon}(s_1)) \cdots (-\hat{\varepsilon}(s_n)) \int_{\mathbb{T}^2} e^{i(s_1 + \dots + s_n + k, t)} dt \geq 0. \quad (10)$$

б). Положим

$$\Pi_0 = \{\pm e_j \in \mathbb{Z}^2 : j = 1, 2\},$$

где $e_j, j = 1, 2$ единичные орты на \mathbb{Z}^2 .

Так как любой элемент множества \mathbb{Z}^2 представляется в виде (конечной) суммы элементов Π_0 , существуют n_0 и $s_1^0, \dots, s_{n_0}^0 \in \Pi_0$ такие, что

$$s_1^0 + \dots + s_{n_0}^0 = -k.$$

Таким образом, из $-\hat{\varepsilon}(s) > 0$, при $s \in \Pi_0$ и (10) следует, что

$$Q_n(k) \geq (2\pi)^2 (-\hat{\varepsilon}(s_1)) \cdots (-\hat{\varepsilon}(s_n)) > 0.$$

□

Пусть

$$d_k(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{i(k,s)} ds}{\varepsilon_3(s) - z}, \quad k \in \mathbb{Z}^2, z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}, E_{\max}]. \quad (11)$$

Лемма, аналогичная следующему утверждению, была доказана в [9] для в размерном случае и играет решающую роль в доказательстве основного результата.

Лемма 4.2 Для любого $k \in \mathbb{Z}^2$ функция $d_k(z)$ является строго положительной и монотонно возрастающей на $(-\infty, E_{\min})$.

Имеет место

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} d_k(z) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow E_{\min} - 0} d_k(z) = +\infty. \quad (12)$$

Доказательство. Представим (11) в виде

$$d_k(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{-i(x,t)}}{\hat{\varepsilon}(0) - z - \tilde{\varepsilon}(t)} dt, \quad x \in \mathbb{Z}^2, z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}, E_{\max}].$$

Так как $\hat{\varepsilon}(s) \leq 0$, $0 \neq s \in \mathbb{Z}^2$ и $E_{\min} = \varepsilon(0)$, имеем

$$\hat{\varepsilon}(0) - E_{\min} = \hat{\varepsilon}(0) - \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \hat{\varepsilon}(s) = \sum_{\substack{s \neq 0 \\ s \in \mathbb{Z}^2}} -\hat{\varepsilon}(s) \geq \sum_{\substack{s \neq 0 \\ s \in \mathbb{Z}^2}} |\hat{\varepsilon}(s) \cos(s, p)| \geq |\tilde{\varepsilon}(p)|.$$

Поскольку $\hat{\varepsilon}(0) - z > |\tilde{\varepsilon}(p)|$, то можно представить $d_k(z)$ в виде ряда Лорана

$$d_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^{-d}}{(\hat{\varepsilon}(0) - z)^{n+1}} Q_n(x), \quad z < E_{\min}, \quad (13)$$

где $Q_n(x)$ определена по (8).

В силу а) леммы (4.1) получим, что (13) является неотрицательным и степенным рядом переменного $\frac{1}{\hat{\varepsilon}(0) - z}$ с неотрицательными коэффициентами и, следовательно, $d_k(z) \geq 0$ при любых $x \in \mathbb{Z}^2$. Более того, в силу б) леммы (4.1) для любого $x \in \mathbb{Z}^2$ функция $R_0(x; \cdot)$ является строго монотонно возрастающей на $(-\infty, E_{\min})$.

Это завершает доказательство леммы (4.2).

Следующая лемма играет решающую роль при доказательстве основного результата.

Лемма 4.3 Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ является собственным значением оператора H^1 тогда и только тогда, когда $D(z) = 0$, где

$$D(z) = \prod_{k=0}^{\infty} D_k(z),$$

$$D_k(z) = 1 - \frac{\mu_1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_2}{\Delta_1(z)} d_k^2(z).$$

Если число $z_k \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ — собственное значение H^1 с $D_k(z_k) = 0$, то соответствующая собственная функция имеет вид

$$f_k^{\pm}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_3(K - x - y) - z} [\mu_1 e^{\pm i(k, (K/2 - y))} d_k(z_k) + \mu_2 \frac{\mu_1}{2\pi \Delta_2(z)} d_k(z_k) e^{\pm i(k, (K/2 - x))}],$$

где $k \in \mathbb{Z}^2$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ – собственное значение оператора H^1 и f – соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение $H^1(K)f = zf$ имеет нетривиальное решение f . Так как при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1)$ оператор $R_0(z)$ ограничен в $L^2(\mathbb{T}^2)$, имеем

$$f = R_0(z)[\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2]f. \quad (14)$$

Отсюда следует, что число z является собственным значением оператора H^1 тогда и только тогда, когда 1 является собственным значением $R_0(z)[\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2]$, причем кратности z и 1 совпадают. Введем обозначения

$$\tilde{\varphi}_\alpha = V_\alpha f, \quad \alpha = 1, 2. \quad (15)$$

Из равенства (14) имеем

$$f(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_3(K - x - y) - z} [\mu_1 \tilde{\varphi}_1(y) + \mu_2 \tilde{\varphi}_2(x)]. \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в (15), получим, что функции $\tilde{\varphi}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(y) &= \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\tilde{\varphi}_1(y) ds}{\varepsilon_3(K - y - s) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\tilde{\varphi}_2(s) ds}{\varepsilon_3(K - y - s) - z}, \\ \tilde{\varphi}_2(x) &= \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\tilde{\varphi}_1(s) ds}{\varepsilon_3(K - s - x) - z} + \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\tilde{\varphi}_2(x) ds}{\varepsilon_3(K - s - x) - z}. \end{aligned}$$

Пользуясь периодичностью подынтегральных функций в этой системе уравнений, производя замену переменных $K/2 - s = t$ в первом и втором интегралах правой части равенств и заметив, что $\Delta_\alpha(z) \neq 0$, $\alpha = 1, 2$, при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1(K))$, убедимся, что φ_α , $\alpha = 1, 2$, удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \frac{1}{\Delta_1(z)} \frac{\mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_2(t) dt}{\varepsilon_3(y+t) - z}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi_1(t) dt}{\varepsilon_3(t+x) - z}, \quad \varphi_i(y) = \tilde{\varphi}_i(y + \frac{K}{2}). \end{aligned} \quad (17)$$

При этом вектор f , определенный по формуле (16), является собственным вектором оператора $H^1(K)$, соответствующим собственному числу $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1(K))$, тогда и только тогда, когда $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ является решением системы (17). Число таких линейно независимых собственных векторов f и Φ совпадает.

Подставляя второе из равенств (17) в первое, получаем

$$\varphi_1(y) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{\varepsilon_3(y+t) - z} \frac{\varphi_1(s) dt ds}{\varepsilon_3(s+t) - z}, \quad (18)$$

или

$$\varphi_1 = Q(z)\varphi_1,$$

где $Q(z) = \frac{\mu_1\mu_2}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)}QQ^*$, Q – интегральный оператор, действующий в $L^2(\mathbb{T}^2)$ формуле

$$(Q\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\varphi(t)dt}{\varepsilon_3(x+t) - z}.$$

При этом если $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ является решением системы (17), то φ_1 является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению 1. Обратно, если φ_1 является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению 1, то $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_2 = \frac{\mu_1}{\Delta_2(z)}Q\varphi_1$ является решением системы (17). Число таких линейно независимых собственных векторов φ_1 и Φ совпадает.

Так как функция $1/(\varepsilon_3(\cdot) - z)$ непрерывна на \mathbb{T}^2 , то оператор Q является оператором Гильберта-Шмидта. Следовательно, оператор $Q(z)$ принадлежит классу операторов со следом.

Поэтому детерминант $\det(I - Q(z))$ оператора $I - Q(z)$ существует и определяется по формуле (см. Теорема XIII.106 книги [10])

$$\det(I - Q(z)) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda_k(z)), \quad (19)$$

где $\{\lambda_k(z)\}$ – собственные значения $Q(z)$, выписанные с учетом алгебраической кратности. По теореме XIII.105 книги [10] число 1 есть собственное значение оператора $Q(z)$ тогда и только тогда, когда $\det(I - Q(z)) = 0$.

Пусть φ – собственная функция оператора $Q(z)$, соответствующая собственному значению λ , т.е.

$$\lambda\varphi(y) = \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{\varepsilon_3(y+t) - z} \frac{\varphi(s)dt ds}{\varepsilon_3(s+t) - z}. \quad (20)$$

Разлагая функцию φ в ряд по базису $\{e^{i(k,x)}\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ и учитывая периодичность подынтегральной функции, получим

$$c_k \lambda e^{i(k,x)} = c_k e^{i(k,x)} \frac{1}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} \frac{\mu_1\mu_2}{(2\pi)^4} \left| \int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{i(k,s)} ds}{\varepsilon_3(s) - z} \right|^2$$

или

$$\lambda(z) = \frac{\mu_1\mu_2}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} |d_k(z)|^2.$$

Таким образом, собственное значение $\lambda_k(z)$, $k \in \mathbb{Z}^2$, оператора $Q(z)$, участвующее в формуле (19), имеет вид

$$\lambda_k(z) = \frac{\mu_1\mu_2}{\Delta_1(z)\Delta_2(z)} |d_k(z)|^2,$$

а $\psi_k(x) = e^{i(k,x)}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, является собственной функцией оператора $Q(z)$, соответствующей собственному значению $\lambda_k(z)$, $k \in \mathbb{Z}^2$.

Заметим, что $d_k(z) = d_{-k}(z)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0^2$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1(K))$. Поэтому, если число $1 = \lambda_k(z_k)$, $z_k \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1(K))$ – собственное значение $Q(z_k)$, то $\varphi_k = e^{\pm i(k;x)}$ является соответствующей собственной функцией оператора $Q(z_k)$.

Отсюда если число $z_k \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H^1(K))$ – собственное значение $H^1(K)$ с $D_k(z_k) = 1 - \lambda_k(z_k) = 0$, то из формул (17) и (16) получаем соответствующую собственную функцию

$$f_k^\pm(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_3(K - x - y) - z} \left[\mu_1 e^{\pm i(k, (K/2 - y))} d_k(z_k) + \mu_2 \frac{\mu_1}{\Delta_2(z)} d_k(z_k) e^{\pm i(k, (K/2 - x))} \right].$$

Лемма (4.3) доказана. \square

Лемма 4.4 Обозначим через $z = \lambda_i$ отрицательный нуль функции $\Delta_i(\cdot) = 0, i = 1, 2$, и положим $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Существует последовательность $\{k_n\} \subset \mathbb{N}_0^2$ и числа $z_{k_n} \in (-\infty, \lambda_{\min})$, $\xi_{k_n} \in (\lambda_{\max}, E_{\min})$ такие, что $D_{k_n}(z_{k_n}) = 0$ и $D_{k_n}(\xi_{k_n}) = 0$ при каждом $n = 1, 2, \dots$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lambda_{\min}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{k_n} = \lambda_{\max}.$$

Доказательство. Легко проверит, что

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} D_k(z) = 1$$

для всех $k = 0, 1, \dots$. Поскольку $\Delta_i(z) > 0, i = 1, 2$ при $z < \lambda_{\min}$ и по лемме (4.2) $d_{k_l}(\lambda_{\min}) \neq 0, l = 1, 2, \dots$, то из $\Delta_1(\lambda_{\min})\Delta_2(\lambda_{\min}) = 0$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow \lambda_{\min} - 0} D_{k_l}(z) = \lim_{z \rightarrow \lambda_{\min} - 0} \left(1 - \frac{\mu_1}{\Delta_2(z)} \frac{\mu_2}{\Delta_1(z)} d_{k_l}^2(z) \right) = -\infty.$$

Отсюда, согласно непрерывности $D_k(\cdot)$, следует существование $z_{k_l} \in (-\infty, \lambda_{\min})$ такого, что $D_{k_l}(z_{k_l}) = 0, l = 1, 2, \dots$.

Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} D(z) = 1$ и $D(\cdot)$ – аналитическая функция на $\mathbb{C} \setminus [\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]]$ (где \mathbb{C} – комплексная плоскость), то должно быть $\lim_{l \rightarrow \infty} z_{k_l} = \lambda_{\min}$.

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k \left(\frac{E_{\min} + \lambda_{\max}}{2} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_\alpha \left(\frac{E_{\min} + \lambda_{\max}}{2} \right) < 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Поэтому существует $n_1 > 0$ такое, что $D_k(\frac{E_{\min} + \lambda_{\max}}{2}) > 0$ для всех $k, \|k\|_1 > n_1$. Согласно $\Delta_1(z)\Delta_2(z) > 0$ при $z \in (\lambda_{\max}, E_{\min})$ и $d_{k_l}(\lambda_{\max}) \neq 0, l = 1, 2, \dots$ из

$$\Delta_1(\lambda_{\max})\Delta_2(\lambda_{\max}) = 0$$

имеем

$$\lim_{z \rightarrow \lambda_{\max} + 0} D_{k_l}(z) = -\infty.$$

Далее, из непрерывности функции $D_k(\cdot)$, получаем $D_{k_l}(\xi_{k_l}) = 0$ для некоторого $\xi_{k_l} \in (\lambda_{\max}, (\frac{E_{\min} + \lambda_{\max}}{2}))$, для всех $k, \|k\|_1 > n_1$.

Из аналитичности функции $D(\cdot)$ на $\mathbb{C} \setminus [\{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\} \cup [E_{\min}, E_{\max}]]$ следует, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{k_l} = \lambda_{\max}$. для всех $k_l > n_1$.

Лемма (4.4) доказана. \square

Аналогично лемме (4.3) доказывается

Лемма 4.5 Для всякого $\mu_i > 0, i = 1, 2, 3$, оператор \bar{H}^0 имеет единственное собственное значение $\lambda_3 < \inf \sigma_{\text{ess}}(\bar{H}^0)$ с $\Delta_3(\lambda_3) = 0$, где

$$\Delta_3(z) = 1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\varepsilon_3(s) - \mu_3 - z}, \quad k \in \mathbb{Z}^2.$$

Доказательство теоремы (2) следует из формулы(7) и лемм (4.3)-(4.5). \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Учеб. пособие. Л., Из-во Ленингр. ун-та, 1980.
2. Ефимов В. Н. Связанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц. Ядерная физика. 1970. Т. 12. №5. С.1080-1091.
3. Лакаев С. Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц. Теорет. и матем. физика, 1991. Т.89. № 1. С. 94-104.
4. Лакаев С. Н., Муминов М. Э. Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теорет. мат. физ., Т. 135, № 3, (2003), 478-503.
5. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. Москва.: Наука, 1985.
6. Муминов М. Э. О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теорет. и матем. физика, (2009). Т. 159. № 2, 302-320 .
7. Муминов М. Э., Алиев Н. М. О спектре трехчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке. Теорет. и матем. физика, (2012). Т. 171. № 3, 387-403 .
8. Муминов М. Э., Алиев Н. М. О спектре гамильтониана трех частиц на одномерной решетке, Матем. тр., (2014) Т. 17 № 23, 3–22
9. Муминов З.Э., Кулжанов У.Н. Нижние связанные состояния одночастичных гамильтонианов на целочисленной решетке. Математические труды. - Россия, (2012).- Т1, 129-140.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.Т.4, М.:Мир, 1982.

11. Яфаев Д. Р. К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера. Матем. сб., (1974), Т. 9. (136). №4 (8). С.567-592.
12. Albeverio Sergio, Lakaev Saidakhmat. N and Muminov. Zahridin I. Schrodinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics. Journal Annales Henri Poincare. Volume 5, 2004, 743-772.
13. Amado R. D., Noble J. V. Efimov's effect: a new pathology of three particle systems. II// Phys. Rev. D. 1971. v.5. №8. P. 1992-2002.
14. Ovchinnikov Yu. N., Sigal I. M. Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect// Ann. Physics. 1989. V.123. p. 274-295.
15. Tamura H. The Efimov effect of three-body Schrödinger operator. J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433-459.

REZYUME

Biz uchta ixtiyoriy tizimning Gamiltonianini ko'rib chiqamiz Ikki o'lchovli panjara ustidagi zarralar juftlashgan yordamida o'zaro ta'sir qiladi jalb qilishning kontakt potentsiallari. Tegishli muhim spektrning chap tomonida joylashgan diskret spektrning cheksizligi Ishdagi umumiy kvazimomentumning barcha qiymatlari uchun Shredinger operatori uch zarrali tizimda ikkita zarrachaning massalari cheksiz bo'lsa.

Kalit so'zlar: Panjara ustidagi uch zarracha sistemasi, Shredinger operatori, asosiy spektr, diskret spektr, xos qiymat, Faddeev tipidagi tenglama.

RESUME

We consider the Hamiltonian of a system of three arbitrary particles on a two-dimensional lattice interacting using paired contact potentials of attraction. The infinity of the discrete spectrum lying to the left of the essential spectrum corresponding to Schrodinger operator for all values of the total quasimomentum in the case when in a three-particle system the masses of two particles are infinite.

Key words: Three-particle system on a lattice, Schrodinger operator, essential spectrum, discrete spectrum, eigenvalue, Faddeev type equation.

УДК 517.956.6

О линейной обратной задаче с периодическим краевым условием для уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде

Джамалов С. З. * Сипатдинова Б. К. *

РЕЗЮМЕ

В данной статье, методами « ε -регуляризации», априорных оценок, последовательностью приближений с применением преобразования Фурье доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения одной линейной обратной задачи с периодическими краевыми условиями в определенном классе интегрируемых функции.

Ключевые слова: линейная обратная задача с периодическими краевыми условиями, корректность задачи, методы « ε -регуляризации», априорные оценки, последовательность приближения, преобразования Фурье.

1. Введение

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов [1],[2]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа в плоскости изучено в работах К.Б. Сабитова и его учеников [19], а для многомерных уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях, изучены в работах С.З. Джамалова, Р.Р. Ашурова и С.Г. Пяткова [6]-[9].

Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода (в частности, для уравнения Трикоми) в неограниченных областях [12], а для уравнений смешанного типа второго рода такие задачи в неограниченных областях практически не исследовались. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе, для исследования однозначной разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченном параллелепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым периодическим краевым задачам для семейства нагруженных интегродифференциальных уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в ограниченной прямоугольной области.

Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [17].

В области

$$G = (0, 1) \times (0, T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (0, 1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\}$$

* Джамалов С. З. – Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, siroj63@mail.ru

* Сипатдинова Б. К. – Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, sbiybinaz@mail.ru

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x, t)u = \psi(x, t, z), \quad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ -оператор Лапласа, и пусть $k(0) = k(T) = 0$. Здесь $\psi(x, t, z) = g(x, t, z) + h(x, t)f(x, t, z)$, $g(x, t, z)$ и $f(x, t, z)$ -заданные функции, а функция $h(x, t)$ под-лежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никакие ограниче-ния [3].

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в \bar{Q} .

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, z), h(x, t)\}$ удовлетворяю-щие уравнению (1) в области G , такие что, функция $u(x, t, z)$ удовлетворяет следующим периодическим краевым условиям:

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}; p = 0, 1, \quad (3)$$

$$\text{Дальнейшем будем считать, что } u(x, t, z) \text{ и } u_z(x, t, z) \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \quad (5)$$

где $\ell_0 \in \mathbb{R}$ и вместе с функцией $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G); h \in W_2^2(Q)\}.$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ весовая пространства Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^2(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

Очевидно, что пространство $W_2^{2,3}(G)$ с нормой (A) является банаховым простран-ством [10]- [15].

При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Ко-ши с σ [13]:

$$\forall u, \vartheta > 0, \forall \sigma > 0, 2u \cdot \vartheta \leq \sigma u^2 + \sigma^{-1} \vartheta^2.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x, t, z) \in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G , с условиями (2)-(5).*

Пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x, t)$;

Условие 1: Периодичность: $a(x, 0) = a(x, T)$, $c(x, 0) = c(x, T)$.

$g(x, 0, z) = g(x, T, z)$, $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$.

Гладкость: $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(Q)$, $|f_0(x, t)| \geq \rho > 0$, $f \in W_2^{3,3}(G)$, $g \in W_2^{1,3}(G)$.

Условие 2: $\varphi_0(x, t) \in W_2^4(Q)$; $D_t^q \varphi_0|_{t=0} = D_t^q \varphi_0|_{t=T}$; $q = 0, 1, 2$; $D_x^p \varphi_0|_{x=0} = D_x^p \varphi_0|_{x=1}$; $p = 0, 1$.

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразования Фурье, т.е. для нахождения решения задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z , для задачи (1)-(5).

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $z = \ell_0$:

$$Lu(x, t, \ell_0) = k(t)u_{tt}(x, t, \ell_0) - u_{xx}(x, t, \ell_0) - u_{zz}(x, t, \ell_0) + a(x, t)u_t(x, t, \ell_0) + c(x, t)u(x, t, \ell_0) = \psi(x, t, \ell_0).$$

Теперь, учитывая дополнительное условие (5) и то, что $f_0 \neq 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x, t)$ в виде интеграла

$$h(x, t) = \frac{1}{f_0(x, t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{i\lambda \ell_0} \hat{u}(x, t, \lambda) d\lambda \right],$$

где $\Phi_0 = L_0 \varphi_0 - g_0$, $g_0(x, t) = g(x, t, \ell_0)$, $L_0 \varphi_0 = k(t)\varphi_{0tt} - \varphi_{0xx} + a(x, t)\varphi_{0t} + c(x, t)\varphi_0$, а для определения функций $\hat{u}(x, t, \lambda)$ в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ получим нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода второго порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{u} &= k(t)\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x, t)\hat{u}_t + (c(x, t) + \lambda^2)\hat{u} = L_0\hat{u} + \lambda^2\hat{u} = \\ &= \hat{g}(x, t, \lambda) + \frac{\hat{f}(x, t, \lambda)}{f_0(x, t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi \ell_0} \hat{u}(x, t, \xi) d\xi \right] \equiv F(\hat{u}), \end{aligned} \quad (6)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}|_{t=T}, \quad (7)$$

$$D_x^p \hat{u}|_{x=0} = D_x^p \hat{u}|_{x=1}; p = 0, 1, \quad (8)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $f(x, t, z)$.

Теорема 1. (Основной результат) Пусть выполнены выше указанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2a - |k_t| + \mu k \geq B_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq b_2 > 0$ для всех $(x, t) \in Q$ и пусть существует положительное число σ -такое, что для $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ имеют оценки $b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, где

$M = \text{const} \left(\sigma \mu^2 m \delta^{-1} \rho^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(Q)} \right)$, $m = 20c_1 c_2 c_3$, $c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3} < +\infty$, $c_i (i = 2, 3)$ -коэффициенты теоремы вложения Соболева. Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U .

Доказательство теоремы 1 проведем по следующей схеме:

1. Покажем, что решение задачи (1)-(4) $u(x, t, y) \in U$ удовлетворяет дополнительному условию (5).

2. Для доказательства однозначной разрешимости задачи (6)-(8) сначала исследуем однозначную разрешимость вспомогательной задачи, то есть исследуем разрешимость семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром.

3. Затем с помощью этой вспомогательной задачи изучим однозначную разрешимость семейства нагруженных уравнений смешанного типа второго рода, второго порядка (6)-(8).

4. Используя однозначную разрешимость задачи (6)-(8), покажем однозначную разрешимость линейной обратной задачи (1)-(5).

Теперь приступим к реализации этой схемы.

Сначала покажем, что функция $u(x, t, z)$ удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t)$. Предположим противное. Пусть

$$u(x, t, \ell_0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, t, \lambda) e^{i\lambda\ell_0} d\lambda = \omega(x, t) \neq \varphi_0(x, t)$$

Рассмотрим функцию $\vartheta(x, t) = \omega(x, t) - \varphi_0(x, t)$ в области Q .

Умножая обеих сторон (6)-(8), на $\frac{e^{i\lambda\ell_0}}{\sqrt{2\pi}}$ и интегрируя по параметру λ от $-\infty$ до ∞ , учитывая условия теоремы 1, получим следующую задачу

$$L_0\vartheta = k(t)\vartheta_{tt} - \vartheta_{xx} + a(x, t)\vartheta_t + c(x, t)\vartheta = 0 \quad (9)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\vartheta|_{t=0} = \vartheta|_{t=T}, \quad (10)$$

$$D_x^p\vartheta|_{x=0} = D_x^p\vartheta|_{x=1}; p = 0, 1. \quad (11)$$

Единственность решения задачи (9)-(11) доказано в работах [4]-[6], откуда следует $\vartheta(x, t) = 0$, т.е. $\omega(x, t) = \varphi_0(x, t)$.

2. Семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром.

Разрешимость задачи (6)-(8) докажем методами « ε -регуляризации», последовательную приближений и априорных оценок, а именно в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ рассмотрим периодическую краевую задачу для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon &= -\varepsilon \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} + L_0 \hat{u}_\varepsilon + \lambda^2 \hat{u}_\varepsilon = \\ &= \hat{g}(x, t, \lambda) + \frac{\hat{f}(x, t, \lambda)}{f_0(x, t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi\ell_0} \hat{u}_\varepsilon(x, t, \xi) d\xi \right] \equiv F(\hat{u}_\varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

с периодическими краевыми условиями:

$$D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}; q = 0, 1, 2, \quad (13)$$

$$D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=0} = D_x^p \hat{u}_\varepsilon|_{x=1}; p = 0, 1, \quad (14)$$

где ε -малое положительное число.

В дальнейшем при доказательстве корректности задачи (12)-(14), понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы.

Определим $W_i(Q, \mathbb{R})$, ($i = 0, 1, 2$)-пространства обобщенных функций в области Q со значениями в \mathbb{R} , т.е.

$$W_i(Q, \mathbb{R}) = \left\{ \hat{\vartheta} \mid \hat{\vartheta} \in W_2^i(Q), i = 0, 1, 2; (1 + |\lambda|^2)^{3/2} \left\| \hat{\vartheta} \right\|_{W_2^i(Q)} \in L_2(\mathbb{R}), W_2^0(Q) = L_2(Q) \right\},$$

с нормой

$$\langle \hat{\vartheta} \rangle_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{\vartheta} \right\|_{W_2^i(Q)}^2 d\lambda. \quad (B)$$

Очевидно, что пространства $W_i(Q, \mathbb{R})$ с заданной нормой являются банаховым [13],[15]-[20]. Из определения пространства $W_2^i(Q)$, $i = 0, 1, 2$, следует следующие вложения $W_2(Q, \mathbb{R}) \subset W_1(Q, \mathbb{R}) \subset W_0(Q, \mathbb{R})$.

Теперь определим следующее пространство функции

$$W(Q, \mathbb{R}) = \left\{ \hat{\vartheta} \mid \hat{\vartheta} \in W_2(Q, \mathbb{R}), \frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{\vartheta} \in W_0(Q, \mathbb{R}), \right. \\ \left. D_t^q \hat{\vartheta}|_{t=0} = D_t^q \hat{\vartheta}|_{t=T}; q = 0, 1, 2; D_x^p \hat{\vartheta}|_{x=0} = D_x^p \hat{\vartheta}|_{x=1}; p = 0, 1. \right\}$$

с конечной нормой B .

Определение 2. Обобщенным решением задачи (12)-(14) будем называть функцию $\hat{\vartheta}(x, t, \lambda) \in W(Q, \mathbb{R})$, удовлетворяющую уравнению (12) почти всюду в области.

Разрешимость задачи (12)-(14) доказывается методами последовательных приближений и априорных оценок [6]-[8],[10], то есть рассмотрим периодическую краевую задачу для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа с малым параметром:

$$\mathcal{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = -\varepsilon \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} + L_0 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} + \lambda^2 \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = \\ = \hat{g} + \frac{\hat{f}(x, t, \lambda)}{f_0(x, t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi \ell_0} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x, t, \xi) d\xi \right] \equiv F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) \quad (15)$$

с периодическими краевыми условиями

$$D_t^q \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}|_{t=0} = D_t^q \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}|_{t=T}; q = 0, 1, 2, \quad (16)$$

$$D_x^p \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}|_{x=0} = D_x^p \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}|_{x=1}; p = 0, 1, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$, $\theta = 0, 1, 2, \dots$, $\{\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}\} = 0$.

Лемма 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда для решения задачи (15)-(17) справедливы следующие оценки

$$(I) \frac{\varepsilon}{\delta} \left(\langle \hat{u}_{\varepsilon t t}^{(\theta)} \rangle_0^2 + \langle \hat{u}_{\varepsilon x t}^{(\theta)} \rangle_0^2 \right) + \langle \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \rangle_1^2 \leq \text{const}(\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda}),$$

$$(II) \frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq \text{const}(\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda}).$$

Символом $\text{const}(\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda})$ здесь и далее обозначим постоянную, зависящую от параметров $\theta, \varepsilon, \lambda$.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим тождество

$$2 \left(\mathcal{L} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}, \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) \right)_0 = 2 \left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) \right)_0, \quad (18)$$

где постоянную $\mu > 0$, выберем позже.

Учитывая условий теоремы 1, интегрируя по частям тождество (18) и применяя неравенства Коши с σ [13], легко получить слева снизу следующее неравенство

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \mathcal{L} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) dxdt \geq \\ & \geq \varepsilon \left(\left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \left\| \hat{u}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\|_0^2 \right) + \int_Q \left\{ (2a - k_t + \mu k) \left(\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} \right)^2 + \right. \\ & + \mu \left(\hat{u}_{\varepsilon x}^{(\theta)} \right)^2 + \mu \lambda^2 \left(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right)^2 + (\mu c - c_t) \left(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) \left. \right\} dxdt - 2\sigma \left\| \hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} \right\|_0^2 - 2\mu^2 \sigma^{-1} K \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_0^2 - \\ & - \int_{\partial Q} \left\{ k(t) \left(\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} \right)^2 e_t - \left(\hat{u}_{\varepsilon x}^{(\theta)} \right)^2 e_t - 2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} \hat{u}_{\varepsilon x}^{(\theta)} e_x + (c + \lambda^2) \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} e_t \right\} ds, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mu = \text{const} > 0$, $\vec{e} = (e_x = (\vec{e}, x); e_t = (\vec{e}, t))$ единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q . Условия теоремы 1, обеспечивают не отрицательность интеграла по области Q . Учитывая периодические краевые условия (16), (17) и условия теоремы 1, получим, что граничные интегралы обратятся в нуль. Следовательно, из неравенства (19) и выбирая σ малое положительное число, так $B_1 - 2\sigma \geq B_{10} > 0$, $b_2 - 2\mu^2 \sigma^{-1} K \geq b_{20} > 0$, $K = \max \left\{ \|K\|_{C^1[0,T]}^2, \|a\|_{C[0,T]}^2 \right\}$, получим слева снизу следующее неравенство

$$\begin{aligned} & 2 \int_Q \mathcal{L} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) dxdt \geq \\ & \geq \varepsilon \left(\left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \left\| \hat{u}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\|_0^2 \right) + \int_Q \left\{ B_{10} \left(\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} \right)^2 + \mu \left(\hat{u}_{\varepsilon x}^{(\theta)} \right)^2 + \right. \\ & + b_{20} \left(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right)^2 \left. \right\} dxdt \geq \varepsilon \left(\left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \left\| \hat{u}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\|_0^2 \right) + b_0 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2. \end{aligned} \quad (20)$$

где $b_0 = \min \{B_{10}, \mu, b_{20}\}$. Теперь применяя неравенство Коши с σ к тождеству (20), с права сверху получим

$$\begin{aligned} & \left| 2 \left(F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}), \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) \right)_0 \right| \leq \\ & \leq \left| 2 \left(\hat{g} + \frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{i\lambda \ell_0} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\lambda) d\lambda \right], \left(2\hat{u}_{\varepsilon t}^{(\theta)} + \mu \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right) \right)_0 \right| \leq \\ & \leq 6\mu^2 \sigma^{-1} \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2 + 2\sigma \left[\|\hat{g}\|_0^2 + 2\rho^{-2} \|\hat{f}\|_{C(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 \sigma \rho^{-2} \|\hat{f}\|_{C(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\|_1^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (21)$$

где $T_0 = 2 \max\{\|k(t)\|_{C[0,T]}, \|a(x,t)\|_{C(Q)}, \|c(x,t)\|_{C(Q)}\}$.

Объединяя неравенства (20) и (21), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \left\| \hat{u}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\|_0^2 \right) + (b_0 - 6\mu^2\sigma^{-1}) \left\| \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_1^2 \leq \\ & \leq 2\sigma \left[\left\| \hat{g} \right\|_0^2 + 2\rho^{-2} \left\| \hat{f} \right\|_{C(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1\sigma\rho^{-2} \left\| \hat{f} \right\|_{C(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (22)$$

Применяя теоремы вложения Соболева: $\left\| \hat{f} \right\|_{C(Q)}^2 \leq c_2 \left\| \hat{f} \right\|_{W_2^2(Q)}^2$ [17],[18] к неравенству (22), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left(\left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \left\| \hat{u}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\|_0^2 \right) + (b_0 - 6\mu^2\sigma^{-1}) \left\| \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_1^2 \leq \\ & \leq 2\sigma c_2 \left[\left\| \hat{g} \right\|_0^2 + 2\rho^{-2} \left\| \hat{f} \right\|_{W_2^2(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 c_2 \sigma \delta^{-1} \rho^{-2} \left\| \hat{f} \right\|_{W_2^2(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая условие теоремы $b_0 - 6\mu^2\sigma^{-1} \geq b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1} \geq \delta > 0$, разделяя неравенства (23) на $\delta > 0$, умножая $(1 + |\lambda|^2)^3$ и интегрируя по λ от $-\infty$ и до ∞ , получим первую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 \right) + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_1^2 \leq A_1 + 2c_1 c_2 \sigma \delta^{-1} \rho^{-2} \left\langle \hat{f} \right\rangle_2^2 \left\langle \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\rangle_1^2, \quad (24)$$

где

$$A_1 \equiv 2\sigma\delta^{-1}c_2 \left[\left\langle \hat{g} \right\rangle_0^2 + 2\rho^{-2} \left\langle \hat{f} \right\rangle_2^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right],$$

учитывая условий теоремы 1

$$2c_1 c_2 \sigma \delta^{-1} \rho^{-2} \left\langle \hat{f} \right\rangle_2^2 < q = M \left\langle \hat{f} \right\rangle_3^2 < 1,$$

из рекуррентной формулы (24), получим справедливость (I) оценки. Действительно, для этого в качестве «начального приближения» возьмем функцию $\left\{ \hat{u}_{\varepsilon}^{(-1)} \right\} \equiv \{0\}$. Тогда имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 \right) + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon}^{(0)} \right\rangle_1^2 \leq 2\sigma c_2 \delta^{-1} \left[\left\langle \hat{g} \right\rangle_0^2 + 2\rho^{-2} \left\langle \hat{f} \right\rangle_2^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] \equiv A_1.$$

Продолжая этот процесс, методом индукции получим первую априорную оценку для любой функции $\left\{ \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta)} \right\}, \forall \theta \geq 1$,

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 \right) + \left\langle \hat{u}_{\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_1^2 \leq A_1 \sum_{\tau=0}^{\theta} q^{(\tau)} \leq \frac{A_1}{1-q}.$$

Теперь докажем справедливость оценки (II). Для этого рассмотрим тождество:

$$-2 \int_Q \mathcal{L}_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt = -2 \int_Q F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt, \quad (25)$$

где $P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} - \mu \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} - \frac{\mu \beta}{2} \hat{u}_{\varepsilon xxx}^{(\theta)} \right)$, $\beta = const > 0$.

Аналогичные рассуждения, что и при доказательстве оценки (I), основанные на интегрировании по частям (25), с учетом условий теоремы и периодических краевых условий (16), (18) приведут снизу к оценке

$$\begin{aligned} \left| -2 \int_Q F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt \right| &\geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\|_0^2 + \int_Q \{ (2a + k_t) (\hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)})^2 + \\ &+ \mu \beta (\hat{u}_{\varepsilon xx}^{(\theta)})^2 + (2a - k_t) (\hat{u}_{\varepsilon tx}^{(\theta)})^2 \} dx dt - 6\sigma^{-1} \left\| \hat{u}_{\varepsilon xx}^{(\theta)} \right\|_0^2 - \\ &- 9\mu^2 K \sigma^{-1} \left\| \hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 - 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_0^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где σ – коэффициент неравенство Коши. Учитывая условия теоремы 1, и выбирая коэффициенты $B_1 - 9\mu^2 K \sigma^{-1} \geq B_{10} > 0$, $\mu \beta - 6\sigma^{-1} \geq \mu_0 > 0$, $K = \max \left\{ \|K\|_{C^1[0,T]}^2, \|a\|_{C(Q)}^2 \right\}$, $N = \max \left\{ \|a\|_{C^1(Q)}^2, \|c\|_{C^1(Q)}^2 \right\}$, получим

$$\begin{aligned} \left| -2 \int_Q F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt \right| + 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_0^2 &\geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\|_0^2 + \\ + \int_Q \left\{ B_{10} \left((\hat{u}_{\varepsilon tt}^{(\theta)})^2 + (\hat{u}_{\varepsilon tx}^{(\theta)})^2 \right) + \mu_0 (\hat{u}_{\varepsilon xx}^{(\theta)})^2 \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда из неравенство (27) получим снизу следующую оценку

$$\left| -2 \int_Q F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt \right| + 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2 \geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\|_0^2 + b_0 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_2^2. \quad (28)$$

где $b_0 = \min\{B_{10}, \mu_0\}$. Применяя неравенство Коши с σ к тождеству (28), справа получим неравенство

$$\begin{aligned} &\left| -2 \int_Q F(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} dx dt \right| + 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2 \leq \\ &\leq \left| 2 \left(\hat{g} + \frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)} \left[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi \ell_0} \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) d\xi \right]; P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right)_0 \right| + \\ &\quad + 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2 \leq 8\mu^2 \sigma^{-1} \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_2^2 + \\ &\quad + 4\sigma \mu^2 \left[\|\hat{g}\|_1^2 + 3\rho^{-2} \|\hat{f}\|_{C^1(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^3(Q)}^2 + \|g_0\|_1^2 \right) \right] + \\ &+ 6c_1 \sigma \mu^2 \rho^{-2} \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|\hat{f}\|_{C^1(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\|_2^2 d\lambda + 9\mu^2 N \sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Объединяя неравенства (28) и (29), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\|_0^2 + (b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1}) \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_2^2 \leq \\ & \leq 4\sigma\mu^2 \left[\|\hat{g}\|_1^2 + 3\rho^{-2} \|\hat{f}\|_{C^1(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^3(Q)}^2 + \|g_0\|_1^2 \right) \right] + \\ & + 6c_1\sigma\mu^2\rho^{-2} \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|\hat{f}\|_{C^1(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\|_2^2 d\lambda + 9\mu^2 N\sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Применяя теоремы вложения Соболева $\|\hat{f}\|_{C^1(Q)}^2 \leq c_3 \|\hat{f}\|_{W_2^3(Q)}^2$ к неравенству (31), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\|_0^2 + (b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1}) \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_2^2 \leq \\ & \leq 4\sigma c_3\mu^2 \left[\|\hat{g}\|_1^2 + 3\rho^{-2} \|\hat{f}\|_{W_2^3(Q)}^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^3(Q)}^2 + \|g_0\|_1^2 \right) \right] + \\ & + 10c_1c_3\sigma\mu^2\rho^{-2} \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|\hat{f}\|_{W_2^3(Q)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\|_2^2 d\lambda + 9\mu^2 N\sigma \left\| \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\|_1^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Разделяя неравенства (31) на $b_0 - 11\mu^2\sigma^{-1} \geq \delta > 0$, умножая $(1 + |\lambda|^2)^3$ и интегрируя по λ от $-\infty$ и до ∞ , получим вторую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq A_2 + 10c_1c_3\sigma\mu^2\rho^{-2}\delta^{-1} \|f_0\|_{C^1(Q)} \left\langle \hat{f} \right\rangle_3^2 \left\langle \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\rangle_2^2. \quad (32)$$

Введем обозначение

$$A_2 \equiv 20c_3\mu^2\sigma^2 N\delta^{-1} \left[4 \langle \hat{g} \rangle_1^2 + 3\rho^{-2} \langle \hat{f} \rangle_3^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^3(Q)}^2 + \|g_0\|_1^2 \right) \right],$$

учитывая условия теоремы 1, что

$$10c_1c_3\sigma\mu^2\rho^{-2}\delta^{-1} \|f_0\|_{C^1(Q)} \left\langle \hat{f} \right\rangle_3^2 \leq q = M \left\langle \hat{f} \right\rangle_3^2 < 1,$$

из рекуррентной формулы (32), получим справедливость (II) оценки. Действительно, для этого в качестве «начального приближения» возьмем функцию $\{\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}\} \equiv \{0\}$. Тогда для «нулевого приближения» имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(0)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_\varepsilon^{(0)} \right\rangle_2^2 \leq 20c_3\mu^2\sigma^2 N\delta^{-1} \left[4 \langle \hat{g} \rangle_1^2 + 3\rho^{-2} \langle \hat{f} \rangle_3^2 \left(T_0 \|\varphi\|_{W_2^3(Q)}^2 + \|g_0\|_1^2 \right) \right] \equiv A_2.$$

Продолжая этот процесс, методом индукции получим вторую априорную оценку для любой функции $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\}$, $\forall \theta \geq 1$,

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq A_2 \sum_{\tau=0}^{\theta} q^{(\tau)} \leq \frac{A_2}{1-q}.$$

Отсюда, как доказательстве оценки I), легко получается оценка II). Лемма 1 доказана.

Введём новую функцию из $W(Q, \mathbb{R})$ по формуле $\hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} = \hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} - \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}$; $\varepsilon > 0 : \theta = 0, 1, 2, 3, \dots, \{\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}\} \equiv \{0\}$. Тогда для нее справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для функции $\{\hat{v}_\varepsilon^{(\theta)}\} \in W(Q, \mathbb{R})$ справедливы следующие оценки:

$$(III). \frac{\varepsilon}{\delta} \left(\left\langle \hat{v}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{v}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 \right) + \left\langle \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_1^2 \leq A_1 q^{(\theta)},$$

$$(IV). \frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq A_2 q^{(\theta)}.$$

Доказательство леммы 1. Из (15)-(17) для функции $\hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \in W(Q, \mathbb{R})$ получим следующую задачу.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} &= -\varepsilon \frac{\partial \Delta \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)}}{\partial t} + L_0 \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} + \lambda^2 \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} = \\ &= \frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{\sqrt{2\pi f_0(x,t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi t_0} \hat{v}_\varepsilon^{(\theta-1)}(x,t,\xi) d\xi \equiv F\left(\hat{v}_\varepsilon^{(\theta-1)}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

с периодическими краевыми условиями

$$D_t^q \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \Big|_{t=0} = D_t^q \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \Big|_{t=T}; q = 0, 1, 2, \tag{34}$$

$$D_x^p \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \Big|_{x=0} = D_x^p \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \Big|_{x=1} = 0; p = 0, 1, \tag{35}$$

где $\varepsilon > 0, \theta = 0, 1, 2, \dots, \{\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}\} \equiv \{0\}$.

Следовательно, как и в доказательстве леммы 1, для функции $\{\hat{v}_\varepsilon^{(\theta)}\} = \{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\} - \{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\} \in W(Q, \mathbb{R})$ получим третью рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\left\langle \hat{v}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \hat{v}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 \right) + \left\langle \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \right\rangle_1^2 \leq q \left\langle \hat{v}_\varepsilon^{(\theta-1)} \right\rangle_1^2 \tag{36}$$

повторяя рассуждения леммы 1, из (36) получим III) априорную оценку.

Аналогично доказывается оценка IV). Лемма 2 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (15)-(17) однозначно разрешима в $W(Q, \mathbb{R})$.

Доказательство Теореме 1 докажем методом сжимающих отображений [9]. Пусть $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ оператор, соответствующий дифференциальному выражению (15) и условиям (16), (17). Обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon^{-1}$ формальный обратный оператор. Определим в пространстве $W(Q, \mathbb{R})$ оператор

$$\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} = \hat{\mathcal{L}}_\varepsilon^{-1} F_s(\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}) \equiv P \hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}.$$

1. Покажем, что оператор P отображает пространства $W(Q, \mathbb{R})$ в себя.

Пусть $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\} \in W(Q, \mathbb{R})$, тогда для решения задачи (15)-(17), справедлива утверждение леммы 1, т.е. справедлива оценка *II*). Отсюда следует, что для любых $\theta = 0, 1, 2, 3, \dots$ получим $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\} \in W(Q, \mathbb{R})$. Таким образом $P : W(Q, \mathbb{R}) \rightarrow W(Q, \mathbb{R})$.

2. Покажем, что P сжимающий оператор. Пусть $\{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\}, \{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\} \in W(Q, \mathbb{R})$. Рассмотрим новую функцию $\{\hat{v}_\varepsilon^{(\theta)}\} = \{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)}\} - \{\hat{u}_\varepsilon^{(\theta-1)}\}$, для нее справедливо утверждение леммы 2, т.е. справедлива *IV*) оценка, т.е.

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\langle \hat{v}_{\varepsilon tt}^{(\theta)} \rangle_0^2 + \langle \hat{v}_{\varepsilon xt}^{(\theta)} \rangle_0^2 \right) + \langle \hat{v}_\varepsilon^{(\theta)} \rangle_2^2 \leq q^{(\theta)} \text{const}(\tilde{\theta}).$$

Таким образом P сжимающий оператор, теперь по известному принципу сжимающих отображений, задача (15)-(17) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W(Q, \mathbb{R})$ при $\varepsilon > 0$. При этом имеем $\hat{u}_\varepsilon^{(\theta)} \rightarrow \hat{u}_\varepsilon$ при $\theta \rightarrow \infty$ [6]-[8],[11],[12].

3. Семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода, второго порядка

Теперь докажем однозначную разрешимость задачи (6)-(8). При этом семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений составного типа (12) с условиями (13),(14) используем в качестве « ε -регуляризирующего» уравнения для уравнения (6) с условиями (7),(8) [3],[4]-[12].

Пусть $\varepsilon > 0$ при фиксированном $\{\hat{u}_\varepsilon\} \in W(Q, \mathbb{R})$ есть единственное решение задачи (12)-(14). Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство *IV*). По теореме о слабой компактности [13],[24], из ограниченной последовательности $\{\hat{u}_{\varepsilon_j}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся под последовательность функции $\{\hat{u}_{\varepsilon_j}\}$, такую что $\hat{u}_{\varepsilon_j} \rightarrow \hat{u}$ слабо в $W(Q, \mathbb{R})$. Покажем, что предельная функция $\hat{u}(x, t, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (6) почти всюду в $W(Q, \mathbb{R})$. Действительно, так как подпоследовательность $\{\hat{u}_{\varepsilon_j}\}$ слабо сходится в $W(Q, \mathbb{R})$, а оператор L линеен, тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{u} - F(\hat{u}) &= L\hat{u} - \mathcal{L}(\hat{u}_{\varepsilon_j}) - [F(\hat{u}) - F(\hat{u}_{\varepsilon_j})] = \\ &= \varepsilon_j \frac{\partial \Delta \hat{u}_{\varepsilon_j}}{\partial t} + L_0(\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_j}) + \lambda^2(\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_j}) - [F(\hat{u}) - F(\hat{u}_{\varepsilon_j})]. \end{aligned} \quad (37)$$

Переходя к пределу в (37) при $\varepsilon_j \rightarrow 0$, получим $\mathcal{L}\hat{u} = F(\hat{u})$. Значит функция $\hat{u}(x, t, \lambda)$ будет единственным решением задачи (6)-(8) из $W(Q, \mathbb{R})$.

Тем самым доказано теорема 2. Теперь докажем теорему 1.

Так как выполнены все условия теоремы 1 используя равенства Парсеваля - Стеклова [10]-[13] для решения задачи (6)-(8) получим решение задачи (1)-(5) из указанного класса U . Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниканов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука. 1978. с. 120.
2. Бубнов Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринт №713, ВЦ.СО АН СССР. с. 84

3. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ. 1983.
4. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. Мат. заметки СВФУ. 2017. №4, С.17-28.
5. Джамалов С. З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. Журнал Средне Волжского мат общества. 2019. Т.21. №1. с. 24-33.
6. Джамалов. С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021. с.176.
7. Джамалов. С. З. Ашуров. Р. Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка Дифференциальные уравнения. 2019. Т.55. №1. с. 34-44.
8. Джамалов. С. З. Ашуров. Р. Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. Известия вузов. Математика. 2019, №6. с. 1-12.
9. Джамалов С. З. Пятков С. Г. Некоторые классы обратных задач для уравнений смешанного типа второго порядка. Мат. заметки СВФУ. 2018. Т.25. №4. с.3-15.
10. Dzhamalov S. Z. Sipatdinova B. K. On a semi-nonlocal boundary value problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind in an un-bounded parallelepiped. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. №3. pp. 1145 - 1152.
11. Джамалов С. З. Сипатдинов Б. К. О линейной обратной задаче с нелокальным краевым условием периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. БИМ. 2024. 7(1), С.65-71.
12. Dzhamalov S. Z. Ashurov R. R. Turakulov Kh. Sh. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. 42(15). pp. 3606 - 3615.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. Москва. 1973.с.407.
14. Лаврентьев М. М. Романов В. Г. Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.
15. Лионс Ж. Л. Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.Мир.1971.
16. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Издательство: «Мир». Москва. 1965.
17. Nakhushev A. M. Loaded Equations and their Application (Nauka. Moscow. 2012) [in Russian].

18. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство: Наука. Москва, 1988.
19. Сабитов К. Б. Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. Изв. вузов. Математика, 2011. №2, с.71-85.
20. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009.
21. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, №4. С.694-716.
22. Треногин В. А. Функциональный анализ. Москва, 2007.

REZYUME

Bu maqolada davriy chegaraviy shartli chiziqli teskari masalani umumlashgan yechimi topish uchun, Furye almashtirishi, « ε -regularizasiya», aprior baholar va ketma-ket yaqinlashishlar usullaridan foydalangan holda mavjudlik va yagonalik teoremlari isbotlanadi.

Kalit so'zlar: davriy chegaraviy shartli chiziqli teskari masala, masalaning korrektiligi, Furye almashtirishi, « ε -regularizasiya», aprior baholash, ketma-ket yaqinlashish usullari.

RESUME

This article using the methods of « ε -regularization», a priori estimates, and a sequence of approximations using the Fourier transform, existence and uniqueness theorems for a generalized solution of a linear inverse problem with periodic boundary conditions in a certain class of integrable functions are proved.

Key words: linear inverse problem with periodic boundary conditions, correctness of the problem, « ε -regularization» methods, a priori estimate, approximation sequence, Fourier transforms.

УДК 517.55

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГР НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Мамадалиев Н. А., * Мустапокулов Х. Я. *

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучены дифференциальные игры, описываемые системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков. С помощью метода разрешающих функций получены достаточные условия для возможности завершения преследования с интегральными ограничениями на управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, разрешающая функция, терминальное множество, преследователь, убегающий, управление.

I. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n описывается системой линейных дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа [5], содержащей неизвестную функцию и ее производных в различные моменты времени [5], [15]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=0}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i z(t - h_i) - Du(t) + Fv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A, B_i (i = 1, 2, \dots, m), C_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n), (n \times n), (n \times n)$; D, F — постоянные матрицы порядка $(n \times p)$ и $(n \times q)$, соответственно; $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ — константы; вектором $u(t)$ распоряжается догоняющий объект, вектором $v(t)$ распоряжается убегающий объект. Они выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$, удовлетворяющих интегральным ограничениям вида [4, 6-12]

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt \leq \rho^2, \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2. \quad (3)$$

где ρ и σ — неотрицательные константы.

Измеримые функции $u = u(t), v = v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), (3), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

*Мамадалиев Н.А. – Национальный университет Узбекистана, m_numana59@mail.ru

*Мустапокулов Х.Я. – Национальный университет Узбекистана, m_hamdham@mail.ru

В качестве начального положения системы (1) задана n – мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$. Отрезок $-h_m \leq t \leq 0$, на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X , т.е.

$$X = \left\{ \varphi(\cdot) : \varphi(t) \text{ — абсолютно непрерывная функция,} \right. \\ \left. \text{определенная на отрезке } [-h_m, 0], z(0) = \varphi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \right\}. \quad (4)$$

Состояние системы в текущий момент времени t , $t \in [0, +\infty)$, соответственно определяется вектор–функцией $z'(\cdot)$, $z'(s) = z(t+s)$, $-h_m \leq s \leq 0$, являющейся куском реализованной траектории системы (1) на отрезке времени $[t-h_m, t]$.

Кроме того, в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задано терминальное множество M , $M \subset \mathbb{R}^n$, имеющее цилиндрический вид: $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , а M_1 — компактное подмножество подпространства L , где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в \mathbb{R}^n (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$).

Цель преследователя — вывести в кратчайшее время траекторию системы (1) на терминальное множество M . Игра начинается из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и считается законченной в момент времени $\tilde{t} = \tilde{t}[\varphi(\cdot)]$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на терминальное множество M : $z(\tilde{t}) \in M$. Цель убегающего игрока — уклонить траекторию системы (1) от встречи с терминальным множеством M на всем полубесконечном интервале времени, или, если это невозможно, максимально оттянуть момент встречи.

Обозначим через S множество точек вида

$$S = \left\{ t : t = \sum_{i=0}^m j_i h_i, j_i \text{ — целое число} \right\},$$

и пусть S^0 обозначает пересечение S с промежутком $(0, \infty)$ т.е. $S^0 = S \cap (0, \infty)$.

Определение 1. Пусть $K(t)$ — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [15]:

- а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n ;
- б) $K(0) = E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n ;
- в) функция $\sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i)$ непрерывна на $[0, +\infty)$;
- г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + \sum_{i=0}^m B_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i), \text{ при } t > 0. \quad (5)$$

Заметим, что матричная функция $K(t)$ удовлетворяющая условиям а)–б), может быть получена обычным методом последовательного интегрирования уравнения (5). Функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$, $t \notin S^0$, но в общем случае имеет разрывы первого рода в точках множества S^0 .

Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$, тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии (4) справедлива следующая

формула [15]

$$z(t) = \left[K(t) - \sum_{i=0}^m K(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(t - s - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i \varphi(s) \right] ds - \int_0^{\tau} K(t - s) \left[Du(s) - Fv(s) \right] ds, \quad (6)$$

где $B_0 = -E_n$, E_n — единичная матрица порядка n .

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1)-(3) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $0 \leq t < +\infty$, $v \in \mathbb{R}^q$, $u(t, v) \in \mathbb{R}^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \sigma$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \rho$ и траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, уравнения (1) с учетом начального условия (4) до момента T попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$. При этом для ведения преследования догоняющему нужно знать информацию об объектах. Предполагается, что преследователь знает: в каждый момент времени $t \geq 0$ решение $z(s)$ на отрезке $-h_m \leq s \leq t$ и управление $v(s)$, $0 \leq s \leq t$.

Число $T(\varphi(\cdot))$ называется временем преследования из точки $\varphi(\cdot) \in X$, функция $u(t, v)$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$, $v \in Q$, — функцией преследования.

Под решением задачи преследования понимается: а) нахождение начальных положений $\varphi(\cdot) \in X$, из которых в игре (1)-(3) возможно завершение преследования в смысле введенного выше определения; б) нахождение в явном виде или указание способа построения функции преследования $u(t, v)$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$, из которых в игре (1)-(3) возможно завершение преследования за конечное время T .

Пусть $\tau > 0$ — некоторое число и $t \in [0, \tau]$. Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из \mathbb{R}^n на L , а через

$$X * Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$$

— обозначим геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ [1].

Пусть функция $\mu(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^{\tau} \mu^2(t) dt \leq \rho^2$.

Через $\alpha(t)$, $0 \leq t < +\infty$, — обозначим произвольную измеримую неотрицательную скалярную функцию.

Через $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — обозначим произвольное измеримое замкнутозначное мно-

гозначное отображение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^{\tau} M(t)dt \subset \delta M_1, \quad (7)$$

где $\delta \in [0, 1)$ — некоторая константа.

Рассмотрим следующее множество

$$\hat{W}(M(t), \tau, t) = \left\{ \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)CS_{\mu(\tau-t)} \right] * \pi K(\tau - t)DS_{\alpha(\tau-t)} \right\}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Введем множество

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{W}(M(t), \tau, t)dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad W(0) = \delta M_1. \quad (8)$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Положим

$$\begin{aligned} \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] &= \left[\pi K(t) - \sum_{i=0}^m \pi K(t - h_i)B_i \right] \varphi(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(t - s - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i \varphi(s) \right] ds - f_1(\tau), \end{aligned}$$

где $f_1(\tau) \in W(\tau)$. Далее, по определению интеграла $W(\tau)$ (см.(8)) существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(M(t), \tau, t), 0 \leq t \leq \tau$, такой, что $f_1(\tau) = \int_0^{\tau} \tilde{w}(\tau - t)dt$. Зафиксируем его. Тогда вектор – функция $\xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] &= \left[\pi K(t) - \sum_{i=0}^m \pi K(t - h_i)B_i \right] \varphi(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(t - s - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i \varphi(s) \right] ds - \int_0^{\tau} \tilde{w}(\tau - t)dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Для произвольного вектора $v \in S_{\alpha(\tau-t)}, 0 \leq t \leq \tau$, определим разрешающую функцию [5-8], [14]:

$$\begin{aligned} &\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v, \tilde{w}(\cdot)) = \\ &= \begin{cases} \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \in \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)DS_{\mu(\tau-t)} \right] - \right. \\ \left. - \pi K(\tau - t)Fv - w(\tau - t) \right\} \\ \tau^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{при } \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0, \\ \text{при } \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

где функция $\eta[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]$ определяется в следующем виде

$$\eta[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]}{|\xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|} & \text{при } \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[t, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L .

Обозначим через

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, \tilde{w}(\cdot)) = \inf \left\{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) dt : \int_0^\tau \|v(t)\|^2 dt \leq \sigma^2 \right\}. \quad (12)$$

В (12) \inf берется по всевозможным измеримым на отрезке $[0, \tau_1]$ функциям $v(t)$, принимающим значения из $S_{\alpha(\tau_1-t)}$.

Введем функцию $\psi(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\psi(t) = t \geq 0$.

Предположение 1. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$, существуют число $\tau = \tau_1(\varphi(\cdot)) > 0$, функции $\mu(t)$, $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, и многозначное отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, константа $\delta \in [0, 1)$, такие, что:

- а) множество $\hat{W}(M(t), \tau, t)$ непусто для всех $t \in [0, \tau_1]$;
- б) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_1$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_1$, функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v, \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_1$, $v \in R^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\| \leq \sigma$, является суммируемой;
- в) справедливо неравенство

$$|\xi[\tau_1, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]| \leq \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, \tilde{w}(\cdot)) dt; \quad (13)$$

д) для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, убегающего игрока имеет место включение

$$\bigcup_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_1]} \leq \sigma} \int_0^{\tau_1} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_1 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_1 - t) F v(t) dt \in (1 - \delta) M_1.$$

Теорема 1. Если выполнены условия предположения 1, то в игре (1)-(2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ выполнены условия предположения 1. Рассмотрим функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$, определенную соотношением (10). Согласно утверждению П.2 [13] можно показать, что эта функция полунепрерывна сверху по v при фиксированном t и измерима по t при фиксированном v . Пусть $t \in [0, \tau_1]$. Для произвольного вектора $v \in S_{\alpha(\tau_1-t)}$, $0 \leq t \leq \tau_1$, рассмотрим следующие уравнения относительно неизвестных $u \in S_{\mu(\tau_1-t)}$ и $m \in M(\tau_1 - t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$:

$$m + \pi K(\tau_1 - t) Du = \pi K(\tau_1 - t) F v + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v, \tilde{w}(\cdot)) \eta[\tau_1, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + w(\tau_1 - t), \quad (14)$$

$$m + \pi K(\tau_1 - t)Du = \pi K(\tau_1 - t)Fv + w(\tau_1 - t), \quad (15)$$

В силу п.а) предположения 1 существует одно или много решений уравнений (14),(15). Следовательно, в силу теоремы Филиппова-Кастена [16] уравнения (14),(15) имеют единственную наименьшую в лексикографическом смысле пару решений, которую обозначим через $u(t, v(t)), m(t, v(t)), 0 \leq t \leq \tau_1$. Через $G^1(t, v), G^2(t, v), 0 \leq t \leq \tau_1$ — обозначим множества решений уравнений (14),(15), соответственно. В силу $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(M(t), \tau, t), 0 \leq t \leq \tau_1$, и (10), множества $G^1(t, v), G^2(t, v), 0 \leq t \leq \tau_1$, непусты и являются компактами. Через

$$\phi^1(t, v) = \text{col}(m(t, v), U^1(t, v)), \quad \phi^2(t, v) = \text{col}(m(t, v), U^2(t, v)), \quad 0 \leq t \leq \tau_1,$$

обозначим решения уравнений (14),(15) с наименьшими в лексикографическом смысле компонентами $U^1(t, v), U^2(t, v), 0 \leq t \leq \tau_1$, соответственно. Из уравнений (14),(15) видно, что такие решения единственны. Воспользовавшись свойствами функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v, \tilde{w}(\cdot)), 0 \leq t \leq \tau_1$ и C — свойством многозначных отображений можно показать [13, 16], что функции $U^1(t, v), U^2(t, v), m(t, v), 0 \leq t \leq \tau_1$, являются B — измеримыми. Следовательно, для произвольной измеримой функции $v(t) \in \mathbb{R}^q, t \in [0, +\infty)$, функции $U^1(t, v(t)), U^2(t, v(t)), m(t, v), t \in [0, \tau_1]$, являются измеримыми [17]. Положим $m(t, v(t)) = 0, u(t, v(t)) = 0$ при $t > \tau_1$.

Ниже для построения управления $u(t), 0 \leq t < +\infty$, преследующего игрока используется одна идея из работы [4]. Там же впервые предлагалось представить управление $v(\cdot)$ убегающего игрока в виде суммы двух измеримых функций. Такое представление управления $v(\cdot)$ дает возможность использовать множество M_1 для решения поставленной задачи. А именно, грубо говоря, множеством M_1 "поглощается" часть энергии убегающего игрока, а остальной частью энергии управляет преследующий игрок. Ограниченность энергии убегающего игрока и в тоже время неограниченность энергии преследующего игрока представляют больше возможностей для решения задачи преследования.

Пусть $v = v(t), 0 \leq t < +\infty$, — произвольное допустимое управление убегающего игрока. В соответствии с [4] на отрезке $[0, \tau_1]$ значение $v(t)$ управления v убегающего игрока в каждый момент времени $t \geq 0$ представляется в виде суммы двух измеримых функций $v_1(t), v_2(t)$ т.е. $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, где $v_1(t), v_2(t)$, определяются следующим образом:

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) & \text{при } |v(t)| \leq \alpha(\tau_1 - t), \\ \alpha(\tau_1 - t) \frac{v(t)}{|v(t)|} & \text{при } |v(t)| > \alpha(\tau_1 - t), \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |v(t)| \leq \alpha(\tau_1 - t), \\ \left[1 - \frac{\alpha(\tau_1 - t)}{|v(t)|}\right] v(t) & \text{при } |v(t)| > \alpha(\tau_1 - t), \quad 0 \leq t \leq \tau_1. \end{cases}$$

Информация, имеющаяся у преследующего игрока, делает возможным такое представление. Очевидно, что функция $v_1(t), 0 \leq t \leq \tau_1$, удовлетворяет включению $v_1(t) \in S_{\alpha(\tau_1 - t)}, t \in [0, \tau_1]$. Далее, рассмотрим функцию $\rho(t; v_1(r), 0 \leq r \leq t), 0 \leq t \leq \tau_1$, определенную следующим образом:

$$\rho(t; v_1(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^t \lambda(\varphi(\cdot), \tau, r, v_1(r)) dr.$$

Легко видеть, что в силу п.б) предположения 1 существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_1]$ такой, что $\rho(t^*; v_1(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$ (если таких моментов времени более одного, то наименьший из них обозначим через t^*). Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} \rho(\tau_1; v_1(t), 0 \leq t \leq \tau_1) &= |\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) dt \leq \\ &\leq |\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)]| - \inf_{\|v_1(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_1]} \leq \alpha(\tau_1 - t)} \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t), \tilde{w}(\cdot)) dt, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (13). Учитывая этот факт, управление $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, определим следующим образом. Если в момент $t \in [0, \tau_1]$ величина $\rho(t; v_1(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, положительна, то положим $u(t) = U^1(t, v_1(t))$. Пусть $t^* \in [0, \tau_1]$ — первый момент времени, для которого выполнено равенство $\rho(t^*; v_1(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Тогда при $t \in (t^*, \tau_1]$ положим $u(t) = U^2(t, v_1(t))$. При $t > \tau_1$, положим $u(t) = 0$. Покажем, что, применяя стратегию $u(t)$, выбранную как решения уравнений (14),(15), преследователь может гарантировать окончание преследования за момент времени τ_1 . Подставим функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, в уравнение (1). Для решения $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, полученного уравнения, с учетом начального условия (4), из формулы Коши (см.(6)) после проектирования на L и учитывая (14),(15) при $\tau = \tau_1$ получаем

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_1) &= \left[\pi K(\tau_1) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_1 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_1 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \\ &\quad - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) \left[Du(t) - Fv_1(t) \right] dt + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Fv_2(t) dt = \\ &= \left[\pi K(\tau_1) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_1 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_1 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \\ &\quad - \int_0^{t^*} \left[-m(t, v_1(t)) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] + w(\tau_1 - t) \right] dt - \\ &\quad - \int_{t^*}^{\tau_1} \left[-m(t, v_1(t)) + w(\tau_1 - t) \right] dt + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) Fv_2(t) dt = \\ &= \left[\pi K(\tau_1) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_1 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_1 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt + \\ &\quad + \int_0^{\tau_1} m(t, v_1(t)) dt - \int_0^{\tau_1} w(\tau_1 - t) dt - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) F v_2(t) dt = \xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] + \int_0^{\tau_1} m(t, v_1(t)) dt - \\
& - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] dt + \int_0^{\tau_1} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_1 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_1 - t) F v(t) dt = \\
& = \int_0^{\tau_1} m(t, v_1(t)) dt + \int_0^{\tau_1} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_1 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_1 - t) F v(t) dt.
\end{aligned}$$

Ибо, как установлено выше,

$$\begin{aligned}
& \xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] dt = \\
& = \left[\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v_1(t)) dt \right] \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу п.с) предположения 1 и условия (7), имеют место включения

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_1} m(t, v_1(t)) dt \in \int_0^{\tau_1} M(\tau_1 - t) dt \subset \delta M_1, \\
& \int_0^{\tau_1} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_1 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_1 - t) F v(t) dt \in (1 - \delta) M_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, а это эквивалентно включению $z(\tau_1) \in M$. Теорема 1 доказана.

II. Теперь сформулируем и докажем теорему 2. Пусть дифференциальная игра описывается уравнениями (1), а параметры u, v удовлетворяют интегральным ограничениям (2),(3). Зафиксируем произвольное число $\tau > 0$ и произвольное константа $\alpha \in [0, \frac{\rho}{\sigma}]$. Обозначим через $\mu(t), 0 \leq t \leq \tau$, — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\tau} \mu^2(t) dt \leq (\rho - \alpha\sigma)^2, \quad \rho \geq \alpha\sigma; \tag{16}$$

и введем квадратную матрицу $\Phi(t) : L \rightarrow L, t \in [0, \tau]$ полунепрерывная сверху, зависящая от t .

Рассмотрим следующее многозначное отображение

$$\hat{W}(\tau, t) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \left[\pi K(\tau - t) D S_{r(t)} - \Phi(\tau - t) \pi K(\tau - t) F v \right], \quad t \in [0, \tau],$$

где $S_{r(t)}$ — p — мерный замкнутый шар радиуса $r(t) = \alpha|v| + \mu(\tau - t)$, $0 \leq t \leq \tau$, с центром в начале координат.

Введем множество

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{W}(M(t), \tau, t) dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad W(0) = \delta M_1. \quad (17)$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Положим

$$\begin{aligned} \xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] &= \left[\pi K(t) - \sum_{i=0}^m \pi K(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(t - s - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i \varphi(s) \right] ds + \beta - f_2(\tau), \end{aligned}$$

где $\beta \in L$, $f_2(\tau) \in W(\tau)$. Далее, по определению интеграла $W(\tau)$ (см.(17)) существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(M(t), \tau, t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что выполнено равенство $f_2(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt$. Зафиксируем его. Тогда вектор — функция $\xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] &= \left[\pi K(t) - \sum_{i=0}^m \pi K(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(t - s - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(s) + C_i \varphi(s) \right] ds + \beta - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Легко показать, что если для некоторого положительного t $\xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]$ то разрешима задача преследования к моменту τ . Поэтому, в дальнейшем предполагается, что $\xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]$ для всех $t \geq 0$.

Далее, для произвольных векторов $\beta \in L$ и $v \in R^q$ определим разрешающую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau, t, v, \tilde{w}(\cdot))$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau, t, v, \tilde{w}(\cdot)) = \\ &= \begin{cases} \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \xi[\tau, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \in \pi K(\tau - t) D S_r(t) - \right. \\ \left. - \Phi(\tau - t) \pi K(\tau - t) F v - \tilde{w}(\cdot) \right\} & \text{при } \xi[\tau, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0, \\ \tau^{-1} & \text{при } \xi[\tau, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Предположение 2. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существуют число $\tau = \tau_2(\varphi(\cdot)) > 0$, вектор β , функция $\mu(t)$, $t \in [0, \tau_2]$, матрица $\Phi(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, константа $\alpha \in [0, \frac{\rho}{\sigma})$ такие, что:

а) множество $\hat{W}(\tau, t)$ непусто для всех $t \in [0, \tau_2]$;

б) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_2$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_2$, функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v, \tilde{w}(\cdot))$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $v \in R^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, для которой $\|v(\cdot)\| \leq \sigma$, является суммируемой;

с) справедливо неравенство

$$1 - \inf \left\{ \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_2]} \leq \sigma \right\} \leq 0;$$

д) для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, убегающего игрока выполнено включение

$$\int_0^{\tau_2} [E - \Phi(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt \subset \beta + M_1,$$

где E — единичная ($\nu \times \nu$) — матрица, $\dim L = \nu$.

Теорема 2. Если выполнены условия предположений 2, то в игре (1)-(3) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_2(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v)$, определенную соотношением (19). Эта функция полунепрерывна сверху по v , при фиксированном t и измерима по t , при фиксированном v . Пусть $t \in [0, \tau_2]$. Для произвольного вектора $v \in R^q$ рассмотрим следующие уравнения относительно неизвестного $u \in S_{r(t)}$:

$$\pi K(\tau_2 - t) D u = \Phi(\tau_2 - t) \pi K(\tau_2 - t) F v + \tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v) \xi[t, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)], \quad (20)$$

$$\pi K(\tau_2 - t) D u = \Phi(\tau_2 - t) \pi K(\tau_2 - t) F v + \tilde{w}(\tau_2 - t), \quad (21)$$

Далее, в силу предположения 2 существует одно или много решений. Обозначим через $U^1(t, v)$, $U^2(t, v)$ множества решений уравнений (20), (21), соответственно. В силу (19) множества $U^1(t, v)$, $U^2(t, v)$ непусты и являются компактами. Обозначим через $G^1(t, v)$, $G^2(t, v)$ лексикографические минимумы компактов $U^1(t, v)$, $U^2(t, v)$, соответственно. Воспользовавшись свойствами функций $\lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v)$ и C — свойством многозначных отображений [16], можно показать [13], что функции $G^1(t, v)$, $G^2(t, v)$ являются B — измеримыми. Следовательно, для произвольной функции $v \in R^q$, $t \in [0, +\infty)$, функции $G^1(t, v(t))$, $G^2(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_2]$, измеримы [17].

Пусть для игры (1)-(3) выполнены все условия предположения 2 и пусть $v = v(t)$, $t \in [0, +\infty)$, — произвольное допустимое управление убегающего игрока. Управление преследователя на отрезке $[0, \tau_2]$ определим следующим образом. Если в момент $t \in [0, \tau_2]$ величина

$$\rho(\tau_2, v(t), 0 \leq t \leq \tau_2) = 1 - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) dt$$

положительна, то управление преследователя на отрезке $[0, \tau_2]$ положим равным $u(t) = G^1(t, v(t))$. Пусть $t^* \in [0, \tau_2]$ — первый момент времени, для которого выполняется равенство $\rho(t^*, v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$, в силу п.с) предположения 2 такой момент времени

существует. При $t \in (t^*, \tau_2]$ управление преследователя положим равным $u(t) = G^2(t, v(t))$. Далее, при $t > \tau_2$ управление преследователя положим равным $u(t) = 0$. Управление $u(t)$, $t \in [0, +\infty)$, является допустимым, так как в силу (16) и неравенства Коши-Буняковского, справедлива следующая оценка:

$$\int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt \leq \alpha^2 \int_0^{\tau_2} |v(t)|^2 dt + 2\alpha \int_0^{\tau_2} \mu(\tau_2 - t) |v(t)| dt + \\ + \int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t) dt \leq \left(\alpha\sigma + \sqrt{\int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t) dt} \right)^2 \leq \rho^2,$$

что и означает допустимость управления $u(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$.

Теперь покажем, что применение управления преследования $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, гарантирует возможности завершения преследования за конечное время $T = \tau_2(\varphi(\cdot))$. Подставив управления $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, в правую часть уравнения (1) и учитывая закон выбора управлений и (20), (21), прибавляя и вычитая величину $\int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt$ для решения $z(t)$, $t \in [0, +\infty)$, с учетом начального условия (4) после его проектирования на L по формуле Коши (см. (6)) имеем:

$$\pi z(\tau_2) = \left[\pi K(\tau_2) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_2 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_2 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt + \\ + \int_0^{\tau_2} w(\tau_2 - t) dt - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt - \int_0^{\tau_2} \left[\pi K(\tau_2 - t) D u(t) - \Phi(\tau_2 - t) \pi K(\tau_2 - t) F v(t) \right] dt + \\ + \int_0^{\tau_2} \left[E - \Phi(\tau_2 - t) \right] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt = \left[\pi K(\tau_2) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_2 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_2 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \\ - \int_0^{t^*} \left[\tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) \xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \right] dt - \\ - \int_{t^*}^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt + \int_0^{\tau_2} \left[E - \Phi(\tau_2 - t) \right] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt + \\ + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt = \left(\left[\pi K(\tau_2) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_2 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_2 - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt \times \\
& \times \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) dt \right) - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) \beta dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E - \Phi(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt = -\beta \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \beta, \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot)) dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E - \Phi(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt = -\beta + \int_0^{\tau_2} [E - \Phi(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt.
\end{aligned}$$

В силу п.в). предположения 2 выполнено включение

$$-\beta + \int_0^{\tau_2} [E - \Phi(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) F v(t) dt \in M_1. \quad (22)$$

Отсюда, и из (22) получаем, что $\pi z(\tau_2) \in M_1$. Последнее включение эквивалентно включению $z(\tau_2) \in M$. Следовательно, преследование заканчивается за время $T = \tau_2(\varphi(\cdot))$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Наука, М., Т.2, 1988.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Наука, М., 1985.
3. Айзекс Н.Н. Дифференциальные игры. Мир, М., 1967.
4. Чикрий А.А., Безмагоричный В.В. Метод разрешающих функций для линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Автоматика, 1993, No 4, С. 26-30.
5. Мамадалиев Н.А., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Изв. вузов. Матем., 2021, Т. 11., С. 21-33. DOI:<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-11-21-33>
6. Мамадалиев Н.А. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Сибирский математический журнал, 2015, Т. 56., No 1. С. 129–148. <https://www.mathnet.ru/rus/smj2627>
7. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков. Изв. вузов. Матем., 2020, Т. 3. С. 12–28. <https://www.mathnet.ru/rus/smj2627>

8. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х.Я, Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Вестн.Удмурдск.ун-та. Матем. Мех.Компьют.науки., 2023, Т. 33, Вып. 1, С. 103-118. DOI:10.35634/vm 230107
9. Сатимов Н.Ю. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями. Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
10. Азамов А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.Т. О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями. Прикладная математика и механика, 2007, Т. 71, No 2, С. 259-263. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9486344>
11. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Труды Института математики и механики УрО РАН, 2009, Т. 15, No 4, С. 290-301. <https://www.mathnet.ru/rus/timm444>
12. Саматов Б.А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления. Проблемы управления и информатики, 2013, No 4, С. 16-32.
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Изд.МГУ, М., 1990.
14. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Наукова думка, Киев., 1992
15. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Наука, М., 1967.
16. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. Наука, М., 1977.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1972.

REZYUME

Ushbu maqolada, o'yinchilar boshqaruviga integral chegaralanish qo'ygan holda neytral tipdagi chizikli differensial-ayirmali tenglamalar sistemasi bilan tavsiflanuvchi differentsial o'yinlarni o'rganamiz. Hal qiluvchi funksiya yordamida o'yinchilar boshqaruviga integral chegaralanish qo'ygan holda quvishni tamomlash uchun yetarlilik shartlari olingan.

Kalit so'zlar: differensial o'yin, quvish masalasi, neytral tipdagi differensial-ayirmali tenglamalar, hal qiluvchi funksiya, terminal to'plam, quvlovchi, qochish, boshqaruv.

RESUME

In this paper, we study differential games described by a system of linear differential equations of neutral type under integral constraints on player controls. Using the method of resolving functions, sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit with integral restrictions on the players' controls.

Key words: Differential game, pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, resolving function, terminal set, pursuer, evader, control.

УДК 517.953

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ

Собиров З. А. *

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе методом Фокаса исследована начально-краевые задачи для уравнения Шредингера в простых звездообразных графах с вершинными условиями типа δ' . При этом, использованием унифицированного преобразования Фурье, задача сведена к системы алгебраических уравнений. Использование обратного преобразование мы получили интегральное представление решения через данные функции в случаях звездообразных графов с конечными ребрами и полубесконечными ребрами.

Ключевые слова: Уравнение Шредингера, метрический граф, разветвленные структуры, унифицированное преобразование, начально-краевая задача, преобразование Фокаса.

Известно, что разветвленные структуры и сети используются для моделирования многих сложных систем из физики, биологии, экологии, социологии, экономики и финансов [1, 2]. В этой статье мы представляем метод Фокаса для решения нестационарного уравнения Шредингера на простых звездообразных графах. Метрические графы с уравнением Шредингера и условиями Кирхгофа в вершине называются квантовыми графами [3-5]. Уравнение Шредингера можно также рассматривать как уравнение с мнимым временем. Уравнение теплопроводности на разветвленных структурах впервые было использовано в 50-х годах XIX века. Томсон (лорд Кельвин) использовал уравнение теплопроводности (кабельное уравнение Томсона) в качестве математической модели затухания сигнала в подводных телеграфных кабелях.

Граф состоит из точек, называемыми вершинами, и из отрезков, концы которых лежат в вершинах графа [3]. Эти отрезки называются ребрами графа. Мы всегда будем рассматривать связанные графы, т.е. графы, в которых из любой точки можно попасть в другую по ребрам графа. Изометрическим сопоставлением каждого ребра графа на числовые интервалы мы получаем так называемый метрический граф. Здесь метрика понимается в смысле геодезической метрики, т.е. как кратчайшее расстояние по ребрам графа между двумя точками графа. Понятно, что такая структура является одномерным, тогда как реалистические разветвленные структуры двумерные (например, графенные нанотрубки) или трехмерные. Поэтому возникает вопрос о целесообразности моделирования реальных проблем техники и физики с помощью метрических графов. В работах [6, 9] исследована краевая задача для стационарного уравнения Шредингера в тонких (с малыми поперечными сечениями) разветвленных областях. Доказано, что когда диаметр поперечного сечения стремится к нулю, решение рассматриваемой задачи стремится к решению

*Собиров З. А. – Университет точных и социальных наук, Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, sobirovzar@gmail.com

краевой задачи на соответствующем квантовом (метрическом) графе. При этом, из уравнение Шредингера в малой области точки разветвления, которая переходит в вершину графа при пределе, получатся условия Кирхгоффа. Этот результат остается справедливым и в случае уравнения теплопроводности, в силу того, что уравнение теплопроводности с помощью преобразования Лапласа по времени переходит в стационарное уравнение Шредингера.

Пусть граф Γ_∞ содержит три полубесконечных ребер B_j , $j = 1, 2, 3$, с общим концом в точке O , называемой вершиной графа (см. рис. 1.). На каждом из ребер B_j ($j = 1, 2, 3$) определим координату x_j изометрическим отображением этого ребра к интервалу $(0, \infty)$. В дальнейшем, для обозначения координаты мы будем использовать x вместо x_j .

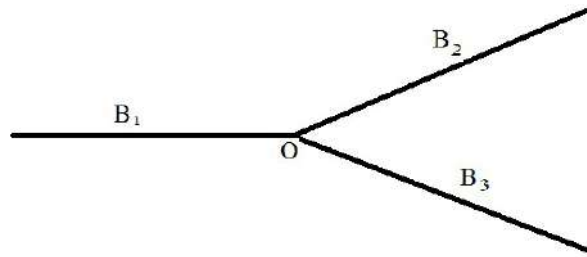


Рисунок 1. Простой открытый звездообразный граф.

В каждом ребре графа рассматриваем уравнение Шредингера

$$iq_t^{(j)}(x, t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x, t), \quad x \in B_j, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\sigma > 0$, с начальным условием

$$q^{(j)}(x, 0) = q_0^{(j)}(x), \quad x \in \overline{B}_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

На вершине задаем следующие условия склеивания (Кирхгоффа) типа δ'

$$\delta_1^2 q^{(1)}(0, t) + \delta_2^2 q^{(2)}(0, t) + \delta_3^2 q^{(3)}(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$q_x^{(1)}(0, t) = q_x^{(2)}(0, t) = q_x^{(3)}(0, t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Мы будем предполагать, что начальные функции $q_0^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, 3$, являются достаточно гладкими и абсолютно интегрируемы в своих областях определения.

Отметим, что в работе [7] на простых метрических графах исследована начально-краевая задача для уравнения Шредингера с условиями Кирхгоффа, или же, условиями типа δ .

Приступим к решению задачи. Перепишем уравнение (1) в виде

$$(e^{-ikx+wt} q^{(j)}(x, t))_t = (\sigma e^{-ikx+wt} (kq^{(j)}(x, t) - iq_x^{(j)}(x, t)))_x, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где $w = -i\sigma k^2$.

Интегрируя уравнения (5) по областям $B_j \times (0, t)$, $j = 1, 2, 3$, и применяя формулу Грина, находим

$$\int_0^\infty e^{-ikx+wt} q^{(j)}(x, t) dx = \int_0^\infty e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx -$$

$$-\int_0^t \sigma e^{ws} (kq^{(j)}(0, s) - iq_x^{(j)}(0, s)) ds, \quad j = 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Пусть

$$\widehat{q}^{(j)}(k, t) = \int_0^\infty e^{-ikx} q^{(j)}(x, t) dx, \quad \widehat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^\infty e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx,$$

$$\widehat{g}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} q^{(j)}(0, s) ds, \quad \widehat{g}_1(w, t) = \int_0^t e^{ws} q_x^{(j)}(0, s) ds, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда равенство (6) записывается в виде

$$e^{wt} \widehat{q}^{(j)}(k, t) = \widehat{q}_0^{(j)}(k) - k\sigma \widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma \widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $Imk > 0$.

Сделаем замену k на $-k$ и получим следующие дополнительные уравнения

$$e^{wt} \widehat{q}^{(j)}(-k, t) = \widehat{q}_0^{(j)}(-k) + k\sigma \widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma \widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $Imk < 0$.

Используя обратное преобразование Фурье в (7), получим (см. [1], [11], [13])

$$q^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+i\sigma k^2 t} \widehat{q}_0^{(j)}(k) dk + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+i\sigma k^2 t} (-k\sigma \widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma \widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)) dk, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Пусть $D^{(2)} = \{k \in \mathbb{C} : Imk > 0, Re k < 0\}$, $D^{(4)} = \{k \in \mathbb{C} : Imk < 0, Re k > 0\}$, $D = \{k \in \mathbb{C} : Im(k^2) < 0\} = D^{(2)} \cup D^{(4)}$ (см. рис.2). Функции $e^{ikx+i\sigma k^2 t} k \widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t)$ и $e^{ikx+i\sigma k^2 t} \widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)$ являются целыми и стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$ в $k \in \{Imk > 0\} \setminus D^{(2)}$. Применим теорему Коши и лемму Жордана и заменим контур интегрирования во втором интеграле (9) следующим образом:

$$q^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+i\sigma k^2 t} \widehat{q}_0^{(j)}(k) dk + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx+i\sigma k^2 t} (-k\sigma \widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma \widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)) dk, \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

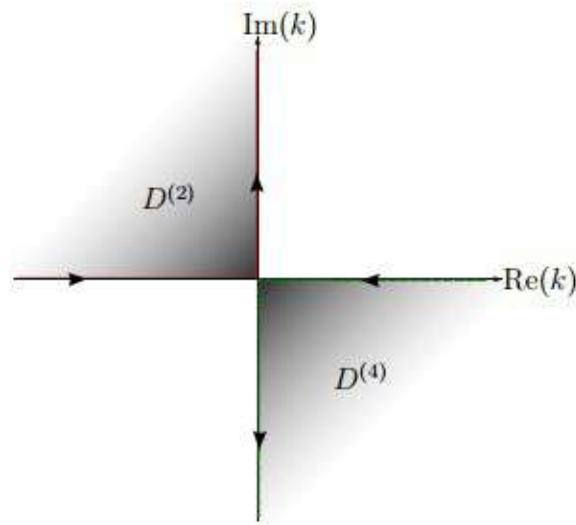


Рисунок 2.

Теперь нам надо найти неизвестные функции $\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)$, $\widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t)$, $j = 1, 2, 3$. Из (8) найдём

$$k\sigma\widehat{g}_0^{(j)}(-i\sigma k^2, t) = e^{-i\sigma k^2 t}\widehat{q}^{(j)}(-k, t) - \widehat{q}_0^{(j)}(-k) - i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \operatorname{Im}k \geq 0. \quad (11)$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx+i\sigma k^2 t}\widehat{q}_0^{(j)}(k)dk - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx}\widehat{q}^{(j)}(-k, t)dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx+i\sigma k^2 t}\widehat{q}_0^{(j)}(-k)dk + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx+i\sigma k^2 t}i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)dk, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

В области $\{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}k > 0\}$ функции e^{ikx} и $\widehat{q}^{(j)}(-k, t)$ голоморфны и ограничены: $|e^{ikx}| = e^{-x\operatorname{Im}(k)} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда, известным способом, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx}\widehat{q}^{(j)}(-k, t)dk = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx+i\sigma k^2 t}\widehat{q}_0^{(j)}(k)dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx+i\sigma k^2 t}\widehat{q}_0^{(j)}(-k)dk + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D(2)} e^{ikx+i\sigma k^2 t}i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)dk, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь остается найти $\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t)$. Из условий склеивания (3), получим

$$\begin{cases} e^{wt}\widehat{q}^{(1)}(-k, t) = \widehat{q}_0^{(1)}(-k) + k\sigma\widehat{g}_0^{(1)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \\ e^{wt}\widehat{q}^{(2)}(-k, t) = \widehat{q}_0^{(2)}(-k) + k\sigma\widehat{g}_0^{(2)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \\ e^{wt}\widehat{q}^{(3)}(-k, t) = \widehat{q}_0^{(3)}(-k) + k\sigma\widehat{g}_0^{(3)}(-i\sigma k^2, t) + i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t), \\ \delta_1^2\widehat{g}_0^{(1)}(-i\sigma k^2, t) + \delta_2^2\widehat{g}_0^{(2)}(-i\sigma k^2, t) + \delta_3^2\widehat{g}_0^{(3)}(-i\sigma k^2, t) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $\{k \in \mathbb{C} : \text{Im}k < 0\}$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} i\sigma\widehat{g}_1(-i\sigma k^2, t) = & -\frac{\delta_1^2\widehat{q}_0^{(1)}(-k) + \delta_2^2\widehat{q}_0^{(2)}(-k) + \delta_3^2\widehat{q}_0^{(3)}(-k)}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} + \\ & + \frac{e^{wt}(\delta_1^2\widehat{q}^{(1)}(-k, t) + \delta_2^2\widehat{q}^{(2)}(-k, t) + \delta_3^2\widehat{q}^{(3)}(-k, t))}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в представлений (13) получаем интегральное представление решения, в котором будут участвовать интегралы содержащие $\widehat{q}^{(j)}(-k, t)$, $j = 1, 2, 3$. Аналогично тому, что было сделано в первом параграфе, можем показать, что эти интегралы обращаются в нуль. С учетом этого, получаем следующую теорему о разрешимости задачи.

Теорема 1. Если $q_0^{(j)}(x) \in C^1[0, +\infty)$, и $\frac{d}{dx^2}q_0^{(j)}(x) \in L_1(0, +\infty)$, $j = 1, 2, 3$, то решение задачи (1) – (4) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{q}_0^{(j)}(k)dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\widehat{q}_0^{(j)}(-k)dk + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}i\sigma\widehat{g}_1(w, t)dk, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$i\sigma\widehat{g}_1(w, t) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^3 \delta_j^2} \cdot \sum_{j=1}^3 \delta_j^2 \widehat{q}_0^{(j)}(-k), \quad \widehat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^\infty e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx.$$

В этом решение можно увидеть, как происходит рассеяния на вершине графа. Первый член в (16) представляет собой свободное распространение волны, второй интеграл выражает отражение на вершине, а третий интеграл перехода волны на другие ребра.

2. Простой звездообразный граф с ограниченными ребрами

Теперь рассмотрим случай графа с конечными ребрами.

Рассмотрим простой звездообразный граф Γ_2 с тремя ограниченными ребрами B_j , $j = 1, 2, 3$, имеющих общую вершину O . Координату x_j на ребре B_j ($j = 1, 2, 3$), определим изометрическим отображением этого ребра к интервалу $(0, L_j)$, которое сопоставляет координату 0 к вершине O . Далее мы будем использовать x вместо x_j .

На каждом ребре графа задана уравнения Шредингера

$$i q_t^{(j)}(x, t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x, t), \quad x \in B_j, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

с начальными условиями

$$q^{(j)}(x, 0) = q_0^{(j)}(x), \quad x \in B_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (18)$$

и граничными условиями

$$q^{(j)}(L_j, t) = h_0^{(j)}(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Предположим, что решение удовлетворяет условиям непрерывности (3) и Кирхгофа (5) на вершине O графа.

В этом случае глобальные соотношения на каждом отдельно взятом ребре имеют вид

$$\begin{aligned} e^{wt}\widehat{q}^{(j)}(k, t) - \widehat{q}_0^{(j)}(k) &= e^{-ikL_j}\sigma(k\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) - i\tilde{h}_1^{(j)}(w, t)) - \\ &- \sigma k\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma\tilde{g}_1(w, t), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (20)$$

где $w = -i\sigma k^2$,

$$\begin{aligned} \widehat{q}^{(j)}(k, t) &= \int_0^{L_j} e^{-ikx} q^{(j)}(x, t) dx, \quad \widehat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx, \\ \tilde{h}_1^{(j)}(w, t) &= \int_0^t e^{ws} q_x^{(j)}(L_j, s) ds, \quad \tilde{h}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} q^{(j)}(L_j, s) ds, \\ \tilde{g}_1(w, t) &= \int_0^t e^{ws} q_x^{(j)}(0, s) ds, \quad \tilde{g}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} q^{(j)}(0, s) ds, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Сделаем замену $k \rightarrow -k$ и получим следующие дополнительные условия:

$$\begin{aligned} e^{wt}\widehat{q}^{(j)}(-k, t) - \widehat{q}_0^{(j)}(-k) &= e^{ikL_j}\sigma(-k\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) - i\tilde{h}_1^{(j)}(w, t)) + \\ &+ \sigma k\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma\tilde{g}_1(w, t), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, как и в предыдущем пункте, из глобальных соотношений (20), (21) и условий на вершине графа составим систему уравнений, решая которых имеем

$$\begin{aligned} i\sigma\tilde{g}_1(w, t) &= \frac{1}{\delta_1^2 A_1 B_2 B_3 + \delta_2^2 A_2 B_1 B_3 + \delta_3^2 A_3 B_1 B_2} \cdot \\ &\cdot \left(\delta_1^2 B_2 B_3 \left(e^{ikL_1} \widehat{q}_0^{(1)}(k) - e^{-ikL_1} \widehat{q}_0^{(1)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(1)}(w, t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{wt} \left(e^{ikL_1} \widehat{q}^{(1)}(k, t) - e^{-ikL_1} \widehat{q}^{(1)}(-k, t) \right) \right) + \right. \\ &+ \delta_2^2 B_1 B_3 \left(e^{ikL_2} \widehat{q}_0^{(2)}(k) - e^{-ikL_2} \widehat{q}_0^{(2)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(2)}(w, t) - \right. \\ &\quad \left. - e^{wt} \left(e^{ikL_2} \widehat{q}^{(2)}(k, t) - e^{-ikL_2} \widehat{q}^{(2)}(-k, t) \right) \right) + \\ &+ \delta_3^2 B_1 B_2 \left(e^{ikL_3} \widehat{q}_0^{(3)}(k) - e^{-ikL_3} \widehat{q}_0^{(3)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(3)}(w, t) - \right. \\ &\quad \left. - e^{wt} \left(e^{ikL_3} \widehat{q}^{(3)}(k, t) - e^{-ikL_3} \widehat{q}^{(3)}(-k, t) \right) \right) \Big), \end{aligned} \quad (22)$$

где $A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}$, $B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Теперь положим (см. [7], [8])

$$G^{(j)}(k, t) = \hat{q}_0^{(j)}(k) + i\sigma\tilde{g}_1(w, t) + e^{-ikL_j} \cdot k\sigma\tilde{h}_0^{(j)}(w, t), \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда можно переписать (20) и (21) в виде

$$\begin{cases} e^{wt}\hat{q}^{(j)}(k, t) = G^{(j)}(k, t) - k\sigma\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) - ie^{-ikL_j}\sigma\tilde{h}_1^{(j)}(w, t), \\ e^{wt}\hat{q}^{(j)}(-k, t) = G^{(j)}(-k, t) + k\sigma\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) - ie^{ikL_j}\sigma\tilde{h}_1^{(j)}(w, t). \end{cases} \quad (23)$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma k\tilde{g}_0^{(j)}(w, t) &= \frac{1}{B_j} (e^{ikL_j}G^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j}G^{(j)}(-k, t)) - \\ &- \frac{1}{B_j} (e^{wt} (e^{ikL_j}\hat{q}^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j}\hat{q}^{(j)}(-k, t))); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} i\sigma\tilde{h}_1^{(j)}(w, t) &= -\frac{1}{B_j} (G^{(j)}(k, t) - G^{(j)}(-k, t)) + \\ &+ \frac{1}{B_j} (e^{wt} (\hat{q}^{(j)}(k, t) - \hat{q}^{(j)}(-k, t))), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (25)$$

Следующие действия аналогичны тем действиям, что было сделано в предыдущих пунктах. Поэтому, мы пропускаем подробности и сразу приведем окончательный результат.

Теорема 2. Пусть функции $h_0^{(j)}(t) \in C[0, +\infty) \cap L_1(0, +\infty)$, $q_0^{(j)}(x) \in C^2[0, L_j]$, $j = 1, 2, 3$. Тогда решение задачи (17) – (19), (4) и (5) имеет вид

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(k)dk - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(4)}} e^{ikx-ikL_j-wt} \frac{\hat{q}_0^{(j)}(k) - \hat{q}_0^{(j)}(-k) + 2e^{-ikL_j}k\sigma\tilde{h}_0^{(j)}(w, t)}{B_j} dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \frac{e^{-ikL_j}\hat{q}_0^{(j)}(-k) - e^{ikL_j}\hat{q}_0^{(j)}(k) - 2k\sigma\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) + 2e^{-ikL_j}i\sigma\tilde{g}_0(w, t)}{B_j} dk, \end{aligned} \quad (26)$$

где $w = -i\sigma k^2$, $\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws}h_0^{(j)}(s)ds$, $\hat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx}q_0^{(j)}(x)dx$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} i\sigma\tilde{g}_0(w, t) &= \frac{1}{\delta_1^2 A_1 B_2 B_3 + \delta_2^2 A_2 B_1 B_3 + \delta_3^2 A_3 B_1 B_2} \cdot \\ &\cdot \left(\delta_1^2 B_2 B_3 \left(e^{ikL_1}\hat{q}_0^{(1)}(k) - e^{-ikL_1}\hat{q}_0^{(1)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(1)}(w, t) \right) \right. \\ &+ \delta_2^2 B_1 B_3 \left(e^{ikL_2}\hat{q}_0^{(2)}(k) - e^{-ikL_2}\hat{q}_0^{(2)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(2)}(w, t) \right) + \\ &+ \left. \delta_3^2 B_1 B_2 \left(e^{ikL_3}\hat{q}_0^{(3)}(k) - e^{-ikL_3}\hat{q}_0^{(3)}(-k) + 2k\sigma\tilde{h}_0^{(3)}(w, t) \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили интегральное представление решения начально-краевых задач на простых звездообразных графах. Как уже было сказано, в этих решениях мы можем увидеть свойства рассеяния в вершинах графа. Сравнивая решения на звездообразном графе с полубесконечными ребрами, где нет отражения от границы, и решения на графе с конечными ребрами можно отделить влияния граничных вершин на общую картину рассеяния волн на графе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albert R., Barabasi A. L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod.Phys.* A - 2002. - 74, № 4. - С. 62–76.
2. Cohen R., Havlin S. *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*. Cambridge University Press. 2010.
3. Berkolaiko G. An elementary introduction to quantum graphs. *Contemporary Mathematics*. – 2017. Vol. 700. 14182. – P. 31.
4. Gnutzmann S., Smilansky U. *Adv.Phys.* 55 527 (2006).
5. Gnutzmann S., Keating J. P., Piolet F. *Ann.Phys.*, 325 2595 (2010).
6. Exner P., Post O. A General Approximation of Quantum Graph Vertex Couplings by Scaled Schrodinger Operators on Thin Branched Manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 1322 207-227 (2013).
7. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. Unified transform (Fokas) method for the Schrodinger equation on simple metric graph. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2019 12(4), 412-420.
8. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. *Uzbek Mathematical Journal*, 2019. № 1., Pp. 73–81.
9. Uecker H., Grieser D., Sobirov Z. A., Babajanov D., Matrasulov D. Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit. *Phys. Rev. E* 91, 023209, (2015).
10. Sheils N. E., Smith A. D. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* 48 335001.
11. Fokas A. S., Pelloni B. *Unified Transform for Boundary Value Problems. Applications and Advances*. SIAM., USA. –2015. –P. 293.
12. Fokas A. S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs. In *Proc. R. Soc. A*, volume 453, Pp. 1411–1443. The Royal Society, 1997.
13. Fokas A. S. *A Unified Approach to Boundary Value Problems*. 2008. Pp. 352.

14. Sheils N. E. Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact. Applied Mathematical Modelling. – 2017. Vol. 46. –P. 450–464.
15. Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for Airy equation on open simple star graph. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. Vol. 3. №4. – p. 438–447.
16. Eshimbetov M. R. Initial-boundary value problem for heat equation on ladder-type graphs. Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. №5. – p. 11–19.
17. Собиров З. А., Эшимбетов М. Р. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. СМФН, 67:4 (2021), 766–782

REZYUME

Ushbu maqolada metrik graflarda Shredinger tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimining integral ifodasini umumlashgan Fokas almashtirish usuli yordamida hosil qildik. Olingan yechimlar ochiq va yopiq yulduzsimon metrik graflarda berilgan masalalar uchun keltirildi.

Kalit so'zlar: Shredinger tenglamasi, metrik graf, tarmoqlangan struktura, umumlashgan almashtirish, boshlang'ich-chegaraviy masala, Fokas almashtirishi.

RESUME

In the present paper we obtained integral-representation of solutions for the initial-boundary value problems for Schrödinger equation on simple metric graphs via Fokas method. Obtained solutions representation of the problem for open and closed simple star graphs let us to see exactly the parts that correspond transmission, reflection and trapping part of the wave at the branching point of the graphs.

Key words: Schrödinger equation, metric graphs, branched structures, unified transformation, initial problem, Fokas' transformation.

UDC 517.44

SIMMETRIK MATRITSA ARGUMENTLI FUNKSIYALAR UCHUN O'RAMA TUSHUNCHASI, UNING ASOSIY XOSSALARI VA DYUAMEL FORMULASINING ANALOGI**Rajabov Sh. Sh. *****REZYUME**

Operatsion hisob: Laplas almashtirishlar nazariyasi Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining bevosita tatbiqlari bilan bog'langan. Hozirgi kunga kelib mexanika, elektrodinamika, avtomatika, telemexanika, elektrotexnika, seysmologiyaning ko'pgina masalalarini yechishda operatsion hisob usullaridan keng foydalaniladi. Biz mazkur maqolada simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun muxim tushunchalardan biri bo'lgan o'rama tushunchasi va uning asosiy xossalari analoglarini qurishga harakat qilganmiz. Shu bilan birgalikda Dyamel formulasi matritsaviy analogini yozish hamda tatbiqiy natijalar olishni o'z oldimizga maqsad qilib qo'yganmiz.

Kalit so'zlar: Laplas almashtirishi, matritsaviy orginal, matritsaviy tasvir, o'rama, simmetrik matritsa, ortogonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, Dyamel formulasi, beta funksiya.

1. Kirish.

Laplas almashtirishi buyuk matematik va astronom Pier-Simon Markiz de Laplas (1749-1827) sharafiga nomlangan bo'lib, u ehtimollar nazariyasiga oid maqolasida xuddi shunday almashtirishdan foydalangan [1] va natijada Laplas almashtirishining integral shakli tabiiy ravishda rivojlangan. Laplas almashtirish nazariyasi XIX asr va XX asr boshlarida Matias Lerx, Oliver Xevisayd va Tomas Bromvich tomonidan yanada rivojlantirildi. Hozirgi keng tarqalgan Operatsion hisob Laplas almashtirish nazariyasining to'liq bir nazariya shakliga keltirgan olim Gustav Doets hisoblanadi. Uning 1937-yilda chop etilgan "Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation" (Tarjima: Laplas almashtirish nazariyasi va qo'llanilishi) asarida birinchi marta Laplas almashtirish tushunchasi ishlatilgan. U o'zining ilmiy ishlarida birinchi bo'lib Laplas almashtirishni muhandislik masalalarini hal qilishda qo'llagan.

Matritsa argumentli gipergeometrik funksiyalar uchun [2] Lager matritsaviy polinomlarini matritsa funksiyalarining sonli inversiyaga qo'llash uchun [3], Bernshteyn operatsion matritsasi uchun [4] va eng so'nggi ilmiy ishlardan [5] ko'p matritsa argumentli funksiyalar uchun Laplas almashtirishlarining analoglari olingan.

Biz ushbu maqolada simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun Laplas almashtirishlari uchun muxim bir tushunchalaridan biri bo'lgan o'rama tushunchasi va uning xossalari matritsaviy analoglarini olish bilan shug'ullanamiz. Shuningdek o'rama tushunchasi yordamida Dyamel formulasi matritsaviy analogini ham olamiz.

2. Matritsaviy original va matritsaviy tasvir funksiya tushunchalari.

*Rajabov Sh. Sh. –Toshkent davlat transport universiteti, sh.sh.rajabov@gmail.com

Bizga $f(A) = f(UAU') \in S_m$ ($A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m]$) (bu yerda, S_m -haqiqiy simmetrik matritsalar sinfi, $UU' = I$ -ortogonal matritsalar) matritsa argumentli simmetrik matritsa-funksiya berilgan bo'lsin [2].

1-ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(A)$ funksiyaga **matritsaviy original** deyiladi:

I. $A < 0$ da $f(A) \equiv 0$. (bu yerda, $A < 0$ munosabatni A matritsaning har bir elementi 0 dan kichik deb tushuniladi);

II. $\forall A \in S_m$ simmetrik matritsalar uchun $f(A) - A \geq 0$. (bu yerda, $\varphi(A) = f(A) - A \geq 0$ bo'lib, $\varphi(A)$ simmetrik matritsa-funksiyaning har bir elementi nomanfiy deb tushuniladi);

III. $\forall A \in S_m$ matritsalar uchun $\exists M > 0$ va $\alpha \geq 0$ sonlar topiladiki $|f(A)| \leq M \cdot e^{\alpha A}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. (bu yerda, $|f(A)|$ deb har bir elementi $f(A)$ simmetrik matritsa elementining moduliga teng deb tushuniladi).

Endi yuqorida keltirilgan 1-ta'rif asosida matritsaviy tasvirning ta'rifini keltiramiz.

2-ta'rif. $f(A)$ matritsaviy originalning **matritsaviy tasviri** deb, $Z = X + iY$, ($Z \in S_m \subset \mathbb{C}[m \times m]$: $Z = Z^*$) o'zgaruvchining

$$F(Z) = \int_{A>0} f(A) \cdot e^{-ZA} dA \quad (1)$$

integrali bilan aniqlanadigan matritsaviy funksiyaga aytiladi. Bu yerda, $A = (a_{ij})$ uchun $dA = \prod_{i \leq j} da_{ij}$ kabi aniqlanadi.

3-ta'rif. (1) formula orqali matritsaviy originaldan matritsaviy tasvirga o'tishga **Laplas almashtirishi** deyiladi.

$f(A)$ matritsaviy original bilan $F(Z)$ matritsaviy tasvir orasidagi moslik $F(Z) \dot{\rightarrow} f(A)$ yoki $f(A) \dot{\leftarrow} F(Z)$ kabi belgilanadi. Bu yerda, $\dot{\rightarrow}$ belgining yo'nalishi umumiylikka zid kelmagan holda hamisha matritsaviy tasvirdan matritsaviy originalga tomon yo'nalgan bo'ladi. Amaliy misollar ishlaganda ko'p hollarda $L\{f(A)\} = F(Z)$ kabi munosabatdan foydalaniladi [2-3].

3. Simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun o'rama tushunchasi va uning asosiy xossalari.

Tasvirlarni ko'paytirish teoremasi o'rama tushunchasiga asoslanadi.

Bizga $f(A), g(A) \in S_m$ aniqlangan haqiqiy matritsa o'zgaruvchi A ning uzluksiz funksiyalari berilgan bo'lib, $A < 0$ uchun $f(A) = g(A) = 0$ munosabat o'rinli bo'lsin.

4-ta'rif. $f(A)$ va $g(A)$ matritsa o'zgaruvchili funksiyalarning **o'ramasi** deb,

$$\int_{0 < B < A} f(A - B)g(B)dB \quad (2)$$

integralga aytiladi va $(f * g)(A)$ kabi belgilanadi [4].

1-teorema (tasvirlarni ko'paytirish teoremasi). Agar $F_1(Z) \dot{\rightarrow} f_1(A)$ va $F_2(Z) \dot{\rightarrow} f_2(A)$ bo'lsa, u holda

$$F_1(Z)F_2(Z) \dot{\rightarrow} (f_1 * f_2)(A) \quad (3)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Isbotlash uchun matritsaviy tasvir (1)-formula va o'rama ta'rifidagi (2)-formulalardan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
 (f_1 * f_2)(A) &\stackrel{\leftarrow}{=} \int_{A>0} (f_1 * f_2)(A) e^{-ZA} dA = \int_{A>0} \left(\int_{0<B<A} f_1(A-B) f_2(B) dB \right) e^{-ZA} dA = \\
 &= \int_{A>0} e^{-ZA} dA \int_{0<B<A} f_1(A-B) f_2(B) dB = \left[\begin{array}{c} A-B=W \\ \text{almashtirish kiritamiz} \end{array} \right] = \\
 &= \int_{W>0} e^{-Z(W+B)} dW \int_{B>0} f_1(W) f_2(B) dB = \int_{W>0} e^{-ZW} \cdot e^{-ZB} dW \int_{B>0} f_1(W) f_2(B) dB = \\
 &= \int_{W>0} f_1(W) \cdot e^{-ZW} dW \int_{B>0} f_2(B) \cdot e^{-ZB} dB = F_1(Z) F_2(Z).
 \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

Endi o'rama tushunchasining asosiy xossalari keltiramiz.

1-xossa. $f(A)$ va $g(A)$ matritsa argumentli funksiyalarning o'ramasi uchun quyidagi:

$$(f * g)(A) = (g * f)(A) \quad (4)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Isbotlash uchun (4) formulani chap tarafidan o'ng tarafini keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned}
 (f * g)(A) &= \int_{0<B<A} f(A-B) g(B) dB = \left[\begin{array}{c} A-B=\Lambda \quad 0<B<A \\ dB=-d\Lambda \quad A<\Lambda<0 \end{array} \right] = \\
 &= - \int_{A<\Lambda<0} f(\Lambda) g(A-\Lambda) d\Lambda = \int_{0<\Lambda<A} g(A-\Lambda) f(\Lambda) d\Lambda = (g * f)(A).
 \end{aligned}$$

Xossa isbotlandi.

2-xossa. $f(A)$, $g(A)$ va $h(A)$ matritsa argumentli funksiyalarning o'ramasi uchun quyidagi:

$$(f * (g * h))(A) = ((f * g) * h)(A) \quad (5)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu xossani isbotlash mobaynida ham birinchi xossani isboti kabi (5) munosabatni chap tarafidan o'ng tarafini keltirib chiqaramiz. Buning uchun bevosita matritsa argumentli funksiyalarning integrallashda o'zgaruvchi almashtirish usulidan va 1-xossadan foydalanamiz:

$$(f * \{g * h\})(A) = \int_{0<B<A} f(B) \int_{0<\Omega<A-B} g(A-\Omega-B) h(\Omega) d\Omega dB =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} B = \Omega \quad 0 < \Omega < A \\ dB = d\Omega \quad h(\Omega) \rightleftharpoons f(B) \end{array} \right] = \int_{0 < \Omega < A} h(\Omega) \int_{0 < B < A - \Omega} g(A - B - \Omega) f(B) dB d\Omega = \\
&= (h * \{g * f\})(A) = (\{g * f\} * h)(A) = (\{f * g\} * h)(A).
\end{aligned}$$

Xossa isbotlandi.

3-xossa. $f(A)$, $g(A)$ va $h(A)$ matritsa argumentli funksiyalar va $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ uchun

$$(f * \{\lambda_1 g + \lambda_2 h\})(A) = \lambda_1 (f * g)(A) + \lambda_2 (f * h)(A) \quad (6)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ushbu xossani isbotlash uchun o'rama tushunchasidan va bevosita integralda o'zgarmasni integral belgisidan tashqariga chiqarish xossasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
(f * \{\lambda_1 g + \lambda_2 h\})(A) &= \int_{0 < B < A} f(A - B) (\lambda_1 g(B) + \lambda_2 h(B)) dB = \\
&= \lambda_1 \int_{0 < B < A} f(A - B) g(B) dB + \lambda_2 \int_{0 < B < A} f(A - B) h(B) dB = \\
&= \lambda_1 (f * g)(A) + \lambda_2 (f * h)(A).
\end{aligned}$$

Xossa isbotlandi.

4-xossa. Agar $f_1, f_2, \dots, f_n(A) \in S_m$ matritsaviy original funksiyalar uchun mos ravishda $F_1, F_2, \dots, F_n(Z)$ -matritsaviy tasvir funksiyalar mavjud bo'lsa, u holda

$$F_1(Z) \cdot F_2(Z) \cdot \dots \cdot F_n(Z) \dot{\rightarrow} (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(A) \quad (7)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu xossani isbotlash uchun 1-teoremani n marta qayta qo'llash yordamida keltirilishini ko'rishimiz mumkin.

1-natija. Agar (7) munosabatda $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f(A)$ bo'lsa, u holda $F_1 = F_2 = \dots = F_n = F(Z)$ bo'lib

$$(F(Z))^n \dot{\rightarrow} (f^*)^n(A) \quad (8)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Shartga ko'ra matritsaviy original funksiyalar $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f(A)$ tengliklar o'rinli va mos ravishda matritsaviy tasvir funksiyalar uchun $F_1 = F_2 = \dots = F_n = F(Z)$ tengliklar o'rinli. Bu tengliklarni (7) munosabatga olib borib qo'yamiz:

$$\begin{aligned}
F_1(Z) \cdot F_2(Z) \cdot \dots \cdot F_n(Z) &= \left(\underbrace{F(Z) \cdot F(Z) \cdot \dots \cdot F(Z)}_{n \text{ ta}} \right) = (F(Z))^n \dot{\rightarrow} \\
\dot{\rightarrow} (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(A) &= \left(\underbrace{f * f * \dots * f}_{n \text{ ta}} \right) (A) = (f^*)^n(A).
\end{aligned}$$

Natija isbotlandi.

4. Dyamel formulasi va uning tatbiqlari.

2-teorema (Dyuamel). Agar $F(Z)G(Z) \dot{\rightarrow} (f * g)(A)$ munosabat o'rinli bo'lib, $f'(A)$ -matritsaviy original funksiya tashkil qilsa, u holda

$$ZF(Z)G(Z) \dot{\rightarrow} f(O)g(A) + \int_{0 < B < A} f'(A - B)g(B)dB \quad (9)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda, O -barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan nol matritsa.

Isbot. Isbotlash uchun (9) munosabatni chap tarafidan o'ng tarafini keltirib chiqaramiz:

$$ZF(Z)G(Z) = [f(O) + ZF(Z) - f(O)]G(Z) = f(O)G(Z) + [ZF(Z) - f(O)]G(Z)$$

Oxirgi tenglikda originalni differensiallash xossasidan [6] foydalanib, ya'ni $f'(A) \dot{\leftarrow} ZF(Z) - f(O)$ munosabat o'rinli ekanligini hisobga olib va o'rama tushunchasidan foydalanib Laplas almashtirishini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} f(O)G(Z) + [ZF(Z) - f(O)]G(Z) &\dot{\rightarrow} f(O)g(A) + f'(A) * g(A) = \\ &= f(O)g(A) + \int_{0 < B < A} f'(A - B)g(B)dB. \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

1-izoh. (9) formula simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun Dyamel formulasi deyiladi.

2-natija. Agar $f(A) = A^a$, ($A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m]$, $a \geq 0$) simmetrik matritsa argumentli funksiya va $g(A) = A^b$, ($A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m]$, $b \geq 0$) simmetrik matritsa argumentli original funksiyalar uchun

$$(f * g)(A) = A^a * A^b = \beta_{[m \times m]}(a + 1, b + 1) \cdot A^{a+b+1} \quad (10)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. (10) tenglikda $\beta_{[m \times m]}(a + 1, b + 1)$ -beta funksiya.

Isbot. Isbotlash uchun o'rama ta'rifidan foydalanamiz:

$$A^a * A^b = \int_{0 < B < A} (A - B)^a B^b dB \quad (11)$$

(11) munosabatda $B = AV$ almashtirish kiritamiz:

$$\int_{0 < B < A} (A - B)^a B^b dB = \left[\begin{array}{cc} B = AV & 0 < B < A \\ dB = AdV & 0 < V < I \end{array} \right] = \left[\int_{0 < V < I} (I - V)^a V^b dV \right] A^{a+b+1}$$

Oxirgi tenglikning qavs ichidagi qismi uchun $\beta_{[m \times m]}(a, b) = \int_{0 < V < I} (I - V)^{a-1} V^{b-1} dV$ munosabatni [9-10] hisobga olsak tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left[\int_{0 < V < I} (I - V)^a V^b dV \right] A^{a+b+1} = \beta_{[m \times m]}(a + 1, b + 1) A^{a+b+1}$$

Natija isbotlandi.

ADABIYOTLAR

1. Pierre-Simon, Marquis de Laplace. "Des Fonctions generatrices"[On generating functions], Theorie analytique des Probabilites [Analytical Probability Theory] (in French) (2nd ed.), Paris, 1814, chap.I sect.2-20.
2. Joshi R.M., Joshi J.M.C. Generalized Laplace transform with matrix variables. Inter.J.Math. Math.Sci. Vol.10, No.3(1987), pp. 503-512.
3. Sastre J., Defez E. and Jodar L. Application of Laguerre matrix polynomials to the numerical inversion of Laplace transforms of matrix functions, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 15271532.
4. Rani D., Mishra V. and Cattani C. Numerical inversion of Laplace transform based on Bernstein operational matrix, Math. Methods Appl. Sci. (2018) pp.1–13, <https://doi.org/10.1002/mma.5188>
5. Yaremko O.E., Zababurin K.R. Matrix Laplace transform. Bol. Soc. Mat. Mex. October 28, 2023., 29:86., 21-p. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00563-7>.
6. Rajabov Sh.Sh. Matritsaviy original va matritsaviy tasvir funksiyalarining asosiy xossalari. NamDU ilmiy axborotnomasi. No: 6. (2023), 22-29.
7. Rajabov Sh. Sh., Sharifboyev Sh. D., Rajabova M. Sh. Shift theorem for the problem of finding the original function in matrix argument functions // International conference. Berlin, Germany-2022, pp. 110-111.
8. Rakhmonov U.S., Abdukarimov A., Rajabov Sh. Calculation of inherently deformable pipelines lying on a solid viscoelastic base with random characteristics, AIP Conference Proceedings 2612, 030016 (1-7) (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0117526>
9. Rajabov Sh.Sh., Matrix variable beta function and its properties, Scinse, research, development No:16/7. Santa Monica (California) 2019, pp. 322-323.
10. Xudoyberganov G., Rajabov Sh. Matritsa argumentli beta va gamma funksiyalar // Молодой исследователь: вызовы и перспективы. No:9(109), Москва-2019, С. 68-71.
11. Baeumer, B. On the inversion of the convolution and Laplace transform. Trans. Am. Math. Soc. 355(3),(2002), pp. 1201-1212.
12. Arman, A.: New trends in Laplace type integral transforms with applications. Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica 35(1), (2017), pp. 173-193.
13. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва-1982. – 478 с.
14. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. Москва-1961. – 304 с.

РЕЗЮМЕ

Операционное исчисление: Теория преобразований Лапласа связана с непосредственными приложениями теории функций комплексных переменных. В настоящее время методы оперативного расчета широко используются для решения многих задач механики, электродинамики, автоматике, телемеханики, электротехники, сейсмологии. В этой статье мы попытались построить аналоги понятия переноса, которое является одним из важных понятий для симметричных матричных аргумент-функций, и его основных свойств. Вместе с этим мы поставили перед собой цель написать матричный аналог формулы Дюамеля и получить практические результаты.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, матричный оригинал, матричный образ, свертка, симметричная матрица, ортогональная матрица, единичная матрица, нулевая матрица, формула Дюамеля, бета-функция.

RESUME

Operational calculus: The theory of Laplace transforms is connected with direct applications of the theory of functions of complex variables. Currently, operational calculation methods are widely used to solve many problems of mechanics, electrodynamics, automation, telemechanics, electrical engineering, and seismology. In this article, we tried to build analogues of the concept of wrapping, which is one of the important concepts for functions with symmetric matrix arguments, and its main properties. Together with this, we set ourselves the goal of writing a matrix analog of Duhamel's formula and obtaining practical results.

Key words: Laplace transform, matrix original, matrix image, convolution, symmetric matrix, orthogonal matrix, unit matrix, zero matrix, Duhamel's formula, beta function.