



# O'ZMU XABARLARI

## ВЕСТИК НУУЗ

### АСТА NUUZ

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY  
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

**JURNAL 1997  
YILDAN  
CHIQA  
BOSHLAGAN**

**2024  
2/2  
Aniq  
fanlar**

Bosh muharrir:

**MADJIDOV I. U.** — t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

**ERGASHOV Y. S.** — f-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

**Ayupov Sh. A.** – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

**Alimov Sh. A.** – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

**Sadullayev A.** – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

**Roziqov O'. A.** – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi

**Aripov M. M.** – f.-m.f.d., prof.

**Ashurov R. R.** – f.-m.f.d., prof.

**Abdushukurov A. A.** – f.-m.f.d., prof.

**Zikirov O. S.** – f.-m.f.d., prof.

**Aloyev R. J.** – f.-m.f.d., prof.

**Ganixodjayev R. N.** – f.-m.f.d., prof.

**Narmonov A. Y.** – f.-m.f.d., prof.

**Omirov B. A.** – f.-m.f.d., prof.

**Raximov A. A.** – f.-m.f.d., prof.

**Beshimov R. B.** – f.-m.f.d., prof.

**Shoimqulov B. A.** – f.-m.f.d., prof.

**Xayotov A.** – f.-m.f.d., prof.

**Xudoyberdiyev A.** – f.-m.f.d. prof.

**Xudoyberganov G.** – f.-m.f.d., prof.

**Matyakubov A. S.** – f.-m.f.d., prof.

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) **G'aybullayev R.Q.**

**MUNDARIJA**  
**CONTENTS**  
**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Abdushukurov A. A., Bozorov S. B.</b> Comparative analysis of estimates of distribution function in right random censoring schemas by using of kernel mathematical modeling .....	3
<b>Bozorova O‘.</b> $M G 1 N$ va $GJ M 1 N - 1$ sistemalar bandlik davrlari o‘rta qiymatlari o‘rtasida ikkilanma munosabatlar .....	14
<b>Piyasova R. A.</b> The existence of not translation invariant two periodic gradient gibbs measures on cayley tree of arbitrary order .....	21
<b>Khadjiev D., Bayturaev A.</b> Complete systems of invariants of irregular curves in a Euclidean geometry .....	27
<b>Kucharov R. R., Pardayev Sh. A., Salimov J. K.</b> $p$ -adik sonlar maydonida 1-Lipshits funksiyalari va ularning dinamikasi .....	40
<b>Muradov R. S., Ziyoidinova M. A.</b> Butstrep usulida qurilgan statistik baholar uchun limit teoremlar .....	47
<b>Turdieva N.R., Oltiboyev D.N.</b> $A(z)$ -analytic functions in non-convex domains	55
<b>Жураев Т. Ф., Гурсунова З. О.</b> О некоторых подпространствах являющихся многообразиями различной размерности пространства $P(X)$ вероятностных мер. ....	61
<b>Закиров А. Х.</b> Течение идеальной жидкости в внезапно сужающемся канале	68
<b>Кулжанов У. Н.</b> О нижнем спектре двухчастичного дискретного оператора Шредингера .....	77
<b>Мамадалиев Н. А., Бекниязов А. Е., Васиева Х. Г.</b> Об одной задаче дифференциального уравнения второго порядка с инволюции .....	88
<b>Нурмухамедова Н. С.</b> Информация Фишера для случайно цензурированных наблюдений .....	101
<b>Халхужаев А. М., Хужамиеров И. А.</b> О спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке .....	107
<b>Худойбердиев О. Ж., Норов Г. М.</b> Определение координат центра масс горного массива ограниченного бортом карьеры и плоскостью скольжения .....	124

UDC 517.55

COMPARATIVE ANALYSIS OF ESTIMATES OF DISTRIBUTION  
FUNCTION IN RIGHT RANDOM CENSORING SCHEMAS BY USING OF  
KERNEL MATHEMATICAL MODELING

Abdushukurov A. A., \* Bozorov S. B. \*

## RESUME

In paper we present some comparison of distribution function estimators when the lifetime data subjected to right random censoring. Nonparametric estimators based on conception of presmoothed estimation of relative-risk function. We give some numerical results also.

**Key words:** Random censoring, product-limit, relative risk, presmoothed, proportional hazards, asymptotic representation, strong consistency.

## INTRODUCTION

Censored data occur in survival analysis, bio-medical trials, industrial experiments. There are several schemas of censoring (from the right, left, both sides, mixed with competing risks and others). However, in statistical literature right random censoring is wide spread, in so far as it was easily described from the methodological point of view. Here we consider also this kind of censorship in order to comparing our results with others.

Let  $X_1, X_2, \dots$  and  $Y_1, Y_2, \dots$  be two independent sequences of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.-s) with common unknown continuous distribution functions (d.f.-s)  $F$  and  $G$ , respectively. Let the  $X_j$  be censored on the right by  $Y_j$ , so that the observations available for us at the  $n$  - th stage consist of the sample:

$$C^{(n)} = \{(Z_j, \delta_j), 1 \leq j \leq n\},$$

where  $Z_j = \min(X_j, Y_j)$  and  $\delta_j = I(X_j \leq Y_j)$  with  $I(A)$  meaning the indicator of the event  $A$ .

1. If  $X_j \leq Y_j$ , then  $Z_j = \min(X_j, Y_j) = X_j$  is equal to  $\delta_j = 1$  and in this case we can observe  $X$ .

2. Otherwise if  $Y_j \leq X_j$ , then  $Z_j = \min(X_j, Y_j) = Y_j$  is equal to  $\delta_j = 0$ , and this can be censoring condition.

The main problem consists a nonparametrical estimating of d.f.  $F$  with nuisance d.f.  $G$  based on censored sample  $C^{(n)}$ , where the number of observed  $X_j - s$ ,  $\nu_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$  is a random amount with a Binomial distribution.

---

\***Abdushukurov A. A.** –Moscow State University named after M. V. Lomonosov, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan, a\_abdushukurov@rambler.ru

\***Bozorov S. B.** – Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan, suxrobbek\_8912@mail.ru

Kaplan and Meier [1] were the first to suggest the product-limit (PL) estimator  $F_n^{PL}$  of  $F$  defined as

$$F_n^{PL}(t) = \begin{cases} 1 - \prod_{\{j: Z_{(j)} \leq t\}} \left(1 - \frac{\delta_{(j)}}{n-j+1}\right), & t \leq Z_{(n)}, \\ 1, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 1, \\ \text{undefined}, & t > Z_{(n)}, \quad \delta_{(n)} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$  are the order statistics of  $Z$ - sample  $\{Z_j, 1 \leq j \leq n\}$  and  $\{\delta_{(j)}, 1 \leq j \leq n\}$  the sequence of indicators adjunct to the ordered  $Z$  - sample. There are a different versions of PL - estimators. However, those do not coincide, if the largest  $Z_j$  is a censoring time. There is an enormous set of the works on investigating of several properties of PL - estimators and their application on statistical problems, specially in case of right random censorship.

Now, in order to study the extent to which the above estimator (1) is, we draw an estimation by creating a software that gives an option on this model using computer modeling (Figure 1).

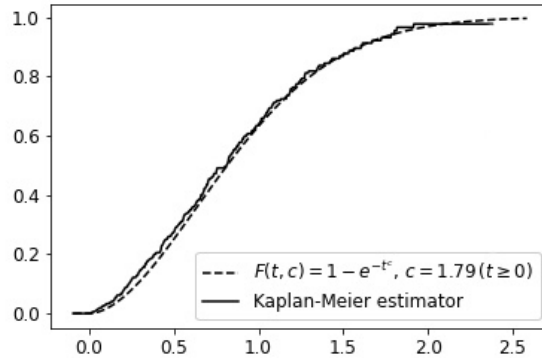


FIG. 1:  $F_n^{PL}$  – Kaplan-Meier estimator, (Weibull distribution)

However  $F_n^{PL}$  is not a unique estimator of d.f.  $F$ . Abdushukurov [2, 3] proposed another estimator of  $F$ , of relative-risk power type:

$$F_n^{RR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n(t)} = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & Z_{(j)} \leq t < Z_{(j+1)}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ 1, & t \geq Z_{(n)}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(Z_j \leq t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1 \equiv (-\infty; +\infty)$  is an empirical estimator of d.f.  $P(Z_j \leq t) = 1 - (1 - F(t))(1 - G(t)) \equiv H(t)$  and  $R_n(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \Lambda_{1n}(t)$  is an estimator of relative-risk function  $R(t) = (\Lambda(t))^{-1} \Lambda_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Here cumulative hazard functions (c.h.f.-s)  $\Lambda$ ,  $\Lambda_0$  and  $\Lambda_1$  corresponding to d.f.-s  $H$ ,  $G$  and  $F$  defined as

$$\Lambda(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dH(u)}{1 - H(u-)} = \Lambda_0(t) + \Lambda_1(t),$$

$$\begin{aligned}\Lambda_0(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{dG(u)}{1-G(u-)} = \int_{-\infty}^t \frac{dH_0(u)}{1-H(u-)}, \\ \Lambda_1(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{dF(u)}{1-F(u-)} = \int_{-\infty}^t \frac{dH_1(u)}{1-H(u-)},\end{aligned}\quad (3)$$

with subdistribution functions  $H_0(t) + H_1(t) = H(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ ,

$$H_0(t) = P(Z_j \leq t, \delta_j = 0) = \int_{-\infty}^t (1 - F(u-)) dG(u),$$

$$H_1(t) = P(Z_j \leq t, \delta_j = 1) = \int_{-\infty}^t (1 - G(u-)) dF(u).$$

The corresponding estimators of c.h.f.-s (3) are

$$\Lambda_n(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dH_n(u)}{1-H_n(u-)} = \Lambda_{0n}(t) + \Lambda_{1n}(t),$$

where

$$\Lambda_{kn}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{dH_{kn}(u)}{1-H_n(u-)}, \quad k = 0, 1; H_{kn}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(Z_j \leq t, \delta_j = k)$$

are empirical counterparts of  $H_k(t)$ ,  $k = 0, 1$  with  $H_{0n}(t) + H_{1n}(t) = H_n(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ .

Now in order to study what the abovementioned (2) estimator's degree is, we will construct software that an option gives through computer modeling and demonstrate the estimation in drawing (Figure 2).

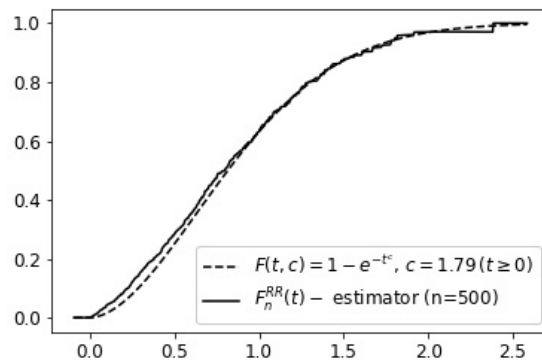


Рис. 2:  $F_n^{RR}$  – Relative - Risk Power estimator

In [2-4] it was shown that both of estimators (1) and (2) have a similar asymptotic properties tending to the same limiting Gaussian process. However, the relative-risk power estimator (2) has some small-sample advantages with respect to PL - estimator (1). For

example, it is not sensitive to censoring in last observed point  $Z_{(n)}$ , since  $F_n^{RR}(Z_{(n)}) = 1$  and it is identifiable with the model:  $(1 - F_n^{RR}(t))(1 - G_n^{RR}(t)) = 1 - H_n(t)$ ,  $n \geq 1$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , where  $G_n^{RR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{1-R_n(t)}$  is an corresponding estimator of d.f.  $G(t)$ . In [4] it was proposed several extended versions of estimator (2) in generalized models of incomplete observations mixed with competing risks. These estimators were also extensively studied in some statistical problems. It is not difficult to observe that estimator (2) is a natural extension of well-know ACL - (Abdushukurov-Cheng-Lin) estimator of  $F$  in simple Proportional Hazards Model (PHM):

$$F_n^{ACL}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{p_n}, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

where  $p_n = \frac{v_n}{n}$  is an estimator of probability  $p = P(\delta_j = 1)$ , which is value of the constant relative-risk function  $R(t) \equiv p$  (so far as in PHM,  $\Lambda_1(t) = p\Lambda(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ ). Note that  $F_n^{ACL}$  was independently proposed and studied by Abdushukurov [5] and Chen, Lin [6] (for more information, see also Csörgö [7]). This estimator was studied, extended and used by many other authors up present. The main property of PHM is its characterization by independence of subsamples  $\{Z_1, \dots, Z_n\}$  and  $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . This property is equivalent to relation  $1 - G(t) = (1 - F(t))^\beta$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$  for some positive  $\beta$ . In PHM,  $p = \frac{1}{1+\beta}$  and therefore  $\beta$  is a censoring parameter. Estimator  $F_n^{ACL}$  in PHM is asymptotically efficient with respect to  $F_n^{PL}$ . This advantage of estimator is well preserved for plug-in estimators of many functionals (see, [2, 5, 7]).

Now, with the aim of studying to what extent the above ACL estimation is, we draw up a software that gives an option on this model using computer modeling and draw the estimation (Figure 3 and Figure 4).

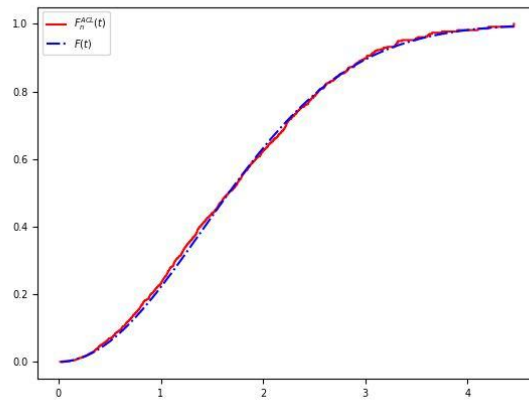


Рис. 3:  $F_n^{ACL}$  – ACL estimator, (Weibull distribution (c=2))

That is why, in this framework the conditional probability that datum is not censored given its observed value

$$p(t) = P(\delta_j = 1/Z_j = t) = E[\delta_j/Z_j = t], \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (4)$$

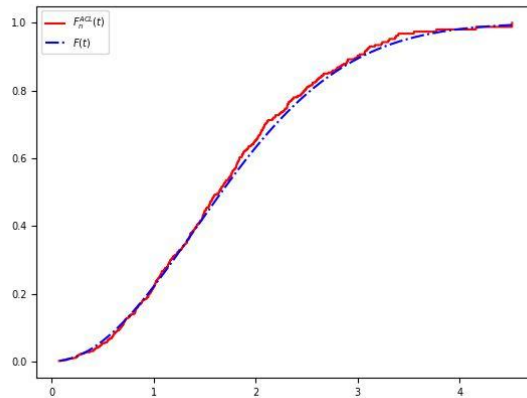


Рис. 4:  $F_n^{ACL}$ –ACL estimator’s persistency B-robustness, (Weibull distribution ( $c=2$ )) )

is a very important function, which in PHM is constant  $p(t) = \frac{1}{1+\beta}$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ . Moreover, the key role of probability (4) takes part in expressing c.h.f.  $\Lambda_1$  via  $\Lambda$  as

$$\Lambda_1(t) = \int_{-\infty}^t p(u) d\Lambda(u), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

and, therefore, relative-risk function given as

$$R(t) = (\Lambda(t))^{-1} \int_{-\infty}^t p(u) d\Lambda(u), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

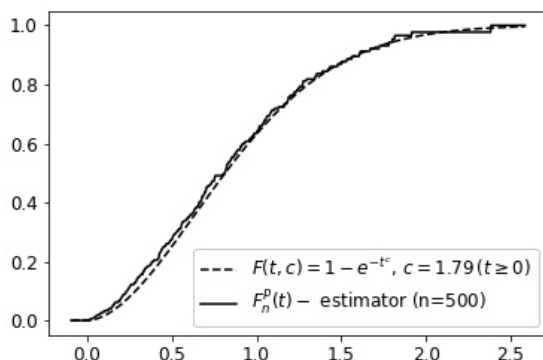
Probability (4) is a regression of  $\delta_j$  on  $Z_j$ . Hence, it can be estimated by some of regression statistics. We have used following nonparametric regression estimator of Nadaraya [8] and Watson [9]:

$$p_n(t) = \left[ \frac{1}{nh(n)} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{t - Z_j}{h(n)}\right) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{nh(n)} \sum_{j=1}^n \delta_j k\left(\frac{t - Z_j}{h(n)}\right) \right], \quad (5)$$

where the kernel  $k(\cdot)$  is a given probability density function and  $\{h = h(n), n \geq 1\}$  is a bandwidth sequence such that:  $h \downarrow 0, n \rightarrow \infty$ . In case of dependence of probability (4) on unknown parameters it may be estimated parametrically (see, Dikta [10] in this context). Cao et. al. [11] proposed following presmoothed PL-estimator of d.f.  $F$  by replacing the censoring indicators  $\delta_{(j)}$  in the expression of PL-estimator (1) by the estimator (5) at the observed data points:

$$F_n^p(t) = 1 - \prod_{\{j: Z_{(j)} \leq t\}} \left( 1 - \frac{p_n(Z_{(j)})}{n - j + 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (6)$$

Now, in order to study the extent to which the above estimator (6) is, we draw an estimation by creating a software that gives an option on this model by computer modeling

Рис. 5:  $F_n^p$ -estimator

(Figure 5).

Some asymptotic properties of estimator (6) were investigated in [11, 12]. Taking into account some advantages of estimator (2) with respect to (1), we propose a new presmoothed relative-risk power (PRRP) estimator:

$$F_n^{PR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n^p(t)} = \begin{cases} 0, & t < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-j}{n}\right)^{R_n^p(t)}, & Z_{(j)} \leq t < Z_{(j+1)}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ 1, & t \geq Z_{(n)}, \end{cases} \quad (7)$$

were

$$R_n^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \Lambda_{1n}^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \int_{-\infty}^t p_n(u) d\Lambda_n(u), \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

is a partially presmoothed analogue of estimator  $R_n(t)$ . For probability mass function (4) smooth estimator (5) is used in formula for c.h.f.  $\Lambda_1(t)$ . But the estimator (7) is not smooth. We can see that estimator (7) also well defined in whole line without any conditions on censorship.

Now, with the aim of studying to what extent the above estimator (7) is, we draw up a software that gives an option on this model using computer modeling and draw an estimation (Figure 6).

## ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PR ESTIMATOR

Let's denote  $r(n) = h^2(n) + (nh(n))^{-1/2} (\log n)^{1/2}$ . In order to investigating the properties of estimator (7) we need the following conditions:

(C1)  $(F, G) \in K = \{(F, G) : N_F \cap N_G \neq \emptyset, P(X_j \leq Y_j) \in (0, 1)\}$ , where  $N_F = \{t : 0 < F(t) < 1\}$  and  $N_G = \{t : 0 < G(t) < 1\}$ ;

(C2) Numbers  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  are such that  $\min\{H(\alpha), 1 - H(\beta)\} \geq \gamma(0, 1)$ ,  $\alpha > \tau_H = \sup\{t : H(t) = 0\}$  and  $\beta < T_H = \inf\{t : H(t) = 1\}$ ,  $[\alpha, \beta] \neq \emptyset$ ;



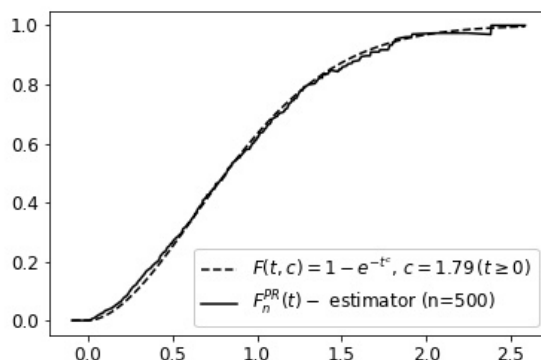


Рис. 6:  $F_n^{PR}$  – Presmoothed Relative-Risk Power estimator

(C3) For all  $n \geq 1$  there takes place  $P(0 < \nu_n < n) = 1$ ;

(C4)  $k$  is a symmetric, twice continuously differentiable and bounded variation density function with compact support;

(C5) Density  $q(t) = H'(t)$  exists, is four times continuously differentiable at  $t \in [\alpha, \beta]$  and  $\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} q(t) > 0$ ;

(C6)  $p(t)$  is four times continuously differentiable at  $t \in [\alpha, \beta]$ ;

(C7)  $n^{1-\varepsilon} \cdot h(n) \rightarrow \infty$  for some  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} h^\lambda(n) < \infty$  for some  $\lambda > 0$  and  $h^2(n) = o\left((nh(n))^{-1/2} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{h(n)}\right)\right)^{1/2}\right)$ .

Consider random functions

$$\varphi_1(t; z) = \frac{p(t)}{1 - H(t)} (I(Z \leq t) - H(t)),$$

$$\varphi_2(t; z) = \int_{-\infty}^t \frac{I(Z \leq u) - H(u)}{1 - H(u)} p'(u) du,$$

$$\varphi_3(t; z, \delta) = \int_{-\infty}^t k\left(\frac{u - Z}{h}\right) \frac{(\delta - p(u))}{1 - H(u)} du.$$

In the next theorem, we will show that PR estimator can be approximated by sum of i.i.d. random functions on  $t$  with the rate for the remainder term tending to zero at  $n \rightarrow \infty$  almost surely.

**Theorem 1.** [13] If the conditions (C1) – (C7) are fulfilled, then there holds

$$F_n^{PR}(t) - F(t) = (1 - F(t)) \Omega_n(t) + Q_n(t), \quad (8)$$

with  $\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |Q_n(t)| \stackrel{a.s.}{=} O\left(\max\left\{(r(n) \log n)^2, \frac{\log n}{n}\right\}\right)$ , where

$$\Omega_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\varphi_1(t; Z_i) - \varphi_2(t; Z_i) + \varphi_3(t; Z_i, \delta_i)].$$

**Theorem 2.** [13] Let the assumptions of Theorem 1 are fulfilled. Then at  $n \rightarrow \infty$  there holds

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |F_n^{PR}(t) - F(t)| \stackrel{a.s.}{=} O \left( \max \left\{ r(n) \log n, \left( \frac{\log n}{n} \right)^{1/2} \right\} \right). \quad (9)$$

The approximating sequence of normalized sum of random functions  $\Omega_n(t)$  in Theorem 1 is the same that for presmoothed PL – estimator (6). Therefore, from theorem 3.7 in [12] follows the asymptotic normality of PR estimator, under taking into account the representation (8).

**Theorem 3.** [13] Let the assumptions of Theorem 1 are fulfilled and (C8)  $nh^2(n)(\log n)^{-6} \rightarrow \infty$ ,  $nh^8(n)(\log n)^4 \rightarrow 0$  and  $h^3(n)(\log n)^5 \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  for any  $t \in [\alpha, \beta]$ . Then there hold

1. If  $nh^4(n) \rightarrow 0$ , then  $n^{1/2} (F_n^{PR}(t) - F(t)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(t))$ ,
2. If  $nh^4(n) \rightarrow C^4$ , then  $n^{1/2} (F_n^{PR}(t) - F(t)) \xrightarrow{d} N(b(t), \sigma^2(t))$ ,

where

$$b(t) = C^2 (1 - F(t)) \alpha(t) d(k), \quad d(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 k^2(u) du,$$

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^t \frac{(\frac{1}{2} p''(u) q(u) + p'(u) q'(u)) du}{1 - H(u)}, \quad \sigma^2(t) = (1 - F(t))^2 \gamma(t),$$

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \mu(u) du, \quad \mu(t) = \frac{p(t) q(t)}{(1 - H(t))^2}.$$

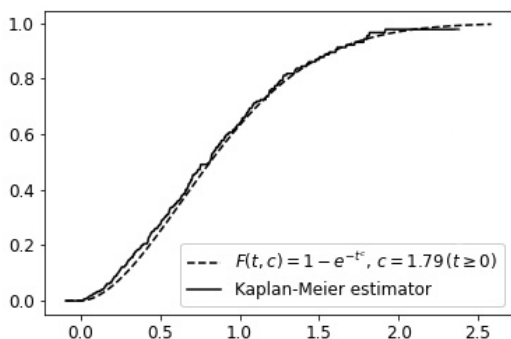
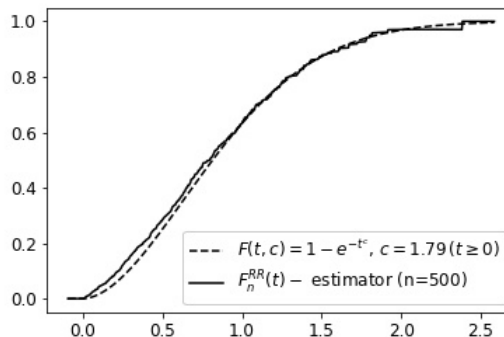
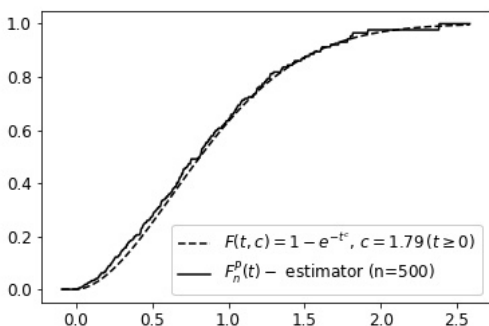
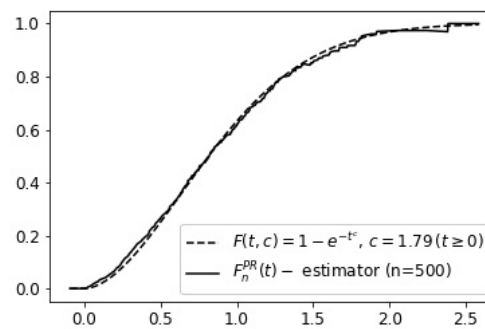
## NUMERICAL STUDY OF ESTIMATORS

In this section we investigate the above estimates using numerical methods. By python programming language we are preparing a high-quality sample. We select  $F(t, c) = 1 - e^{-t^c}$ ,  $c = 1.79$  ( $t \geq 0$ ) and get a sample of volume  $n = 500$ . This sample is censored from the right with r.v.-s having a d.f.  $G(t) = 1 - e^{-t}$  ( $t \geq 0$ ). The resulting sample have a degree of censorship 47%. We will study the above estimates on the resulting sample.

The black long-pointed line in the figure shows the theoretical d.f.  $F(t, c)$  and the black line shows the Kaplan-Meier estimate (Figure 7). One disadvantage of this estimate is that it may not matter at this endpoint.

Now we draw the evaluation graph (Figure 8) of estimator proposed by Abdushukurov (2). In the figure, the black long-pointed line shows the theoretical d.f., the black line shows the Abdushukurov's estimate. It can be seen from the graphs drawn that both estimates are very good. But in practice, it is difficult for us to see on the graph which score is better. Therefore, we study the sum  $\sum_{i=1}^{n-1} (F_n(Z_i) - F(Z_i))^2$ . Let's make the appropriate tables for it.

Sum	$\sum_{i=1}^{n-1} (F_n^{PL}(Z_i) - F(Z_i))^2$	$\sum_{i=1}^{n-1} (F_n^{RR}(Z_i) - F(Z_i))^2$	Relative
Value	0.204858	0.123901	0.604814

Рис. 7:  $F_n^{PL}$ –Kaplan-Meier estimatorРис. 8:  $F_n^{RR}$ – Relative - Risk Power estimatorРис. 9:  $F_n^p$ –estimatorРис. 10:  $F_n^{PR}$ – Presmoothed Relative-Risk Power estimator

From the table above, it can be concluded that the estimate (2) proposed by Abdushukurov is closer to the d.f.  $F(t, c)$ .

Now we draw the estimates (6) and (7).

As can be seen from the graph, despite the high level of censorship, both estimates are very close to the theoretical d.f.. The table below shows that the price actually depends on the selected bandwidth sequence in formula (5).

Bandwith	$\sum_{i=1}^n (F_n^p(Z_i) - F(Z_i))^2$	$\sum_{i=1}^n (F_n^{PR}(Z_i) - F(Z_i))^2$	Relative
$h(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$	0.294402	0.277757	0.943462
$h(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	0.23152	0.210734	0.910219
$h(n) = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$	0.181307	0.178650	0.985345

From the above table, we can conclude that the  $F_n^{PR}$ –estimator is better than  $F_n^p$ –estimator.

## REFERENCES

1. Kaplan E.L and Meier P. "Nonparametric estimation from incomplete observation", *J. Am. Stat. Assoc.*, **53**, 457-481 (1958).
2. Abdushukurov A. A. "Nonparametric estimation of the distribution function based on relative-risk function", *Commun. Stat.: Theory Meth.*, **27**, 1991-2012 (1998).
3. Abdushukurov A. A. "On nonparametric estimation of reliability indices by censored samples", *Theory Probab. Appl.*, **43**, 3-11 (1999).
4. Abdushukurov A. A. "Estimation of Unknown Distributions from Incomplete Observations and their Properties", LAP Lambert Academic, Saarbrücken, (2011).
5. Abdushukurov A.A. "Nonparametric estimation in proportional hazards model of random censorship", *VINITI* **3448** (B87) (1987).
6. Cheng P.E. and Lin G.D. "Maximum likelihood estimation of survival function under the Koziol-Green proportional hazards model", *Stat. Probab. Lett.*, **5**, 75-80(1987).
7. Csörgö S. "Estimation in the proportional hazards model of random censorship", *Statistics*, **19**, 437-463 (1988).
8. Nadaraya E. A. "On estimating regression", *Probab. Theor. Relat. Fields*, **61**, 405-415 (1964).
9. Watson G. S. "Smooth regression analysis", *Sankhya, Ser. A* **26**, 359-372 (1964).
10. Dikta J. "On semiparametric random censorship models", *J. Stat. Plann. Infer.*, **66**, 253-279 (1998).
11. Cao R., Lopez-de-Ullibarri I., Janssen P and Veraverbeke N. "Presmoothed Kaplan-Meier and Nelson- Aalen estimators", *J. Nonparam. Stat.*, **17**, 31-56(2005).
12. Jacome M. A and Cao R. "Almost sure asymptotic representation for the presmoothed distribution and density estimators for censored data", *Statistics*, **41**, 517-534 (2007).
13. Abdushukurov A.A., Nurmukhamedova N.S., Bozorov S.B. "Nonparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative - Risk Function", ISSN 1995-0802, Lobachevskii journal of mathematics, 2021, Vol. 42, No. 2, 257-268. Pleiades Publishing, Ltd., 2021. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1134/S1995080221020049.pdf>.

## REZYUME

Biz ushbu maqolada taqsimot funksiyasini o'ng tomondan tasodifiy senzurlanishli modelda umr davomiyligi funksiyasini noparametrik baholashni solishtirma ko'rib chiqdik. Umr davomiyligi funksiyasi uchun yangi oldindan silliqlangan darajadagi tavakkalliklar nisbatini bahosini taklif qildik va uni kichik kvadratlar usulidan foydalanib sonli usulda mavjud baholardan effektiv ekanligini ko'rsatdik.

**Kalit so'zlar:** Tasodifiy senzurlash, ko'paytma limiti, tavakkalliklar nisbati, oldindan silliqlangan, proporsional tavakkalliklar, asimptotik xossalari, kuchli asoslilik.

## РЕЗЮМЕ

В данной статье рассмотрена и сравнена непараметрическая оценка жизненной продолжительности в модели случайного цензурирования функции распределения с правой стороны. Нами была предложена оценка отношения рисков новым сглаженным уровнем для функции продолжительности жизни и показали ее эффективность от существующих оценок при помощи малых квадратных методов.

**Ключевые слова:** случайное цензурирование, производительный лимит, отношение риска, сглаженный, пропорциональные риски, асимптотические свойства, мощная обоснованность.

UDC 519.21

 **$M|G|1|N$  VA  $GJ|M|1|N - 1$  SISTEMALAR BANDLIK DAVRLARI O'RTA QIYMATLARI O'RTASIDA IKKILANMA MUNOSABATLAR****O'.Bozorova \*****REZYUME**

Ushbu ishning maqsadi  $M|G|1|N$  va  $GJ|M|1|N - 1$  sistemalar bandlik davri o'рта qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatish va uning ayrim tadbirlarini ko'rsatish. Jumladan,  $GJ|M|1$  kutishli sistema bandlik davri o'рта qiymati ikkinchi usulda nisbatan oson keltirib chiqariladi. Shuningdek,  $GJ|M|1|N - 1$  sistema bandlik davri o'рта qiymati uchun asimptotik formula isbot qilinadi.

**Kalit so'zlar:** Bandlik davri, navbat uzunligi, o'рта qiymat, ikkilanmalik, statsionar taqsimot.

**KIRISH**

Tasodifiy jarayonlar bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechishda ba'zan turli tasodifiy jarayonlarning taqsimotlari o'rtasida shunday munosabatlarni o'rnatish mumkinki, ular yordamida bir tasodifiy jarayon uchun olingan natijalarni ikkinchi tasodifiy jarayonga o'tkazish mumkin bo'ladi yoki ushbu munosabatlar bir qator yangi natijalarni nisbatan oson olish imkonini beradi. Bunday munosabatlar odatda ikkilanma munosabatlar deyiladi.

Ommaviy xizmat ko'rsatish sistemalariga tegishli qator masalalar ikkilanma munosabatlar o'rnatish orqali hal qilingan. Bu bo'yicha ko'plab ilmiy maqolalar chop etilgan. Dastlabki ishlar J.Keylson [5], L.Takach [6], D.N.Shanbxach [7], A.Gxosal[8], A.A.Shaxbazov [9] va boshqalarga tegishli. Keyinchalik, T.A.Azlarov, H.Qurbonovning qator ishlari chop etildi ([10],[11],[12]). Ushbu ishlarda  $M|G|1|N$  va  $GJ|M|1|N - 1$  ikkilanma xizmat ko'rsatish sistemalarining statsionar va nostatsionar navbat uzunliklari taqsimotlari, shuningdek, bandlik davrlari taqsimotlari o'rtasida ikkilanma munosabatlar o'rnatiladi.

Ushbu ishda  $M|G|1|N$  va  $GJ|M|1|N - 1$  sistemalar bandlik davri o'рта qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatiladi va uning ayrim tadbirlari ko'rsatiladi. Jumladan,  $GJ|M|1$  kutishli sistema bandlik davri o'рта qiymati ikkinchi usulda nisbatan oson keltirib chiqariladi. Shuningdek,  $GJ|M|1|N - 1$  sistema bandlik davri o'рта qiymati uchun asimptotik formula isbot qilinadi.

**MASALANING QO'YILISHI VA ASOSIY NATIJALAR BAYONI**

Quyidagi  $F_{1N}$ -  $M|G|1|N$  va  $F_{2N}$  - $GJ|M|1|N - 1$  bir kanalli ikkilanma xizmat ko'rsatish sistemalarini qaraymiz:  $F_{1N}$  sistemada talablarning kelish momentlari orasidagi vaqt uzunliklari va  $F_{2N}$  sistemada xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari bir xil

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0, \end{cases}$$

\*O'.Bozorova – Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Universitet xiyoboni Bulvar 15, Samarqand 140104, O'zbekiston. ogiloy.bozorova@mail.ru

taqsimotga ega;

$F_{1N}$  sistemada xizmat ko'rsatish vaqti uzunliklari va  $F_{2N}$  sistemada talablarning kelish momentlari o'rtasidagi vaqt uzunliklari o'zaro bog'liq bo'lmagan va bir xil  $B(x)[B(x+0) = 0]$  taqsimot funksiyasiga hamda  $\mu^{-1}$  o'рта qiymatga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni tashkil etadi; talablarga ularning kelish tartibida xizmat ko'rsatiladi;

kutish joylari soni  $F_{1N}$  sistemada  $N(N \geq 1)$  ga,  $F_{2N}$  sistemada esa  $N - 1$  ga teng.

Ushbu belgilashlarni kiritaylik:

$\zeta_{1k} - F_{1k}$ ,  $k \geq 1$ , sistemaning bandlik davri;

$\zeta_{2N} - F_{2N}$  sistemaning bandlik davri;

$\rho_1 = \lambda\mu^{-1}$  va  $\rho_2 = \mu\lambda^{-1}$  mos holda  $F_{1N}$  va  $F_{2N}$  sistemalarning yuklanishi;

$\bar{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x)$ ,  $Res \geq 0$ ;

$\bar{g}_N(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_{1N} < x)$ ,  $Res \geq 0$ ;

$\bar{f}_N(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dP(\zeta_{2N} < x)$ ,  $Res \geq 0$ .

Qaralayotgan ishda  $M\zeta_{1N}$  va  $M\zeta_{2N}$  miqdorlar o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatiladi va uning ayrim tadbirlari o'rganiladi. Ushbu miqdorlar va ularning asimptotik holatlari [1] va [2] ishlarda tadhiq qilingan. Bu yerda esa  $M\zeta_{1N}$  uchun olingan natijalar o'rnatiladigan ikkilanma munosabat yordamida to'g'ridan to'g'ri  $M\zeta_{2N}$  ga o'tkaziladi.

**1-teorema.**  $N \geq 1$  da ushbu munosabat o'rinli:

$$M\zeta_{2N} = \frac{M\zeta_{1N} - \mu^{-1}}{\lambda(M\zeta_{1N} - M\zeta_{1N-1})}. \quad (1)$$

**2-teorema.** Quyidagi munosabat o'rinli:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_{2N} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(1-r)}, \rho_2 < 1, \\ \infty, \rho_2 \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

bu yerda  $r - v = \bar{b}(\lambda - \lambda v)$  tenglamaning birdan farqli eng kichik yechimi.

**Izoh.** (2) natija [2] ishda olingan. Bu yerda esa (1) tenglikdan bevosita keltirib chiqariladi.

**3-teorema.** Ixtiyoriy  $\rho_2$  uchun  $N \geq 3$  da ushbu munosabat o'rinli:

$$M\zeta_{2N} = \frac{\lambda\sigma^2}{2} \cdot \frac{b^N - 1}{\rho_2 - 1} \cdot b_{2N}, \quad (3)$$

bu yerda

$$\limsup_{N, \rho_2} b_{2N} = \liminf_{N, \rho_2} = 1, b = 1 + \frac{2(\rho_2 - 1)}{\rho_2\lambda^2\sigma^2}.$$

**1-teoremaning isboti.** [3] ishda  $\bar{g}_N(s)$  funksiya uchun quyidagi munosabat o'rinli ekanligi ko'rsatilgan:

$$\bar{g}_N(s) = \frac{\Delta_{N-1}(s)}{\Delta_N(s)}, \quad (4)$$

bu yerda  $\Delta_k(s)$  quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k(s) = \frac{v\bar{b}(s) - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)}{(1-v)[v - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)]}. \quad (5)$$

Agar  $\Delta_k(0) = 1$  deb qabul qilsak, u holda (4) formuladan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{1 - \bar{g}_N(s)}{s} = \frac{1}{\Delta_N(s)} \cdot \frac{\Delta_N(s) - \Delta_{N-1}(s)}{s}.$$

Bu yerdan  $s \rightarrow 0$  da ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$M\zeta_{1N} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta_N(s) - \Delta_{N-1}(s)}{s}. \quad (6)$$

(5) munosabatga ko'ra

$$(1 - v) \sum_{k=0}^{\infty} v^k \Delta_k(s) = \frac{v(1 - \bar{b}(s))}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} + 1$$

yoki

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k (\Delta_k(s) - \Delta_{k-1}(s)) = \frac{(1 - \bar{b}(s))}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} \quad (7)$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini  $s$  ga bo'lib,  $s \rightarrow 0$  da limitga o'tib, ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_{1k} = \frac{v}{\mu[b(\lambda - \lambda v) - v]}. \quad (8)$$

Shuningdek, [2] ishda quyidagi formula isbot qilingan:

$$f_N(s) = 1 - \frac{sP_{N-1}(s)}{Q_{N-1}(s) - Q_{N-2}(s)}, \quad N \geq 2, \quad (9)$$

bu yerda  $P_k(s)$  va  $Q_k(s)$  ushbu munosabatlardan aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k(s) = \frac{1}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v} \cdot \frac{1 - \bar{b}(s + \lambda - \lambda v)}{s + \lambda - \lambda v},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k Q_k(s) = \frac{1}{\bar{b}(s + \lambda - \lambda v) - v}, \quad (10)$$

(9) ga ko'ra

$$\frac{1 - \bar{f}_N(s)}{s} = \frac{P_{N-1}(s)}{Q_{N-1}(s) - Q_{N-2}(s)} \quad (11)$$

yoki  $s \rightarrow 0$  da

$$M\zeta_{2N} = \frac{P_{N-1}(s)}{Q_{N-1}(s) - Q_{N-2}(s)}, \quad (12)$$

bu yerda  $P_k = P_k(0)$  va  $Q_k = Q_k(0)$  (10) dan bevosita kelib chiqadigan quyidagi hosil qiluvchi funksiyalar orqali aniqlanadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k P_k = \frac{1}{\bar{b}(\lambda - \lambda v) - v} \cdot \frac{1 - \bar{b}(\lambda - \lambda v)}{\lambda(1 - v)}, \quad (13)$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k Q_k = \frac{1}{\bar{b}(\lambda - \lambda v) - v}. \quad (14)$$

Bu tengliklarga ko'ra

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} v^k (P_k - P_{k-1}) = \frac{1 - v}{\bar{b}(\lambda - \lambda v a) - v},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^k (Q_k - Q_{k-1}) = \frac{1 - v}{\bar{b}(\lambda - \lambda v a) - v}.$$

Ushbu tengliklarga ko'ra

$$Q_{N-1} - Q_{N-2} = \lambda(P_{N-1} - P_{N-2})$$

va (12) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$M\zeta_{2N} = \frac{P_{N-1}}{\lambda(P_{N-1} - P_{N-2})} \quad (15)$$

(13) dan ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$\frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P_k = \frac{v}{\mu[\bar{b}(\lambda - \lambda v) - v]} - \frac{v}{\mu(1 - v)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_{1N} - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} v^k.$$

Bu yerdan

$$\frac{\lambda}{\mu} P_{N-1} = M\zeta_{1N} - \frac{1}{\mu}$$

yoki

$$P_{N-1} = \frac{\mu}{\lambda} M\zeta_{1N} - \frac{1}{\lambda}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bunga ko'ra (15) dan (1) tenglik kelib chiqadi. ■

**2-teoremaning isboti.** [1] ishda quyidagi asimptotik munosabat isbot qilingan:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M\zeta_{1N-k}}{M\zeta_{1N}} = \begin{cases} r, \rho_1 \geq 1, \\ 1, \rho_1 < 1. \end{cases} \quad (16)$$

Ma'lumki ([4]),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\zeta_{1N} = \begin{cases} \frac{1}{\mu(1-\rho_1)}, \rho_1 < 1, \\ \infty, \rho_1 \geq 1 (\rho_2 \leq 1). \end{cases}$$

Agar  $\rho_1 = \frac{1}{\rho_2}$  tenglik e'tiborga olinsa, (1) dan (16) ga ko'ra (2) kelib chiqadi. ■

**3-teoremaning isboti.** [12] ishda quyidagi munosabat ko'rsatilgan:

$$M\zeta_{1N} = \frac{1 - b^{-N}}{\lambda(1 - \rho_1)} b_{1N}, \quad (17)$$

bu yerda

$$b = 1 + \frac{2(1 - \rho_1)}{\lambda^2 \sigma^2}, N \geq 2,$$

$$\limsup_{\rho_1 N} b_{1N} = \liminf_{\rho_1 N} b_{1N} = 1.$$

(17) munosabatga ko'ra (1) dan ushbu tenglikga ega bo'lamiz:

$$M\zeta_{2N} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda(1-\rho)}(1 - b^{-N})b_{1N} - \mu^{-1}}{\frac{1}{\lambda(1-\rho_1)}[(1 - b^{-N})b_{1N} - (1 - b^{-N+1})b_{1N-1}]} = \frac{b^N - 1}{\lambda(1 - \rho_1)} \cdot \frac{[b_{1N} - \frac{\rho_1(1-\rho_1)}{1-b^{-N}}]}{\frac{2}{\lambda^2 \sigma^2} + 0(1 - \rho_1)}. \quad (18)$$

Agar  $\rho_1 = \rho_2^{-1}$  ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (18) tenglikdan teoremaning isboti kelib chiqadi. ■

**Misol.**  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ,  $\mu > 0$ ,  $x > 0$ , bo'lsin. U holda

$$\bar{b}(\lambda - \lambda v) = \mu \int_0^\infty e^{-\lambda(1-v)x} e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1 - v)}.$$

Bunga asosan (8) ga ko'ra ushbu munosabatga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_{1k} &= \frac{v}{\mu(\frac{\mu}{\mu + \lambda(1-v)} - v)} = \\ \frac{v}{\mu(\frac{1}{1 + \rho_1(1-v)} - v)} &= \frac{v(1 + \rho_1 - \rho_1 v) - 1 + 1}{\mu(1 - v(1 + \rho_1 - \rho_1 v))} = \frac{1}{\mu(\rho_1 v^2 - (1 + \rho_1)v + 1)} - \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Viyet teoremasiga asosan

$$\rho_1 v^2 - (1 + \rho_1)v + 1 = \rho_1(v - 1)(v - \frac{1}{\rho_1}) = (1 - v)(1 - \rho_1 v)$$

Demak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_{1k} = \frac{1}{\mu(1 - v)(1 - \rho_1 v)} - \frac{1}{\mu} \quad (19)$$

$\frac{1}{1-v}$  va  $\frac{1}{1-\rho_1 v}$  funksiyalarni  $|v| < \min(1, \frac{1}{\rho_1})$  sohada qatorga yoyib,

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^k M\zeta_{1k} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \sum_{i=0}^k \rho_1^i = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{1 - \rho_1^{k+1}}{1 - \rho_1}. \quad (20)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Darajali qatorlarning tenglik shartiga ko'ra (20)dan

$$M\zeta_{1N} = \frac{1 - \rho_1^{N+1}}{\mu(1 - \rho_1)} \quad (21)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi (21) tenglikga ko'ra (1) dan  $M\zeta_{2N}$  ni topish qiyin emas:

$$M\zeta_{2N} = \frac{(1 - \rho_1^{N+1})(1 - \rho_1)^{-1} - 1}{\lambda(1 - \rho_1)^{-1}(\rho_1^N - \rho_1^{N+1})} = \frac{1 - \rho_1^{N+1} - 1 + \rho_1}{\lambda\rho_1^N(1 - \rho_1)} = \frac{\rho_1(1 - \rho_1^N)}{\lambda\rho_1^N(1 - \rho_1)} = \frac{\rho_1^{-N} - 1}{\lambda(\rho_1^{-1} - 1)}.$$

Ushbu tenglikdan  $\rho_2 = \rho_1^{-1}$  da quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$M\zeta_{2N} = \frac{1 - \rho_2^N}{\lambda(1 - \rho_2)}.$$

### Xulosa

Ushbu ishda  $M|G|1|N$  va  $GJ|M|1|N - 1$  sistemalar bandlik davri o'rta qiymatlari o'rtasida ikkilanma munosabat o'rnatildi va uning ayrim tadbirlari ko'rsatildi. Jumladan,  $GJ|M|1$  kutishli sistema bandlik davri o'rta qiymati ikkinchi usulda nisbatan oson keltirib chiqarildi. Shuningdek,  $GJ|M|1|N - 1$  sistema bandlik davri o'rta qiymati uchun asimptotik formula isbot qilindi.

### ADABIYOTLAR

1. Курбанов Х. Некоторые предельные теоремы, связанные со средним значением периода занятости системы с ограниченной очередью. Сб. науч. тр. СамГУ, 1990, 61-64 стр.
2. Азларов Т.А., Тахиров А. Случайные процессы и статистические выводы, Ташкент, Фан, 1974, 14 стр.
3. Harris Т. J. The remaining busy period of finite queue. Oper. Res., v19, 1971, 79-82 pg.
4. Климов Г. Б. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 62-67 стр.
5. Keilson J. Some comments on single server queuing methods and some new results. Proc. Cambridge Philos. Soc, 1964, 60, №2, 237-251.
6. Takacs L. Combinatorial methods in the theory of queues. Rev. Jnat. internat. Statist., 1964, 32, №3, 207-219.
7. Shanbhag D. N. On a duality principle in the theory of queues. Operat. Res., 1966, 14, №5, 947-949.
8. Chosal A. Some remarks about the duality relation in queues. Acta math. Acad. Scient. hung., 1968, 19, №1-2, 163-170.
9. Шахбазов А. А. Об одном соотношении двойственности в теории массового обслуживания. Изв. АН УзССР, 1975, №3, 104-108.
10. Азларов Т. А., Курбанов Х. Соотношение двойственности для нестационарных распределений систем  $M|G|1|N$  и  $GJ|M|1|N$ . Доклада АН УзССР, 1980, №10, 3-4.

11. Азларов Т.А., Курбанов Х. Соотношение двойственности для распределений длины очереди систем  $M|G|1|N$  и  $GJ|M|1|N - 1$ . Изв.АН УзССР,серия физ.-мат.наук, 1982, №1, 3-8.
12. Курбанов Х. Соотношение двойственности и переходные явления в системах с ограниченной очередью. Дисс.на соискание уч.ст.кандидата ф.м.н., Ташкент, 1986, 122 стр.

### РЕЗЮМЕ

Цель этой работа установить соотношении двойственности между средними значениями периода занятости систем  $M|G|1|N$  и  $GJ|M|1|N - 1$  и показать некоторые ее применения. В частности, среднее значение периода занятости системы ожидания  $GJ|M|1$  относительно легко выводится вторым способом. Также доказана асимптотическая формула для среднего значения периода занятости системы  $GJ|M|1|N - 1$ .

**Ключевые слова:** Период занятости, длина очереди, средняя величина, двойственность, стационарные распределение.

### RESUME

The purpose of this paper is to show the duality relations between the mean values of busy period of the queueing systems  $M|G|1|N$  and  $GJ|M|1|N - 1$  and to show some of its applications. In particular, the mean value of the waiting period of the  $GJ|M|1$  waiting system is relatively easy to output in the second way. An asymptotic formula for the mean value of busy period of the system  $GJ|M|1|N - 1$  is also proved.

**Key words:** Busy period, queue length, mean value, duality, stationary distribution.

UDC 517.98

**THE EXISTENCE OF NOT TRANSLATION INVARIANT TWO PERIODIC  
GRADIENT GIBBS MEASURES ON CAYLEY TREE OF ARBITRARY  
ORDER**

Ilyasova R.A. \*

**Abstract.** In this paper the condition for the existence of not translation invariant two periodic gradient Gibbs measures is found. Boundary law vectors are constructed using the normal subgroup of index two on the group representation of Cayley tree.

**Key words:** SOS model, gradient configuration, G-admissible configuration, spin values, Cayley tree, gradient Gibbs measure, periodic boundary law.

**Definition 1.** A family of vectors  $\{l_{xy}\}_{\langle x,y \rangle \in \vec{L}}$  with  $l_{xy} \in (0, \infty)^{\mathbb{Z}}$  is called a boundary law for the transfer operators  $\{Q_b\}_{b \in L}$  if for each  $\langle x, y \rangle \in \vec{L}$  there exists a constant  $c_{xy} > 0$  such that the consistency equation

$$l_{xy}(\omega_x) = c_{xy} \prod_{z \in \partial x \setminus \{y\}} \sum_{\psi_z \in \mathbb{Z}} Q_{zx}(\omega_x - \psi_z) l_{zx}(\psi_z) \quad (1)$$

holds for every  $\omega_x \in \mathbb{Z}$ . A boundary law is called  $q$ -periodic if  $l_{xy}(\omega_x + q) = l_{xy}(\omega_x)$  for every oriented edge  $\langle x, y \rangle \in \vec{L}$  and each  $\omega_x \in \mathbb{Z}$ .

Let  $G_k$  be a free product of  $k + 1$  cyclic groups of the second order with generators  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ , respectively.

It is known that there exists a one to one correspondence between the set of vertices  $V$  of the Cayley tree  $\Gamma^k$  and the group  $G_k$ .

Let  $N_k = \{1, \dots, k + 1\}$  and

$$H_A = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is even} \right\}.$$

By proposition 1.5 in ([6]) for any  $\emptyset \neq A \subseteq N_k$ , the set  $H_A \subset G_k$  is a normal subgroup of index two.

Now we define the boundary law corresponding to  $A = N_k$  in the following form:

$$l_{xy} = \begin{cases} l_{xy}^{(1)}, & \text{if } x \in H_A \text{ and } y \in G_k \setminus H_A \\ l_{xy}^{(2)}, & \text{if } y \in H_A \text{ and } x \in G_k \setminus H_A \end{cases}$$

In SOS-model on Cayley tree,  $\Phi$  is the unbounded nearest-neighbour potential with

$$\Phi_{\langle x,y \rangle}(\omega_x, \omega_y) = |\omega_x - \omega_y| \text{ and } \Phi_{\{x\}} \equiv 0.$$

---

\*Ilyasova R.A. – National University of Uzbekistan, ilyasova.risolat@mail.ru

For any  $y \in V$  and  $x \in S(y)$  (so that  $d(x^0, y) = d(x^0, x) - 1$ ), for convenience of notation we set

$$z_{i,x} := \frac{l_{xy}^{(1)}(i)}{l_{xy}^{(1)}(0)}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad t_{i,x} := \frac{l_{xy}^{(2)}(i)}{l_{xy}^{(2)}(0)}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

Let we are given a graph  $G$ . We use it to define a  $G$ -admissible configurations as follows. **Definition 2.** ([10]) A configuration  $\sigma$  is called a  $G$ -admissible configuration on the Cayley tree, if  $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$  is the edge of the graph  $G$  for any pair of nearest neighbors  $x, y$  in  $V$ . We let  $\Omega^G$  denote the set of  $G$ -admissible configurations.

Let  $L(G)$  be the set of edges of a graph  $G$ . We let  $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  denote the adjacency matrix of the graph  $G$ , i.e.,

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1 & \text{if } \{i, j\} \in L(G) \\ 0 & \text{if } \{i, j\} \notin L(G) \end{cases}$$

Then system of boundary law equations (1) corresponding to SOS model on the  $G$ -admissible configurations becomes:

$$\begin{cases} z_i = \left( \frac{a_{i,0}\theta^{|i|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} a_{i,j}\theta^{|i-j|}t_j}{a_{0,0} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} a_{0,j}\theta^{|j|}t_j} \right)^k \\ t_i = \left( \frac{a_{i,0}\theta^{|i|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} a_{i,j}\theta^{|i-j|}z_j}{a_{0,0} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} a_{0,j}\theta^{|j|}z_j} \right)^k \end{cases}, \quad i \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Let  $G$  is complete graph with loops in every vertex. Then using this transfer operator and the parameter  $\theta = e^{-J\beta}$  ( $0 < \theta < 1$ ) the system of equations (2) for our model now reads

$$\begin{cases} z_i = \left( \frac{\theta^{|i|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{|i-j|}t_j}{1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{|j|}t_j} \right)^k \\ t_i = \left( \frac{\theta^{|i|} + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{|i-j|}z_j}{1 + \sum_{j \in \mathbb{Z}_0} \theta^{|j|}z_j} \right)^k \end{cases}, \quad i \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3)$$

For  $q = 2$  we study  $q$ -periodic not translation-invariant solutions of (3) and assume  $u_i = \sqrt[k]{z_i}$  and  $v_i = \sqrt[k]{t_i}$ . In this case, the sequence is

$$l^{(1)} = (\dots, u_1, 1, u_1, 1, u_1, \dots)$$

$$l^{(2)} = (\dots, v_1, 1, v_1, 1, v_1, \dots)$$

by denoting  $u_1 := x$  and  $v_1 := y$  we get the following system of equations:

$$\begin{cases} x = \left( \frac{2\theta^2 y - \theta^2 + 2\theta + 1}{2\theta y + \theta^2 + 1} \right)^k \\ y = \left( \frac{2\theta^2 x - \theta^2 + 2\theta + 1}{2\theta x + \theta^2 + 1} \right)^k \end{cases} \quad (4)$$

**Theorem 1.** Let  $\theta \in \left(0, \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}\right)$ . For the SOS model with the parameter  $\theta = e^{-J\beta}$  there exists exactly three 2- height periodic GGMs corresponding to normal subgroup of index two on the Cayley tree of order  $k > 1$ . While one of them is translation-invariant, and the other two  $H_A$ -periodic (not translation-invariant).

*Proof.* Let us analyze the properties of the following function to find solutions of the system (4) which is equivalent to  $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x) \end{cases}$ , where

$$f(x) = \left(\frac{(\theta^2 + 1)x + 2\theta}{2\theta x + \theta^2 + 1}\right)^k. \quad (5)$$

Case 1. Assume  $x = y$ . In this case we obtain the equation  $x = f(x)$ . The function  $f(x)$  is bounded, strictly increasing ( $\theta^2 + 1 > 2\theta$ ) for  $x > 0$ , since  $f(0) = \left(\frac{2\theta}{1 + \theta^2}\right)^k > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left(\frac{\theta^2 + 1}{2\theta}\right)^k$  and

$$f'(x) = \frac{k(\theta + 1)^2(\theta - 1)^2 f(x)}{((\theta^2 + 1)x + 2\theta)(2\theta x + \theta^2 + 1)} < 0. \quad (6)$$

Therefore, in this case we have the unique solution which is  $x = y = 1$ .

Case 2. Assume  $x \neq y$ . Let us find the conditions for the existence of  $x \neq y$  solutions of our system. To do this, we will study the equation

$$f(f(x)) = x. \quad (7)$$

Since the function  $f(x)$  is invertible for  $x > 0$ , we consider the last equation in the form  $f(x) = f^{-1}(x) := g(x)$ , where

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{(\theta^2 + 1)\sqrt[k]{x} - 2\theta}{-2\theta\sqrt[k]{x} + \theta^2 + 1}$$

Since  $f(x) > 0$ , then  $g(x) > 0$ , hence we have

$$\left\{x_1 = \left(\frac{2\theta}{\theta^2 + 1}\right)^k < x < \left(\frac{\theta^2 + 1}{2\theta}\right)^k = x_2.\right. \quad (8)$$

Note that by finding the solutions of the equation  $h(x) = 0$  of the function  $h(x) = \ln \frac{f(x)}{g(x)} = \ln f(x) - \ln g(x)$  we will get the same solution set to the equation (7). It is clear that  $x = 1$  is a solution to this equation, i.e.  $h(1) = 0$ . Using derivatives (6) and

$$g'(x) = \frac{(\theta + 1)^2(\theta - 1)^2 g(x)}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}[(\theta^2 + 1)\sqrt[k]{x} - 2\theta][-2\theta\sqrt[k]{x} + \theta^2 + 1]}$$

we have

$$h'(x) = \frac{k(\theta + 1)^2(\theta - 1)^2}{((\theta^2 + 1)x + 2\theta)(2\theta x + \theta^2 + 1)} - \frac{(\theta + 1)^2(\theta - 1)^2}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}[(\theta^2 + 1)\sqrt[k]{x} - 2\theta][-2\theta\sqrt[k]{x} + \theta^2 + 1]}.$$

Denoting  $\sqrt[k]{x} = t$ , we rewrite the derivative  $h'(x)$  as follows

$$\phi(t) = \frac{(\theta + 1)^2(1 - \theta)^2 p(t)}{kt^{k-1}((\theta^2 + 1)t^k + 2\theta)(2\theta t^k + \theta^2 + 1)[(\theta^2 + 1)t - 2\theta](-2\theta t + 2\theta^2)}$$

where

$$p(t) = 2\theta(\theta^2 + 1)t^{2k} + 2k^2\theta(\theta^2 + 1)t^{k+1} - (k^2 - 1)(\theta^4 + 6\theta^2 + 1)t^k + 2\theta k^2(\theta^2 + 1)t^{k-1} + 2\theta^3 + 2\theta.$$

Note that, by Descartes' theorem on positive solutions of the polynomial  $p(t)$ ,  $h'(x)$  has at most two positive solutions.

It's easy to check that

$$\lim_{x \rightarrow x_1} h(x) = +\infty, \quad h(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_2} h(x) = -\infty$$

Hence, the equation  $h(x) = 0$  has at least one solution  $x_0$  for  $x < 1$  and at least one solution  $x'_0$  for  $x > 1$  if  $h'(1) > 0$ . From this condition

$$h'(1) = \frac{(\theta + 1)^2(\theta - 1)^2}{k} \cdot \left( \frac{k^2}{(\theta + 1)^4} - \frac{1}{(\theta - 1)^4} \right) > 0 \quad (9)$$

it follows that  $k > \frac{(\theta+1)^2}{(\theta-1)^2}$ , because  $\frac{(\theta+1)^2}{(\theta-1)^2} > 0$ . Besides,

$$\lim_{x \rightarrow x_1} h'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_2} h'(x) = -\infty$$

for  $k > \frac{(\theta+1)^2}{(\theta-1)^2}$ . Then from  $h'(1) < 0$  it follows that the function  $h(x)$  has exactly two critical points  $\xi_1, \xi_2 : x_1 < \xi_1 < 1$  and  $1 < \xi_2 < x_2$ . This means that  $h(x)$  increases at  $x_1 < x < \xi_1, \xi_2 < x < x_2$  and decreases at  $\xi_1 < x < \xi_2$ . Therefore, in this case the equation  $h(x) = 0$  has only two solutions  $x_0 < 1 < x'_0$ . It remains to check the condition  $x \neq y$ . We have solutions  $x_0 < 1 < x'_0$ . Then, because the function  $f(x)$  is strictly decreasing, from the equality  $f(x) = y$  we obtain that  $f(x_0) = y_0 > f(1) = 1 > f(x'_0) = y'_0$ . So, the system of equations (4) has exactly three solutions under the assumption  $\theta \in (0, \theta_{cr})$  and  $k \geq 1$  where

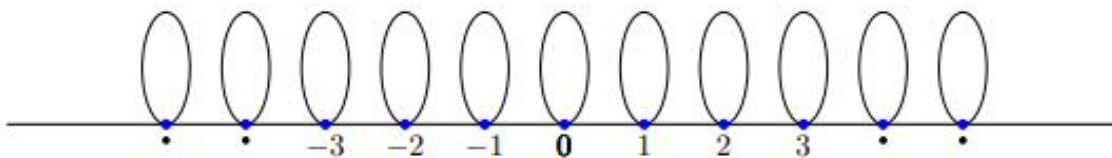
$$\theta_{cr} = \frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1}.$$

This completes the proof.  $\square$

[10] Let us choose the graph  $G$ , defined by (see Fig.2)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \text{ or } |i - j| = 1, \quad i, j \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



Figure 2: The graph  $G$  with the set  $\mathbb{Z}$  of vertices.

Then the system of equations (2) becomes

$$\begin{cases} x = \left( \frac{y + 2\theta}{2\theta y + 1} \right)^k \\ y = \left( \frac{x + 2\theta}{2\theta x + 1} \right)^k \end{cases} \quad (10)$$

**Theorem 2.** Let  $\theta \in \left(0, \frac{k-1}{2k+2}\right)$ . Then the SOS model with the graph  $G$  and the parameter  $\theta = e^{-J\beta}$  there exists exactly three 2-height periodic GGMs corresponding to normal subgroup of index two on the Cayley tree of order  $k > 1$ . While one of them is translation-invariant (see [10]), and the other two  $H_A$ -periodic (not translation-invariant).

*Proof.* It is easy to check that the function  $f(x)$  is bounded and strictly increasing for the values of  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ . Then the proof is similar to the proof of Theorem 1 using the functions

$$f(x) = \left( \frac{x + 2\theta}{2\theta x + 1} \right)^k \quad \text{and} \quad g(x) = f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[k]{x} - 2\theta}{-2\theta \sqrt[k]{x} + 1}$$

In this case the interval (8) for the existence of not translation invariant solutions corresponding to graph  $G$  will be

$$x_1 = \left( \frac{1}{2\theta} \right)^k < x < (2\theta)^k = x_2.$$

After simple calculations we get the following inequality to find not translation invariant solutions of the system (10) which is equivalent to  $h'(1) > 0$  (see (9) in Theorem 1)

$$h'(1) = \frac{(2\theta + 1)(1 - 2\theta)}{k} \cdot \left( \frac{k^2}{(2\theta + 1)^2} - \frac{1}{(1 - 2\theta)^2} \right) > 0.$$

By solving the last inequality we get  $0 < \theta < \frac{k-1}{2k+2}$ .  $\square$

## REFERENCES

1. F. Henning, C. Kulske, A. Le Ny, U.A. Rozikov, Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, Electron. J. Probab. 24 (2019), Paper No. 104, 23 pp.
2. F. Henning, C. Kulske, Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant, Ann. Appl. Probab. 33(4): 3010-3038, (2023).

3. F. Henning, C. Kulske, Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbs measures on trees, *Ann. Appl. Probab.* 31(5): 2284-2310, (2021).
4. F.H. Haydarov, U.A. Rozikov, Gradient Gibbs measures of an SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws, *Reports on Mathematical Physics*, 90(1), (2022), 81-101.
5. C. Kulske, P. Schriever, Gradient Gibbs measures and fuzzy transformations on trees, *Markov Process. Relat. Fields* 23, (2017), 553-590.
6. U.A. Rozikov, Gibbs measures on Cayley trees, *World Sci. Publ. Singapore.* (2013).
7. F. Henning, Gibbs measures and gradient Gibbs measures on regular trees, PhD Thesis, Ruhr University, (2021), p109.
8. U.A. Rozikov, Mirror Symmetry of Height-Periodic Gradient Gibbs Measures of an SOS Model on Cayley Trees, *J Stat Phys* 188, 26 (2022).
9. F.H. Haydarov, R.A. Ilyasova, Gradient Gibbs measures with periodic boundary laws of a generalised SOS model on a Cayley tree, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* (2023), 123101, 12 pp.
10. N.N. Ganikhodjaev, N.M. Khatamov, U.A. Rozikov, Gradient Gibbs measures of an SOS model with alternating magnetism on Cayley trees, *Reports on Mathematical Physics*, Volume 92, Issue 3, 2023, Pages 309-322.
11. R.A. Ilyasova, Height-periodic gradient Gibbs measures for generalised SOS model on Cayley tree, *Uzbek Mathematical Journal*, 2024, Volume 68, Issue 2, pp.92-99.

### REZYUME

Bu maqolada davri ikki bo'lgan translyatsion invariant bo'lmagan gradient Gibbs o'lchovining mavjud bo'lishi sharti topilgan. Chegaraviy qonun vektorlari Keli daraxtining gruppaviy tasvirining indeksi 2 bo'lgan normal qism gruppasi yordamida qurilgan.

**Kalit so'zlar:** SOS model, gradient konfiguratsiya, G-maqbul konfiguratsiya, spin qiymatlar, Keli daraxti, gradient Gibbs o'lchovi, davriy chegaraviy qonun.

### РЕЗЮМЕ

В данной работе найдено условие существования нетрансляционно-инвариантных двух периодических градиентных мер Гиббса. Векторы граничного закона строятся с использованием нормальной подгруппы индекса два в групповом представлении дерева Кэли.

**Ключевые слова:** SOS-модель, градиентная конфигурация, G-допустимая конфигурация, значения спина, дерево Кэли, градиентная мера Гиббса, периодический граничный закон.

UDC 512.745.2

## COMPLETE SYSTEMS OF INVARIANTS OF IRREGULAR CURVES IN A EUCLIDEAN GEOMETRY

Khadjiev D. \*, Bayturaev A. \*

## RESUME

Definitions of a retiring path, a retiring curve, an invariant parametrization of a retiring curve and a retiring length of a curve are introduced. For the group  $M(n)$  of all isometries of an  $n$ -dimensional Euclidean space, the problem of the  $M(n)$ -equivalence of retiring curves is reduced to that of retiring paths. Complete systems of  $G$ -invariants of retiring curves are obtained for  $G = M(n)$  and some its subgroups. Conditions of the global  $G$ -equivalence of retiring curves are given in terms of the retiring length and integral  $G$ -invariants of curves.

**Key words:** Irregular curve, Rectifiable curve, Invariant, Euclidean geometry.

## Introduction

The present paper is devoted to an invariant-theoretic approach to the theory of irregular curves in a Euclidean geometry.

Let  $R^n$  be the  $n$ -dimensional Euclidean space with the scalar product  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ . The classical theory of regular curves in  $R^n$  is accounted in books ([5], p.p.140-155; [8], p.p.158-160; [12], p.p.13-15; [15], p.p.185-194; [19], p.p.61-64). Differential invariants, invariant parametrizations and global properties of regular curves in  $n$ -dimensional Euclidean space are considered in papers [6, 7, 13, 14, 19, 20, 21, 22] and monographs [5,10].

Let  $O(n)$  denote the group of all orthogonal  $n \times n$ -matrices and  $M(n) = \{F : R^n \rightarrow R^n \mid Fx = gx + b, g \in O(n), b \in R^n\}$ , where  $gx$  denotes the product of a matrix  $g$  and a column-vector  $x \in R^n$ . Set  $SO(n) = \{g \in O(n) : \det(g) = 1\}$  and  $SM(n) = \{F : R^n \rightarrow R^n \mid Fx = gx + b, g \in SO(n), b \in R^n\}$ . The Frenet-Serret equations for a regular curve in  $R^n$  give the curvature functions  $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$  of the curve ([8], P. 158-160; [5], P. 140-149). The curvatures  $k_1(s), \dots, k_{n-2}(s)$  are  $M(n)$ -invariant. However, the curvature  $k_{n-1}(s)$  is  $SM(n)$ -invariant but not  $M(n)$ -invariant. For example, the torsion of a curve in  $R^3$  is an  $SM(3)$ -invariant but not  $M(3)$ -invariant function. Therefore, the system of curvatures  $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$  gives the solution to the problem of  $G$ -equivalence of curves only for the group  $G = SM(n)$  ([19], P. 61-64). In the paper [6], the complete system of global differential and integral  $G$ -invariants of a regular curve in Euclidean Geometry is obtained for groups  $G = M(n), SM(n)$ .

The classical theory of curves in the Euclidean space  $R^n$  does not work if, for instance, the curve is not differentiable or first several derivatives of the radius-vector of the curve turn to zero. A general theory of irregular curves, which is analogues to the theory of curves in differential geometry, was began by A. D. Alexandrov [1, 2]. In his papers, the turn (integral curvature) of a curve is defined and investigated. The notion of a curve of finite turn appeared

\*Khadjiev D. – Institute of mathematics of Academy of Sciences of Uzbekistan, khadjavvat@gmail.com

\*Bayturaev A. – National University of Uzbekistan, abayturaev@mail.ru

in mathematics for the first time in Radons paper [18] devoted to potential theory on the plane. The theory of Alexandrov was modified and developed in works ([3, 4, 17, 18]). The concept of the torsion of irregular curves in  $R^3$  was defined and investigated ([3], p. 217). Analogs of Frenet formulas and theorems on natural parametrizations for irregular curves in  $R^3$  are given ([3], pp.268-280). It is proved ([3], p. 279, Theorem 9.2.4) that the trio  $(s(u), \kappa(u), \tau(u))$  is a complete system of  $SO(3)$ -invariants of a curve in  $R^3$ , where  $s(u)$  is the length,  $\kappa(u)$  is the turn and  $\tau(u)$  is the complete torsion of a curve. Theory of generalized integral curvatures of curves are considered in the works by I. F. Majnick (see references in [3, 18]).

In the present paper, we develop other approach to the theory of irregular curves.

This paper is organized as follows. In Section 1, definitions of a retiring path, a retiring curve, a retiring type of a curve, an invariant parametrization of a retiring curve and a retiring length of a curve are introduced. It is proved that an invariant parametrization of a retiring curve with a fixed retiring type is unique (Proposition 4). The problem of the  $G$ -equivalence of retiring curves is reduced to that for retiring paths, where  $G$  is an arbitrary subgroup of  $M(n)$  (Theorem 1). In Section 2, complete systems of the  $G$ - invariants of a retiring path and a retiring curve are obtained for groups  $G = M(n), SM(n), O(n), SO(n)$  (Theorems 2-3, Corollaries 1-6). The conditions of the global  $G$ - equivalence of retiring curves are given in terms of the retiring length of a curve and the system of the integral  $G$ - invariants of a curve.

## 1. Invariant parametrizations of a continuous curve and the theorem on reduction

Let  $I = [a, b]$  be a segment of the field of real numbers  $R$ .

**Definition 1.** A continuous mapping  $x : I \rightarrow R^n$ , will be called a continuous  $I$ -path (path, for short) in  $R^n$ .

**Definition 2.** Let  $I_1 = [a, b], I_2 = [c, d]$ . A continuous  $I_1$ -path  $x(t)$  and a continuous  $I_2$ -path  $y(r)$  in  $R^n$  will be called  $D$ -equivalent if a homeomorphism  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  exists such that  $\varphi(c) = a$  and  $y(r) = x(\varphi(r))$  for all  $r \in I_2$ . A class  $\alpha$  of  $D$ -equivalent continuous paths in  $R^n$  will be called a continuous curve in  $R^n$ . A path  $x \in \alpha$  will be called a parametrization of  $\alpha$ .

**Remark 1.** This definition is an analog of Definition 2 in [11] for continuous curves and it coincides with the notion of an oriented curve in ([3], p. 6).

Let  $x(t)$  an  $I$ -path. Then  $Fx(t)$  is also an  $I$ -path in  $R^n$  for any  $F \in M(n)$ . Let  $G$  be a subgroup of  $M(n)$ .

**Definition 3.**  $I$ -paths  $x(t)$  and  $y(t)$  in  $R^n$  are called  $G$  - equivalent if  $y(t) = Fx(t)$  for some  $F \in G$ . This being the case, we write  $x \stackrel{G}{\sim} y$ .

Let  $\alpha = \{h_\tau, \tau \in Q\}$  be a continuous curve in  $R^n$ , where  $h_\tau$  is a parametrization of  $\alpha$ . Then  $F\alpha = \{Fh_\tau, \tau \in Q\}$  is a continuous curve in  $R^n$  for any  $F \in M(n)$ .

**Definition 4.** [11]. Continuous curves  $\alpha$  and  $\beta$  in  $R^n$  are called  $G$  - equivalent if  $\beta = F\alpha$  for some  $F \in G$ . This being the case, we write  $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$ .

Let  $x(t)$  be a continuous  $I$ -path in  $R^n$  and  $\xi = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  is an arbitrary chain in  $I = [a, b]$ . Let us set

$$s(\xi) = \sum_{i=1}^{m-1} \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\|.$$

The least upper boundary of  $s(\xi)$  on the set of all chains of  $[a, b]$  is called a length of the path  $x(t)$  on  $[a, b]$  and is denoted as  $l(x; a, b)$ . The path  $x(t)$  is termed rectifiable on  $[a, b]$  if its length is finite (see [3], p. 29).

Let  $I_1 = [a, b]$ ,  $I_2 = [c, d]$ ,  $x(t)$  is a rectifiable  $I_1$ -path and  $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$  is a homeomorphism such that  $\varphi(c) = a$ . Then  $x(\varphi(r))$  is a rectifiable  $J_2$ -path. A class of  $D$ -equivalent rectifiable paths in  $R^n$  will be called a rectifiable curve in  $R^n$ . Let  $\alpha = \{h_\tau, \tau \in Q\}$  be a rectifiable curve in  $R^n$ , where  $h_\tau$  is a parametrization of  $\alpha$ . Then  $F\alpha = \{Fh_\tau, \tau \in Q\}$  is a rectifiable curve in  $R^n$  for any  $F \in M(n)$ .

**Definition 5.** An  $I$ -path  $x(t)$  is called normal if  $x(t)$  has no segment of constancy, different from one-point sets. A curve  $\alpha$  in  $R^n$  will be called normal if it contains a normal parametrization.

The following proposition is known:

**Proposition 1** ([3], p.p.30-31). Let  $x(t)$  be a normal rectifiable path on  $[a, b]$ . Then the mapping  $l(x; a, \cdot) : [a, b] \rightarrow [0, l(x; a, b)]$  is a homeomorphism such that  $p, q \in I, q < p$  implies  $l(x; a, q) < l(x; a, p)$ .

**Definition 6.** Let  $I = [a, b]$ . An  $I$ -path  $x(t)$  will be called retiring if one of the following conditions hold:

( $r_1$ ). the path  $x(t)$  is a normal rectifiable path on  $[a, b]$  (that is  $p, q \in I, q < p$  implies  $l(x; a, q) < l(x; a, p)$ );

( $r_2$ ). the path  $x(t)$  such that  $p, q \in I, q < p$  implies  $\|x(q) - x(a)\| < \|x(p) - x(a)\|$ ;

( $r_3$ ). the path  $x(t)$  such that  $0 < \langle x(t) - x(a), \frac{x(b)-x(a)}{\|x(b)-x(a)\|} \rangle$  for all  $a < t$  and  $p, q \in I, q < p$  implies  $\langle x(q) - x(a), \frac{x(b)-x(a)}{\|x(b)-x(a)\|} \rangle < \langle x(p) - x(a), \frac{x(b)-x(a)}{\|x(b)-x(a)\|} \rangle$ .

In the case ( $r_k$ ), the path  $x(t)$  will be called a retiring path of the type  $k$ . For every  $k = 1, 2, 3$ , we define the function  $r_k(x)$  on the set of all paths as follows: put  $r_k(x) = 1$  if  $x$  is a retiring path of the type  $k$  and  $r_k(x) = 0$  if it is not the one. The function  $r_k(x)$  will be called a retiring function of the type  $k$  of a path.

**Remark 2.** Let  $(i, j)$  such that  $1 \leq i, j \leq 3$  and  $i \neq j$ . We show existence of a path  $x(t)$  with  $r_i(x) = 0$  and  $r_j(x) = 1$ . It is obvious in the cases  $(i, j) = (2, 1), (3, 1)$ . Examples for cases  $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)$  are given below.

**Example 1.** Let  $I = [-\frac{1}{2}, 0]$ . We define the  $I$ -path  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  in  $R^2$  as follows. Put  $x_1(t) = t$  for all  $t \in I$ . We define the real function  $x_2(t)$  on  $I$  as follows. Put  $x_2(0) = 0$ . For an arbitrary natural number  $m$ , we define the function  $x_2(t)$  on  $[-\frac{1}{2^m}, -\frac{1}{2^{m+1}})$  as follows

$$x_2(t) = \frac{2^{m+2}}{m}t + \frac{4}{m}, \forall t \in [-\frac{1}{2^m}, -\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+2}})$$

and

$$x_2(t) = -\frac{2^{m+2}}{m}t - \frac{2}{m}, \forall t \in [-\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+2}}, -\frac{1}{2^{m+1}}).$$

Then the function  $x_2(t)$  is defined on  $I$  and it is continuous on  $I$ . Hence the path  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  is continuous on  $I$ . It is easy to see that

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \leq l(x; -\frac{1}{2}, 0).$$

Hence  $x(t)$  is not rectifiable on  $I$ . It is obvious that  $x(t)$  is retiring of types 2 and 3. This means that  $r_1(x) = 0, r_2(x) = 1$  and  $r_3(x) = 1$ .

**Example 2.** Let  $I = [0, 1]$ . We define the  $I$ -path  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  in  $R^2$  as follows. For  $t \in [0, \frac{1}{3}]$ , put  $x_1(t) = 0$  and  $x_2(t) = t$ . For  $t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ , put  $x_1(t) = t - \frac{1}{3}$  and  $x_2(t) = \frac{1}{3}$ . For  $t \in (\frac{2}{3}, 1]$ , put  $x_1(t) = t - \frac{1}{3}$  and  $x_2(t) = -t + 1$ . It is easy to see that  $x(t)$  is a continuous path,  $r_2(x) = 1$  and  $r_3(x) = 0$ .

**Example 3.** Let  $I = [0, 1]$ . We define the  $I$ -path  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  in  $R^2$  as follows. For  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ , put  $x_1(t) = t$  and  $x_2(t) = \sqrt{3}t$ . For  $t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , put  $x_1(t) = t$  and  $x_2(t) = -2\sqrt{3}t + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ . For  $t \in (\frac{3}{4}, 1]$ , put  $x_1(t) = t$  and  $x_2(t) = 0$ . It is easy to see that  $x(t)$  is a continuous path,  $r_2(x) = 0$  and  $r_3(x) = 1$ .

It is obviously that:

- (1). if  $x \stackrel{M(n)}{\sim} y$  then  $r_k(x) = r_k(y)$  for all  $k = 1, 2, 3$  that is the function  $r_k(x)$  is  $M(n)$ -invariant for all  $k = 1, 2, 3$ ;
- (2). if  $x, y$  is parametrizations of a curve  $\alpha$  then  $r_k(x) = r_k(y)$  for all  $k = 1, 2, 3$ .

By the property (2), we can define a retiring type of a curve as follows: a retiring type of a parametrization  $x \in \alpha$  will be called a retiring type of a curve  $\alpha$  and denoted by  $r_k(\alpha)$ . It is obviously that if  $\alpha, \beta$  are curves such that  $\alpha \stackrel{M(n)}{\sim} \beta$  then  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$  for all  $k = 1, 2, 3$ . This means that the function  $r_k(\alpha)$  is  $M(n)$ -invariant for all  $k = 1, 2, 3$ .

Let  $I = [a, b]$  and  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of type 1 that is normal rectifiable  $I$ -path in  $R^n$ . Put  $L_1(x) = l(x; a, b)$ , where  $l(x; a, b)$  is the length of  $x(t)$  on  $[a, b]$ . Let  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of type  $k$  in  $R^n$ , where  $k = 2, 3$ . Put  $L_k(x) = \|x(b) - x(a)\|$ . For an arbitrary real number  $L > 0$  and every  $k = 1, 2, 3$ , there exists a retiring  $I$ -path of the type  $k$  such that  $L_k(x) = L$ .

Let  $k = 1, 2, 3$ . It is obviously that:

- (1). if  $x, y$  are retiring paths of the type  $k$  and  $x \stackrel{M(n)}{\sim} y$  then  $L_k(x) = L_k(y)$ ;
- (2). if  $x, y$  is parametrizations of a curve  $\alpha$  of the type  $i$  then  $L_k(x) = L_k(y)$ .

By the property (2), we can define the function  $L_k(\alpha)$  for a curve  $\alpha$  as follows: put  $L_k(\alpha) = L_k(x)$  for  $x \in \alpha$ . The function  $L_k(\alpha)$  is an  $M(n)$ -invariant for all  $k = 1, 2, 3$ . The function  $L_k(\alpha)$  will be called retiring length of a curve  $\alpha$ .

Now we define an invariant parametrization of a retiring curve of the type  $k$  in  $R^n$ . Let  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of the type 1 that is a normal rectifiable curve in  $R^n$ . We define the euclidean length function  $s_1(x; t)$  of the type 1 as follows. We put  $s_1(x; t) = l(x; a, t)$  for all  $t \in I$ , where  $l(x; a, t)$  is the length of  $x(t)$  on the segment  $[a, t]$ . Let  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of the type  $k$  in  $R^n$ , where  $k = 2, 3$ . We define the euclidean length function  $s_k(x; t)$  of the type  $k$  as follows. We put  $s_k(x; t) = \|x(t) - x(a)\|$  for all  $t \in I$ .

By Proposition 1, the function  $s_1(x; t)$  is a homeomorphism  $s_1(x; \cdot) : I \rightarrow [0, L_1(x)]$  such that  $s_1(x; a) = 0$ . Hence the inverse function of  $s_1(x; t)$  exists. Let us denote it by  $t_1(x; s)$ . The domain of  $t_1(x; s)$  is  $[0, L_1(x)]$  and the function  $t_1(x; s)$  is a homeomorphism  $t_1(x; \cdot) : [0, L_1(x)] \rightarrow I$  such that  $t_1(x; 0) = a$ . By the definition of the retiring path of the type  $k = 2, 3$ , the function  $s_k(x; t)$  is a homeomorphism  $s_k(x; \cdot) : I \rightarrow [0, L_k(x)]$  such that  $s_k(x; a) = 0$ . Hence the inverse function of  $s_k(x; t)$  exists. Let us denote it by  $t_k(x; s)$ . The domain of  $t_k(x; s)$  is  $[0, L_k(x)]$  and the function  $t_k(x; s)$  is a homeomorphism  $t_k(x; \cdot) : [0, L_k(x)] \rightarrow I$  such that  $t_k(x; 0) = a$ .

**Proposition 2.** Let  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  and  $x$  is a retiring  $I$ -path of the type  $k$  in  $R^n$ , where  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Then

- (1)  $s_k(x; t_k(x; s)) = s$  and  $t_k(x; s_k(x; t)) = t$  for all  $t \in I$ ,  $s \in [0, L_k(x)]$ ;
- (2)  $s_k(Fx; t) = s_k(x; t)$  and  $t_k(Fx; s) = t_k(x; s)$  for all  $F \in M(n)$ ;
- (3) the equalities  $s_k(x(\varphi); r) = s_k(x; \varphi(r))$  and  $\varphi(t_k(x(\varphi); s)) = t_k(x; s)$  hold for any homeomorphism  $\varphi : J \rightarrow I$  such that  $\varphi(c) = a$ .

**Proof.** (1). Since  $t_k(x; s)$  is the inverse function of  $s_k(x; t)$ , we have  $s_k(x; t_k(x; s)) = s$  and  $t_k(x; s_k(x; t)) = t$  for all  $t \in I$ ,  $s \in [0, L_k(x)]$ .

(2). By the definition of the function  $s_k(x; t)$ , it is  $M(n)$ -invariant that is  $s_k(Fx; t) = s_k(x; t)$  for all  $F \in M(n)$ . This equality implies  $t_k(Fx; s) = t_k(x; s)$  for all  $F \in M(n)$ .

(3). Let  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of the type 1 in  $R^n$ . Then we have  $s_1(x(\varphi); r) = l(x(\varphi); c, r) = l(x; a, \varphi(r)) = s_1(x; \varphi(r))$ . So  $s_1(x(\varphi); r) = s_1(x; \varphi(r))$ . This implies that  $\varphi(t_1(x(\varphi); s)) = t_1(x; s)$ . Let  $x(t)$  be a retiring  $I$ -path of the type  $k$  in  $R^n$ , where  $k = 2, 3$ . Then we have  $s_k(x(\varphi); r) = \|x(\varphi(r)) - x(\varphi(c))\| = s_k(x; \varphi(r))$ . Hence we obtain the equality  $s_k(x(\varphi); r) = s_k(x; \varphi(r))$  for all  $k = 1, 2, 3$ . Using this equality and the equality  $s_k(x; \varphi(r)) = (s_k(x; \cdot) \circ \varphi(\cdot))(r)$ , we obtain  $t_k(x(\varphi); \cdot) = (s_k(x(\varphi); \cdot))^{-1} = (s_k(x; \cdot) \circ \varphi(\cdot))^{-1} = (\varphi(\cdot))^{-1} \circ (s_k(x; \cdot))^{-1} = (\varphi(\cdot))^{-1} \circ (t_k(x; \cdot))$ . Hence  $\varphi(t_k(x(\varphi); s)) = t_k(x; s)$ . Proposition proved.

Let  $\alpha$  be a retiring curve of the type  $k$ , where  $k = 1, 2, 3$ , and  $x \in \alpha$ . Then  $x(t_k(x; s))$  is a parametrization of  $\alpha$ .

**Definition 7.** The parametrization  $x(t_k(x; s))$  of a retiring curve  $\alpha$  of the type  $k$  will be called an invariant parametrization of the type  $k$  of  $\alpha$ .

We denote the set of all invariant parametrizations of the type  $k$  of  $\alpha$  by  $P_k(\alpha)$ . Every  $y \in P_k(\alpha)$  is a retiring  $J$ -path of the type  $k$ , where  $J = [0, L_k(\alpha)]$ .

**Proposition 3.** Let  $\alpha$  be a retiring curve of the type  $k$ ,  $z \in \alpha$  and  $z$  be a  $J$ -path, where  $J = [0, L_k(\alpha)]$ . Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $z$  is an invariant parametrization of the type  $k$  of  $\alpha$ ;
- (2)  $s_k(z; s) = s$  for all  $s \in [0, L_k(\alpha)]$ .

**Proof.** (1)  $\rightarrow$  (2). Let  $z \in P_k(\alpha)$ . Then there exists  $y \in \alpha$  such that  $z(s) = y(t_k(y; s))$ . Let  $I = [a, b]$  be the domain of the definition of  $y(t)$ . We take  $x = y$  and  $\varphi(s) = t_k(y; s)$  in Proposition 2. Then we have  $J = [0, L_k(y)]$ ,  $\varphi = t_k(y; \cdot) : J \rightarrow I$ . By Proposition 2(3), we have  $s_k(y(t_k(y; \cdot)); s) = s_k(y; t_k(y; s))$  and, by Proposition 2(1), we have the equality  $s_k(y; t_k(y; s)) = s$  for every retiring path  $y$  of the type  $k$ . These equalities imply  $s_k(z; s) = s_k(y(t_k(y; \cdot)); s) = s_k(y; t_k(y; s)) = s$ .

(2)  $\rightarrow$  (1). The equality  $s_k(z; s) = s$  implies  $t_k(z; s) = s$ . Hence  $z(s) = z(t_k(z; s)) \in P_k(\alpha)$ .

**Proposition 4.** Let  $\alpha$  be a retiring curve of the type  $k$ . Then there exists the unique invariant parametrization of the type  $k$  of  $\alpha$ .

**Proof.** Let  $x, y \in \alpha$ ,  $x$  be an  $J_1$ -path and  $y$  be an  $J_2$ -path, where  $J_1 = [c_1, d_1]$ ,  $J_2 = [c_2, d_2]$ . Then a homeomorphism  $\varphi : J_2 \rightarrow J_1$  exists such that  $\varphi(c_2) = c_1$  and  $y(r) = x(\varphi(r))$  for all  $r \in J_2$ . Using the equality  $\varphi(t_k(x(\varphi); s)) = t_k(x; s)$  in Proposition 2(3), we obtain  $y(t_k(y; s)) = x(\varphi(t_k(y; s))) = x(\varphi(t_k(x(\varphi); s))) = x(t_k(x; s))$ . The proposition is proved.

Let  $G$  be a subgroup of  $M(n)$ . We note that if curves  $\alpha, \beta$  are retiring curves of the type  $k$  and  $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$  then  $r_k(\alpha) = r_k(\beta) = 1$  and  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$ .

**Theorem 1.** Let  $\alpha, \beta$  be retiring curves,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta) = 1$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  and  $x \in$

$P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Then  $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$  if and only if  $x \stackrel{G}{\sim} y$ .

**Proof.** Let  $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$  and  $h \in \alpha$ . Then there exists  $F \in G$  such that  $\beta = F\alpha$ . This implies  $Fh \in \beta$ . By Propositions 2-4, we get  $x(s) = h(t_k(h; s)), y(s) = (Fh)(t_k(Fh; s))$  and  $Fx(s) = F(h(t_k(h; s))) = (Fh)(t_k(h; s)) = (Fh)(t_k(Fh; s)) = y(s)$ . Thus  $x \stackrel{G}{\sim} y$ . Conversely, let  $x \stackrel{G}{\sim} y$ , that is, there exists  $F \in G$  such that  $Fx = y$ . Then  $\alpha \stackrel{G}{\sim} \beta$ . The theorem is proved.

Theorem 1 reduces the  $G$ -equivalence problem of retiring curves to that of paths.

## 2. Complete systems of invariants

**Proposition 5.** Let  $x(t), y(t)$  be continuous  $I$ -paths, where  $I = [a, b]$ . Then  $x(t) \stackrel{M(n)}{\sim} y(t)$  if and only if  $(x(t) - x(a)) \stackrel{O(n)}{\sim} (y(t) - y(a))$ .

**Proof.**  $\Rightarrow$ . Assume that  $x(t) \stackrel{M(n)}{\sim} y(t)$ . Then there exists  $F \in O(n)$  and  $u \in R^n$  such that  $y(t) = Fx(t) + u$  for all  $t \in I$ . In particular, for  $t = a$ , we have  $y(a) = Fx(a) + u$ . Hence  $y(t) - y(a) = F(x(t) - x(a))$  that is  $(x(t) - x(a)) \stackrel{O(n)}{\sim} (y(t) - y(a))$ .

$\Leftarrow$ . Assume that  $(x(t) - x(a)) \stackrel{O(n)}{\sim} (y(t) - y(a))$ . Then there exists  $F \in O(n)$  such that  $y(t) - y(a) = F(x(t) - x(a))$ . Put  $u = y(a) - Fx(a)$ . Then we have  $y(t) = Fx(t) + u$  for all  $t \in I$  that is  $x(t) \stackrel{M(n)}{\sim} y(t)$ . The proposition is proved.

**Proposition 6.** Let  $x(t), y(t)$  be continuous  $I$ -paths, where  $I = [a, b]$ . Then  $x(t) \stackrel{SM(n)}{\sim} y(t)$  if and only if  $(x(t) - x(a)) \stackrel{SO(n)}{\sim} (y(t) - y(a))$ .

**Proof.** It is similar to the proof of Proposition 5.

**Remark 3.** Propositions 5 and 6 reduce the problems of  $M(n)$ -equivalence and  $SM(n)$ -equivalence of paths to  $O(n)$ -equivalence and  $SO(n)$ -equivalence of paths, respectively.

Let  $I = [a, b]$  and  $x(t)$  is a continuous  $I$ -path in  $R^n$ . Set  $x^{[0]}(t) = x(t), x^{[i]}(t) = \int_a^t x^{[i-1]}(t)dt$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Then  $x^{[i]} = x^{[i]}(t)$  is an  $I$ -path in  $R^n$ . Let  $\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle$  be a scalar product of paths  $x^{[i]}$  and  $x^{[j]}$ . Then the derivative  $\frac{d}{dt} \langle x^{[i]}(t), x^{[j]}(t) \rangle$  exists for all  $t \in (a, b), i \geq 1$  and  $j \geq 1$ . Below we use some notions and notations from the differential algebra (see [6, 9, 11]).

**Proposition 7.** Let  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i + j \geq 1$ . Then a differential polynomial  $Q_{ij}\{y_1, \dots, y_n\}$  exists such that

$$\langle x^{[i]}(t), x^{[j]}(t) \rangle = Q_{ij}\{\langle x^{[1]}(t), x^{[1]}(t) \rangle, \dots, \langle x^{[n]}(t), x^{[n]}(t) \rangle\}$$

for all  $t \in (a, b)$ .

**Proof.** We will prove an existence of  $Q_{ij}$  by induction on  $q = (n - i) + (n - j)$ . Since  $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i + j \geq 1$ , we have  $(n - i) + (n - j) \geq 0$ . In the case  $(n - i) + (n - j) = 0$ , the desired existence of  $Q_{nn}\{y_1, \dots, y_n\}$  for  $\langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle$  is obvious:  $Q_{nn}\{y_1, \dots, y_n\} = y_n$ . In the case  $(n - i) + (n - j) = 1$ , we have  $\langle x^{[n-1]}, x^{[n]} \rangle = \langle x^{[n]}, x^{[n-1]} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle$  that is  $Q_{n-1n}\{y_1, \dots, y_n\} = Q_{nn-1}\{y_1, \dots, y_n\} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} y_n$ . Assume that a differential polynomial  $Q_{n-in-j}\{y_1, \dots, y_n\}$  exists for all  $i, j$  such that  $n - i + n - j < q$ . Let  $i \leq j$  and  $q = n - i + n - j = 2b$ , where  $b$  is an integer. Then  $\langle x^{[n-i]}, x^{[n-j]} \rangle = \langle x^{[b-h]}, x^{[b+h]} \rangle$  for some  $h \geq 0$ . For  $h = 0$ , we have  $Q_{bb}\{y_1, \dots, y_n\} = y_b$ . Hence the induction on  $h$  is true for  $h = 0$ . Using the equality

$$\langle x^{[b-h]}, x^{[b+h]} \rangle = \frac{d}{dt} \langle x^{[b-h+1]}, x^{[b+h]} \rangle - \langle x^{[b-(h-1)]}, x^{[b+(h-1)]} \rangle$$



and applying the inductions on  $q = n - i + n - j$  and  $h$ , we conclude that  $\langle x^{[n-i]}, x^{[n-j]} \rangle$  is a differential polynomial in  $\langle x^{[1]}, x^{[1]} \rangle, \dots, \langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle$ .

Let  $q = n - i + n - j = 2b + 1$ . Then  $\langle x^{[n-i]}, x^{[n-j]} \rangle = \langle x^{[b-h]}, x^{[(b+1)+h]} \rangle$  for some  $h \geq 0$ . Since  $\frac{d}{dt} \langle x^{[b+1]}, x^{[b+1]} \rangle' = 2 \langle x^{[b]}, x^{[b+1]} \rangle$ , we have  $Q_{bb+1}\{y_1, \dots, y_n\} = \frac{d}{dt} y_{b+1}$  for  $h = 0$ . Hence the induction on  $h$  is true for  $h = 0$ . Using the equality

$$\langle x^{[b-h]}, x^{[(b+1)+h]} \rangle = \frac{d}{dt} \langle x^{[b-h+1]}, x^{[(b+1)+h]} \rangle - \langle x^{[b-(h-1)]}, x^{[(b+1)+(h-1)]} \rangle$$

and applying the inductions on  $q = n - i + n - j$  and  $h$ , we conclude that  $\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle$  is a differential polynomial in  $\langle x^{[1]}, x^{[1]} \rangle, \dots, \langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle$ .

**Definition 8.** Let  $I = [a, b]$ . A continuous  $I$ -path  $x(t)$  in  $R^n$  will be called non-singular if

$$[x^{[1]}(t)x^{[2]}(t) \dots x^{[n]}(t)] \neq 0$$

for all  $t \in (a, b)$ . A curve  $\alpha$  will be called non-singular if it contains a non-singular path.

**Definition 9.** Let  $I = (a, b)$ . A continuous  $I$ -path  $x(t)$  in  $R^n$  will be called regular if the derivative  $\frac{d^k}{dt^k} x(t)$  exists for all  $t \in I = (a, b)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , it is continuous and

$$\left[ \frac{d}{dt} x(t) \frac{d^2}{dt^2} x(t) \dots \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right] \neq 0$$

for all  $t \in (a, b)$ . A curve  $\alpha$  will be called regular if it contains a regular path.

The classical differential-geometrical method does not work for irregular curves. The following two paths are irregular but they are non-singular.

**Example 4.** Let  $x(t) = (t, t^3)$  be the  $I$ -path in  $R^2$ , where  $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . This path is analytical but it is irregular. It is easy to see that  $[x^{[1]}(t)x^{[2]}(t)] \neq 0$  for all  $t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . Hence it is non-singular in  $I$ .

**Example 5.** Let  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  be the  $I$ -path in  $R^2$ , where  $I = [0, 1]$ ,  $x_1(t) = e^t$  for all  $t \in I$ ,  $x_2(t) = \frac{1}{2}$  for  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  and  $x_2(t) = t$  for  $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ . This path is an irregular continuous path. It is easy to see that  $[x^{[1]}(t)x^{[2]}(t)] \neq 0$  for all  $t \in (0, 1)$ . Hence it is non-singular in  $I$ .

Denote by  $\Delta_x$  the determinant  $\det \|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle\|_{n \times n}$ .

We need the following lemma

**Lemma 1.** The equality

$$[y_1 \dots y_n][z_1 \dots z_n] = \det \|\langle y_i, z_j \rangle\|_{n \times n}$$

holds for all vectors  $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$  in  $R^n$ .

**Proof.** A proof of the this lemma is given in ([10], p.72). The lemma is proved.

Using Lemma 1 to vectors  $y_1 = z_1 = x^{[1]}, y_2 = z_2 = x^{[2]}, \dots, y_n = z_n = x^{[n]}$ , we obtain

$$[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}]^2 = \det \|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle\|_{n \times n} = \Delta_x. \quad (1)$$

Let  $x(t)$  and  $y(t)$  be  $I$ -paths in  $R^n$  such that  $x \stackrel{O(n)}{\sim} y$ . Then  $\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle = \langle y^{[i]}, y^{[j]} \rangle$  for all  $0 \leq i, j$  that is  $\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle$  is an  $O(n)$ -invariant function of  $x$ .

**Theorem 2.** Let  $I = [a, b]$ . Assume that  $x(t)$  and  $y(t)$  are non-singular continuous  $I$ -paths in  $R^n$  such that

$$\langle x^{[i]}(t), x^{[i]}(t) \rangle = \langle y^{[i]}(t), y^{[i]}(t) \rangle \quad (2)$$

for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq n$ . Then  $x \stackrel{O(n)}{\sim} y$ .

**Proof.** Eq.(2) and Proposition 7 imply

$$\langle x^{[i]}(t), x^{[j]}(t) \rangle = \langle y^{[i]}(t), y^{[j]}(t) \rangle \quad (3)$$

for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Using these equalities, we get  $\Delta_x(t) = \Delta_y(t)$  for all  $t \in (a, b)$ , where  $\Delta_x(t)$  is the function Eq.(1). Since  $x, y$  are non-singular  $I$ -paths,  $\Delta_x(t) \neq 0, \Delta_y(t) \neq 0$  for all  $t \in (a, b)$ . Hence

$$\Delta_x(t)^{-1} = \Delta_y(t)^{-1} \quad (4)$$

for all  $t \in (a, b)$ . Denote by  $A(x(t))$  the matrix  $\|x^{[1]}(t)x^{[2]}(t)\dots x^{[n]}(t)\|$ , where we consider  $x^{[i]}(t)$  as a column-vector. We set  $\frac{d}{dt}A(x(t)) = \|x^{[0]}(t)x^{[1]}(t)\dots x^{[n-1]}(t)\|$ . Since  $x(t)$  is non-singular, we have  $\det A(x(t)) = [x^{[1]}(t)x^{[2]}(t)\dots x^{[n]}(t)] \neq 0$  for all  $t \in (a, b)$ . Hence the matrix  $A^{-1}(x(t))$  exists for all  $t \in (a, b)$ . We consider the matrix  $A^{-1}(x(t))\frac{d}{dt}A(x(t)) = \|c_{ij}^x(t)\|$ . It is easy to see that:

- (a)  $c_{jj+1}^x(t) = 1$  for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq j \leq n-1$ ;
- (b)  $c_{ij}^x(t) = 0$  for all  $t \in (a, b)$  and  $j \neq 1, i \neq j-1, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n$ ;
- (c)  $c_{i1}^x(t) = \frac{[x^{[1]}(t)\dots x^{[i-1]}(t)x^{[0]}(t)x^{[i+1]}(t)\dots x^{[n]}(t)]}{[x^{[1]}(t)x^{[2]}(t)\dots x^{[n]}(t)]}$  for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq n$ .

**Lemma 2.**  $c_{ij}^x(t) = c_{ij}^y(t)$  for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Proof.** The above equality (a) implies  $c_{jj+1}^x(t) = c_{jj+1}^y(t)$  for all  $1 \leq j \leq n-1$  and the equality (b) implies  $c_{ij}^x(t) = c_{ij}^y(t)$  for all  $j \neq 1, i \neq j-1, 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n$ . Prove  $c_{i1}^x(t) = c_{i1}^y(t)$  for all  $1 \leq i \leq n$ .

Using Lemma 1 to vectors  $y_i = x^{[i]}, z_j = x^{[j]}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), we obtain

$$[x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}]^2 = \det|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle|_{n \times n}. \quad (5)$$

Similarly, using Lemma 1 to vectors  $x^{[1]}, \dots, x^{[i-1]}, x^{[0]}, x^{[i+1]}, \dots, x^{[n]}, x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[n]}$ , we have

$$[x^{[1]}\dots x^{[i-1]}x^{[0]}x^{[i+1]}\dots x^{[n]}][x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}] = \det|\langle x^{[k]}, x^{[l]} \rangle|_{n \times n}, \quad (6)$$

where  $k = 1, \dots, i-1, 0, i+1, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$ .

From Eq.(2)-Eq.(6) and the equality

$$c_{i1}^x(t) = \frac{[x^{[1]}\dots x^{[i-1]}x^{[0]}x^{[i+1]}\dots x^{[n]}]}{[x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}]} = \frac{[x^{[1]}\dots x^{[i-1]}x^{[0]}x^{[i+1]}\dots x^{[n]}][x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}]}{[x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}]^2},$$

for  $1 \leq i \leq n$ , we obtain

$$\frac{[x^{[1]}\dots x^{[i-1]}x^{[0]}x^{[i+1]}\dots x^{[n]}]}{[x^{[1]}x^{[2]}\dots x^{[n]}]} = \frac{[y^{[1]}\dots y^{[i-1]}y^{[0]}y^{[i+1]}\dots y^{[n]}]}{[y^{[1]}y^{[2]}\dots y^{[n]}]} \quad (7)$$

for all  $i = 1, \dots, n$ . The lemma is proved.

Lemma 2 implies  $A^{-1}(x(t))\frac{d}{dt}A(x(t)) = A^{-1}(y(t))\frac{d}{dt}A(y(t))$  for all  $t \in (a, b)$ . Using this equality, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(A(y)A(x)^{-1}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}A(y)\right)A(x)^{-1} + A(y)\frac{\partial}{\partial t}(A(x)^{-1}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}A(y)\right)A(x)^{-1} - \\ &- A(y)A(x)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x)\right)A(x)^{-1} = A(y)(A(y)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}A(y) - A(x)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}A(x))A(x)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

for all  $t \in (a, b)$ . By this equality and connectedness of  $(a, b)$ , we get that  $A(y(t))A(x(t))^{-1}$  is not depend on  $t \in (a, b)$ . Put  $F = A(y)A(x)^{-1}$ . According to  $\det A(x(t)) \neq 0$  and  $\det A(y(t)) \neq 0$  for all  $t \in (a, b)$ , we have  $\det F \neq 0$  and  $A(y(t)) = FA(x(t))$  for all  $t \in (a, b)$ . We prove that  $F \in O(n)$ .

Let  $A(x)^\top$  be the transpose matrix of  $A(x)$ . Using  $A(x)^\top A(x) = \|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle\|_{n \times n}$  and Eq.(3), we obtain that  $A(x)^\top A(x) = A(y)^\top A(y)$ . This equality and the equality  $A(y) = FA(x)$  imply that  $F^\top F = E$ , where  $E$  is the unit  $n \times n$ -matrix. Hence  $F \in O(n)$ .

The equality  $Ay(t) = FAx(t)$  implies  $y^{[1]}(t) = Fx^{[1]}(t)$  for all  $t \in (a, b)$  that is  $\int_a^t y(t)dt = F \int_a^t x(t)dt$ . This equality implies  $y(t) = Fx(t)$  for all  $t \in (a, b)$ . Since  $x(t)$  and  $y(t)$  are continuous on  $I = [a, b]$ , we obtain  $y(t) = Fx(t)$  for all  $t \in I$ . The theorem is completed.

**Corollary 1.** *Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Then  $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \beta$  if and only if*

$$\langle x^{[j]}(s), x^{[j]}(s) \rangle = \langle y^{[j]}(s), y^{[j]}(s) \rangle \quad (8)$$

for all  $s \in (0, L_k(\alpha))$  and  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Proof.** Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Let  $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \beta$ . Then, by Theorem 1, we have  $x \overset{O(n)}{\sim} y$ . This equivalence implies Eq.(8). Conversely, assume that Eq.(8) holds. Then, by Theorem 2,  $x \overset{O(n)}{\sim} y$ . Applying Theorem 1, we obtain  $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \beta$ .

**Remark 4.** *The  $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ -path  $x(t) = (t, t^3)$  in Example 4 and  $I = [0, 1]$ -path  $x(t)$  in Example 5 are irregular and non-singular. It is easy to see that they are rectifiable. Hence Theorem 2 applicable to them and Corollary 1 applicable to the curves  $\alpha$ , where  $x \in \alpha$ .*

**Corollary 2.** *Let  $x(t), y(t)$  be  $I = [a, b]$ -paths such that  $x(t) - x(a)$  and  $y(t) - y(a)$  are non-singular  $I$ -paths in  $R^n$  and*

$$\langle (x - x(a))^{[i]}(t), (x - x(a))^{[i]}(t) \rangle = \langle (y - y(a))^{[i]}(t), (y - y(a))^{[i]}(t) \rangle \quad (9)$$

for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq n$ . Then  $x \overset{M(n)}{\sim} y$ .

**Proof.** By Eq.(9) for all  $t \in (a, b)$ , using Theorem 2, we obtain existence  $F \in O(n)$  such that  $(y(t) - y(a)) = F(x(t) - x(a))$  for all  $t \in I$ . Then by Proposition 5, we obtain  $x \overset{M(n)}{\sim} y$ .

**Corollary 3.** *Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Assume that  $x(t) - x(0)$  and  $y(t) - y(0)$  are non-singular continuous  $I$ -paths in  $R^n$ , where  $I = [0, L_k(\alpha)]$ . Then  $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$  if and only if*

$$\langle (x - x(0))^{[i]}(s), (x - x(0))^{[i]}(s) \rangle = \langle (y - y(0))^{[i]}(s), (y - y(0))^{[i]}(s) \rangle \quad (10)$$

for all  $s \in [0, L_k(\alpha)]$  and  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Proof.** Let  $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ . Then, by Theorem 1, we have  $x \overset{O(n)}{\sim} y$ . This equivalence implies Eq.(10). Conversely, assume that Eq.(10) holds. Then, by Corollary 2,  $x \overset{M(n)}{\sim} y$ . Applying Theorem 1, we obtain  $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ . The corollary is proved.

The functions  $[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}]$  and  $\langle x^{[i]}(t), x^{[i]}(t) \rangle$  are  $SO(n)$ -invariant. Hence  $x \overset{SO(n)}{\sim} y$  implies  $[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}] = [y^{[1]}y^{[2]} \dots y^{[n]}]$  and  $\langle x^{[i]}(t), x^{[i]}(t) \rangle = \langle y^{[i]}(t), y^{[i]}(t) \rangle$  for all  $t \in (a, b)$  and  $0 \leq i$ .

**Theorem 3.** Let  $I = [a, b]$ . Assume that  $x(t)$  and  $y(t)$  are non-singular continuous  $I$ -paths in  $R^n$  such that

$$[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}] = [y^{[1]}y^{[2]} \dots y^{[n]}], \langle x^{[i]}(t), x^{[i]}(t) \rangle = \langle y^{[i]}(t), y^{[i]}(t) \rangle \quad (11)$$

for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq n-1$ . Then  $x \overset{SO(n)}{\sim} y$ .

**Proof.** Suppose that condition Ek.(11) is valid. We denote the algebraic cofactor of the element  $\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle$  in the matrix  $\|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle\|_{n \times n}$  by  $A_{ij}(x)$ . Then we have

$$[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}]^2 = \|\langle x^{[i]}, x^{[j]} \rangle\|_{n \times n} = \langle x^{[n]}, x^{[1]} \rangle A_{n1}(x) + \dots + \langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle A_{nn}(x). \quad (12)$$

As the path  $x$  is non-singular, vectors  $x^{[1]}(t), \dots, x^{[n]}(t)$  are linear independent for all  $t \in I$ . In particular, vectors  $x^{[1]}(t), \dots, x^{[n-1]}(t)$  are linearly independent for all  $t \in I$ . Then

$$A_{nn}(x) = \det \|\langle x^{[i]}(t), x^{[j]}(t) \rangle\|_{(n-1) \times (n-1)} \neq 0$$

for all  $t \in I$ . From the equality Eq.(12) we obtain

$$\langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle = \frac{[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}]^2 - \langle x^{[n]}, x^{[1]} \rangle A_{n1}(x) - \dots - \langle x^{[n]}, x^{[n-1]} \rangle A_{nn-1}(x)}{A_{nn}(x)}. \quad (13)$$

Similarly, we have

$$\langle y^{[n]}, y^{[n]} \rangle = \frac{[y^{[1]}y^{[2]} \dots y^{[n]}]^2 - \langle y^{[n]}, y^{[1]} \rangle A_{n1}(y) - \dots - \langle y^{[n]}, y^{[n-1]} \rangle A_{nn-1}(y)}{A_{nn}(y)}. \quad (14)$$

$A_{nj}(x)$  is a differential polynomial of all  $\langle x^{[i]}(t), x^{[j]}(t) \rangle$ , where  $i+j < 2n, i \leq n, j \leq n$ . By Proposition 7,  $A_{nj}(x)$  is a differential polynomial of  $\langle x^{[1]}, x^{[1]} \rangle, \dots, \langle x^{[n-1]}, x^{[n-1]} \rangle$ . Similarly,  $A_{nj}(y)$  is a differential polynomial of  $\langle y^{[1]}, y^{[1]} \rangle, \dots, \langle y^{[n-1]}, y^{[n-1]} \rangle$ . From equalities Eq.(11), we obtain  $A_{nj}(x) = A_{nj}(y)$  for all  $j = 1, \dots, n$ . This, in view of Eq.(11), (13), (14), gives  $\langle x^{[n]}, x^{[n]} \rangle = \langle y^{[n]}, y^{[n]} \rangle$ . By this equality, equalities, Eq.(11) and Theorem 2, there exists  $g \in O(n)$  such that  $y(t) = gx(t)$ . From the equality  $[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}] = [y^{[1]}y^{[2]} \dots y^{[n]}]$  we have

$$[x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}] = [(gx)^{[1]}(gx)^{[2]} \dots (gx)^{[n]}] = \det g [x^{[1]}x^{[2]} \dots x^{[n]}].$$

As  $[x^{[1]}(t)x^{[2]}(t) \dots x^{[n]}(t)] \neq 0$  for all  $t \in I$ , we have  $\det g = 1$ , that is,  $g \in SO(n)$ .

**Corollary 4.** Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Then  $\alpha \overset{SO(n)}{\sim} \beta$  if and only if

$$[x^{[1]}(s) \dots x^{[n]}(s)] = [y^{[1]}(s) \dots y^{[n]}(s)], \langle x^{[i]}(s), x^{[i]}(s) \rangle = \langle y^{[i]}(s), y^{[i]}(s) \rangle \quad (15)$$

for all  $s \in (0, L_k(\alpha))$  and  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Proof.** Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Let  $\alpha \stackrel{SO(n)}{\sim} \beta$ . Then, by Theorem 1, we have  $x \stackrel{SO(n)}{\sim} y$ . This equivalence implies Eq.(15). Conversely, assume that Eq.(15) holds. Then, by Theorem 3,  $x \stackrel{SO(n)}{\sim} y$ . Applying Theorem 1, we obtain  $\alpha \stackrel{SO(n)}{\sim} \beta$ .

**Corollary 5.** Let  $x(t), y(t)$  be  $I = [a, b]$ -paths such that  $x(t) - x(a)$  and  $y(t) - y(a)$  are non-singular  $I$ -paths in  $R^n$  and

$$\begin{aligned} [(x - x(a))^{[1]}(t) \dots (x - x(a))^{[n]}(t)] &= [(y - y(a))^{[1]}(t) \dots (y - y(a))^{[n]}(t)], \\ < (x - x(a))^{[i]}(t), (x - x(a))^{[i]}(t) > &= < (y - y(a))^{[i]}(t), (y - y(a))^{[i]}(t) > \end{aligned} \quad (16)$$

for all  $t \in (a, b)$  and  $1 \leq i \leq n - 1$ . Then  $x \stackrel{SM(n)}{\sim} y$ .

**Proof.** By Eq.(16) for all  $t \in (a, b)$ , using Theorem 3, we obtain existence  $F \in SO(n)$  such that  $(y(t) - y(a)) = F(x(t) - x(a))$  for all  $t \in I$ . Then by Proposition 6, we have  $x \stackrel{SM(n)}{\sim} y$ .

**Corollary 6.** Let  $\alpha, \beta$  be non-singular retiring curves in  $R^n$ ,  $r_k(\alpha) = r_k(\beta)$ ,  $L_k(\alpha) = L_k(\beta)$  for some  $k \in \{1, 2, 3\}$  and  $x \in P_k(\alpha), y \in P_k(\beta)$ . Assume that  $x(t) - x(0)$  and  $y(t) - y(0)$  are non-singular continuous  $I$ -paths in  $R^n$ , where  $I = [0, L_k(\alpha)]$ . Then  $\alpha \stackrel{SM(n)}{\sim} \beta$  if and only if

$$\begin{aligned} [(x - x(0))^{[1]}(s) \dots (x - x(0))^{[n]}(s)] &= [(y - y(0))^{[1]}(s) \dots (y - y(0))^{[n]}(s)], \\ < (x - x(0))^{[i]}(s), (x - x(0))^{[i]}(s) > &= < (y - y(0))^{[i]}(s), (y - y(0))^{[i]}(s) > \end{aligned} \quad (17)$$

for all  $s \in [0, L_k(\alpha)]$  and  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Proof.** Let  $\alpha \stackrel{SM(n)}{\sim} \beta$ . Then, by Theorem 1, we have  $x \stackrel{SO(n)}{\sim} y$ . This equivalence implies Eq.(17). Conversely, assume that Eq.(17) holds. Then, by Corollary 5,  $x \stackrel{SM(n)}{\sim} y$ . Applying Theorem 1, we obtain  $\alpha \stackrel{SM(n)}{\sim} \beta$ .

## REFERENCES

1. Alexandrov A.D. Theory of curves based on approximation by broken lines, Scientific Session of Leningrad University. Abstracts of talks. Section of Math. Sci., Leningrad Univ., Leningrad 1946. (Russian)
2. Alexandrov A.D. Theory of curves based on approximation by broken lines, Uspekhi Mat. Nauk 2:3 (1947) 182-184. (Russian)
3. Alexandrov A.D. Reshetnyak Yu.G. General Theory of Irregular curves, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
4. Alexandrov A.D., Reshetnyak Yu.G. The turn of a curve in n-dimensional Euclidean space, Sibirsk. Mat. Zh. 29:1 (1988), 3-22; English transl., Integral curvature of a curve in n-dimensional Euclidean space, Siberian Math. J. 29 (1988) 1-16.
5. Aminov Yu. Differential Geometry and Topology of Curves, CRC Press, New York, 2000.

6. Aripov R.G., Khadjiev D. The complete system of differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Matematika*, No. 7 (2007) 3-16 (Russian); English transl.: R. G. Aripov, D. Khadjiev, *Russian Mathematics (Iz VUZ)* 51, No. 7 (2007) 1-14.
7. Chern S.S. Curves and surfaces in Euclidean space, *Global Diff. Geom.* 27 (1989) 99-139.
8. Guggenheimer H.W. *Differential Geometry*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.
9. Kaplansky I. *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.
10. Khadjiev D. *An Application of Invariant Theory to Differential Geometry of Curves*, Fan Publ., Tashkent, 1988. (Russian)
11. Khadjiev D., Pekşen Ö. The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves, *Differ. Geom. Appl.*, 20 (2004) 167-175.
12. Klingenberg W.K. *A Course in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1978.
13. Kosters M. Curvature-dependent parametrization of curves and surfaces, *Comput. Sci. Notes, Univ. Groningen, Dep. Math. and Comput. Sci.* 8915 (1989) 1-20.
14. Molnar G.S. On some questions concerning the differential geometry of curves in  $n$ -dimensional Euclidean spaces, *Publ. Math.*, 30(1-2) (1983) 57-73.
15. Nevanlinna F. und R. *Absolute Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1959.
16. Radon J. Uber Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien* 128 (1919) 1123-1167.
17. Reshetnyak Yu.G. Some applications of integral geometry to the theory of curves of finite rotation, *Sibirsk. Mat. Zh.* 29:1 (1988), 141-150; English transl., *Siberian Math. J.* 29 (1988) 109-116.
18. Reshetnyak Yu.G. The theory of curves in differential geometry from the viewpoint of the theory of functions of a real variable, *Uspekhi Mat. Nauk* 60: 6 (2005) 157-174; English transl., *Russian Math. Surveys* 60:6 (2005) 1165-1181.
19. Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol.2.*, Publ. of Perish. Inc., Berkeley, CA, 1979.
20. Wegner B. Some new developments in the global theory of curves, In: Albu Adrian C. (ed.) et al. *Proceedings of the 24th national conference of geometry and topology*, Timisoara, Romania, July 5-9, 1994. Part one. Lectures. Timisoara; Editor Mirton, (1996) 275-283.
21. Weiner J.L. An inequality involving the length, curvature and torsions of a curve in euclidean  $n$ -space, *Pacific J. Math.*, 74 (2) (1978) 531-534.
22. Zwiesler H.J. Invariants of analytic curves, *Publ. Math., Barc.* 33 (1) (1989) 147-152.

### REZYUME

Chetlanuvchi yo'l, chetlanuvchi chiziq, chetlanuvchi chiziqning invariant parametrinishi va chetlanuvchi uzunlikning ta'riflari kiritiladi.  $n$ -o'lchamli yevklid fazosining barcha izometriyalarining  $M(n)$  gruppalari uchun chetlanuvchi chiziqlarning  $M(n)$ -ekvivalentligi muammosi chetlanuvchi yo'llarga keltiriladi.  $G = M(n)$  va uning ayrim qism gruppalari uchun chetlanuvchi chiziqlar  $G$ -invariantlarining to'liq sistemalari hosil qilinadi. Chetlanuvchi chiziqlar global  $G$ -ekvivalentligi shartlari chetlanuvchi uzunlik va chiziqlarning butun sondagi  $G$ -invariantlari bo'yicha berilgan.

**Kalit so'zlar:** Noregulyar chiziq, to'g'rilanuvchi chiziq, invariant, yevklid geometriyasi.

### РЕЗЮМЕ

Вводятся определения удаляющегося пути, удаляющейся кривой, инвариантной параметризации удаляющейся кривой и удаляющейся длины кривой. Для группы  $M(n)$  всех изометрий  $n$ -мерного евклидова пространства проблема  $M(n)$ -эквивалентности удаляющихся кривых сводится к удаляющимся путям. Получены полные системы  $G$ -инвариантов удаляющих кривых для  $G = M(n)$  и некоторых ее подгрупп. Условия глобальной  $G$ -эквивалентности удаляющих кривых задаются в терминах удаляющей длины и целочисленных  $G$ -инвариантов кривых.

**Ключевые слова:** Нерегулярная кривая, спрямляемая кривая, инвариант, евклидова геометрия.

UDC 517.98

*p*-ADIK SONLAR MAYDONIDA 1-LIPSHITS FUNKSIYALARI VA  
ULARNING DINAMIKASI

Kucharov R. R., \* Pardayev Sh. A., \* Salimov J. K. \*

## REZYUME

Bu maqolada *p*-adik 1-Lipshits funksiyalar va ularning xossalarni haqida ma'lumotlar bayon qilingan. *p*-adik 1-Lipshits funksiyalarning umumiy ko'rinishi keltirilgan. *p*-adik 1-Lipshits funksiyalarning dinamikasi o'rganilgan.

**Kalit so'zlar:** *p*-adik sonlar, *p*-adik norma, 1-Lipshits funksiyalar, dinamik sistema, qo'zg'almas nuqta.

## KIRISH

*p*-adik sonlarni birinchi bo'lib nemis matematigi K.Henzel tomonidan 1897-yilda fanga kiritilgan. Bu sonlar dastlab sonlar nazariyasining bir qismi sifatida o'rganilgan. Keyinchalik *p*-adik sonlarning boshqa fan sohalarida tadbiqlari topila boshlagach, *p*-adik sonlar nazariyasi, *p*-adik analiz, *p*-adik differensial tenglamalar, *p*-adik funksional analiz, *p*-adik dinamik sistemalar, *p*-adik ehtimolliklar nazariyasi, *p*-adik o'lchovlar nazariyasi kabi yangi fan sohalar rivojlana boshladi [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Shuningdek, kvant mexanikasiga, garmonik to'lqinlar nazariyasiga, stoxastik jarayonlarga ham *p*-adik analizni tatbiq etib kelinmoqda[8].

G'anixo'jaev N.N., Roziqov U.A., Muxamedov F.M.  $\mathbb{Z}$  da Ising modeli uchun *p*-adik Gibbs o'lchovini tuzganlar [9]. Bundan tashqari, Kolmogorovning o'lchovlarni kengaytirish haqidagi teoremasining *p*-adik analogini isbotlaganlar. Hakimov O.N. ma'lum daraxtlarda to'rtta o'zaro ta'sirga ega Ising modeli uchun yagona *p*-adik Gibbs o'lchovi mavjudligi ko'rsatgan [10]. Uchinchi tartibdagi Keli daraxtida Ising modeli uchun invariant umumlashgan *p*-adik Gibbs o'lchovlari to'plami tasvirlangan [11]. *p*-adik Ising-Potts modelining dinamikasi o'rganilgan ( $p \neq 2$ ) va parametrlar bo'yicha ba'zi hollarda Ising-Potts modelining xaotik ekanligini ko'rsatilgan [4].

Dinamik sistemalarning noarximed nazariyasi bu noarximed analizdagi akslantirishni tatbiqidagi eng tabiiy maydondir. 1997-yilda A.Yu.Xrennikov anglash jarayonlarini modellashtirishda *p*-adik dinamik sistemalarni tatbiq qilishni taklif qildi [14]. Biz ixtiyoriy natural son uchun ham *p*-adik sonlar halqasidagi dinamik sistemalarni tatbiq qilishimiz ham mumkin [12]. Shuni ta'kidlab o'tamizki, *p*-adik dinamik sistemalar dastlab sodda funksiyalar uchun o'rganilgan. Bularan murakkabroq funksiyalar uchun *p*-adik dinamik sistemalar o'rganilmagan. *p*-adik 1-Lipshits funksiyalari E.Yurova, A.Xrennikovlarning ishlarida o'rganilgan [13].

\***Kucharov R. R.** – Toshkent xalqaro moliyaviy boshqaruv va texnologiyalar universiteti, Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy universiteti, ramz3364647@yahoo.com, r.kucharov@tift.uz

\***Pardayev Sh. A.** – Toshkent davlat transport universiteti, shohzodmath@gmail.com

\***Salimov J. K.** – Toshkent xalqaro moliyaviy boshqaruv va texnologiyalar universiteti, edujahongir.salimov@gmail.com



Ushbu maqolada  $p$ -adik 1-Lipshits funksiyalar va ularning xossalari haqida ma'lumotlar bayon qilingan.  $p$ -adik 1-Lipshits funksiyalarning umumiy ko'rinishi keltirilgan.  $p$ -adik 1-Lipshits funksiyalarning dinamikasi o'rganilgan.

## DASTLABKI TUSHUNCHALAR

Aytaylik bizga biror  $(K, +, \cdot)$  maydon berilgan bo'lsin.

**Ta'rif 1.**  $\|\cdot\| : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  akslantirish quyidagi xossalarga ega bo'lsin:

- 1)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
- 2) Ixtiyoriy  $x, y \in K$  uchun  $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ ;
- 3) Ixtiyoriy  $x, y \in K$  uchun  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

$U$  holda bu akslantirishga  $(K, +, \cdot)$  maydondagi norma deyiladi.  $(K, +, \cdot, \|\cdot\|)$  to'rtlikka esa normalangan maydon deyiladi va qisqacha  $(K, \|\cdot\|)$  kabi yoziladi.

**Ta'rif 2.**  $(K, \|\cdot\|)$  normalangan maydon bo'lsin. Agar ixtiyoriy  $x, y \in K$  uchun

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad (1)$$

o'rinli bo'lsa,  $\|\cdot\|$  normaga noarximed normasi deyiladi.

Aytaylik  $\mathbb{P}$  tub sonlar to'plami bo'lib,  $p \in \mathbb{P}$  biror tub son bo'lsin. Ixtiyoriy  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  uchun shu sonning  $p$  bo'yicha tartibi tushunchasini kiritamiz.

**Ta'rif 3.** Agar  $a \equiv 0 \pmod{p^k}$  va  $a \not\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$ ,  $u$  holda  $k \in \mathbb{Z}_+$  songa  $a$  butun sonning  $p$  bo'yicha tartibi deyiladi va  $\text{ord}_p(a)$  kabi yoziladi.

Agar  $a = 0$  bo'lsa, ixtiyoriy  $k \in \mathbb{Z}$  uchun  $a \equiv 0 \pmod{p^k}$  o'rinligini hisobga olib,  $\text{ord}_p(0) = +\infty$  deymiz.

Endi ixtiyoriy  $x = \frac{a}{b}$  ratsional son uchun

$$\text{ord}_p(x) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

deb qabul qilamiz.

**Ta'rif 4.**  $\mathbb{Q}$  ratsional sonlar maydonida quyidagi  $|\cdot|_p$  akslantirishni qaraymiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p(x)}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (2)$$

(2) ko'rinishdagi akslantirish  $\mathbb{Q}$  maydonda noarximed normasi bo'ladi.  $\mathbb{Q}$  maydondagi bu akslantirishga  $p$ -adik norma deyiladi.

To'la normalangan  $p$ -adik sonlar maydonini  $\mathbb{Q}_p$  ko'rinishida belgilaymiz.

**Ta'rif 5.** Normasi 1 dan katta bo'lmagan  $p$ -adik sonlarni  $\mathbb{Z}_p$  orqali belgilaymiz:

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p, |a|_p \leq 1\}.$$

Endi  $\mathbb{Q}_p$  maydondagi asosiy to'plamlardan yana biri bilan tanishamiz.

**Ta'rif 6.** Normasi 1 ga teng bo'lgan  $p$ -adik sonlarni  $\mathbb{Z}_p^*$  orqali belgilaymiz:

$$\mathbb{Z}_p^* = \{a \in \mathbb{Q}_p, |a|_p = 1\}.$$

Ta'rifdan bevosita kelib chiqadigan xulosalar:  $\mathbb{Z}_p^* \subset \mathbb{Z}_p$  va  $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ .

Ma'lumki, har qanday  $(X, d)$  metrik fazoda markazi  $a$  nuqtada radiusi  $r$  bo'lgan ochiq shar quyidagicha aniqlanadi:

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

$\mathbb{Q}_p$  fazoda esa quyidagi to'plam ochiq shar bo'ladi:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

**Ta'rif 7.** Agar  $f$  funksiya  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$|f(x) - f(y)|_p \leq p^\alpha |x - y|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$$

bu funksiyaga  $p^\alpha$ -Lipshits funksiyasi deyiladi. Xususan  $\alpha = 0$  bo'lganda

$$|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p \quad (3)$$

bo'lib,  $f$  funksiya 1-Lipshits funksiyasi deyiladi.

1-Lipshits shartining bir necha ekvivalent shartlari ham mavjud [15]:

- i)  $|f(x + y) - f(x)|_p \leq |y|_p$ , barcha  $x, y \in \mathbb{Z}_p$  lar uchun;
- ii)  $|\frac{1}{y}(f(x + y) - f(x))|_p \leq 1$ , barcha  $x \in \mathbb{Z}_p$  va barcha  $y \neq 0 \in \mathbb{Z}_p$  lar uchun;
- ii)  $f(x + p^n \mathbb{Z}_p) \subset f(x) + p^n \mathbb{Z}_p$ , barcha  $x \in \mathbb{Z}_p, n \geq 1$  uchun;
- iv)  $f(x) \equiv f(y) \pmod{p^n}$ , barcha  $n \geq 1$  uchun  $x \equiv y \pmod{p^n}$  bo'lganda.

Aytaylik bizga  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}_p$  to'plam va  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Q}_p$  funksiya berilgan bo'lsin.  $(f, \mathbb{D})$  dinamik sistemani o'rganish bu ixtiyoriy  $x_0 \in \mathbb{D}$  nuqta uchun  $x_n = f^n(x_0)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ketma-ketlik limitini o'rganishdir.

**Ta'rif 8.** Agar  $x_0 \in \mathbb{D}$  nuqta uchun  $f(x_0) = x_0$  bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqta  $(f, \mathbb{D})$  dinamik sistemaning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

**Ta'rif 9.**  $x_0$  qo'zg'almas nuqta bo'lsin. Agar uning shunday  $U_r(x_0)$  atrofi topilib, ixtiyoriy  $x \in U_r(x_0)$  uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$  tenglik bajarilsa, u holda  $x_0$  nuqta tortuvchi nuqta deyiladi va

$$A(x_0) = \{x \in \mathbb{D} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0\}$$

to'plamni esa  $x_0$  nuqtaning tortilish to'plami yoki atraktori deyiladi.

**Ta'rif 10.**  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin. Agar

- 1)  $|f'(x_0)|_p < 1$  bo'lsa,  $x_0$  nuqta tortuvchi,
- 2)  $|f'(x_0)|_p = 1$  bo'lsa,  $x_0$  nuqta betaraf,
- 3)  $|f'(x_0)|_p > 1$  bo'lsa,  $x_0$  nuqta itaruvchi deyiladi.

**Tasdiq 1.** [2] *Ixtiyoriy  $x, y \in \mathbb{Q}_p$  uchun quyidagilar o‘rinli:*

1)  $|x|_p \neq |y|_p$  bo‘lsa, u holda  $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$  bo‘ladi.

2)  $p = 2$  da  $|x|_2 = |y|_2$  bo‘lsa, u holda  $|x + y|_2 \leq \frac{1}{2}|x|_2$  bo‘ladi.

3)  $p \neq 2$  da  $|x|_p = |y|_p$  bo‘lsa, u holda  $|x + y|_p \leq |x|_p$  bo‘ladi.

**Lemma 1.** [2]  $\mathbb{Z}_2$  da  $x^2 - a$  ko‘phad ildizga ega bo‘lishi uchun

$$a = p^\alpha(a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \dots)$$

yoyilmada  $\alpha$  juft bo‘lib,  $a_1 = a_2 = 0$  bo‘lishi zarur va yetarli.

**Lemma 2.** [2] *Aytaylik  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  bo‘lsin. Agar  $f$  funksiya ko‘fitsiyentlari  $p$ -adik butun sonlar bo‘lgan polinom bo‘lsa, u holda bu funksiya 1-Lipshits funksiyasi bo‘ladi.*

### ASOSIY NATIJALAR

Aytaylik  $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  akslantirishni aniqlaydigan

$$f_{a,k}(x) = \left( \frac{ax + 1}{x + a} \right)^k, a \in \mathbb{Z}_p \quad (4)$$

funksiya berilgan bo‘lsin.

**Lemma 3.** (4) *funksiya  $k = 2$  va  $k = 3$  uchun ixtiyoriy  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  da 1-Lipshits funksiyasi bo‘ladi.*

**Isbot.** Avval (4) funksiyani  $k = 2$  uchun ko‘rib chiqamiz:

$$f_{a,2}(x) = \left( \frac{ax + 1}{x + a} \right)^2.$$

$f_{a,2}(x)$  funksiyani (3) shartga tekshiramiz.

$$|f_{a,2}(x) - f_{a,2}(y)|_p = \left| \frac{2axy + (a^2 + 1)(x + y) + 2a}{(x + a)(y + a)} \cdot \frac{a^2 - 1}{(x + a)(y + a)} \right|_p \cdot |x - y|_p$$

$f_{a,2}(x)$  funksiya (3) shartni qanoatlantirishi uchun

$$\left| \frac{2axy + (a^2 + 1)(x + y) + 2a}{(x + a)(y + a)} \cdot \frac{a^2 - 1}{(x + a)(y + a)} \right|_p \leq 1 \quad (5)$$

bo‘lishi lozim. Funksiya  $\mathbb{Z}_p^*$  to‘plamda qaralganligi uchun bu to‘plamdan olingan ixtiyoriy  $x$  da  $|x|_p = 1$  bo‘ladi.  $a$  esa butun sonlar to‘plamidan bo‘lganligi sababli  $|a|_p \leq 1$  bo‘ladi. Bunga va 1-tasdiqga ko‘ra (5) tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi.

Endi  $k = 3$  da

$$f_{a,3}(x) = \left( \frac{ax + 1}{x + a} \right)^3$$

bo‘ladi.  $f_{a,3}(x)$  funksiyani (3) shartga tekshiramiz.

$$|f_{a,3}(x) - f_{a,3}(y)|_p =$$

$$\left| \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left( \left( \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)}(x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \cdot |x-y|_p$$

$f_{a,2}(x)$  funksiya (3) shartni qanoatlantirishi uchun

$$\left| \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left( \left( \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)}(x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \leq 1$$

bajarilishi lozim.

**Teorema 1.**  $f_{a,k}(x)$  funksiyani  $k = 3$  da 1-Lipshits funksiya bo'lishi uchun  $\forall x \in \mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$  bo'lishi zarur va yetarli.

**Isbot.** Yetarlicligi.  $f_{a,k}(x)$  funksiyani  $k = 3$  da 1-Lipshits shartiga tekshiramiz:

$$|f_{a,3}(x) - f_{a,3}(y)|_p =$$

$$\left| \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left( \left( \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)}(x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \cdot |x-y|_p$$

Zarurligi. Bu yerda

$$\left| \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left( \left( \frac{a^2 - 1}{(x+a)(y+a)}(x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \leq 1$$

tengsizlik bajarilsa  $f_{a,3}(x)$  funksiya 1-Lipshits funksiyasi bo'ladi.

Endi (4) funksiyaning dinamik sistemasini  $p = 2$  va  $k = 3$  bo'lganda o'rganamiz. Qo'zg'almas nuqtani topish uchun  $f(x) = x$  tenglamani yechib:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$  va

$$x_3 = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4}}{2},$$

$$x_4 = \frac{a^3 - 3a - (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

larga ega bo'lamiz.  $x_3$  va  $x_4$  qo'zg'almas nuqtalar mavjud bo'lishi uchun  $|a^2 - 4|_2 \geq 0$  bo'lishi lozim. Bundan esa  $|a|_2 \geq \frac{1}{2}$  bo'lishi kelib chiqadi. Demak  $x_3$  va  $x_4$  nuqtalar uchun  $\frac{1}{2} \leq |a|_2 \leq 1$  bo'ladi. Agar  $|a|_p = \frac{1}{2}$  yoki  $|a|_p = 1$  bo'lsa 1-lemmaga ko'ra  $a^2 - 4$  sonidan ildiz chiqmaydi va  $x_{3,4}$  nuqtalar mavjud bo'lmaydi.

**Teorema 2.** Agar  $x_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) lar  $f(x)$  funksiyaning qo'zg'almas nuqtalari bo'lsa, u holda quyidagilar o'rinli:

- 1)  $x_1 = 1$  uchun  $a \in 2\mathbb{Z}_2$  da tortuvchi,  $a \in \mathbb{Z}_2^*$  da betaraf,
- 2)  $x_2 = -1$  uchun  $a \in 2\mathbb{Z}_2$  da tortuvchi,  $a \in \mathbb{Z}_2^*$  da itaruvchi.

**Isbot.**  $f'(x) = \frac{3(a^2-1)(ax+1)^2}{(x+a)^4}$  bo‘lishini topib olamiz. Berilgan sonlar to‘plami uchun quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} a \in 2\mathbb{Z}_2 & da, & |a|_2 \leq \frac{1}{2}, & |a-1|_2 = 1, & |a+1|_2 = 1 & bo'ladi, \\ a \in \mathbb{Z}_2^* & da, & |a|_2 = 1, & |a-1|_2 \leq \frac{1}{2}, & |a+1|_2 \leq \frac{1}{2} & bo'ladi. \end{cases} \quad (6)$$

1-hol.  $x_1 = 1$  uchun  $f'(1) = \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2}$  bo‘ladi.  $a \in 2\mathbb{Z}_2$  da (6) ga ko‘ra

$$|f'(1)|_2 = \left| \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2} \right|_2 < 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi.  $a \in \mathbb{Z}_2^*$  da esa

$$|f'(1)|_2 = \left| \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2} \right|_2 = 1$$

bo‘ladi.

2-hol.  $x_1 = -1$  uchun  $f'(-1) = \frac{3a}{a-1}$  bo‘ladi.  $a \in 2\mathbb{Z}_2$  da (6) ga ko‘ra

$$|f'(-1)|_2 = \left| \frac{3a}{a-1} \right|_2 < 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi.  $a \in \mathbb{Z}_2^*$  da esa

$$|f'(-1)|_2 = \left| \frac{3a}{a-1} \right|_2 > 1$$

bo‘ladi.

## ADABIYOTLAR

1. Alan Adolphson, Steven Sperber, Marvin Tretkoff. p-adic methods in number theory and algebraic geometry. AMS, Founded, 1992.
2. W.H.Schikhof, Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 4, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984.
3. N.Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions. Springer, New York, 1977.
4. V.S.Vladimorov, I.V.Volovich and E.I.Zelenov. p-adic analysis and mathematical physics. World Sci. Publ., Singapore, 1994.
5. Kiran S. Kedlaya. p-adic differential equations. Cambridge University Press, 2010.
6. A.C.M. van Rooij. Non-Archimedean functional analysis. New York and Basel, Pure and applied mathematics, 1978.
7. U.A.Rozikov. Gibbs measure on a Cayley tree. World Scientific, 2013.

8. N.M.Chuong, Yu.V.Egorov, A.Khrennikov, Y.Meyer, D.Mumford. Harmonic, wavelet and  $p$ -adic analysis. World Scientific, 2007.
9. Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., Phase Transitions in the Ising Model on  $\mathbb{Z}$  over the  $p$ -adic Number Field, Uzb. Mat. Zh., No. 4, 1998, 23-29.
10. Khakimov O.N., On  $p$ -adic Gibbs measures for Ising model with four competing interactions.  $P$ -adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2013; 5: 194-203.
11. Rakhmatullayev M., Khakimov O., Tuxtaboyev A., On  $p$ -adic generalized Gibbs measure for the Ising model on a Cayley tree. Theor. Math. Phys. 2019; 201: 1521-1530.
12. B.Dragovich, A.Khrennikov, and D. Mihajlovic, Linear fractional  $p$ -adic and adelic dynamical systems, Rep. Math. Phys., 60 1, 2007, 55B-68.
13. E.Yurova and A.Khrennikov, Generalization of Hensel's lemma: finding the roots of  $p$ -adic Lipschitz functions, J.Number Theory 158 2016, 217-233.
14. A.Yu.Khrennikov and M.Nilsson.  $p$ -adic Deterministic and Random Dynamics. Kluwer Academic Publishers. London. 2004.
15. S.Jeong, Toward the ergodicity of  $p$ -adic 1-Lipschitz functions represented by the van der Put series, J. Number Theory, 133(9):2874-2891, 2013.

### РЕЗЮМЕ

В этой статье описывается информация о  $p$ -адических 1-липшицевых функциях и их свойствах. Приводится общий вид  $p$ -адических 1-липшицевых функций. Также изучается динамика  $p$ -адических 1-липшицевых функций.

**Ключевые слова:**  $p$ -адические числа,  $p$ -адическая норма, 1-функции Липшица, динамическая система, неподвижная точка.

### RESUME

This article is described information about  $p$ -adic 1-Lipschitz functions and their properties. An overview of  $p$ -adic 1-Lipschitz functions is given. The dynamics of  $p$ -adic 1-Lipschitz functions is studied.

**Key words:**  $p$ -adic numbers,  $p$ -adic norm, 1-Lipschitz functions, dynamic system, fixed point.

UDC 519.24

BUTSTREP USULIDA QURILGAN STATISTIK BAHOLAR UCHUN LIMIT  
TEOREMALAR

Muradov R. S., \* Ziyoidinova M. A. \*

## REZYUME

Butstrep usulida qurilgan baholar ko‘plab yaxshi xossalarga ega bo‘ladi. Matematik statistikada ko‘pgina baholash usullari yordamida qurilgan baholarning aniq yoki limit taqsimotlari bosh to‘planning noma‘lum taqsimotiga bog‘liq bo‘lib qoladi va ularni amaliyotda qo‘llanilishi qiyinlashadi. Ushbu maqolada o‘rganilgan butstrep usulida qurilgan baholar bunday kamchiliklardan holi bo‘lib, ularni noma‘lum xarakteristikalar uchun ishonch oraliqlari qurishda ham keng foydalanish mumkindir. Bundan tashqari, maqolada butstrep usulida qurilgan baholar uchun limit teoremlar ham o‘rganilgan.

**Kalit so‘zlar:** Matematik statistika, butstrep usuli, statistik baho, ishonch oraliqlari, empirik taqsimot, limit teoremlar.

## Kirish

Ma‘lumki, matematik statistikada ko‘pgina baholash usullari, masalan, haqiqatga maksimal o‘xshashlik usuli, momentlar usuli, xi-kvadrat minumimi usuli va boshqalar yordamida tuzilgan statistik baholarning aniq yoki limit taqsimotlari bosh to‘planning noma‘lum taqsimotiga bog‘liq bo‘lib qolib, ularni amalda qo‘llanilishida bir qancha qiyinchiliklarga olib keladi. Ammo butstrep baholar bunday kamchiliklardan holi bo‘lib, ularni masalan noma‘lum xarakteristikalar uchun ishonch oraliqlarini qurishda keng qo‘llash mumkindir. Bundan tashqari, ular yordamida qurilgan ishonch oraliqlari berilgan ishonch ehtimolini o‘zgartirilmagan holda odatdagi standart ishonch oraliqlaridan bir muncha torroq bo‘lar ekan.

Noma‘lum  $F$  taqsimotga ega bo‘lgan bo‘sh to‘plamdan  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ - statistik tanlanma olingan bo‘lsin. Bu yerda  $X_i, i = \overline{1, n}$  bog‘liq bo‘lmagan va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardir. Matematik statistikaning muhim masalalardan biri  $X(n)$  bo‘yicha  $F$  ning biror funksionali  $\theta = T(F)$  ni baholash masalasidan iboratdir. Ushbu maqolada biz  $\theta$ - bir o‘lchovli skalyar bo‘lgan holni ko‘ramiz. Demak,  $\theta \in \Theta \subseteq R^1$ . Agar  $F$  taqsimotlar oilasi noma‘lum parametrlar aniqligida berilgan bo‘lib,  $\theta$  aynan mana shu parametrlarning o‘zi yoki uning biror funksiyasi bo‘lsa, u holda ko‘rilayotgan masala parametrik, aks holda noparametrik deb ataladi.

Agar  $\theta_n = Y_n(X^{(n)})$  statistika  $\theta$  ning biror bahosi bo‘lsa, odatda  $\theta_n$  ning sifati (xossalari) siljish kattaligi  $B_n(F) = M_F(\theta_n - \theta)$ , kvadratik risk  $D_n(F) = M_F(\theta_n - \theta)^2$  yoki biror bir

\*Muradov R. S. – Fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent. Namangan muhandislik-texnologiya instituti, rustamjonmuradov@gmail.com

\*Ziyoidinova M. A. – Andijon davlat universiteti 3-bosqich tayanch doktoranti, ziyoidinov@yahoo.com

boshqa xarakteristikalar orqali aniqlanishi mumkin. Ammo ko'p hollarda bahoning xossalari ifodalovchi bu kabi xatoliklar  $\theta_n$  statistikaning quyidagi noma'lum

$$G_n(x; F) = P_{F^X} : \theta_n(x^{(n)}) < x$$

taqsimotga bog'liq bo'lib qolib, ulardan foydalanishda qiyinchiliklar yuzaga keladi. Bu yerda  $P_F, M_F$  va  $D_F$  lar  $X^{(n)}$  tanlanmani elementlari  $F$  ga teng degan shartda hisoblangan ehtimollik, matematik kutilma va dispersiyalarni anglatadi. Hozirgina ta'kidlaganimizni tasdiqlovchi bir misol keltiraylik.

**1.1-misol.** Kuzatilayotgan tasodifiy miqdor  $X$  ning taqsimoti  $F$  va matematik kutilmasi  $\theta = M_F X$  bo'lsin. Agar  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$  tanlanma  $X$  ni kuzatish natijasida olingan bo'lsa, u holda  $\theta$  uchun tabiiy, ya'ni momentlar usuli bahosi

$$\theta_n = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

o'rta arifmetik qiymatdir. U holda

$$\begin{aligned} M_{F\bar{X}} &= \frac{1}{n} M_F \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot n M_F X = \theta, \\ D_{F\bar{X}} &= \frac{1}{n^2} D_F \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \cdot n D_F X = \\ &= \frac{1}{n} M_F (X - \theta)^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \theta)^2 dF(x) = \frac{\sigma_F^2}{n} \end{aligned} \quad (1)$$

Demak, (1) hisoblar asosida

$$B_n(F) = M_F(\theta_n - \theta) = M_F \theta_n - \theta = \theta - \theta = 0$$

$$D_F(F) = M_F(\theta_n - \theta)^2 = M_F(\theta_n - M_F \theta_n)^2 = D_{F\bar{X}} = \frac{\sigma_F^2}{n}$$

Agar  $\sigma_F^2 \in (0, \infty)$  bo'lsa, u holda markaziy limit teoremasiga asosan yetarlicha katta  $n$  larda:

$$\begin{aligned} P_F \left( \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sigma_F} < x \right) &= P \left( \bar{X} < \theta + \frac{\sigma_F \cdot x}{\sqrt{n}} \right) = G_n \left( \theta + \frac{\sigma_F \cdot x}{\sqrt{n}}; F \right) \approx \\ &\approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

-standart normal qonun.

Bu munosabatdan

$$G_n \left( \theta + \frac{x}{\sqrt{n}}; F \right) \approx (\sigma_{F^{-1}} \cdot x)$$



ya'ni  $\theta_n = \bar{x}$  bahoning taqsimoti nomalum  $F$  ga bog'liq bo'lib qolmoqda.

Demak, yuqorida ko'rib o'tkanimiz kabi holatlarda noma'lum  $\theta$  uchun  $\theta_n$  yordamida ishonch oraliqlari qurish yoki biror gipotezalarni tekshirish uchun kriteriyalarni qurishda muammolar yuzaga kelib qoladi. Amaliy statistikada uchraydigan bunday muammolarni hal qilishda  $\theta$  uchun butstrep baholar qulaydir. Endi biz butstrep baholarini qurish usullari bilan tanishib o'tamiz. Baholar qurishning butstrep usulini eng dastlab Bred Efron 1979-yilda [1, 2, 4] tavsiya etgan. Butstrepning mohiyati quyidagidan iboratdir.

### Asosiy masala.

$(\Omega, A, Q)$  ehtimollik fazosida aniqlangan kuzatilayotgan  $X$  tasodifiy miqdor yaratgan ehtimollik fazosini  $(X, B, P)$  orqali belgilaymiz. Bu yerda  $X$  - to'plam  $X$  ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami,  $B$  esa  $X$  ning to'plam ostilaridan tuzilgan Borel to'plamlari  $\sigma$ -algebrasi va  $X$  ning taqsimot qonuni

$$P(B) = Q(\omega : X(\omega) \in B), B \in B.$$

Biror noma'lum parametr  $\theta$  aniqligida berilgan (parametrik hol) yoki umuman (nopara- metrik hol)  $P$  oilaga tegishlidir, ya'ni

$$\{P_\theta, \theta \in \Theta\} = P \quad \text{yoki} \quad \{P\} = P,$$

$\hat{P}_n(\cdot)$  orqali  $P(\cdot)$  ning biror bahosini belgilaymiz.

Masalan, parametrik holda

$$\hat{P}_n(B) = P_{\theta_n}(B), B \in B,$$

bo'lib, bu yerda  $\theta_n$  statistika  $\theta$  ning biror bahosi va noparametrik holda esa

$$\hat{P}_n(B) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(X_k \in B), \quad B \in B, \quad (2)$$

emperik baho bo'lsin. Bu yerda  $I(A)$  orqali  $A$  xodisaning indikatorini belgiladik. Agar  $B = (-\infty, x)$  deb olsak,  $P(B) = P((-\infty, t)) = F(t)$  - taqsimot funksiya bo'ladi va unga mos bahoni  $\hat{P}_n(B) = \hat{P}_n((-\infty, t)) = \hat{F}(t)$  deb belgilaymiz. Hajmi  $m$  bo'lgan  $X_1^{(n)}, \dots, X_m^{(n)}$  tasodifiy miqdorlarni  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$  tanlanma berilganligi shartidagi taqsimot qonuni  $\hat{P}_n(\cdot)$  bo'lsin. Bu esa o'z navbatida quyidagini anglatadi, bir ehtimollik bilan

$$Q(\omega : X_1^{(n)}(\omega) \in B_1, \dots, X_m^{(n)}(\omega) \in B_m / X^{(n)}) = \prod_{k=1}^m \hat{P}_n(B_k), \quad B_k \in B, \quad k = \overline{1, m} \quad (3)$$

(3) tenglik bilan aniqlanadigan  $(X_1^{(n)}, \dots, X_m^{(n)}) = Y_m^{(k)}$  statistik tanlanma butstrep tanlanma deb ataladi. Odatda  $m = m(n)$  va  $n$  tanlanma hajmlaridan

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{n} \right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{n} \right) < \infty \quad (4)$$

shart talab qilinadi [1, 4] (masalan  $m = n$  deb tanlash mumkin). Butstrep tanlanmasining taqsimot funksiyasi  $\hat{F}_n(t)$  bo'lganligi sababli  $Y_m^{(k)}$  ni statistik modellash usulida tuzish mumkin.

$$\theta_{nm}^* = \Psi_{nm}(X_1^{(n)}, \dots, X_m^{(n)})$$

orqali  $\theta$  uchun butstrep bahoni belgilab olamiz.  $\theta_{nm}^*$  ning taqsimot funksiyasini  $G^*(y) = P(y_m^{(n)} : \theta_{nm}^* < y/X^{(n)})$  orqali belgilab olib, uni baholashni quyidagi Efron taklif etgan uchta qadamlarda amalga oshiramiz:

**1-qadam:**  $X^{(n)}$  tanlanma orqali  $\hat{F}_n(t)$  bahoni qurib olamiz;

**2-qadam:** Berilgan  $m = 1, \dots, M$  lar uchun  $\hat{F}_n$  taqsimotga ega bo'lgan  $(X_1^{(n)}, \dots, X_m^{(n)}) = Y_m^{(k)}$  butstrep tanlanmalarni va ular orqali esa  $\theta$  uchun  $\theta_{nm}^*$  butstrep baholarni qurib olamiz;

**3-qadam:**  $G^*$  ni baholash uchun  $Y_m^{(n)}$  orqali empirik bahoni quramiz:

$$G_M^*(y) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\theta_{nm}^* < y)$$

Biz  $M^*$  orqali  $G^*$  taqsimotga nisbatan hisoblangan matematik kutilmani belgilab olib,

$$B_n^* = M^* \theta_{nm}^* - \theta_n,$$

$$D_n^* = D^* \theta_{nm}^* = M^* (\theta_{nm}^* - M^* \theta_{nm}^*)^2,$$

lar orqali  $\theta_{nm}^*$  butstrep bahoning siljish kattaligi va dispersiyalarini kiritamiz. Bu xarakteristikalarini  $G_m^*$  empirik taqsimot yordamida baholaymiz:

$$B_{nm}^* = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \theta_{nm}^* - \theta = \bar{\theta}_{nm} - \theta_n,$$

$$D_{nm}^* = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\theta_{nm}^* - \bar{\theta}_{nm})^2.$$

### Butstrep baholar uchun limit teoremlar.

Aytaylik,  $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$  statistik tanlanma noma'lum  $F$  taqsimotga ega bo'lgan bo'sh to'plamdan olingan bo'lib,  $Y_m^* = (X_1^*, \dots, X_m^*)$  esa  $X^{(n)}$  dan tuzilgan butstrep tanlanma bo'lsin.  $F$  ga mos o'rta qiymat va dispersiyalarni kiritamiz:

$$\theta = \theta(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \theta)^2 dF(x),$$

$\theta$  va  $\sigma^2$  parametrlarni mos ravishda

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k,$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2,$$

tanlanma o'rtta arifmetik qiymat va dispersiyalar bilan baholash tabiiydir. U holda markaziy limit teoreмага asosan

$$\xi_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta)}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1).$$

[1] maqolada butstrep o'rtta qiymat

$$\bar{X}_m^* = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k,$$

xossalari o'rganilgan. Eslatib o'tamiz  $Y_m^*$  butstrep tanlanma taqsimoti  $\hat{F}_n$  empirik taqsimotdir.  $\bar{X}_m^*$  tanlanmaga mos butstrep tanlanma dispersiyani

$$S_m^{*2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (X_k^* - \bar{X}_m^*)^2,$$

hamda  $\xi_n$  ning butstrep analoglarini

$$\xi_m^* = \frac{\sqrt{m}(\bar{X}_m^* - \bar{X}_n)}{S_n},$$

kiritamiz.

**Teorema 1 [1].**  $X_1, X_2, \dots$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi chekli musbat dispersiya  $\sigma^2$  ga ega bo'lsin:  $0 < \sigma^2 < \infty$ . U holda  $n, m \rightarrow \infty$  da deyarli barcha tanlanmalar uchun  $\sqrt{m}(\bar{X}_m^* - \bar{X}_n)$  ning berilgan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  lardagi shartli taqsimoti  $N(0, \sigma^2)$  ga intiladi. Bundan tashqari, shartli ehtimollik bilan  $S_m^* \rightarrow \sigma$ , ya'ni bir ehtimollik bilan ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(|S_m^* - \sigma| > \varepsilon / X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Demak, 1-teoremadan

$$\sqrt{m}(\bar{X}_m^* - \bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, S_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, \sigma^2).$$

Bundan esa  $n, m \rightarrow \infty$  da  $\xi_n$  va  $\xi_m^*$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketliklarining limit taqsimoti yagona  $N(0, 1)$  ekani kelib chiqadi.

Endi oddiy empirik taqsimot funksiya va uning butstrep analogini

$$F_m^*(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (X_k^* < t), \quad t \in R \quad (5)$$

kiritamiz. Bu empirik taqsimotlar yordamida empirik jarayon

$$\omega_n(t) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - F(t))$$

va butstrep empirik jarayonlarni

$$\omega_n(t) = \sqrt{m}(F_m^*(t) - \hat{F}_n(t))$$

tuzib olamiz. Matematik statistikaning noparametrik nazariyasidan ma'lumki [3],  $\omega_n(t)$  tasodifiy jarayon  $n \rightarrow \infty$  "Broun ko'prigi" deb ataluvchi Gauss jarayoni  $B(F(t))$  ga kuchsiz yaqinlashadi:

$$\omega_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} B(F(t)), \quad t \in R \quad (6)$$

bu yerda  $\{B(y), 0 \leq y \leq 1\}$  o'rta qiymati nol ( $MB(y) = 0$ ) va kovariyatsiyasi

$$MB(y_1)B(y_2) = \min(y_1, y_2) - y_1y_2, \quad y_1, y_2 \in [0, 1]$$

formula bilan aniqlanadi. Bu (6) da'voning butstrep jarayon uchun analogi [1] da isbotlangandir.

**Teorema 2 [1].** *Deyarli barcha tanlanma ketma-ketliklar  $X_1, X_2, \dots$  uchun  $\omega_{nm}(t)$  butstrep empirik jarayonning  $X_1, X_2, \dots, X_n$  lar berilganidagi shartli taqsimotlari  $n, m \rightarrow \infty$  da  $B(F(t))$  ga kuchsiz yaqinlashadi:*

$$\{\omega_{nm}(t)/X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty]{D} B(F(t)), \quad t \in R. \quad (7)$$

(7) munosabatdan hususan butstrep  $F_m(t)$  bahoning asosligi ham kelib chiqadi:  $\forall \varepsilon > 0$  uchun

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P\left(\sup_{-\infty < t < \infty} |F_m^*(t) - F(t)| > \varepsilon / X_1, \dots, X_n\right) = 0. \quad (8)$$

Bundan tashqari, (7) da'vo yordamida noma'lum taqsimot funksiya  $F(t)$  uchun asimptotik ishonch oralig'ini tuzish mumkin. Empirik taqsimot  $\hat{F}_n(t)$  va berilgan  $a \in (0, 1)$  son uchun  $C_n(\hat{F}_n)$  ni butstrep taqsimotidan shunday tanlaymizki ( $m = n$  uchun):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{n} \sup_{-\infty < t < \infty} |F_n^*(t) - \hat{F}_n(t)| < C_n(\hat{F}_n(t)/X_1, \dots, X_n)\right\} = 1 - a. \quad (9)$$

munosabat bajarilsin. U holda (9) ga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{n} \sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{F}_n(t) - F(t)| \leq C_n(\hat{F}_n)\right\} = 1 - a. \quad (10)$$

Demak, yetarlicha katta  $n$  larda (10) dan  $1 - a$  ehtimollik bilan quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\sqrt{n} \left| \hat{F}_n(t) - F(t) \right| \leq C_n(\hat{F}_n), \quad t \in R,$$

ya'ni

$$\hat{F}_n(t) - \frac{C_n(\hat{F}_n)}{\sqrt{n}} \leq F(t) \leq \hat{F}_n(t) + \frac{C_n(\hat{F}_n)}{\sqrt{n}}, \quad t \in R \quad (11)$$

(11) dan noma'lum  $F(t)$  uchun  $1 - a$  satxdagi asimptotik ishonch oralig'i quyidagicha

$$\left( \hat{F}_n(t) - \frac{C_n(\hat{F}_n)}{\sqrt{n}}; \hat{F}_n(t) + \frac{C_n(\hat{F}_n)}{\sqrt{n}} \right)$$

ekan. Shuni ta'kidlab o'tamizki,

$$C_n(\hat{F}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \beta_{1-a},$$

bu yerda  $\beta_{1-a}$  soni  $\sup_{0 \leq y \leq 1} |B(y)|$  tasodifiy miqdorning  $1 - a$  satxdagi kvantilidir

$$P \left( \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} |B(y)| \leq \beta_{1-a} \right) = P \left( \sup_{0 \leq y \leq 1} |B(y)| \leq \beta_{1-a} \right) = 1 - a.$$

### Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations).

Ushbu maqolada noma'lum parametrlarni statistik baholashning butstrep usuli va uning qanday hosil qilish ketma-ketligi o'rganilgan. Butstrep usulining boshqa baholash usullaridan afzalliklari keltirilgan. Noma'lum xarakteristikalar uchun ishonch oraliqlari qurish masalalari ham tahlil qilingan. Bundan tashqari, butstrep baholari uchun limit teoremlar ham tadqiq qilingan.

### ADABIYOTLAR

1. Bickel P. J., Freedman D. A. Some asymptotic theory for the bootstrap. // Ann. Statist., 1981, v.9, N.6, p. 1196–1217.
2. Efron B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. // Ann. Statist., 1979, v.7, N.1, p. 1–26.
3. Боровков А. А. “Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез”. М.: Наука, 1984, 472 с.
4. Кошевник Ю. А. Асимптотические свойства бутстреп оценок. // Заводская лаборатория 1987, т.53, N.10, с. 76–82.
5. Farmonov Sh. Q., Abdushukurov A. A. “Matematik statistikka. 1–qism:Parametrlarni baholash”. T., “Universitet”, 1994, 68–bet.
6. Muradov R. S., Ziyoiddinova M. A. Butstrep usuli va uning statistik baholashda qo'llanilishi. // “Yosh matematiklarning yangi teoremlari 2022” Respublika konferensiyasi materiallari, Namangan, 13–14 may, 2022. 345–346 betlar.
7. Michael R. Chernick Bootstrap Methods: A Guide for Practitioners and Researchers, Wiley, 2011.
8. Muradov R. S., Kamoliddinov M., Ziyoiddinova M. Taqsimotlar qorishmasini to'liq bo'lmagan tanlanmalar bo'yicha baholash //Proceedings of VI International Scientific conference STATISTICS and its applications, 19–20 October, 2022. pp. 263–264.

9. Muradov R. S., Ziyoidinova M. Butstrep usuli yordamida statistik ishonch intervallarini qurish. NamDU Ilmiy Axborotnomasi, 11-son, 2023, 83–90 betlar.

### РЕЗЮМЕ

Оценки, построенные с использованием метода бутстрепа, обладают многими хорошими свойствами. В математической статистике точные или предельные распределения оценок, построенные с использованием многих методов оценки, зависят от неизвестного распределения совокупности, что затрудняет их использование на практике. Оценки, построенные с помощью изучаемого в статье метода бутстрепа, лишены подобных недостатков и могут широко использоваться при построении доверительных интервалов для неизвестных характеристик. Кроме того, в статье рассматриваются предельные теоремы для оценок, построенных методом бутстрепа.

**Ключевые слова:** Математическая статистика, бутстреп-метод, статистическая оценка, доверительные интервалы, эмпирическое распределение, предельные теоремы.

### RESUME

Estimates constructed using the bootstrap method have many good properties. In mathematical statistics, the exact or limit distributions of estimates constructed using many estimation methods depend on the unknown distribution of the population, making them difficult to use in practice. Estimates constructed by the bootstrap method studied in this article are free of such shortcomings, and they can be widely used in the construction of confidence intervals for unknown characteristics. In addition, the article examines limit theorems for estimates constructed by the bootstrap method.

**Key words:** Mathematical statistics, bootstrap method, statistical estimation, confidence intervals, empirical distribution, limit theorems.

UDC 517.55

 $A(z)$ -ANALYTIC FUNCTIONS IN NON-CONVEX DOMAINS

N.R.Turdieva. D.N.Oltiboyev \* \*

## RESUME

In this paper, we study  $A(z)$ -analytic functions in non-convex domains. In particular, we prove an analogue of Cauchy integral formula for  $A(z)$ -analytic functions in non-convex domains.

**Keywords:**  $A(z)$ -analytic functions, Cauchy integral formula, Beltrami equation.

Nowadays, the class of  $A(z)$ -analytic functions studied deeply and develops rapidly. Mainly,  $A(z)$ -analytic functions are well studied in convex domains (see [1]). However, we can see that properties of  $A(z)$ -analytic functions are distinguished in convex and non convex domains (see [2]). The applications of the  $A$ -analytic functions we can see in mechanics, geology, medicine, particularly, in the problems of tomography. In this paper considered  $A(z)$ -analytic functions in case when  $A(z)$  is anti-analytic function.

Let us see the following Beltrami equation

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z)f_z(z) \quad (1)$$

where the function  $A(z)$  is in general assumed to be measurable with  $|A(z)| \leq C < 1$  almost everywhere in the domain  $D \subset \mathbb{C}$ . Solutions of equation (1) are often referred to as  $A(z)$ -analytic functions.

Let  $A(z)$  be anti-analytic,  $\partial A = 0$  in  $D \subset \mathbb{C}$  such that  $|A(z)| \leq C < 1, \forall z \in D$ . We put

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

According to (1) the class of  $A(z)$ -analytic functions  $f \in O_A(D)$  characterized by the fact that  $\bar{D}_A f = 0$ , i.e. the class of  $A(z)$ -analytic functions are the solutions of the Beltrami equation.

Let  $D \subset \mathbb{C}$  be a convex domain and  $A(z)$  is anti-analytic function in  $D$ , with  $|A(z)| \leq C < 1$ . Fix  $z_0 \in D$ . We consider the function

$$K(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - z_0 + \int_{\gamma(z_0, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}$$

where  $\gamma(z, z_0)$  is a smooth curve which connects the points  $z, z_0 \in D$ . This function posses the following properties (see [3]):

1.  $K(z)$  is a  $A(z)$ -analytic function in  $D$ .

\*N.R.Turdieva. – National university of Uzbekistan, nrturdieva@gmail.com

\*D.N.Oltiboyev. – National university of Uzbekistan, davrbek.oltiboyev@gmail.com

2. For any  $\varepsilon > 0$  with  $\{|z - z_0| = \varepsilon\} \subset\subset D$  we have

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} K(z)(dz + A(z)\bar{d}z) = 1.$$

The integral  $\int_{\gamma(z_0, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$  defines an invertible analytic function in  $D$ , where  $\gamma(z, z_0)$  is a smooth curve which connects the points  $z, z_0 \in D$ . Since the domain is simply connected and the function  $\bar{A}(z)$  holomorphic, then the integral  $I(z) = \int_{\gamma(z_0, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$  does not depend on a path of integration and  $I'(z) = \bar{A}(z)$ . If  $D$  is convex domain then  $z_0$  is unique zero of the following function (see [1])

$$\psi(z, z_0) = z - z_0 + \overline{\int_{\gamma(z_0, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}, z_0 \in D \quad (2)$$

In fact, if  $[z_0, z]$  is a segment which connects the points  $z_0, z \in D$ , then

$$z - z_0 + \overline{\int_{\gamma(z_0, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} = z - z_0 + \overline{\int_{[z_0, z]} \bar{A}(\tau) d\tau}$$

and since  $|A(z)| \leq C < 1$  we can see that the unique zero of the function (2) will be simple.

**Theorem 1 (see [1]).** *If a function  $A(z)$  belongs to the class of  $m$ -smooth functions ( $A(z) \in C^m(D)$ ), then every solution  $f$  of the equation (1) also belongs to the class, i.e.  $f \in C^m(D)$ .*

Since, anti-analytic function is infinitely smooth, then Theorem 1 implies that  $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ .

Next example shows that, if  $D$  is not convex, then the function  $\psi(z, z_0)$  may have addition zeros in  $D$ .

**Example 2.** Let

$$D = \left\{ \frac{1}{3} < |z| < 2, -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad z_0 = 1$$

and  $A(z) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{z}}$  is the branch of  $\sqrt[3]{z}$  with  $\sqrt[3]{1} = 1$ . We are going to show that  $\psi(z, 1) = 0$  has two solutions in  $D$ . Indeed,  $\sqrt[3]{z} = (re^{-iq})^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\varphi}{3}}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi = \arg z < \frac{3\pi}{2}$ . It is easy to see that  $|A(z)|_D < \frac{2}{\sqrt[3]{9}} < 1$  and

$$\psi(z, 1) = z - 1 - \overline{\int_{\gamma(1, z)} \frac{2}{3\sqrt[3]{\tau}} d\tau} = z - \sqrt[3]{z^2}$$

Solutions of the equation  $\psi(z, 1) = 0$  are  $z_1 = 1, z_2 = e^{\frac{6\pi i}{5}}, z_3 = 0$ , but 0 is not in  $D$ . Hence this equation has two solutions in  $D$ , i.e.  $\psi(1, 1) = 0$  and  $\psi\left(e^{\frac{6\pi i}{5}}, 1\right) = 0$ .

The example shows that zeros of the function (1) may not be unique, if  $D$  is not convex. The next theorem shows the relation between zeros of the function  $\psi$ .



**Proposition 2.** *If  $z_0, z_1, z_3 \dots$  are the zeros of the function  $\psi(z, z_0)$ , then we have*

$$\psi(z, z_0) = \psi(z, z_2) = \dots$$

**Proof.** We know that  $z_0$  be a zero of (1). Let  $z_1$  be another zero of (1), then

$$\begin{aligned} \psi(z, z_0) &= z - z_0 + \overline{\int_{\gamma(z_0, z)} A(\tau) d\tau} = \\ &= z - z_1 + z_1 - z_0 + \overline{\int_{\gamma_1(z_0, z_1)} A(\tau) d\tau} + \overline{\int_{\gamma_2(z_1, z)} A(\tau) d\tau} = \\ &= \psi(z_1, z_0) + z - z_1 + \overline{\int_{\gamma(z_1, z)} A(\tau) d\tau} = \psi(z, z_1). \end{aligned}$$

Consequently, we have  $\psi(z_1, z_0) = 0$ .

**Theorem 3.** *Let  $D \subset \mathbb{C}$  be a simply connected domain and  $A(z)$  is an anti-analytic function with  $|A(z)| \leq C < 1$ . Let  $P \subset D$  is a set of isolated zeros of  $\psi(z, z_0)$ ,  $z_0 \in P$ . Then we have*

- If  $z_1, z_2$  are two disjoint zeros of function (2), then  $[z_1, z_2]$  segment does not completely belong to  $D$ , i.e.  $[z_1, z_2] \cap D \neq [z_1, z_2]$ .*
- Each  $z' \in P$  is simple zero point of  $\psi(z, z_0)$ .*

**Proof.** a). We assume, by contradiction, that  $z_1, z_2$  are two disjoint zeros of function (2) and  $[z_1, z_2] \cap D = [z_1, z_2]$ . We have

$$\begin{aligned} 0 = \psi(z_2, z_0) &= z_2 - z_0 + \overline{\int_{\gamma(z_0, z_2)} A(\tau) d\tau} = z_2 - z_1 + z_1 - z_0 + \overline{\int_{\gamma_1(z_0, z_1)} A(\tau) d\tau} + \overline{\int_{\gamma_2(z_1, z_2)} A(\tau) d\tau} = \\ &= \psi(z_1, z_0) + z_2 - z_1 + \overline{\int_{\gamma_2(z_1, z_2)} A(\tau) d\tau} = z_2 - z_1 + \overline{\int_{\gamma_2(z_1, z_2)} A(\tau) d\tau} \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} \left| z_2 - z_1 + \overline{\int_{\gamma_2(z_1, z_2)} A(\tau) d\tau} \right| &\geq |z_2 - z_1| - \left| \int_{\gamma_2(z_1, z_2)} A(\tau) d\tau \right| = |z_2 - z_1| - \left| \int_{[z_1, z_2]} A(\tau) d\tau \right| > \\ &> |z_2 - z_1| - c \left| \int_{[z_1, z_2]} d\tau \right| = (1 - c) |z_2 - z_1| > 0 \end{aligned}$$

This is a contradiction. So it implies that the segment  $[z_1, z_2]$  which connects two zeros of function  $\psi(z, z_0)$  does not completely belong to  $D$  i.e.  $[z_1, z_2] \cap D \neq [z_1, z_2]$ .

Let us now prove b). We know that  $z_0$  is simple zero of (2). Let  $z_1$  is another zero of (2). Then  $\psi(z, z_0) = \psi(z, z_1)$  by Theorem 1. This means  $z_1$  also will be simple zero of (2). Proof is complete/

**Corollary.** *Arbitrary convex subdomain  $G \subset D$  consist only one zero of  $\psi(z, z_0)$ .*

If  $G \subset D$  is convex subdomain with piecewise smooth boundary  $\partial G$ , then for any function  $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$  it is true the following Cauchy formula (see [1])

$$f(z) = \int_{\partial G} K(\xi, z)f(\xi)(d\xi + A(\xi)\bar{d}\xi), \quad z \in G \tag{5}$$

where  $K(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-\xi+\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(t)dt}$  is kernel function and  $\gamma(\xi, z)$  is a smooth curve which connects the points  $\xi, z \in D$ .

We prove a generalization of (5) for the case, when  $G$  is not convex.

**Theorem 4 (Cauchy formula).** *Let  $D \subset C$  be an arbitrary simply connected domain and  $G \subset D$  be a subdomain, with piecewise smooth boundary  $\partial G$ , and  $A(z)$  be anti-analytic function in  $D$  with  $|A(z)| \leq C < 1$ . We assume that there are no zeros of  $\psi(z, z_0)$  on  $\partial G$ . Let  $\rho > 0$  be arbitrary small such that  $U(z_j, \rho) \subset\subset G$  and  $U(z_i, \rho) \cap U(z_j, \rho) = \emptyset, \quad i \neq j$ , where  $z_j, j = \overline{1, n}$  are simple poles of the function  $K(\zeta, z)$ . If  $z_0 = z_1, z_2, \dots, z_n$  all zeros of  $\psi(z, z_0)$  in the subdomain  $G$ , then for any function  $f \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$  we have*

$$\int_{\partial G} f(\zeta)K(\zeta, z)(d\zeta + A(\zeta)\bar{d}\zeta) = \sum_{j=1}^n f(z_j) \tag{6}$$

**Proof.** We take arbitrary small  $\rho > 0$  such that  $U(z_j, \rho) \subset\subset G$  and  $U(z_i, \rho) \cap U(z_j, \rho) = \emptyset$ , for  $i \neq j$ . By the generalization of the Cauchy theorem, we have

$$\int_{\partial(G \setminus \cup_{j=1}^n U(z_j, \rho))} f(\zeta)K(\zeta, z)(d\zeta + A(\zeta)\bar{d}\zeta) = 0.$$

So it follows that

$$\int_{\partial G} f(\zeta)K(\zeta, z)(d\zeta + A(\zeta)\bar{d}\zeta) = \sum_{j=1}^n \int_{|\zeta-z_j|=\rho} f(\zeta)K(\zeta, z_j)(d\zeta + A(\zeta)\bar{d}\zeta)$$

By using the second property of the function  $K(\zeta, z)$  we have

$$\int_{|\zeta-z_j|=\rho} f(z_j)K(\zeta, z_j)(d\zeta + A(\zeta)\bar{d}\zeta) = f(z_j)$$

Since  $f \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$  we have that for arbitrary small  $\varepsilon > 0$  there exists  $\delta > 0$  such that at  $|\zeta - z_j| = \rho < \delta$  we have next inequality

$$|f(\zeta) - f(z_j)| < \varepsilon$$

It implies that

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|\zeta-z_j|=\rho} f(\zeta) K(\zeta, z_j) (d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta}) - f(z_j) \right| = \\ & = \left| \int_{|\zeta-z_j|=\rho} f(\zeta) K(\zeta, z_j) (d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta}) - \int_{|\zeta-z_j|=\rho} f(z_j) K(\zeta, z_j) (d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta}) \right| = \\ & = \left| \int_{|\zeta-z_j|=\rho} (f(\zeta) - f(z_j)) K(\zeta, z_j) (d\zeta + A(\zeta)\overline{d\zeta}) \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

by letting,  $\varepsilon \rightarrow 0$  we obtain (6). The proof is complete.

The following description will help to find out more about the class of  $A(z)$ -analytic functions in non convex domains.

**Definition.** Let  $D$  be a bounded domain and  $\partial D = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$ . Let  $D_j \subset \subset \mathbb{C}$  are bounded domains with  $\partial D_j = \gamma_j, j = \overline{1, n}$ . We say that  $D$  is almost convex if  $\bigcup_{j=1}^n D_j$  is convex.

**Example 2.** Let  $D = \{r < |z| < R\}, r > 1$  and  $A(z) = \frac{1}{\bar{z}^k}, k \geq 2$ , where  $A(z)$  satisfies the condition  $|A(z)| \leq C < 1$ . We are going to show that the zero  $z_0$  of the following function

$$\psi(z, z_0) = z - z_0 + \overline{\int_{z_0}^z \frac{1}{\tau^k} d\tau} \tag{2}$$

is unique in  $D$ . To show this we need to do some calculations as below

$$\begin{aligned} \psi(z, z_0) &= z - z_0 + \overline{\int_{z_0}^z \frac{1}{\tau^k} d\tau} = z - z_0 + \overline{\left. \frac{\tau^{-k+1}}{(-k+1)} \right|_{z_0}^z} = z - z_0 + \frac{\bar{z}^{-k+1}}{(-k+1)} - \frac{\bar{z}_0^{-k+1}}{(-k+1)} = \\ &= z - z_0 + \frac{\bar{z}^{-k+1}}{(-k+1)} - \frac{\bar{z}_0^{-k+1}}{(-k+1)} = z - z_0 + \frac{1}{\bar{z}^{k-1}(-k+1)} - \frac{1}{\bar{z}_0^{k-1}(-k+1)} = \\ &= z - z_0 + \frac{\bar{z}_0^{k-1}}{(-k+1)(\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1}} - \frac{\bar{z}^{-k-1}}{(-k+1)(\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1}} = z - z_0 + \frac{\bar{z}_0^{k-1} - \bar{z}^{-k-1}}{(-k+1)(\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1}} = 0 \end{aligned}$$

By moving the second expression to the right side of equality, we take the following

$$z - z_0 = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0) \sum_{j=0}^{k-2} \bar{z}^{-k-2-j} \bar{z}_0^j}{-(k-1)(\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1}}$$

By assuming  $z \neq z_0$  we have

$$\frac{z - z_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} \cdot (k-1) \cdot (\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} \bar{z}^{-k-2-j} \bar{z}_0^j$$

Now we take the absolute value of both sides of the equation and specify this by  $B$

$$B = \left| \frac{z - z_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right| \cdot (k-1) \cdot |(\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1}| = \left| \sum_{j=0}^{k-2} \bar{z}^{-k-2-j} \bar{z}_0^j \right|$$

We will estimate the right side of equality from above

$$B = \left| \sum_{j=0}^{k-2} z^{-k-2-j} \bar{z}_0^j \right| \leq \sum_{j=0}^{k-2} |\bar{z}|^{k-2-j} |\bar{z}_0|^j < \sum_{j=0}^{k-2} |\bar{z}|^{k-1} |\bar{z}_0|^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-2} |\bar{z}\bar{z}_0|^{k-1} = (k-1) |\bar{z}\bar{z}_0|^{k-1}$$

From the other side,

$$B = \left| -\frac{z - z_0}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} \right| \cdot (k-1) \cdot \left| (\bar{z}\bar{z}_0)^{k-1} \right| = (k-1) |\bar{z}\bar{z}_0|^{k-1} \quad (7)$$

i.e. by estimation which we have done above and by equality (7) we take  $B < B$ , but it is impossible, contradiction. This means that  $z = z_0$  is unique zero of the function (2).

We conjecture that if  $D$  is an almost convex domain, then the function (1) has unique zero in  $D$ .

### References

1. Sadullaev A., Jabborov N., On a class of  $A(z)$ -analytic functions, J. Sib.Fed. Univ. Math. Phys., 2016, no.9, 374-383.
2. Sadullaev A., Pluripotential theory and its applications, Palmarlum academic publishing. 2012, (in Russian).
3. Jabborov N., Otaboev T., Cauchy theorem for  $A(z)$ -analytic functions, Uzbek Mat. Zhurn., (2014), no. 1, 15-18 (in Russian).

### REZYUME

Ushbu maqolada qavariq bo'lmagan sohalardagi  $A(z)$ -analitik funksiyalar o'rganilgan. Xususan, qavariq bo'lmagan sohalardagi  $A(z)$ -analitik funksiyalar uchun Koshining integral formulasining analogi isbotlangan.

**Kalit so'zlar:**  $A(z)$ -analitik funksiyalar, Koshining integral formulasi, Beltrami tenglamasi.

### РЕЗЮМЕ

В данной статье мы изучаем  $A(z)$ -аналитические функции в неконвексных областях. В частности, мы доказываем аналог формулы Коши для  $A(z)$ -аналитических функций в неконвексных областях.

**Ключевые слова:**  $A(z)$ -аналитические функции, формула Коши, уравнение Бельтрами.

УДК 517.55

**О НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ЯВЛЯЮЩИХСЯ  
МНОГООБРАЗИЯМИ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА  
 $P(X)$  ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР.**

**Жураев Т. Ф., \* Турсунова З. О. \***

**РЕЗЮМЕ**

В данной статье рассматривая пространства  $P(X)$  всех вероятностных мер определенное метрическом компакте  $X$ , выделяем ряд различных геометрических многообразий конечной и бесконечной размерности.

**Ключевые слова:** многообразия,  $Z$  - множество, размерность, шейп, ретракция, деформационный ретракт, сильно деформационный ретракт.

Функтором  $P$  вероятностных мер, пространством  $P(X)$  всех вероятностных мер и его подпространствами определенных метрическом компакте  $X$ , можно ознакомиться в работах [1 – 6].

Напомним, что топологическое пространства  $X$  называется многообразием, моделированным на пространстве  $Y$  или  $Y$ -многообразием [7], если всякая точка пространства  $X$  имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства  $Y$ .

$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$  гильбертов куб,  $W_i^{\pm} = \{(g_j) \in Q : g_i = \pm 1\}$   $i$ -ая грань куба  $Q$ ,  $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$  - псевдограница куба  $Q$ , а  $S = Q \setminus BdQ$  псевдовнутренность куба  $Q$ .

Известно, что  $S = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$  и  $S \simeq R^{\infty}$  [9]. Следовательно,  $l_2$  - гильбертово пространство гомеоморфно  $S$  и  $R^{\infty}$ ,  $\Sigma$  - линейная оболочка стандартного кирпича  $Q^f = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^n}]$  в гильбертовом пространстве  $l_2$ ; через  $l_2^f$  или  $\sigma$  обозначается линейное подпространство пространства  $l_2$ , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля, а  $Q^f$  - подпространство гильбертова куба  $Q$ , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Через  $rintQ$  обозначается радиальная внутренность гильбертова куба  $Q$  состоящий из точек  $\{x = (x_n) \in Q; |x_n| < t < 1, 4; \text{ для всех } n \in N\}$ .

Известно, что  $\sigma \simeq l_2^f \simeq Q^f$ , а  $\Sigma$  - гомеоморфно  $rintQ$ . Очевидно, что  $rintQ \simeq BdQ$  и  $BdQ \simeq \Sigma$ .

Известно, что пространства  $Q$ ,  $\Sigma$  и  $l_2$  сильно бесконечномерны, а пространства  $l_2^f$ ,  $\sigma$  и  $Q^f$  слабо бесконечномерны и все эти пространства однородны.

Следуя по [8],  $\sigma - Z$  - множество (счетное объединение  $Z$ -множеств)  $B$  гильбертова куба  $Q$  называют граничным множеством в  $Q$  (обозначается, через  $B(Q)$ ), если  $Q \setminus B \simeq l_2$

Множество  $A \subset X$  пространства  $X$  называется  $Z$ -множеством в  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое отображения  $f : X \rightarrow X$ , что  $\rho(f(x), x) < \varepsilon$  для любого  $x \in X$  [9].

\* **Жураев Т. Ф.** - доктор физико-математических наук, профессора кафедры Общая математика Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами, tursunzhuraev@mail.ru

\* **Турсунова З. О.** - преподаватель кафедры Общая математика Ташкентского государственного педагогического университета имени Низами, tursunova\_zulya@mail.ru

Более общим образом, граничным множеством в  $Q$  - многообразии называют  $\sigma$ -  $Z$  множество, дополнение до которого является  $l_2$ - многообразием.

Из выше приведенного следует, что псевдограница  $BdQ$ , гильбертова куба  $Q$  - является его граничным множеством.

**Теорема 1.** *Для любого собственного замкнутого подмножества  $A \in \text{exp}X$  бесконечного компакта  $X$  подпространство  $P(A)$  пренебрежимо в  $S_p(A)$*

**Доказательство.** Пусть  $X$  бесконечный компакт и  $A \in \text{exp}X$ ,  $A \neq X$ . Искомую гомотопию  $h(\mu, t) : S_p(A) \times [0, 1] \rightarrow S_p(A)$  построим полагая  $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0$ , где  $\mu_0 \in S_p(A) \setminus P(A)$ ,  $\text{supp}\mu_0 \cap A = \emptyset$  т.е.  $\text{supp}\mu_0 \subset X \setminus A$ .

Если  $t = 0$ , то  $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$  т.е.  $h(\mu, 0) \simeq id_{S_p(A)}$

Если  $t > 0$ , то  $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0 \in P(A)$  так как при  $t > 0$  множество  $\text{supp}h(\mu, t)$  содержит точек не принадлежащей множеству  $A$  т.е.  $h(\mu, (0, 1]) \subset S_p(A) \setminus P(A)$ . Это означает, что  $P(A)$  пренебрежимо в  $S_p(A)$  или  $P(A)$  есть  $Z$ - множество в  $S_p(A)$ . ■

$l_2$  - многообразия.

В работе [1] было доказано, что для любого собственного подмножества  $A \in \text{exp}X$  бесконечного компакта  $X$  пространство  $S_p(A)$  гомеоморфно гильбертовому пространству  $l_2$  т.е.  $S_p(A) \simeq l_2$ .

Значит, верно следующая

**Теорема 2.** *Для различных любых собственных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$ , подпространства  $S_p(A)$  и  $S_p(B)$  гомеоморфны. т.е.  $S_p(A) \simeq S_p(B)$ .*

**Следствие 1.** *Для любых различных собственных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  подпространства  $S_p(A)$  и  $S_p(B)$  имеет одинаковый гомотопический тип.*

В работе [2] имеется следующая: любой компакт  $Y$  лежащий в гильбертовом пространстве  $l_2$  пренебрежимо т.е.  $l_2 \setminus Y \simeq l_2$

Из этого факта и теоремы 1-2 получаем

**Следствие 2.** *Для любых различных собственных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  подпространства  $S_p(A) \setminus P(A)$  и  $S_p(B) \setminus P(B)$  гомеоморфны и их гомотопический тип одинаково.*

В работе [3] имеется следующая:

**Теорема 3 [3].** *Если  $X$  - полное сепараторное метризуемое пространство то произведение  $X \times l_2$  является  $l_2$  - многообразием тогда и только тогда, когда  $X$  есть  $ANR$  пространство.*

Известно, что для любого собственного подмножества  $A \in \text{exp}X$  подмножества  $P(A) \in AR$ . Если  $|A| \leq n$ , то  $P_{n,n-1}(A) = P_n(A) \setminus P_{n-1}(A)$  гомеоморфно евклидовому пространству  $R^{n-1}$

В силу этих фактов и теоремы [3] получим

**Теорема 4.** *Для любого собственного подмножества  $A \in \text{exp}X$  бесконечного компакта  $X$  произведение  $P(A) \times S_p(A)$  гомеоморфно  $l_2$ , в частности, если  $|A| \leq n$ , то  $P_{n,n-1}(A) \times P_n(A) \simeq l_2$ .*

Известно, что если  $A \in \text{exp}X$  собственное подмножество компакта бесконечного компакта  $X$ , то подпространство  $P_\omega(A)$   $\sigma$  - компактно и  $AR$  - пространство, в частном случае,  $A = X$ . Тогда в силу теоремы [3] получаем

**Теорема 5.** Для любого собственного подмножества  $A \in \text{exp}X$  бесконечного компакта  $X$ , произведения  $P_\omega(A) \times S_p(A)$  гомеоморфно  $l_2$ . В частном, случае  $P_\omega(X) \times S_p(A) \simeq l_2$ .

**Следствие 3.** Пусть  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  и  $X$  бесконечный компакт. Тогда  $(P(A) \cup P(B)) \times S_p(A \cup B) \simeq S_p(A \cup B)$ .

В работе [1] было показано, что  $P_\omega(X)$  есть граничное множество гильбертова куба  $P(X) \simeq Q$ . т.е.  $P(X) \setminus P_\omega(X) \simeq B(Q)$ .

В силу этого факта можем утверждать.

**Теорема 6.** Для любого  $A \in \text{exp}X$  собственного подмножества бесконечного компакта  $X$  имеет место  $(P(X) \setminus P_\omega(X)) \times S_p(A) \simeq l_2$ , в частном, случае:  $P(X) \setminus P_\omega(X) \simeq S_p(A)$ .

Имеется следующий результат относящихся  $l_2$  - многообразиям.: Пространство  $X$  есть  $l_2$  - многообразия, тогда и только тогда, когда  $X$  открыто вложено в  $l_2$ .

Если  $A \subset B$ ,  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$   $A \neq B$ .  $A$  и  $B$  собственно в бесконечном компакте  $X$ , то имеет место следующие  $S_p(A) \subset S_p(B)$ .  $S_p(A) \simeq l_2 \simeq S_p(B)$ , то  $S_p(B) \setminus S_p(A)$  открыто в  $S_p(B)$ .

Значит, подпространство  $S_p(B) \setminus S_p(A)$  есть  $l_2$  - многообразия. В силу выпуклости  $S_p(B) \setminus S_p(A)$  гомеоморфно  $l_2$  т.е.  $S_p(B) \setminus S_p(A) \simeq l_2$

И так верно:

**Следствие 4.** Для любых собственных различных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  бесконечного компакта  $X$ , подпространство  $S_p(A) \setminus S_p(B)$  гомеоморфно  $l_2$ .

Заметим, что в условиях следствия 4, подпространство  $S_p(A) \setminus S_p(B)$  всюду плотно в  $P(X)$  и  $S_p(A) \cap S_p(B)$  тоже всюду плотно в  $P(X)$ . С другой стороны верно равенство:  $P(X) \setminus (S_p(A) \cap S_p(B)) = (P(X) \setminus S_p(A)) \cup (P(X) \setminus S_p(B)) = Bd(Q) \cup B(Q) \cong B(Q)$  - граничное множества куба  $P(X) \simeq Q$ .

Верно следующая

**Следствие 5.** В условиях следствия 4, подпространство  $S_p(A) \cap S_p(B)$  гомеоморфно  $l_2$  т.е.  $S_p(A) \cap S_p(B) \simeq l_2$ .

**Q - многообразия.**

Пусть  $X$  бесконечный компакт. Известно, что любое открытое подмножество гильбертова куба  $Q$  есть  $Q$  - многообразия.

Если  $A$  и  $B$  различные собственные подмножества  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$ , то  $P(X) \setminus P(A)$  и  $P(X) \setminus P(B)$  открыты в  $P(X)$ . т.е.  $P(X) \setminus P(A)$  и  $P(X) \setminus P(B)$  -  $Q$  - многообразия

Имеется следующая: Два  $Q$ - многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый гомотопический тип [3].

Верно следующая

**Теорема 7.** Для любых различных собственных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  компакта  $X$  подпространство  $P(X) \setminus P(A)$  и  $P(X) \setminus P(B)$  гомеоморфны, следовательно имеет одинаковый гомотопический тип.

Из триангулярности  $Q$  - многообразия имеем:

**Следствие 6.** Для любого замкнутого собственного не одноточечного подмноже-

ства  $A \in \text{exp}X$ , бесконечного компакта  $X$  произведения  $P(A) \times P(X)$  гомеоморфно  $Q$ .

Имеется следующая: Пространство  $X$  есть  $Q$  - многообразия тогда и только тогда, когда  $X$  открыто вложено в  $Q[3]$ .

**Следствие 7.** В условиях следствия 6, подпространство  $P(X) \setminus P(A)$  можно открыто вложить в  $P(X)$ .

В частном, случае, подпространство  $(P(X) \setminus P(A)) \times [0, 1)$  тоже можно открыто вложить в  $P(X)[10]$ .

Имеется следующая:  $Q$  - многообразия  $X_1$  и  $X_2$  имеет один и тот же гомотопический тип, тогда и только тогда, когда  $X_1 \times [0, 1) \simeq X_2 \times [0, 1)$  [10].

**Теорема 8.** Для любых различных неодноточечных собственных подмножеств  $A \in \text{exp}X$  и  $B \in \text{exp}X$  подпространство  $P(X) \setminus P(A)$  и  $P(X) \setminus P(B)$  имеет одинаковый гомотопический тип и  $(P(X) \setminus P(A)) \times [0, 1)$  гомеоморфно  $(P(X) \setminus P(B)) \times [0, 1)$  т.е.  $(P(X) \setminus P(A)) \times [0, 1) \simeq (P(X) \setminus P(B)) \times [0, 1)$

Если  $A \subset X$  и  $A = \bar{A}$ , то  $P(A)$  есть  $AR$  компакт.

Верно следующая:

**Следствия 8.** Для любого собственного неодноточечного подмножества  $A \in \text{exp}X$  произведения  $P(A) \times P(X)$  гомеоморфно  $P(X)$ . т.е.  $P(A) \times P(X) \simeq Q$ .

**Следствие 9.** Для любого собственного неодноточечного подмножества  $A \in \text{exp}X$  произведения  $(P(X) \setminus P(A)) \times P(X)$  гомеоморфно  $Q$ - многообразию. т.е.  $P(A) \times P(X) \approx Q \times [0, 1)$

**Следствие 10.** Для любого собственного неодноточечного подмножества  $A \in \text{exp}X$  произведения  $P_\omega(A) \times P(X)$  гомеоморфно  $\Sigma$ .

Известно, что для любого  $n \in N$  пространства  $P_n(X)$ ,  $P_f(X)$  есть  $Z$  - множество в  $P(X)[1]$ .

Для любых бесконечных компактов  $X$  и  $Y$ , собственных неодноточечных подмножеств  $A \in \text{exp}X$ ,  $B \in \text{exp}Y$ , натурального числа  $n \in N$  можем утверждать

**Теорема 9.** Для любых собственных неодноточечных подмножеств  $A \in \text{exp}X$ ,  $B \in \text{exp}Y$  и  $n \in N$  подпространства:

$P(X) \setminus P_n(X) \simeq P(Y) \setminus P_n(Y)$  гомеоморфны;

$$P(X) \setminus P(A) \simeq P(Y) \setminus P(B);$$

$$P(X) \setminus P_f(X) \simeq P(Y) \setminus P_f(Y);$$

$$P(X) \setminus P_n(A) \simeq P(Y) \setminus P_n(B);$$

Известно, что  $ShX = ShY \rightarrow ShP_f(X) = ShP_f(Y)$  [6] и для любых бесконечных компактов  $X$  и  $Y$  имеет место:  $P(X) \setminus \delta(X) \simeq P(X) \setminus P_f(X)$  [6].

1.  $U$  собственное открытое подмножество бесконечного компакта  $X$ , то  $S_p(U)$  -  $Q$  многообразия;
2. Для любых собственных открытых подмножеств  $U_1$  и  $U_2 \in \tau_X$

$S_p(U_1) \cap S_p(U_2)$  есть  $Q$  - многообразия;



1.  $U_i$  - открыто и собственнно в  $X$ , то  $U_i \neq X$  где  $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_i = A$  - замкнуто, то  $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_p(U_i) \simeq l_2$ ;
2.  $\bigcap_{i=1}^n S_p(U_i)$  - открыто в  $P(X)$ , тогда  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_p(U_i)$  -  $Q$  - многообразия;

$l_2^f$  или  $\sigma$  - многообразия

Если  $X$  бесконечный компакт размерности ноль т.е.  $\dim X = 0$ .

1.  $P_{\omega}(X) \subset P(X)$  то,  $P_{\omega}(X) \simeq \sigma$ ;
2.  $P_{\omega}(X) \setminus P_n(X)$  гомеоморфно  $\sigma$ ;
3.  $X$  бесконечный компакт  $A \subset X$  его собственное всюду плотное счетное подмножество, тогда  $P_{\omega}(A)$  гомеоморфно  $\sigma$  и  $P(A)$  гомеоморфно  $\sigma$ ;
4. Если  $X$  компакт и  $\dim X \leq n$ , тогда  $P_{\omega}(X) \simeq \sigma$ ; Если  $U \subset X$ ,  $U$  - открыто,  $\bar{U} = X$   $P_{\omega}(U) \simeq \sigma$

$\Sigma$  - многообразия

$X$  - бесконечный компакт.  $U \subset X, U \neq X, \bar{U} = X$

1.  $P(U) \simeq \Sigma$ ,  $U$  - бесконечно или несчетно;
2.  $P_{\omega}(X) \simeq \Sigma$ , если  $P_{\omega}(X)$  содержит гильбертов куб  $Q$ ;
3.  $P_{\omega}(X) \times P(X) \simeq \Sigma$  (следствия 10);
4.  $P_{\omega}(Q) \times P(Q) \simeq \Sigma$  (из следствия 10);
5.  $P_{\omega}(BdQ) \simeq \Sigma$  (из следствия 10).

**Следствие 11.** Для любого собственного подмножества  $A \in \text{exp} X$  произведения  $P(X \setminus A) \times P(X)$  гомеоморфно  $\Sigma$ .

**Следствие 12.** Для любого собственного открытого подмножества  $U \subset X$  произведения  $P(U) \times P(X)$  гомеоморфно  $\Sigma$ .

Если  $X$  состоит из  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  точек.  $(n+1)$  - точек, то  $P(n)$  есть симплекс  $\sigma^n \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  вершины которых являются точки  $x_i$  т.е.  $\bar{T} \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\simeq$  симплексу  $\sigma^n$  размерности  $n$  [9]. Равенство  $P(X \setminus A) \simeq P(X) \setminus S_p(A)$  означает, что множество  $S_p(A)$  есть всюду плотное связное подмножество. Здесь из симплекса  $\bar{T} \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  выбросовать множество  $P(X \setminus A)$  получим  $S_p(A)$ . Заметим, что  $S_p(A)$  выпукло в  $\bar{T} \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Это означает,  $S_p(A) \in AR$ . Если  $A$  есть точка  $\{x_i\}$ , то  $S_p(x_i) \in AR$ . Тогда  $\bigcap_{i=0}^n S_p(x_i) \in AR$  и  $\bigcap_{i=0}^n S_p(x_i) = \text{int} \bar{T} \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  т.е.  $\text{int} \bar{T} \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  гомеоморфно пространству  $R^n$ . Это означает,  $\bigcap_{i=0}^n S_p(x_i)$  есть Евклидово пространство размерности  $n$ . С другой стороны (в этом случае)  $\bigcap_{i=0}^n S_p(x_i) = P_{n+1}(X) \setminus P_n(X)$ . Получается, что  $P_{n+1}(X) \setminus P_n(X)$  состоит из всех мер  $\mu \in P_{n+1}(X)$  носители которых состоит из равно  $(n+1)$ - точек.

Заметим, что  $S_p(x_i) = \overline{T}\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \overline{T}_i\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$  где  $\overline{T}_i\{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$  симплекс размерности  $(n-1)$ .

Если  $X = \{A, B, C\}$ , то  $P(X) = \Delta ABC$  - равносторонний треугольник. Множество  $S_P A = \Delta ABC \setminus [BC]$  т.е.  $S_P(A)$  есть треугольник  $\Delta ABC$  без стороны  $[BC]$ .  $S_P(A) \cap S_P(B) \cap S_P(C) = \text{int } \Delta ABC$ . Известно, что  $\text{int } \Delta ABC \simeq R^2$  - евклидова плоскость. Так как  $P(A) \subset S_P(A)$  и  $P(A)$  замкнуто и выпукло. Следовательно,  $P(A) \in AR$ . В этом случае существует ретракция  $r_A^S : S_P(A) \rightarrow P(A)$  т.е.  $r_A^S(a) = a$ , если  $a \in P(A)$ .

В данном случае, для собственного замкнутого подмножества  $A$  компакта  $X$  подпространство  $P(A)$  является сильным деформационным ретрактом и пространства  $P(X)$  и подпространство  $S_P(A)$ .

Гомотопию  $h(\mu, t) : S_P(X) \times [0, 1] \rightarrow S_P(A)$  построим полагая  $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \bullet r_A^S(\mu)$ . Известно, что если  $t = 0$ , то  $h(\mu, 0) = \mu$  т.е.  $h(\mu, 0) = id_{S_P(A)}$

Если  $t = 1$ , то  $h(\mu, 1) = r_A^S(\mu)$  - ретракция.

Значит, подмножество  $P(A)$  есть сильный деформационный ретракт.

Следовательно имеет место следующая:

**Теорема 10.** *Для любого собственного замкнутого подмножества  $A$  компакта  $X$  подпространство  $P(A)$  является сильным деформационным ретрактом пространства  $S_P(A)$  и  $P(X)$ .*

Легко доказывается следующая:

**Теорема 11.** *Для любого собственного замкнутого подмножества  $A$  компакта  $X$  подпространства  $S_p(A) \setminus P(A)$  и  $P(X) \setminus P(A)$  гомотопически плотны в  $S_P(A)$  и в  $P(X)$ .*

### $R^n$ - Многообразия

**Следствие 13.** Для любого конечного компакта  $X$  (где  $|X| \geq 2$ ) пространство  $\bigcap_{x_i \in X} S_P(x_i)$  является евклидовым  $R^{|X|}$  многообразием.

$X$  - бесконечный компакт и  $\dim X = 0$

1. Для нормального функтора  $P_n$  имеет место:  $P(X \setminus A) = P_n(X) \setminus S_{P_n}(A)$
2.  $P_n(X) \setminus P_{n-1}(X) = P_{n,n-1}(X)$  есть  $R^{n-1}$  многообразия

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жураев Т.Ф. Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов. Доктор дисс. Мат. инс. Романовского АНРУз. Ташкент, 2022, 198 с.
2. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии. Успех.Мат.Наук 1991, Т.46.вып 1 (277). С.41-80.
3. Жураев Т.Ф. Некоторые основные свойства функтора  $P_f$ . Вест.МГУ, сер.Мат.-мех, 1989, №6, с.29-33.
4. Жураев Т.Ф. Пространства всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству. Общая топология. Пространства и отображения. М.МГУ, 1989, с.66-70.

5. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора  $P$  вероятностных мер. М.МГУ, 1989, 60 с. Рукопись деп.в.ВИНИТИ АН СССР, 5 июля 1989 г №4471 –В89.
6. Жураев Т.Ф. О функторе  $P$  вероятностных мер. Вест. МГУ, сер.мат.-мех. 1990, №1, с.26-30.
7. Богатый С.А., Федорчук В.В., Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, М.1986, Т. 24, с. 195-270.
8. Anderson R.D. Strongly negligible sets in Frechet manifolds Bull. Math.Soc.1969.75, №1, pp.64-67.
9. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbingsets in infinite dimensional manifolds Math.Studies, Monog.Series V.1,1996, VNIL.Publishers, 232 p.
10. Чепмэн Т. Лекции о  $Q$  – многообразиях М.Мир., 1981, 156 с.

### REZYUME

Maqolada metrik kompaktda aniqlangan barcha extimol o'lchovlari  $P(X)$  fazosining turli chekli va cheksiz o'lchamga ega bo'lgan geometrik ko'philiklar qatori aniqlangan.

**Kalit so'zlar:** Ko'pxilliklar,  $Z$  – to'plam, o'lcham, sheyp, retraktsiya, deformatsion rekrakt, kuchli deformatsion rekrakt.

### RESUME

In this article, considering the spaces of all probability  $P(X)$  measures defined by the metric compactum, we select a number of different geometric manifolds of finite and infinite dimensions.

**Key words:** Manifolds,  $Z$ -set, dimension, shape, retraction, deformation rekract, strongly deformation rekract.

УДК 517.55

**ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ВНЕЗАПНО СУЖАЮЩЕМСЯ  
КАНАЛЕ****Закиров А.Х. \*****РЕЗЮМЕ**

Цель настоящей статьи состоит в получении аналитического решения задачи о течении идеальной жидкости в трубе с внезапным сужением. Формулируется математическая модель течения, в основу которой положены уравнения Эйлера и уравнения неразрывности для идеальной среды. С помощью методов теории аналитических функций получено решение поставленной задачи. Построены графики распределения скоростей и давлений на каждом отрезке границы верхней полуплоскости.

**Ключевые слова:** струя, идеальная жидкость, внезапное сужение, аналитические функции, комплексная скорость.

**Введение**

В настоящее время значительно возрос интерес к проблеме сходящихся течений. Эти течения получили большое прикладное значение в различных областях науки и технологии, например, конфузоры с различными углами сужения широко используются в различных технических и технологических устройствах. Внезапное сужение плоского канала или трубы часто встречается при обтекании аэродинамических поверхностей и элементов теплоэнергетического оборудования. Течение в конфузоре сопровождается постепенным увеличением скорости и одновременным снижением давления.

Переход между трубами с различными диаметрами приводит к расширению или сужению потока. Такого рода переходы представляют собой местные сопротивления, на которых имеет место потери давления. Экспериментально и теоретически показано, что при течениях жидкости в конфузорах наблюдаются такие явления как отрыв потока, обратное течение и усиление турбулентности, причем отрыв потока в конфузоре сильно зависит от его геометрии и параметров потока. Течение после внезапного сужения и расширения трубы является одним из часто встречающихся случаев отрывного потока при обтекании острых кромок тел.

Работа [1] посвящена исследованиям сходящихся течений ньютоновских жидкостей в каналах со ступенчатой конфигурацией. В работе [2] приводится обзор экспериментальных и теоретических работ, посвященных течениям жидкостей в каналах с внезапным сужением, а также сравнения результатов решения полных уравнений движения методом конечных разностей. Численно решены общие уравнения движения ламинарно-изотермического течения жидкостей из большой трубы круглого сечения через резкое сжатие в коаксиальную трубку меньшего диаметра и через область развития течения меньшей трубы [4].

\*Закиров А.Х. – Национальный университет Узбекистана, asqar\_z@mail.ru

На основе известных экспериментальных и теоретических результатов изучены основные характеристики потока: вихрь на верхнем потоке, присутствующий для малых чисел Рейнольдса и вогнутость профиля скорости в сечении входа для больших чисел Рейнольдса [4]. В работе [5] дан краткий обзор некоторых достижений в вычислительной реологии и описание некоторых новых подходов для получения совпадений между численными и экспериментальными работами, посвященных задачам течения в сужениях.

Численное исследование структуры течения и теплообмена в газокапельном турбулентном потоке за прямой ступенькой, обращенной навстречу двухфазному газокапельному течению выполнено в работе [6]. При решении используются двумерные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса.

В работе [7] проведено исследование ламинарного стационарного неизотермического течения степенной жидкости в цилиндрическом канале с внезапным сужением. Формулируется математическая модель течения, которая включает уравнения гидродинамики, написанные в переменных функция тока - вихрь, и уравнение энергии. Для решения задачи используется метод установления с последующей реализацией конечно-разностного метода на основе схемы переменных направлений.

В связи с многочисленными техническими приложениями, течения жидкости в каналах с сужением постоянно привлекают внимание исследователей. Современные исследования представлены в [8-10], где особое внимание уделяется характеристикам области циркуляционного движения и потерям энергии в широком диапазоне изменения параметров.

В работе [11] С.А. Чаплыгиным впервые указана возможность математического анализа плоских струйных потенциальных течений сжимаемой жидкости и газа с дозвуковой скоростью, а также Г.Кирхгофом решена задача плоских потенциальных струйных течений несжимаемой жидкости. Вслед за его работой появилось много исследований, посвященных плоским струйным потенциальным течениям сжимаемой жидкости, в которых даны приближенные методы [12-14].

### Постановка задачи

Рассматривается стационарное течение идеальной жидкости в канале с внезапным сужением. Течение является симметричным относительно оси канала. Область решения задачи схематично изображена на рис. 1.

Предполагается, что массовые силы и поверхностные натяжения отсутствуют. Струя жидкости, выходящая из сужающейся части трубы, образует свободную поверхность с неизвестной границей. Давление на границе струи равно давлению в окружающем пространстве, т.е. постоянно. Из интеграла Бернулли следует, что на свободной границе величина скорости постоянна.

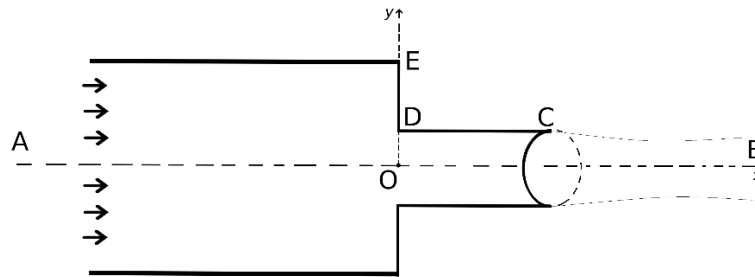


Рис. 11: Область течения.

Изменение параметров потока несжимаемой идеальной жидкости при течении в каналах описывается уравнениями неразрывности и уравнение отсутствия вихрей:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho r v)}{r \partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

При адиабатических процессах связь между давлением и плотностью дается соотношением:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n.$$

Здесь  $p_0$ ,  $\rho_0$  – давление и плотность жидкости в покое – параметры торможения, при  $v = 0$ ;  $n = \frac{c_p}{c_v}$  – показатель политропии.

При адиабатических процессах интеграл Бернулли можно привести к виду [4,6,7]

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \tau \frac{v^2}{v_0^2} \right]^\beta, \quad p = p_0 \left[ 1 - \tau \frac{v^2}{v_0^2} \right]^{\beta+1}, \quad (3)$$

где  $\tau = \frac{v_0^2}{v_{max}^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{n-1}$ .

Для определения плоского потока достаточно найти функцию скоростей  $\bar{V} = V_0 e^{i\theta}$ , где  $V_0$  – величина скорости и  $\theta$  – угол наклона скорости к оси.

### Метод решения

Используем метод Н.Е.Жуковского, для этого введем в рассмотрение аналитическую функцию [13, 15, 16]:

$$\omega = \ln \frac{V_0}{V} = \tau + i\theta, \quad (4)$$

где  $\tau = \ln \frac{V_0}{V}$ ,  $V_0$  – модуль скорости на свободной поверхности.

Область, занятую движущейся жидкостью, отобразим на верхнюю половину параметрической плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ . Таким образом, чтобы точкам В, С, D, Е, соответствовали на плоскости ( $\zeta$ ) значения  $-1, 1, d, e$ , бесконечно удаленные точки на плоскостях  $z$  и  $\zeta$  переходили друг в друга (рис.2).

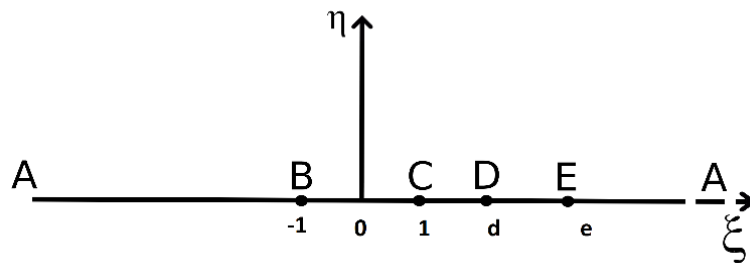


Рис. 12: Верхняя полуплоскость.

Согласно методу Н.Е.Жуковского, функции  $\omega(\zeta)$  и  $W(\zeta)$  выражаются через параметрическую переменную  $\zeta$ , изменяющуюся в верхней полуплоскости, и вместо функции  $z(\zeta)$  можно искать функцию  $\omega(\zeta)$ .

На действительной оси верхней полуплоскости ( $\zeta$ ) функция  $\omega(\zeta)$  удовлетворяет следующим условиям:

при  $\eta = 0$ ,  $-\infty < \xi < -1$ ,  $Im\omega = 0$ , на  $AB$ ; при  $\eta = 0$ ,  $-1 < \zeta < 1$ ,  $Re\omega = 0$ , на свободных границах  $BC$  и  $B_1C_1$ ; при  $\eta = 0$ ,  $1 < \xi < d$ ,  $Im\omega = 0$  на  $D$  и  $C_1D_1$ ; при  $\eta = 0$ ,  $d < \xi < e$ ,  $Im\omega = -\frac{\pi}{2}$ , на вертикальных стенках  $DE$  и  $D_1E_1$ ; при  $\eta = 0$ ,  $b < \xi < \infty$ ,  $Im\omega = 0$ , на горизонтальных стенках  $EA$  и  $E_1A_1$ .

Теперь введем функцию  $\omega_1(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta-1}}$ , для которой имеем следующие граничные значения:

- при  $\eta = 0$ ,  $-\infty < \xi < -1$ ,  $Im\omega_1 = 0$ ;
- при  $\eta = 0$ ,  $-1 < \xi < 1$ ,  $Im\omega_1 = 0$ ;
- при  $\eta = 0$ ,  $1 < \xi < d$ ,  $Im\omega_1 = 0$ ;
- при  $\eta = 0$ ,  $d < \xi < e$ ,  $Im\omega_1 = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta-1}}$ ;
- при  $\eta = 0$ ,  $e < \xi < \infty$ ,  $Im\omega_1 = 0$ .

На всей границе области ( $\zeta$ ) известна мнимая часть функции  $\omega_1(\zeta)$  и, следовательно, ее можно восстановить согласно интегральной формуле Шварца [14]:

$$\omega_1(\zeta) = -\frac{1}{2} \int_d^e \frac{1}{\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \frac{dt}{t-\zeta}.$$

При вычислении интеграла используем замену  $\frac{1}{t-\zeta} = s$ , и опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для функции  $\omega(\zeta)$ :

$$\omega(\zeta) = \ln \frac{\sqrt{\zeta-d} \sqrt{\zeta-1}\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{\zeta-e} \sqrt{\zeta-1}\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}\sqrt{\zeta+1}}. \quad (5)$$

Из последнего выражения находим сопряженную комплексную скорость:

$$\hat{V} = V_0 \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\sqrt{\zeta+1}} \frac{\sqrt{\zeta-e}}{\sqrt{\zeta-d}} = V_0 \frac{F(\zeta, e)}{F(\zeta, d)} \quad (6)$$

где  $F(\zeta, d) = \frac{\sqrt{\zeta-d}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}\sqrt{\zeta+1}}$ ;  $F(\zeta, e) = \frac{\sqrt{\zeta-e}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\sqrt{\zeta+1}}$ .

Разделяя действительную и мнимую части в (3), найдем распределение скоростей и давлений на каждом отрезке границы верхней полуплоскости:

Вдоль CD:  $1 < \xi < d$ ,

$$u = V_0 \frac{\sqrt{\xi-1}\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}\sqrt{\xi+1}}{\sqrt{\xi-1}\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\sqrt{\xi+1}} \sqrt{\frac{e-\xi}{d-\xi}} = V_0 F_1(\xi), \quad v = 0.$$

$$p = p_0 [1 - \tau_0 F_1^2(\xi)]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Вдоль DE:  $d < \xi < e$ ,

$$u = 0, \quad v = -V_0 \frac{\sqrt{\xi-1}\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}\sqrt{\xi+1}}{\sqrt{\xi-1}\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}\sqrt{\xi+1}} \sqrt{\frac{e-\xi}{\xi-d}} = -V_0 F_2(\xi).$$

$$p = p_0 [1 - \tau_0 F_2^2(\xi)]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Вдоль BC: при  $\eta = 0$ ,  $-1 < \xi < 0$ ,

$$u = V_0 \cos[\alpha_1(\xi)], \quad v = V_0 \sin[\alpha_1(\xi)];$$

где

$$\alpha_1(\xi) = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})}{\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1-|\xi|) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1+|\xi|)};$$

при  $\eta = 0$ ,  $0 < \xi < 1$ ,

$$u = V_0 \cos[\alpha_2(\xi)], \quad v = V_0 \sin[\alpha_2(\xi)];$$

где

$$\alpha_2(\xi) = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})}{\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1+\xi) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1-\xi)}.$$

Скорость набегающего потока находим из (6) при  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$V_A = V_0 \frac{\sqrt{d+1} + \sqrt{d-1}}{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}}.$$

Область комплексного потенциала будет полоса шириной  $q$  [13,15]. Согласно методу особых точек Чаплыгина, отображение области комплексного потенциала на верхнюю полуплоскость ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) осуществляется аналитической функцией:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{\pi} \ln(\zeta + 1) + iq, \quad (7)$$

где  $q$ - заданный расход жидкости.

С помощью функций  $\frac{dW}{d\zeta}$  и  $\hat{V}(\zeta)$  в указанных областях можно найти все геометрические характеристики области течения в физической плоскости ( $z$ ). Конформно отображающую функцию  $z = z(\zeta)$  находим из уравнения

$$dz = \frac{dW}{d\zeta} \left( \frac{dW}{dz} \right)^{-1} d\zeta.$$



где  $\frac{dW}{d\zeta} = -\frac{q}{\pi} \frac{1}{\zeta+1}$ .

Из этих формул получим:

$$dz = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{1}{\zeta+1} \frac{\sqrt{\zeta-d} \sqrt{\zeta-1} \sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{\zeta-e} \sqrt{\zeta-1} \sqrt{d+1} + \sqrt{d-1} \sqrt{\zeta+1}} d\zeta = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{1}{\zeta+1} \frac{F(\zeta, d)}{F(\zeta, e)} d\zeta \quad (8)$$

Разделим действительную и мнимую части в выражении (8):

$$dx + idy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{e^{i\alpha_1(\xi)}}{1-|\xi|} d\xi = \frac{q}{\pi V_0} \frac{1}{|\xi|-1} [\cos\alpha_1(\xi) + i \sin\alpha_1(\xi)], \quad -1 < \xi < 0, \quad (9)$$

$$dx + idy = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{e^{i\alpha_2(\xi)}}{1+\xi} d\xi = -\frac{q}{\pi V_0} \frac{1}{\xi+1} [\cos\alpha_2(\xi) + i \sin\alpha_2(\xi)], \quad 0 < \xi < 1. \quad (10)$$

Для нахождения уравнения свободной поверхности в параметрической форме достаточно проинтегрировать выражения (9) и (10):

$$\begin{cases} x(\xi) = x(0) - \frac{q}{\pi V_0} \int_{\xi}^0 \frac{\cos\alpha_1(t)}{1-|t|} dt, & y(\xi) = y(0) - \frac{q}{\pi V_0} \int_{\xi}^0 \frac{\sin\alpha_1(t)}{1-|t|} dt, \\ x(\xi) = x(1) - \frac{q}{\pi V_0} \int_{\xi}^1 \frac{\cos\alpha_2(t)}{1+t} dt, & y(\xi) = y(1) - \frac{q}{\pi V_0} \int_{\xi}^1 \frac{\sin\alpha_2(t)}{1+t} dt. \end{cases} \quad (11)$$

здесь

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1(\xi)) &= \\ &= \frac{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})}{\sqrt{[\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1-|\xi|) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1+|\xi|)]^2 + (1-\xi^2)(\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})^2}}; \\ \cos(\alpha_2(\xi)) &= \\ &= \frac{\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1+\xi) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1-\xi)}{\sqrt{[\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1+\xi) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1-\xi)]^2 + (1-\xi^2)(\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})^2}}; \\ \sin(\alpha_2(\xi)) &= \\ &= \frac{\sqrt{1-\xi^2} (\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})}{\sqrt{[\sqrt{d-1}\sqrt{e-1}(1+\xi) + \sqrt{d+1}\sqrt{e+1}(1-\xi)]^2 + (1-\xi^2)(\sqrt{d-1}\sqrt{e+1} - \sqrt{d+1}\sqrt{e-1})^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено аналитическое решение поставленной краевой задачи в верхней полуплоскости относительно функции Н.Е.Жуковского.

### Результаты расчетов

Некоторые характерные результаты расчетов распределения горизонтальной и вертикальной скоростей, а также поля давления представлены ниже на соответствующих рисунках (рис. 3-5).

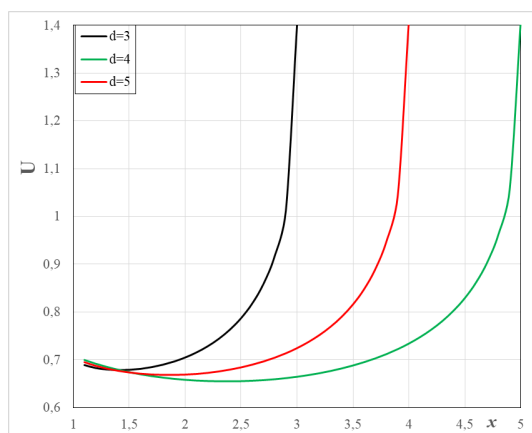


Рис. 13: Распределение скорости вдоль стенки CD канала

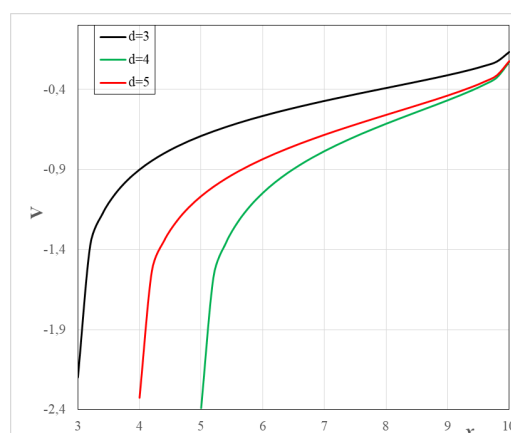


Рис. 14: Распределение скорости вдоль стенки DE канала

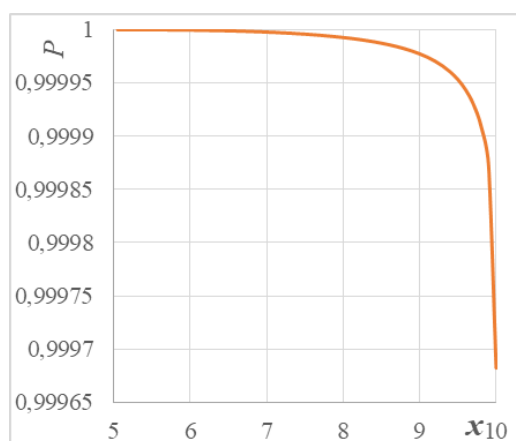


Рис. 15: Распределение давлений потока вдоль стенки канала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гарифуллин Ф.А., Тазюков Ф.Х., Шайхетдинова Р.С. Изучение течения жидкостей при внезапном сужении // Вестник Казанского техн. уни-та. 2013, № 10, стр.109-114.
2. Boger D.V. Circular entry flow of inelastic and viscoelastic fluids. In Advances in Transport Processes. 2, 43-98 (1982). New-Dehli, Wiley Eastern.
3. Christiansen E.A., Kersley S.J., Carter T.R. Laminar tube flow through an abrupt contraction. AIChE Journal.18(2), 372-380 (1972).
4. Kim M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. The roles of inertia and Shearthinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction. J.Non-Newtonian Fluid Mech. 13, 341-363 (1983).

5. Walters K., Webster M.F. The distinctive CDF challenges of compuaionae rheology, In Proc. of ECCOMAS Computational Fluid Dynamics, 2001 Conference, Swansea, UK, 2001.
6. Пахомов М.А., Терехов В.И. Влияние внезапного сужения плоского канала на вынужденную конвекцию в турбулентном газокапельном течении. - ЖТФ, 2023, том 49, вып.7.
7. Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное моделирование неизотермического течения степенной жидкости в канале со скачком сечения // Вычислительные технологии, Том 24, № 5, 2019.
8. Oliveira M.S.N., Oliveira P.J., Pinho F.T., Alves M.A. Effect of contraction ratio upon viscoelastic flow in contractions: The axisymmetric case // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2007. Vol. 147. P. 92-108.
9. Kfuri S.L.D., Silva J.Q., Soares E.J., Thompson R.L. Friction losses for power-law and viscoplastic materials in an entrance of a tube and an abrupt contraction //J. of Petroleum Science and Engineering. 2011. Vol. 76, No. 3-4. P. 224-235.
10. Pitz D.B., Franco A.T. Negrao C.O.R. Effect of the Reynolds number on viscoelastic fluid flows through axisymmetric sudden contraction//J. of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2017. Vol. 39, No. 5. P. 1709-1720.
11. Чаплыгин С.А. Избранные труды. МЖГ. Математика. Общая механика. -М.: Наука, 1976.
12. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Под редакцией Г.Ю.Степанова. -М.: Мир, 1964.
13. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. - М.: Наука, 1979.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1987.
15. Хамидов А.А. Плоские и осесимметричные задачи о струйном течении идеальной сжимаемой жидкости. Ташкент, Фан, 1978.
16. Закиров А.Х. Истечение жидкости из сужающихся-расширяющихся насадок// Узбекский журнал Проблемы механики, 2023, № 3, С. 46-51.

## REZYUME

Ushbu maqolaning maqsadi keskin torayuvchi kanaldagi ideal suyuqlik oqimi masalasining analitik yechimini olish. Ideal muhit uchun Eyler tenglamalari va uzluksizlik tenglamalariga asoslangan oqimning matematik modeli tuzilgan. Analitik funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanib, masalaning yechimi olindi. Yuqori yarim tekislik chegarasining har bir oralig'ida tezlik va bosimlar taqsimoti grafiklari qurilgan.

***Kalit so'zlar:*** struya, ideal suyuqlik, keskin torayish, analitik funksiyalari, kompleks tezlik.

### RESUME

The purpose of this article is to obtain an analytical solution to the problem of the flow of an ideal fluid in a pipe with a sudden narrowing. A mathematical flow model is formulated, which is based on the Euler equations and continuity equations for an ideal medium. Using methods of the theory of analytic functions, a solution to the problem was obtained. Graphs of the distribution of velocities and pressures were constructed on each segment of the upper half-plane boundary.

***Key words:*** jet, ideal fluid, sudden contraction, analytical functions, complex velocity.

УДК 517.984

## О НИЖНЕМ СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Кулжанов У. Н. \*

### РЕЗЮМЕ

В данной работе установить, что если нижний край спектра является изолированной точкой оператора Шредингера системы двух частиц на решетке, то при определенных условиях по отношению к дисперсионным функциям и потенциалу он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор.

**Ключевые слова:** Оператор энергии, нижний спектр, невозмущенный оператор, квантовых частиц, системы двух квантовых частиц.

### ВВЕДЕНИЕ

Дискретные операторы Шредингера, соответствующие гамильтонианам систем одно и двух квантовых частиц на целочисленной решетке изучены в работах [1,2,3].

Наиболее ранние результаты, связывающие положительность и невырожденность собственного значения, восходят к фундаментальной теореме Перрона и Фробениуса: конечная матрица со строго положительными элементами имеет в качестве собственного значения единичной кратности свой спектральный радиус, причем соответствующий собственный вектор строго положителен. Заметим, что в теореме Перрона-Фробениуса матрица не обязана быть самосопряженной. Эта теорема впервые появилась в работе [2] и затем в [3].

Обобщение теоремы Перрона-Фробениуса к квантовым системам восходит к работе Глимма-Жаффею [4]. Приложение к нерелятивистским системам сделано в работе Саймона, Хег Крона [5].

В этой работе показано, что резольвента невозмущенного оператора энергии системы двух частиц на  $d$ -мерной решетке является усиливающей положительность при всех значениях полного квазиимпульса системы  $k \in (-\pi; \pi)^d$ ,  $z < \epsilon_m(k)$ . и сохраняющей положительность при  $k \in T^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ ,  $z < \epsilon_m(k)$ .

Установлено, что если нижний край есть изолированная точка спектра оператора Шредингера системы двух частиц на  $d$ -мерной решетке, то при  $k \in (-\pi; \pi)^d$  он является простым собственным значением и ему соответствует строго положительный собственный вектор, а при значении  $k \in T^d \setminus (-\pi; \pi)^d$  она является кратным собственным значением и ему соответствуют положительные собственные векторы.

**Оператор энергии двух частиц в координатном и импульсном представлениях**

\*Кулжанов У. Н. – Самаркандский государственный университет имени Шарафа Рашидова, uquljonov@bk.ru

Пусть  $\mathbb{Z}$ -множество целых чисел. Через  $\mathbb{Z}^d$  обозначается  $d$ -мерная решетка,  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$  - гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определённых на  $\mathbb{Z}^d$ . Пусть  $\mathbb{T}^d = (R/2\pi\mathbb{Z})^d = (-\pi; \pi]^d$  -  $d$ -мерный тор. В котором всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества  $(-\pi; \pi]^d \subset \mathbb{R}^d$  понимаются как операции на  $\mathbb{R}^d$  по модулю  $(2\pi\mathbb{Z})^d$  и  $L_2(\mathbb{T}^d)$  - гильбертово пространство квадратично - интегрируемых функций, определённых на  $\mathbb{T}^d$ .

Невозмущенный оператор энергии  $\hat{H}_0^{(2)}$  системы двух квантовых частиц на  $d$ -мерной решетке  $\mathbb{Z}$  обычно ассоциируется со следующим оператором в гильбертовом пространстве  $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$  :

$$\hat{H}_0^{(2)} = -\frac{1}{2m_1}\hat{\Delta}_1 - \frac{1}{2m_2}\hat{\Delta}_2,$$

где  $m_1, m_2 > 0$ -массы частиц и

$$\Delta_1 = \Delta \otimes I, \quad \Delta_2 = I \otimes \Delta.$$

Здесь  $I$ - единичный оператор в  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ , и  $\hat{\Delta}$  является стандартным решетчатым Лапласианом:

$$\hat{\Delta} = \sum_{j=1}^d (\hat{T}(e_j) + \hat{T}(-e_j) - \hat{T}(0)).$$

Здесь  $e_j, j = 1, \dots, d$  является единичным вектором вдоль  $j$ -го направления  $\mathbb{Z}^d$  и  $\hat{T}(s)$ -оператор сдвига на  $s$ , определённый следующей формуле:

$$(\hat{T}\hat{f})(s) = \hat{f}(x + s), \quad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d), \quad s \in \mathbb{Z}^d. \quad (1)$$

Точнее

$$(\hat{\Delta}\hat{f})(x) = \sum_{j=1}^d (\hat{f}(x + e_j) + \hat{f}(x - e_j) - 2\hat{f}(x)), \quad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Отметим что оператор  $\hat{H}_0^{(2)}$  есть ограниченный самосопряженный оператор.

Легко проверить, что при каждом  $s \in \mathbb{Z}^d$  оператор  $\hat{T}(s)$ , определённый по формуле (1) унитарно эквивалентен оператору  $T(s)$  в пространстве  $L_2(\mathbb{T}^d)$  :

$$(T(s)f)(p) = e^{-i(s,p)}f(p).$$

Оператор энергии  $H_0^{(2)}$  (в координатном представлении) системы двух квантовых частиц, движущихся на  $d$ -мерной решетке  $\mathbb{Z}^d$  с парным взаимодействием  $\hat{V}_{12}$ , является ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве  $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$  вида

$$\hat{H}^{(2)} = \hat{H}_0^{(2)} - \hat{V}_{12}.$$

Здесь

$$(\hat{V}_{12}\hat{f})(x, y) = \hat{v}(x - y)\hat{f}(x, y), \quad \hat{f} \in \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где  $\hat{v} : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  - ограниченная функция.

Кроме того предположим, что функция  $\hat{v}$  удовлетворяет следующим предположению:

**Предположение 1.** Предположим, что  $\hat{v}(\cdot) \neq 0$  неотрицательна и  $\hat{v} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ .

**Лемма 1.** Пусть выполнено предположение 1. Тогда  $\hat{V}_{12}$  есть ограниченный, самосопряженный и положительный, а оператор  $\hat{H}^{(2)}$  есть ограниченный самосопряженный оператор.

Переход к импульсному представлению осуществляется с помощью преобразования Фурье. Стандартное преобразование Фурье  $F : L_2((\mathbb{T}^d)^2) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$  определяется по формуле:

$$(Ff)(x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{(\mathbb{T}^d)^2} f(t, s) e^{-i(x,t) - i(y,s)} dt ds$$

и обратным отображением  $F^{-1} : \ell_2((\mathbb{Z}^d)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^d)^2)$ ,

$$(F^{-1}\hat{f})(p, q) = (2\pi)^{-d} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(x, y) e^{i(x,p) + i(y,q)}.$$

Отметим, что значения функции  $\hat{f}(x, y) = (Ff)(x, y)$  называются коэффициентами Фурье функции  $f \in L_2((\mathbb{T}^d)^2)$  в ортонормированном базисе  $\{\psi_x(p)\psi_y(q)\}_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$ . Заметим, что  $F = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ . При этом импульсное представление оператора энергии системы двух частиц действует в гильбертовом пространстве  $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$  и имеет вид:

$$H^{(2)} : L_2((\mathbb{T}^d)^2) \rightarrow L_2((\mathbb{T}^d)^2), \quad H^{(2)} = H_0^{(2)} - V_{12},$$

где

$$H^{(2)} = F^{-1}\hat{H}^{(2)}F, \quad H_0^{(2)} = F^{-1}\hat{H}_0^{(2)}F, \quad V_{12} = F^{-1}\hat{V}_{12}F,$$

$$(H_0^{(2)}f)(p, q) = E(p, q)f(p, q), \quad (V_{12}f)(p, q) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(s - q)f(p + q - s, s) ds.$$

Здесь

$$E(p, q) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j),$$

$$v(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}(n) e^{i(n,p)}, \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d.$$

**Лемма 2.** Спектр оператора  $\hat{H}_0^{(2)}$  абсолютно непрерывный и

$$\sigma(\hat{H}_0^{(2)}) = \sigma_{ac}(\hat{H}_0^{(2)}) = \sigma(H_0^{(2)}) = [0; 2d(m_1^{-1} + m_2^{-1})].$$

### Разложение в прямой интеграл оператора энергии

В импульсном представлении семейство  $\{\hat{T}(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$  (см.(1)) унитарно-эквивалентно семейству  $\{T(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$ , где

$$(T(n)f)(p, q) = e^{-i(n,p+q)} f(p, q), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^d)^2).$$

Коммутационное соотношение  $\hat{H}^{(2)}\hat{T}(n) = \hat{T}(n)\hat{H}^{(2)}$  порождает коммутацию (соотношение)  $H^{(2)}T(n) = T(n)H^{(2)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^d$ . Следовательно, Абелева группа унитарных операторов  $\{T(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$  коммутирует с оператором  $H^{(2)} = H_0^{(2)} - V_{12}$ . Поэтому пространство  $L_2((\mathbb{T}^d)^2)$  и оператор  $H^{(2)}$  разлагаются в прямые интегралы фон Неймана:

$$L_2((\mathbb{T}^d)^2) = \int_{\mathbb{T}^d} \oplus L_2(\mathbb{F}_k) dk, \quad H^{(2)} = \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{h}(k) dk,$$

где

$$\mathbb{F}_k = \{(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2, p + q = k\} \quad k \in \mathbb{T}^d.$$

Здесь

$$\tilde{h}(k) : L_2(\mathbb{F}_k) \rightarrow L_2(\mathbb{F}_k), \quad \tilde{h}(k) = \tilde{h}_0(k) - \tilde{V}.$$

Теперь дадим действия операторов  $\tilde{h}_0(k)$  и  $\tilde{V}$  на элемент  $f \in L_2(\mathbb{F}_k)$ :

$$(\tilde{h}_0 k f)(p, k - p) = \tilde{E}_k(p) f(p, k - p), \quad (\tilde{V} f)(p, k - p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} v(p - s) f(s, k - s) ds,$$

где

$$\tilde{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} \varepsilon(p) + \frac{1}{m_2} \varepsilon(k - p).$$

Для функции  $\tilde{E}_k(p)$  найдем другое аналитическое представление, которое нам понадобится в дальнейшем

$$\tilde{E}_k(p) = \sum_{j=1}^d \left[ \frac{1}{m_1} (1 - \cos p_j) + \frac{1}{m_2} (1 - \cos(p_j - k_j)) \right] = \sum_{j=1}^d [\mu(0) - |\mu(k_j)| \cos(p_j - \varphi(k_j))],$$

где

$$\mu(k_j) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} e^{-ik_j}, \quad \varphi(k_j) = \arg \mu(k_j), \quad k_j \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

Функция  $\tilde{E}_k(p)$  может быть представлена в виде

$$\tilde{E}_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^d |\mu(k_j)| \cos(p_j - \varphi(k_j)), \quad (3)$$

где коэффициенты  $|\mu(k_j)|$  задаются равенствами

$$|\mu(k_j)| = \left| \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} e^{-ik_j} \right| = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{2 \cos k_j}{m_1 m_2}}.$$

Равенство (3) дает следующее представление для  $\tilde{E}_k(\cdot)$ :

$$\tilde{E}_k(p + \varphi(k)) = E_k(p) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^d |\mu(k_j)| \cos p_j. \quad (4)$$

Теперь введем унитарное отображение

$$U_k : L_2(\mathbb{F}_k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d)$$

которое определяется формулой

$$(U_k f)(p) = f(p, k - p).$$



При этом оператор

$$h(k) = U_k \tilde{h}(k) U_k^{-1}$$

является унитарно эквивалентным оператору  $\tilde{h}(k)$ .

Мы в основном изучим оператор  $h(k)$  и его координатное представление. Оператор  $h(k)$  имеет вид:

$$h(k) = h_0(k) - V.$$

Действия операторов  $h_0(k)$  и  $V$  на элемент  $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$  имеют следующий вид:

$$(h_0(k)f)(p) = E_k(p)f(p), \quad (Vf)(p) = \int_{\mathbb{T}^d} v(p-t)f(t)dt,$$

где

$$v(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{v}(s) e^{i(s,p)}.$$

Известно, что спектр оператора  $V$  совпадает с множеством  $\{0, \hat{v}(n), n \in \mathbb{Z}^d\}$ , причем числа  $\hat{v}(n)$  являются собственными значениями оператора  $V$ . Так как  $\hat{v} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ , то  $V$  является оператором со следом (ядерным), в частности компактным оператором.

Так как возмущение  $V = h(k) - h_0(k)$  является компактным, согласно теореме Вейля получим, что  $\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma_{ess}(h_0(k))$ .

Обозначим

$$\epsilon_m(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^d} E_k(q), \quad \epsilon_M(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^d} E_k(q).$$

Из (4) следует

$$\epsilon_m(k) = d\mu(0) - \sum_{j=1}^d |\mu(k_j)|, \quad \epsilon_M(k) = d\mu(0) + \sum_{j=1}^d |\mu(k_j)|.$$

**Лемма 3.** *Спектр оператора  $h_0(k)$  совпадает с отрезком  $[\epsilon_m(k); \epsilon_M(k)]$ . Кроме того  $\sigma_{ess}(h_0(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\epsilon_m(k); \epsilon_M(k)]$ .*

### Двухчастичный дискретный оператор Шредингера

Обозначим через  $\hat{h}(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$  координатное представление оператора  $h(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$ , т.е.

$$\hat{h}(k) = \mathcal{F}h(k)\mathcal{F}^{-1}. \quad (5)$$

Стандартное преобразование Фурье  $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}^d) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ , которое определяется по формуле

$$(\mathcal{F}f)(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(x,t)} f(t) dt,$$

и обратное преобразование Фурье  $\mathcal{F}^{-1} : \ell_2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^d)$  :

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} e^{i(s,p)} \hat{f}(s) dp.$$

В физической литературе параметр  $k \in \mathbb{T}^d$  называется *полным квазиимпульсом* системы двух частиц и соответствующие им операторы  $\hat{h}(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$  называются *слоями оператора  $\hat{H}^{(2)}$* . Слоиные операторы  $\hat{h}(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$  из равенства (5) определяются формулой

$$\hat{h}(k) = \hat{h}_0(k) - \hat{V}.$$

Для невозмущенного оператора  $\hat{h}_0(k)$  и оператора возмущения  $\hat{V}$  найдём аналитические представления. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.** Действие оператора  $\hat{h}_0(k)$  на элемент  $f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$  имеет вид

$$(\hat{h}_0(k)\hat{f})(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left( 2\mu(0)I\hat{f}(x) - |\mu(k_j)|(f(x+e_j) - f(x-e_j)) \right),$$

где  $\mu(\cdot)$  определена по формуле (2).

**Лемма 5.** Действие оператора  $\hat{V}$  на элемент  $f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$  имеет вид

$$(\hat{V}\hat{f})(x) = \hat{v}(x)\hat{f}(x).$$

В предположении 1 возмущение  $\hat{V}$  оператора  $\hat{h}_0(k)$ ,  $k \in \mathbb{T}^d$  является компактным и, следовательно, согласно теореме Вейля о существенном спектре, существенный спектр оператора  $h(k)$  состоит из следующего сегмента на вещественной оси:

$$\sigma_{ess}(h(k)) = [\mathbf{e}_m(k); \mathbf{e}_M(k)].$$

Теперь найдём явный вид резольвенты оператора  $\hat{h}_0(k)$ . Резольвента

$$(\hat{R}_0(k, z) = ((\hat{h}_0(k) - zI)^{-1}, z \in \mathbb{C} \setminus [\mathbf{e}_m(k); \mathbf{e}_M(k)])$$

оператора  $\hat{h}_0(k)$  определяется формулой (см. формулу 2.7 по работе [9])

$$(\hat{R}_0(k, z)\hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{r}_0(x-s, k; z)\hat{f}(s), \quad \hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d),$$

где

$$\hat{r}_0(x, k; z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_k(t) - z} dt, \quad x \in \mathbb{Z}^d, z \in \mathbb{C} \setminus [\mathbf{e}_m(k); \mathbf{e}_M(k)].$$

В дальнейшем мы предположим, что массы частиц равны, т.е.  $m_1 = m_2 = m$ . Следующая лемма играет важную роль при доказательстве основных результатов данного параграфа.

**Лемма 6.** Пусть  $z < \mathbf{e}_m(k)$ . Тогда:

- если  $k \in (-\pi; \pi)^d$ , то функция  $\hat{r}_0(\cdot, k; z)$  является строго положительной в  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ ;
- если  $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ , то функция  $\hat{r}_0(\cdot, k; z)$  является положительной в  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ .

**Доказательство.** а) Мы начнём с изучения функции

$$r_0(p, k; z) := \frac{1}{E_k(p) - z} = \frac{1}{\frac{2}{m} \sum_{j=1}^d (1 - \cos p_j \cos \frac{k_j}{2}) - z}, \quad p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{T}^d, z < \mathbf{e}_m(k),$$

для  $k \in (-\pi; \pi)^d$ . Отметим, что для каждого  $k_j \in (-\pi; \pi)$ ,  $\cos \frac{k_j}{2} > 0$ . Так как  $\frac{2d}{m} - z > \frac{2}{m} \sum_{j=1}^d \cos p_j \cos \frac{k_j}{2}$ , то  $\left| \frac{\frac{2}{m} \sum_{j=1}^d \cos p_j \cos \frac{k_j}{2}}{\frac{2d}{m} - z} \right| < 1$ , следовательно функцию  $r_0(\cdot, k; z)$  можно разложить в ряд

$$r_0(p, k; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2d}{m} - z\right)^{n+1}} \left( \frac{2}{m} \sum_{j=1}^d \cos p_j \cos \frac{k_j}{2} \right)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^n}{\left(\frac{2d}{m} - z\right)^{n+1}} \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_d \leq n} C_n^{l_1, \dots, l_d} \prod_{j=1}^d \left( \cos p_j \cos \frac{k_j}{2} \right)^{l_j}, \quad (6)$$

где

$$C_n^{l_1, \dots, l_d} = \frac{n!}{l_1! \dots l_d!}.$$

Используя формулу Эйлера получим

$$(\cos p)^k = \left( \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2} \right)^k = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^k C_k^m e^{ip(2m-k)}. \quad (7)$$

Мы покажем, что все коэффициенты Фурье  $\hat{r}_0(x, k; \cdot)$  функции  $r_0(p; k, \cdot)$  являются неотрицательными. Подставляя (7) в (6), получим следующее представление для  $r_0(p; k, \cdot)$ :

$$r_0(p; k, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^n}{\left(\frac{2d}{m} - z\right)^{n+1}} \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_d \leq n} C_n^{l_1, \dots, l_d} \prod_{j=1}^d \left( \frac{1}{2} \cos \frac{k_j}{2} \right)^{l_j} \sum_{m_j=0}^{l_j} C_{l_j}^{m_j} e^{ip_j(2m_j-l_j)}. \quad (8)$$

Пользуясь формулой (8), коэффициенты  $\hat{r}_0(x, k; z)$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} \hat{r}_0(x, k; z) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_k(t) - z} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^n}{\left(\frac{2d}{m} - z\right)^{n+1}} \sum_{0 \leq l_1, \dots, l_d \leq n} C_n^{l_1, \dots, l_d} \prod_{j=1}^d \left( \frac{1}{2} \cos \frac{k_j}{2} \right)^{l_j} \sum_{m_j=0}^{l_j} C_{l_j}^{m_j} \int_{\mathbb{T}^d} e^{it_j(2m_j-l_j-x_j)} dt_j. \end{aligned}$$

В силу положительности  $\frac{2d}{m} - z$ ,  $\cos \frac{k_j}{2}$ , при  $k_j \in (-\pi; \pi)$  и используя формулу

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(m,t)} dt = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}^d \end{cases} \quad (9)$$

получим  $\hat{r}_0(x, k; z) \geq 0$ .

Теперь мы покажем, что при любом  $x \in \mathbb{Z}^d$  функция  $\hat{r}_0(x, k; z)$  является строго положительной. При каждом  $x \in \mathbb{Z}^d$  найдутся такие числа  $l_j^0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $m_j^0 \in \{0, 1, 2, \dots, l_j^0\}$ , что  $2m_j^0 - l_j^0 - x_j = 0$ . Тогда

$$\hat{r}_0(x, k; z) \geq \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^{l_j^0}}{\left(\frac{2d}{m} - z\right)^{l_j^0+1}} C_{l_j^0}^{m_j^0} > 0.$$

б) Сначала допустим, что  $k = (\pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^d$ . Тогда

$$\hat{r}_0(x, \pi; z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_\pi(t) - z} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\frac{2d}{m} - z} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(x,t)} dt \geq 0.$$

Причем  $\hat{r}_0(0, \pi; z) > 0$  и  $\hat{r}_0(x, \pi; z) \geq 0$ , при  $x \neq 0$ .

Теперь допустим, что  $l$  координат вектора  $k \in \mathbb{T}^d$  равны  $\pi$ , т.е.

$$k = \tilde{k} = (\pi, \dots, \pi, k_{l+1}, \dots, k_d), \quad k_j \in (-\pi; \pi), \quad j = l+1, \dots, d.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{r}_0(x, \tilde{k}; z) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{-i(x,t)}}{E_{\tilde{k}}(t) - z} dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\frac{2d}{m} - z} \int_{\mathbb{T}^l} e^{-i(x',t)} dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{m}\right)^n \left(\frac{2d}{m} - z\right)^n} \times \\ &\times \sum_{0 \leq s_{l+1}, \dots, s_d \leq n} C_n^{s_{l+1}, \dots, s_d} \prod_{j=l+1}^d \left(\frac{1}{2} \cos \frac{k_j}{2}\right)^{s_j} \sum_{m_j=0}^{s_j} C_{s_j}^{m_j} \int_{\mathbb{T}^{d-l}} e^{it_j(2m_j - s_j - x_j)} dt_j \geq 0, \end{aligned}$$

где  $x' \in \mathbb{T}^l$ .

В силу формулы (9) следует положительность функции  $\hat{r}_0(x, \tilde{k}; z)$ . Это завершает доказательство леммы 6.

**Теорема 1.** Пусть  $z < \epsilon_m(k)$ . Тогда:

- если  $k \in (-\pi; \pi)^d$ , то оператор  $\hat{R}_0(k, z)$  является усиливающим положительно в  $\ell_2(\hat{Z}^d)$ ;
- если  $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ , то оператор  $\hat{R}_0(k, z)$  является сохраняющим положительно в  $\ell_2(\hat{Z}^d)$ .

**Доказательство.** По условию теоремы  $z < \epsilon_m(k)$ . Достаточно доказать, что если  $k \in (-\pi; \pi)^d$ , то  $\hat{R}_0(k, z)\hat{\psi}_y$  строго положительна и если  $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ , то  $\hat{R}_0(k, z)\hat{\psi}_y$  положительна для элементов канонического базиса:

$$\hat{\psi}_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \quad (10)$$

То по (10) имеем

$$(\hat{R}_0(k, z)\hat{\psi}_y)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{r}_0(x - y; k, z), \quad z < \epsilon_m(k).$$

В силу леммы 6 если  $k \in (-\pi; \pi)^d$ , то функция  $\hat{r}_0(\cdot; k, z)$  является строго положительной и если  $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ , то функция  $\hat{r}_0(\cdot; k, z)$  является положительной. Отсюда следует доказательство теоремы.

**Теорема 2.** Пусть  $z_0(k) = \inf \sigma(\hat{h}(k)) < \epsilon_m(k)$  и  $m_1 = m_2$ . Тогда:

- если  $k \in (-\pi; \pi)^d$ , то  $z_0(k)$ -невыврожденное собственное значение оператора  $\hat{h}(k)$  и соответствующий собственный вектор можно выбрать строго положительным.
- если  $k \in \mathbb{T}^d \setminus (-\pi; \pi)^d$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует такой потенциал  $\hat{v}(x)$ , что  $z_0(k)$  является  $n$ -кратным собственным значением оператора  $\hat{h}(k)$ , а соответствующие линейно независимые собственные векторы можно выбрать положительными.

**Доказательство.** При выполнении условий теоремы ( $m_1 = m_2 = m$ ) функцию  $E_k(p)$  можно представить в следующем виде:

$$E_k(p) = \frac{2}{m} \sum_{j=1}^d \left( 1 - \cos \frac{k_j}{2} \cos p_j \right).$$

В этом случае соответствующая дисперсионная функция  $\hat{E}_k(s)$  оператора  $\hat{h}(k)$  имеет вид:

$$\hat{E}_k(s) = \begin{cases} \frac{2d}{m}, & s = 0 \\ -\frac{1}{m} \cos \frac{k_j}{2}, & |s| = 1 \\ 0, & |s| > 1 \end{cases}$$

При выполнении условия а) теоремы 2 дисперсионная функция  $\hat{E}_k(s)$  удовлетворяет условию предположения 2.2 (см. работе [9]). Тогда из теоремы 4.1 (см. работе [9]) вытекает доказательство части а) теоремы 2.

Теперь допустим, что выполнено условие б) теоремы. Сначала докажем часть б) теоремы в случае  $d = 1$ . В этом случае  $k = \pi$ , и оператор  $\hat{h}(\pi)$  действует по формуле:

$$(\hat{h}(\pi)f)(x) = \left( \frac{2}{m} - \hat{v}(x) \right) f(x).$$

Предположим, что  $\hat{v}(1) = \hat{v}(2) = \dots = \hat{v}(n) > 0$  и  $\hat{v}(x) = 0$ , при  $x \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда число  $z_0 = \inf \sigma(\hat{h}(\pi)) = \frac{2}{m} - \hat{v}(1)$  является  $n$ -кратным собственным значением оператора  $\hat{h}(\pi)$ . При этом в качестве линейно независимых собственных функций можно брать элементы канонического базиса  $\hat{\psi}_1(x), \dots, \hat{\psi}_n(x)$ . Они являются положительными.

Дадим доказательство части б) теоремы 2 в случае  $d = 2$ .

В этом случае возможны три варианта:

b1)  $k_1 = \pi, k_2 = \pi$ , т.е.  $k = (\pi; \pi)$

b2)  $k_1 = \pi, k_2 \in (-\pi; \pi)$ , т.е.  $k = (\pi; k_2)$ ;

b3)  $k_1 \in (-\pi; \pi), k_2 = \pi$ , т.е.  $k = (k_1; \pi)$ .

Доказательство случая b1) аналогично доказательству теоремы в случае  $d = 1$ .

Доказательство случая b2). Пусть  $k_1 = \pi, k_2 \in (-\pi; \pi)$ . Рассмотрим оператор  $\hat{h}(\pi; k_2)$ . Введем подпространства  $L_y$ -одномерные подпространства, натянутые на вектор  $\hat{\psi}_y$ , где  $\hat{\psi}_y$ -элемент канонического базиса, определяемого по формуле (10). В этом случае пространство  $\ell_2(\mathbb{Z})$  разлагается в прямую сумму

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{y \in \mathbb{Z}} L_y. \quad (11)$$

Разложение (11) порождает разложение

$$\ell_2(\mathbb{Z}^2) = \bigoplus_{y \in \mathbb{Z}} L_y \otimes \ell_2(\mathbb{Z}).$$

**Лемма 7.** Подпространство  $L_y \otimes \ell_2(\mathbb{Z})$  при любом  $y \in \mathbb{Z}$ , инвариантно относительно оператора  $\hat{h}(\pi; k_2)$ .

Сужение оператора  $\hat{h}(\pi; k_2)$  на подпространство  $L_y \otimes \ell_2(\mathbb{Z})$  имеет вид

$$\hat{h}^{(y)}(\pi; k_2) = I \otimes \hat{h}^{(y)}(k_2),$$

где  $I$ -единичный оператор в  $L_y$  и

$$\hat{h}^{(y)}(k_2) = \hat{h}_0(k_2) - \hat{V}_y,$$

двухчастичный дискретный оператор в  $\ell_2(\mathbb{Z})$ , точнее

$$(\hat{h}_0(k_2)\hat{f})(s) = \frac{4}{m}\hat{f}(s) - \frac{1}{m}\cos\frac{k_2}{2}[\hat{f}(s+1) + \hat{f}(s-1)],$$

$$(\hat{V}_y\hat{f})(s) = \hat{v}_y(s)\hat{f}(s), \quad \hat{v}_y(s) = \hat{v}(y, s).$$

Число  $z_0 = \inf \sigma(\hat{h}_0(k))$  является  $n$ -кратным собственным значением оператора  $\hat{h}_0(k)$ . Выберем потенциал  $\hat{v}$  следующим образом

$$\hat{v}(y, s) = \begin{cases} 1, & s = x_i, i = 1, \dots, n \\ 0, & s \neq x_i. \end{cases}$$

Если  $y \neq x_i, i = 1, \dots, n$ , то  $\hat{h}^{(y)}(\pi, k_2) = \hat{h}(\pi, k_2)$  и операторы  $\hat{h}^{(x_i)}(\pi, k_2), \hat{h}^{(x_j)}(\pi, k_2), i, j = 1, \dots, n$ - унитарно эквивалентны.

Легко можно проверить, что оператор  $\hat{h}^{(x_i)}(\pi, k_2)$  имеет единственное невырожденное собственное значение  $z_0$ , лежащее левее существенного спектра оператора  $\hat{h}^{(x_i)}(\pi, k_2)$ . Этому собственному значению соответствует положительная собственная функция

$$\hat{\psi}_{x_i}(y)\hat{f}(s) \in L_{x_i} \otimes \ell_2(\mathbb{Z}), i = 1, \dots, n.$$

В силу унитарной эквивалентности операторов  $\hat{h}^{(x_i)}(\pi, k_2), i = 1, \dots, n$  число  $z_0$  является собственным значением этих операторов. Таким образом число  $z_0$  является  $n$ -кратным собственным значением оператора  $\hat{h}(\pi, k_2)$ .

Доказательство случая б3) одинаково с доказательством случая б2).

Доказательство теоремы в случае  $d \geq 3$  приводится аналогично.

**Благодарности:** Работа поддержана грантом Республики Узбекистан, проект ФЗ - 20200929224.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I. The Threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys., pp.91-115, 2006.
2. Frobenius F. G. Über matrizen mit positiven Elementen sitzunsber. Preus. Akad. Wiss Berlin, 1908, pp.471-476.
3. Perron O. Zur theorie der matrizen. Math. Ann., V.64, 1907, pp.248-263.
4. Glimm J., Jaffe A. The  $\lambda(\varphi^4)_2$  quantum field theory without. cutoffs II. The field operators and the approximate vacuum.-Ann. Math. V.91, 1970, pp.362-401.
5. Saymon B., Hoegh-Krohn R. Hypercontractive semi-groups and two-dimensional self-coupled bose fields. J. Func.Anal. pp.121-180, 1972.

6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир. Россия, 1977.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. Россия, 1982.
8. Абдуллаев Ж. И. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ, Т.145 (1), 2005, ст.212-220.
9. Муминов З. Э., У. Н. Кулжанов. Нижние связанные состояния одночастичных гамильтонианов на целочисленной решетке. Математические труды, 2012, Россия. Т.1, С.129-140.
10. Muminov Z. E., U. N. Kuljanov. CLR-estimates for two-particle discrete Schrodinger operator on  $\mathbb{Z}^d, d \geq 0$ . Uzbek mathematical journal, 2014, Uzbekistan, V.4, pp.46-56.

### REZYUME

Ushbu maqolada ixtiyoriy o'lchamli panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Shredinger operatori spektri quyi chegarasi yakkalangan nuqta bo'lganda uning xos qiymat bo'lishi, agar bu xos qiymat oddiy bo'lsa unga mos xos funksiyaning qat'iy musbatligi, agar bu xos qiymat karrali bo'lsa unga mos xos funksiyalarning musbatligi ko'rsatilgan.

**Kalit so'zlar:** Energiya operatori, quyi spektr, qo'zg'almas operator, kvant zarrachasi, ikki zarrachali kvant sistemasi.

### RESUME

In this paper to establish that if the lower edge of the spectrum is an isolated point of the Schrodinger operator of a system of two particles on a lattice, then under certain conditions with respect to the dispersion functions and the potential, it is a simple eigenvalue and a strictly positive eigenvector corresponds to it.

**Key words:** Operator energy, low spectrum, invariant operator, quantum particles, system two quantum particles.

УДК 517.55

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Мамадалиев Н. А., \* Бекниязов А. Е., \* Васиева Х. Г. \*

### РЕЗЮМЕ

Статья состоит из двух частей, в которых рассматриваются краевые задачи типа Дирихле и Неймана. Статья состоит из двух частей, в которых рассматриваются краевые задачи типа Дирихле и Неймана. В первой части представлены краевые задачи, описываемые уравнениями  $-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$ , а во второй части - уравнениями  $\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$ . В обеих частях было найдено общее решение уравнения второго порядка с инволюцией и краевыми задачами.

**Ключевые слова:** Уравнения второго порядка с инволюцией, задачи с инволюцией, базисные условия, краевая задача, функция Грина, спектральные задачи.

I. В работах [1, 2, 3] рассматривались вопрос базисности, вопрос составления функции Грина, а также спектральные задачи с инволюцией типа Дирихле и типа Неймана

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), \quad u(-1) = u(1) = 0, \quad (1)$$

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), \quad u'(-1) = u'(1) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – постоянное число,  $f(x)$  – непрерывная функция. Отметим, что в этих работах не указано в явном виде общее решение уравнения

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), \quad (3)$$

что затрудняет рассмотрение других краевых задач.

В данной работе мы найдем общее решение уравнения (3) в явном виде и решение краевых задач (1) и (2). Работа состоит из трех этапов, т.е.:

### 1-этап. Нахождение общего решения уравнения (1).

Вводя в уравнение (3) замену аргумента  $x \rightarrow -x$ , получим следующее уравнение

$$-u''(x) - \lambda u(-x) = f(-x). \quad (4)$$

При помощи уравнения (4) путём сложения и вычитания с уравнением (3) и применяя метод вариации постоянных для каждого из полученных уравнений, имеем

$$u(x) + u(-x) = C_{10} \cos \sqrt{\lambda} x + C_{20} \sin \sqrt{\lambda} x - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^x \sin \sqrt{\lambda} (x-t) [f(t) + f(-t)] dt, \quad (5)$$

\*Мамадалиев Н.А. – Национальный университет Узбекистана, m\_numana59@mail.ru

\*Бекниязов А.Е. – Национальный университет Узбекистана, bekniyazov.asan@mail.ru

\*Васиева Х.Г. – Ташкентский государственный экономический университет, vasiyeva98@gmail.com



$$u(x) - u(-x) = D_{10}chx + D_{20}shx + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^x sh\sqrt{\lambda}(x-t)[f(t) - f(-t)] dt. \quad (6)$$

Теперь производя замену аргумента  $x \rightarrow -x$  в равенствах (5) и (6), получим

$$u(-x) + u(x) = C_{10} \cos \sqrt{\lambda}x - C_{20} \sin \sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda}(x+t)[f(t) + f(-t)] dt, \quad (7)$$

$$u(x) - u(-x) = D_{10}chx - D_{20}shx - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} sh\sqrt{\lambda}(x+t)[f(x) - f(-x)] dt. \quad (8)$$

Сложив равенства (5) и (7), а из равенства (6) вычитая равенство (8) имеем

$$\begin{aligned} u(x) + u(-x) &= C_{10} \cos \sqrt{\lambda}x - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^x \sin \sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-x}^1 \sin \sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt, \\ u(-x) - u(x) &= D_{20}sh\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^x sh\sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-x}^1 sh\sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} sh\sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 sh\sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(x) + u(-x) &= C_{10} \cos \sqrt{\lambda}x + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( \int_{-1}^{-x} - \int_{-x}^x - \int_x^1 \right) \sin \sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( - \int_{-1}^{-x} - \int_{-x}^x + \int_x^1 \right) \sin \sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt, \\ u(x) - u(-x) &= D_{10}sh\sqrt{\lambda}x + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( \int_{-1}^{-x} - \int_{-x}^x - \int_x^1 \right) sh\sqrt{\lambda}(x+t) f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left( \int_{-1}^{-x} + \int_{-x}^x - \int_x^1 \right) sh\sqrt{\lambda}(x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь, группируя соответствующие интегральные члены каждого равенства, получим:

$$u(x) + u(-x) = C_{10} \cos \sqrt{\lambda}x +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \cos \sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \sin \sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \cos \sqrt{\lambda} x \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right],$$

$$u(x) - u(-x) = D_{20} sh \sqrt{\lambda} x +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ sh \sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} ch \sqrt{\lambda} t f(t) dt - ch \sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x sh \sqrt{\lambda} t f(t) dt - sh \sqrt{\lambda} x \int_x^1 ch \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right].$$

Наконец, складывая эти равенства, образуем решение уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} u(x) = & \cos \sqrt{\lambda} x + sh \sqrt{\lambda} x + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} [\cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t + sh \sqrt{\lambda} x ch \sqrt{\lambda} t] f(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-x}^x [-\sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} t - ch \sqrt{\lambda} x sh \sqrt{\lambda} t] f(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 [-\cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t - sh \sqrt{\lambda} x ch \sqrt{\lambda} t] f(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

### 2-этап. Обоснование найденного общего решения уравнения (1).

Проверим, что функция (9) удовлетворяет уравнению (1). Для этого функцию  $u(x)$ , определяемую равенством (9), разбиваем на сумму трех слагаемых  $u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$ , где

$$u_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x + sh \sqrt{\lambda} x,$$

$$\begin{aligned} u_2(x) = & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \cos \sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \sin \sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \right. \\ & \left. - \cos \sqrt{\lambda} x \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right], \end{aligned}$$

$$u_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ sh \sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} ch \sqrt{\lambda} t f(t) dt - ch \sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x sh \sqrt{\lambda} t f(t) dt - sh \sqrt{\lambda} x \int_x^1 ch \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right].$$

Теперь для каждого слагаемого вычислим значение выражения  $Lu \equiv -u''(-x) - \lambda u(x)$

**а)** для  $u_1(x)$ : поскольку  $u_1''(x) = -\lambda \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda sh \sqrt{\lambda} x$ , тогда ясно, что

$$Lu_1 \equiv -u_1''(-x) - \lambda u_1(x) = 0; \quad (10)$$

**б)** для  $u_2(x)$ : поскольку

$$u_2'(x) = -\frac{1}{2} \left[ -\sin \sqrt{\lambda}x \int_{-1}^{-x} \cos \sqrt{\lambda}t f(t) dt + \cos \sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda}t f(t) dt + \right. \\ \left. + \sin \sqrt{\lambda}x \int_x^1 \cos \sqrt{\lambda}t f(t) dt \right],$$

$$u_2''(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[ -\cos \sqrt{\lambda}x \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda}t f(t) dt + \sin \sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda}t f(t) dt + \right. \\ \left. + \cos \sqrt{\lambda}x \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda}t f(t) dt \right] + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Таким образом, имеет место следующее равенство

$$Lu_2 = -u_2''(-x) - \lambda u_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \quad (11)$$

с) Для  $u_3(x)$  : поскольку

$$u_3'(x) = \frac{1}{2} \left[ ch\sqrt{\lambda}x \int_{-1}^{-x} sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda}x \int_x^1 ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt \right],$$

$$u_3''(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[ sh\sqrt{\lambda}x \int_{-1}^{-x} ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt - \right. \\ \left. - sh\sqrt{\lambda}x \int_x^1 ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt \right] + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

то имеем

$$Lu_3 = -u_3''(-x) - \lambda u_3(x) = \\ = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[ sh\sqrt{\lambda}x \int_{-1}^x ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt - sh\sqrt{\lambda}x \int_x^1 ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt \right] + \\ + \frac{f(x) - f(-x)}{2} - \\ - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[ sh\sqrt{\lambda}x \int_{-1}^x ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda}x \int_{-x}^x sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt - sh\sqrt{\lambda}x \int_x^1 ch\sqrt{\lambda}t f(t) dt \right] =$$

$$= \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$Lu_3 = -u_3''(-x) - \lambda u_3(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (10)-(12) окончательно, получим

$$\begin{aligned} Lu &= -u''(-x) - \lambda u(x) = Lu_1 + Lu_2 + Lu_3 = \\ &= [-u_1''(-x) - \lambda u_1(x)] + [-u_2''(-x) - \lambda u_2(x)] + [-u_3''(-x) - \lambda u_3(x)] = \\ &= 0 + \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x), \end{aligned}$$

то есть функция (9) является общим решением уравнения (3) с инволюцией.

### 3-этап. Краевые задачи для уравнения (3).

Согласно общего вида решения (9) для уравнения (1) можно рассмотреть краевые задачи типа Дирихле, Неймана и других.

В силу (9)

$$u(x) = \cos \sqrt{\lambda}x + sh\sqrt{\lambda}x + g(x, t, \lambda), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} g(x, t, \lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} [\cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}t + sh\sqrt{\lambda}x ch\sqrt{\lambda}t] f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-x}^x [-\sin \sqrt{\lambda}x \cos \sqrt{\lambda}t - ch\sqrt{\lambda}x sh\sqrt{\lambda}t] f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 [-\cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}t - sh\sqrt{\lambda}x ch\sqrt{\lambda}t] f(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим следующие краевые задачи:

**а) Задача Дирихле.** Из общего решения (13) при  $u(-1) = 0$  и  $u(1) = 0$ , соответственно, имеем

$$\cos \sqrt{\lambda} - sh\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 [\sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}t - ch\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda}t] f(t) dt,$$

$$\cos \sqrt{\lambda} + sh\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 [\sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}t + ch\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda}t] f(t) dt.$$

Отсюда получим  $A = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos \sqrt{\lambda}t f(t) dt$ ,  $B = \frac{ch\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda}t f(t) dt$ .

Следовательно, решение краевой задачи (1) типа Дирихле имеет вид

$$u(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt + \frac{ch\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda} t f(t) dt + g(x, t, \lambda).$$

**в) Задача Неймана.** Дифференцируя выражения (8), имеем

$$u'(x) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} x + \frac{1}{2} \left[ -\sin \sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \cos \sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt + \sin \sqrt{\lambda} x \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right] + \frac{1}{2} \left[ ch\sqrt{\lambda} x \int_{-1}^{-x} sh\sqrt{\lambda} t f(t) dt - sh\sqrt{\lambda} x \int_{-x}^x sh\sqrt{\lambda} t f(t) dt - ch\sqrt{\lambda} x \int_x^1 ch\sqrt{\lambda} t f(t) dt \right], \quad (14)$$

тогда можно рассмотреть краевую задачу (2) с условием типа Неймана.

При  $u'(-1) = 0$  и  $u'(1) = 0$  из (14) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ -\cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t + sh\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda} t \right] f(t) dt \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t + sh\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda} t \right] f(t) dt. \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$A = -\frac{\cos \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt, \quad B = -\frac{sh\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda} t f(t) dt.$$

Следовательно, решение краевой задачи (2) типа Неймана имеет вид

$$u(x) = -\frac{\cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt - \frac{sh\sqrt{\lambda} sh\sqrt{\lambda} x}{2\sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda} t f(t) dt + g(x, t, \lambda).$$

Далее, можно рассмотреть другие краевые задачи.

**II.** В статье [3] рассматривается для оператора с инволюцией

$$Lu \equiv \alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x),$$

краевая задача с граничным условием типа Неймана

$$\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), \quad (15)$$

$$u'(-1) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (16)$$

где  $\lambda$  – постоянное число,  $f(t)$  – непрерывная функция.

В работе [5] краевая задача рассматривалась для уравнения [6] при  $\alpha = 0$ , но в обеих статьях общее решение уравнения [6] не приведено. В данной работе мы приводим общее решение этого уравнения.

Для этой цели, производя замену аргумента  $x \rightarrow -x$  в уравнении (15), получим равенство

$$\alpha u''(-x) - u''(x) - \lambda u(-x) = f(-x). \quad (17)$$

После сложения и вычитания из равенств (15) и (17) получим

$$[u(x) + u(-x)]'' + \frac{\lambda}{1-\alpha} [u(x) + u(-x)] = -\frac{f(x) + f(-x)}{1-\alpha},$$

$$[u(x) - u(-x)]'' - \frac{\lambda}{1+\alpha} [u(x) - u(-x)] = \frac{f(x) - f(-x)}{1+\alpha}.$$

Заменим для удобства  $\frac{\lambda}{1-\alpha} = \mu^2$ ,  $\frac{\lambda}{1+\alpha} = \nu^2$ . Для определения выражений  $u(x) + u(-x)$  и  $u(x) - u(-x)$  применим метод вариации постоянных, получим

$$u(x) + u(-x) = C_{10}e^{i\mu x} + C_{20}e^{-i\mu x} - \frac{1}{\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^x \sin \mu(x-t) [f(x) + f(-x)] dt, \quad (18)$$

$$u(x) - u(-x) = D_{10}e^{\nu x} + D_{20}e^{-\nu x} + \frac{1}{\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^x sh\nu(x-t) [f(x) - f(-x)] dt. \quad (19)$$

Теперь, производя замену аргумента  $x \rightarrow -x$  в равенствах (18) и (19), получим соотношения между произвольными постоянными  $C_{10}$ ,  $C_{20}$ ,  $D_{10}$  и  $D_{20}$  в виде

$$C_{20} = C_{10} + \frac{i}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt \quad \text{и} \quad D_{20} = -D_{10} + \frac{1}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt. \quad \text{Поэтому ра-}$$

венства (18) и (19) приводятся к виду:

$$u(x) + u(-x) = 2C_{10} \cos \mu x + \frac{ie^{-i\mu x}}{\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt -$$

$$- \frac{1}{\mu(1-\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt + 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt + \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right],$$

$$u(x) - u(-x) = 2D_{10} sh\nu x + \frac{e^{-\nu x}}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh t f(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\nu(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right].$$

Сложив почленно полученные равенства образуем решение уравнения (15)

$$\begin{aligned}
 u(x) = & \cos \mu x C_{10} + sh\nu x D_{10} + \frac{ie^{-i\mu x}}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^{-\nu x}}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt - \\
 & - \frac{1}{2\mu(1-\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt + 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt + \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right] + \\
 & + \frac{1}{2\nu(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Теперь проверим, что функция  $u(x)$ , определенная равенством (20), является решением уравнения (15). Из (20) последовательно находим

$$\begin{aligned}
 u'(x) = & -\mu \sin \mu x C_{10} + \nu ch\nu x D_{10} + \\
 & + \frac{e^{-i\mu x}}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt - \frac{e^{-\nu x}}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\
 & + \frac{1}{2(1-\alpha)} \left[ - \int_{-1}^{-x} \cos \mu(x-t) f(t) dt - 2 \cos \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt - \int_x^1 \cos \mu(x+t) f(t) dt \right] + \\
 & + \frac{1}{2(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right], \\
 u''(x) = & -\mu^2 \cos \mu x C_{10} + \\
 & + \nu^2 sh\nu x D_{10} - \frac{i\mu e^{-i\mu x}}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt - \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\
 & + \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt + 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt + \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right] - \\
 & - \frac{f(x) + f(-x)}{2(1-\alpha)} + \\
 & + \frac{\nu}{2(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} ch\nu(x-t) f(t) dt - 2sh\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 ch\nu(x+t) f(t) dt \right] + \\
 & + \frac{f(x) - f(-x)}{2(1+\alpha)}.
 \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned}
 -u''(-x) &= \mu^2 \cos \mu x C_{10} + \nu^2 sh \nu x D_{10} + \\
 &+ \frac{i\mu e^{i\mu x}}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{\nu e^{\nu x}}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh \nu t f(t) dt + \\
 &+ \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x+t) f(t) dt + \int_x^1 \sin \mu(x-t) f(t) dt \right] + \frac{f(x) + f(-x)}{2(1-\alpha)} + \\
 &+ \frac{\nu}{2(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} ch \nu(x+t) f(t) dt - \int_x^1 ch \nu(x-t) f(t) dt \right] + \frac{f(x) - f(-x)}{2(1+\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Для проверки справедливости полученного результата вычислим следующее выражение

$$\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5,$$

ПОЭТАПНО:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 &= [(1-\alpha)\mu^2 - \lambda] A \cos \mu x C_{10} + [(1+\alpha)\nu^2 - \lambda] sh \nu x D_{10} + \\
 &+ \left[ -\frac{i\mu \alpha e^{-i\mu x}}{2(1-\alpha)} + \frac{i\mu e^{i\mu x}}{2(1-\alpha)} - \frac{i\lambda e^{-i\mu x}}{2\mu(1-\alpha)} \right] \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \\
 &+ \left[ \frac{\nu \alpha e^{-\nu x}}{2(1+\alpha)} - \frac{\nu e^{\nu x}}{2(1+\alpha)} - \frac{\lambda e^{-\nu x}}{2\nu(1+\alpha)} \right] \int_{-1}^1 sh \nu t f(t) dt = \\
 &= -\frac{\mu}{1-\alpha} \sin \mu x \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt - \frac{\nu}{1+\alpha} ch \nu x \int_{-1}^1 sh \nu t f(t) dt, \\
 \Sigma_2 &= \left[ \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x+t) f(t) dt + \frac{\mu \alpha}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt + \right. \\
 &+ \left. \frac{\lambda}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt \right] + \left[ \frac{\nu}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^{-x} sh \nu(x+t) f(t) dt + \right. \\
 &+ \left. \frac{\nu \alpha}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^{-x} sh \nu(x-t) f(t) dt - \frac{\lambda}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^{-x} sh \nu(x-t) f(t) dt \right] = \\
 &= \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x+t) f(t) dt + \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu}{1+\alpha} \int_{-1}^{-x} sh\nu(x+t) f(t) dt - \frac{\nu}{1+\alpha} \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt = \\
& = \frac{\mu}{1-\alpha} \sin \mu x \int_{-1}^{-x} \cos \mu t f(t) dt + \frac{\nu}{1+\alpha} ch\nu x \int_{-1}^{-x} sh\nu t f(t) dt, \\
\Sigma_3 & = \left[ \frac{\alpha\mu}{2(1-\alpha)} 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt + \frac{\lambda}{2\mu(1-\alpha)} 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt \right] + \\
& + \left[ -\frac{\alpha\nu}{2(1+\alpha)} ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt + \frac{\lambda}{2\nu(1+\alpha)} 2 ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt \right] = \\
& = \frac{\mu}{1-\alpha} \sin \mu x \int_{-1}^{-x} \cos \mu t f(t) dt + \frac{\nu}{1+\alpha} ch\nu x \int_{-1}^{-x} sh\nu t \cdot f(t) dt, \\
\Sigma_4 & = \left[ \frac{\mu}{2(1-\alpha)} \int_x^1 \sin \mu(x-t) f(t) dt + \frac{\mu\alpha}{2(1-\alpha)} \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt + \right. \\
& + \left. \frac{\lambda}{2\mu(1-\alpha)} \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right] + \left[ -\frac{\nu}{2(1+\alpha)} \int_x^1 sh\nu(x-t) f(t) dt - \right. \\
& - \left. \frac{\nu\alpha}{2(1+\alpha)} \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt + \frac{\lambda}{2\nu(1+\alpha)} \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right] = \\
& = \frac{\mu}{1-\alpha} \sin \mu x \int_x^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{\nu}{1+\alpha} ch\nu x \int_x^1 sh\nu t f(t) dt.
\end{aligned}$$

Из выше вычисленных выражений нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 & = \frac{\mu}{1-\alpha} \sin \mu x \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{\nu}{1+\alpha} ch\nu x \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt, \\
\Sigma_5 & = \left[ \alpha \left( -\frac{f(x) + f(-x)}{2(1-\alpha)} + \frac{f(x) - f(-x)}{2(1+\alpha)} \right) + \frac{f(x) + f(-x)}{2(1-\alpha)} + \frac{f(x) - f(-x)}{2(1+\alpha)} \right] = \\
& = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x).
\end{aligned}$$

Таким образом, в силу нашего обозначения

$$\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5 = f(x),$$

то есть функция  $u(x)$ , определенная равенством (20), является решением уравнения (15).

Теперь рассмотрим краевую задачу с условием Дирихле:  $u(-1) = u(1) = 0$ , если  $u(-1) = 0$ , то

$$\cos \mu C_{10} - sh\nu D_{10} + \frac{ie^{i\mu} - 2 \sin \mu}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^\nu - 2ch\nu}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt = 0,$$

если  $u(1) = 0$ , то

$$\cos \mu C_{10} + sh\nu D_{10} + \frac{ie^{-i\mu} - 2 \sin \mu}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^{-\nu} - 2ch\nu}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt = 0.$$

Из этих равенств находим

$$C_{10} = \frac{ie^{i\mu}}{2\mu(1-\alpha) \cos \mu} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt, \quad D_{10} = \frac{e^\nu}{2\nu(1+\alpha) sh\nu} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt.$$

Поэтому решение краевой задачи с условием Дирихле имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{ie^{i\mu} \cos \mu x}{2\mu(1-\alpha) \cos \mu} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^\nu sh\nu x}{2\nu(1+\alpha) sh\nu} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\ & + \frac{ie^{-i\mu x}}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^{-\nu x}}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\ & + \frac{1}{2\nu(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right] + \\ & + \frac{1}{2\mu(1-\alpha)} \left[ - \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt - 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt - \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right], \end{aligned}$$

где  $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}$ ,  $\nu = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}$ .

Поскольку

$$\begin{aligned} u'(x) = & -\mu \sin \mu x C_{10} + \nu ch\nu x D_{10} + \frac{e^{-i\mu x}}{2(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt - \\ & - \frac{e^{-\nu x}}{2(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \frac{1}{2(1-\alpha)} \left[ - \int_{-1}^{-x} \cos \mu(x-t) f(t) dt - \right. \end{aligned}$$

$$-2 \cos \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt - \int_x^1 \cos \mu (x+t) f(t) dt \Big] + \\ + \frac{1}{2(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right],$$

то можно рассмотреть краевую задачу с условием Неймана:  $u'(-1) = u'(1) = 0$ .

Если  $u'(-1) = 0$ , то

$$\mu \sin \mu C_{10} + \nu ch\nu D_{10} + \frac{ie^{i\mu} - 2 \sin \mu}{4\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^\nu - 2ch\nu}{4\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt = 0,$$

если  $u'(1) = 0$ , то

$$\cos \mu C_{10} + sh\nu D_{10} + \frac{ie^{-i\mu} - 2 \sin \mu}{2\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^{-\nu} - 2ch\nu}{2\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt = 0.$$

Из этих равенств находим

$$C_{10} = \frac{ie^{i\mu}}{2\mu(1-\alpha) \cos \mu} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt, \quad D_{10} = \frac{e^\nu}{2\nu(1+\alpha) sh\nu} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt.$$

Поэтому решение краевой задачи с условием Дирихле имеет вид

$$u(x) = \frac{ie^{i\mu} \cos \mu x}{2\mu(1-\alpha) \cos \mu} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^\nu sh\nu x}{2\nu(1+\alpha) sh\nu} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\ + \frac{ie^{-i\mu x}}{4\mu(1-\alpha)} \int_{-1}^1 \cos \mu t f(t) dt + \frac{e^{-\nu x}}{4\nu(1+\alpha)} \int_{-1}^1 sh\nu t f(t) dt + \\ + \frac{1}{2\nu(1+\alpha)} \left[ \int_{-1}^{-x} sh\nu(x-t) f(t) dt - 2ch\nu x \int_{-x}^x sh\nu t f(t) dt - \int_x^1 sh\nu(x+t) f(t) dt \right] + \\ + \frac{1}{2\mu(1-\alpha)} \left[ - \int_{-1}^{-x} \sin \mu(x-t) f(t) dt - 2 \sin \mu x \int_{-x}^x \cos \mu t f(t) dt - \int_x^1 \sin \mu(x+t) f(t) dt \right],$$

где  $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\alpha}}$ ,  $\nu = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\alpha}}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сарсенби А. А., Турметов Б. Х., Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, Вестн. Удмуртск.ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2019, том 29, выпуск 2, 183-196. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190204>
2. A.M. Sarsenbi and, M.A.Sadybekov. AIP Conference Proceedings, 1611, 231-233, 020074 (2014) ( DOI:10.1063/1,4930500).
3. A.A. Sarsenbi, AIP Conference Proceedings, **1676**, 020074 (2015), (DOI:10.1063/1,4930500).
4. A. Ashuraliyev and A.M. Sarsenbi. Green's function of the second order differential operator with involution. AIP Conference Proceedings,**1759**,020002(2016); DOI: 10.1063/1.4959616
5. A.M. Sarsenbi. The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involution. AIP, **1759**, 020030 (2016);( DOI: 10.1063/1.4959644)
6. Cabada A., Tojo F.A.F. Existence results for a linear equations with reection, non-constant coefcient and periodic boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412., № 1. P. 529-546.

### REZYUME

Maqola ikki qismdan iborat bo'lib, Dirixle va Neyman tipidagi involyutsiyali chegaraviy masalalar ko'rilgan. Birinchi qismda  $-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$ , ikkinchi qismda esa  $\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$  tenglamalar bilan tavsiflangan chegaraviy masalalar keltirilgan. Har ikki qismda ham umumiy aniq yechim topilgan.

**Kalit so'zlar:** Involyutsiyali ikkinchi tartibli tenglamalar, involyutsiyaga oid masalalar, bazis shartlari, chegaraviy masala, Grin funksiyasi, spektral masalalar.

### RESUME

The article consists of two parts, in which boundary value problems of Dirichlet and Neumann type are considered. The article consists of two parts, in which boundary value problems of Dirichlet and Neumann type are considered. The first part presents boundary value problems described by the equations  $-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$ , and the second part by the equations  $\alpha u''(x) - u''(-x) - \lambda u(x) = f(x)$ . In both parts, a general solution to a second-order equation with involution and boundary value problems was found.

**Key words:** Second-order equations with involution, problems with involution, basis conditions, boundary value problem, Green's function, spectral problems.

УДК 517.24

**ИНФОРМАЦИЯ ФИШЕРА ДЛЯ СЛУЧАЙНО ЦЕНЗУРИРОВАННЫХ  
НАБЛЮДЕНИЙ**

Нурмухамедова Н. С. \*

**Аннотация**

Информация Фишера является фундаментальным понятием в теории статистического вывода и играет важную роль в оценке параметров статистических моделей. Она представляет собой меру информативности наблюдаемых данных относительно неизвестных параметров модели. В условиях случайного цензурирования, когда часть наблюдений может быть неполной или подвергаться цензурированию, вычисление информации Фишера представляет собой сложную задачу. В данной работе исследовано информация Фишера в модели случайного цензурирования справа.

**Ключевые слова:** случайное цензурирование, информация Фишера, функция интенсивности, модель пропорциональных интенсивностей.

Пусть  $X$  и  $Y$  независимые случайные величины (с.в.) и определим  $Z = \min(X, Y)$  - наблюдаемое с.в. и  $\delta = I(X \leq Y)$ . В случае случайного цензурирования с справа мы наблюдаем пары  $(Z, \delta)$ . Это означает, что если событие произошло до момента цензурирования ( $X \leq Y$ ), мы знаем точное время события  $X$ . Если же событие не произошло до момента цензурирования ( $X > Y$ ), мы знаем только, что  $X > Y$ , то есть время события превышает время цензурирования. В  $n$  независимых экспериментах мы получаем выборку:

$$C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Информация Фишера случайно цензурированной выборки была изучена многими учеными. Абдушукуров и Ким [1], а также Пракаса Рао [2] исследовали информацию Фишера, когда распределения как наблюдаемой с.в.  $X$ , так и цензурирующей с.в.  $Y$  зависят от неизвестного параметра  $\theta$ . Ган [3] представил выражения для информации Фишера через функции интенсивности, что позволяет анализировать потерю информации из-за цензурирования и изменение информации при наличии цензурированных данных. Эфрон [4] исследовал связь между информацией Фишера и функциями интенсивности, что упрощает вычисления и понимание влияния цензурирования. В данной статье рассмотрим, как вычисляется информация Фишера для случайно цензурированных наблюдений: когда цензурирующая случайная величина не зависит от неизвестного параметра, а также когда зависит от неизвестного параметра.

**1. Цензурирующая случайная величина независит от неизвестного параметра.** Пусть  $X$  с.в. с функцией распределения (ф.р.)  $F(x; \theta)$  и плотностью  $f(x; \theta)$ , где  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$  неизвестный параметр. Функция интенсивности для случайной величины  $X$  определяется как

$$\lambda_X(x; \theta) = \frac{f(x; \theta)}{\bar{F}(x; \theta)} = \frac{f(x; \theta)}{1 - F(x; \theta)},$$

\*Нурмухамедова Н. С. – Национальный университет Узбекистана, gasulova\_nargiza@mail.ru

где  $\bar{F}(x; \theta) = 1 - F(x; \theta)$ . Функция плотности интенсивности  $\lambda_X(x; \theta)$  показывает, как изменяется вероятность наступления наблюдаемого события в данный момент времени.

Информация Фишера это мера точности оценки параметра  $\theta$  на основе наблюдений. Информация Фишера о неизвестном параметре определяется следующим образом:

$$I_X(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta) \right)^2 \right].$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta)$  функция вклада, показывающая чувствительность логарифма плотности к изменению параметра  $\theta$ . При выполнении определённых регулярных условий, Эфрон [4] показал, что информацию Фишера можно выразить через функцию интенсивности

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda_X(x; \theta) \right)^2 f(x; \theta) dx. \quad (1)$$

Это равенство удобно для анализа информации Фишера в контексте цензурированных данных.

Пусть  $X$  и  $Y$  независимые с.в. с ф.р.  $F(x; \theta)$  и  $G(x)$  соответственно. Тогда совместная плотность вероятности наблюдения  $(Z, \delta)$  при цензурировании справа имеет следующий вид:

$$L(z, \delta) = [f(z; \theta) \bar{G}(z)]^\delta [g(z) \bar{F}(z; \theta)]^{1-\delta}, \quad (2)$$

где  $g(z)$  плотность распределения с.в.  $Y$ . Если функция распределения цензурирующей величины  $G(x)$  не зависит от параметра  $\theta$ , то производная по  $\theta$  от  $\bar{G}(x)$  равна нулю. Тогда выражение для плотности упрощается  $L(z, \delta) = f^\delta(z; \theta) [1 - F(z; \theta)]^{1-\delta}$ . Информация Фишера относительно параметра  $\theta$  в наблюдении  $(Z, \delta)$  определяется как:

$$I^{(Z, \delta)}(\theta) = E_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(Z, \delta) \right)^2 \right] = E_\theta \left\{ \left( \delta \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(Z; \theta) + (1 - \delta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log(1 - F(Z; \theta)) \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Цензурирование существенно снижает информацию Фишера о параметре  $\theta$ , что затрудняет точное оценивание параметра. Это демонстрирует необходимость учитывать цензурирование при статистическом анализе данных.

*Пример.* Пусть  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  имеет экспоненциальное распределение с неизвестным параметром  $\lambda$ . Цензурирующая с.в.  $Y$  имеет известное распределение с функцией распределения  $G(y)$ . Информация Фишера в случае полной выборки  $I_X(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$ . Рассмотрим случайное цензурирование справа, тогда информации Фишера имеет следующий вид

$$I^{(Z, \delta)}(\lambda) = E_\lambda \left[ \left( \delta \left( \frac{1}{\lambda} - Z \right) + (1 - \delta) Z \lambda \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Чтобы решить (4) нужно знать точное распределение с.в.  $Y$ . Если с.в.  $Y$  также имеет показательное распределение с параметром 1, то (4) имеет следующий вид:

$$I^{(Z, \delta)}(\lambda) = \frac{2\lambda^2}{\lambda + 1} - \frac{1}{\lambda^3 + \lambda^2} - \frac{2}{(\lambda + 1)^3} + \frac{1}{\lambda^2}.$$

Этот результат представляет собой информацию Фишера с учётом как нецензурированных, так и цензурированных данных. В случае случайного цензурирования справа информация Фишера уменьшается по сравнению с информацией Фишера в случае полной выборки.

Данный пример показывает, что цензурирование приводит к снижению информации Фишера по сравнению с полными данными. Однако цензурирование не всегда приводит к потере информации. В случае, когда цензурирующая случайная величина зависит от неизвестного параметра, а её ф.р. выражается через ф.р. с.в.  $X$ , информация Фишера может не изменяться. Рассмотрим этот случай.

**2. Цензурирующая случайная величина зависит от неизвестного параметра.** Рассмотрим случай, когда ф.р. цензурирующей с.в.  $Y$ , обозначаемая как  $G(y; \theta)$ , зависит от того же неизвестного параметра  $\theta$ , что и ф.р. наблюдаемой величины  $X$ ,  $F(x; \theta)$ . В таких случаях оценка информации Фишера становится более сложной задачей, так как необходимо учитывать зависимость обеих с.в. от параметра  $\theta$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  независимые с.в. с ф.р.  $F(x; \theta)$  и  $G(y; \theta)$  соответственно, где  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^s$  - неизвестный параметр. Определим наблюдаемые величины  $Z = \min(X, Y)$ ,  $\delta = I(X \leq Y)$ , где  $I(A)$  - индикатор события  $A$ . Совместная плотность вероятности случайно правосторонне цензурированного наблюдения  $(Z, \delta)$  определяется следующим образом:

$$L(z, \delta) = [f(z; \theta)\bar{G}(z; \theta)]^\delta [g(z; \theta)\bar{F}(z; \theta)]^{1-\delta}, \quad (5)$$

где  $\bar{F}(x; \theta) = 1 - F(x; \theta)$  и  $\bar{G}(x; \theta) = 1 - G(x; \theta)$ . Информация Фишера относительно параметра  $\theta$  в наблюдениях  $(Z, \delta)$  определяется как:

$$I^{(Z, \delta)}(\theta) = E_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(Z, \delta) \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Используя выражение для  $\log L(Z, \delta)$ , получаем

$$\log L(Z, \delta) = \delta \log [f(Z; \theta)\bar{G}(Z; \theta)] + (1 - \delta) \log [g(Z; \theta)\bar{F}(Z; \theta)].$$

Учитывая это выражение для информации Фишера, получаем

$$I^{(Z, \delta)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \delta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(z; \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \log \bar{G}(z; \theta) \right) + (1 - \delta) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log g(z; \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \log \bar{F}(z; \theta) \right) \right\}^2 L(z, \delta) dz. \quad (7)$$

Рассмотрим следующие условия регулярности:

(У1) Носитель плотности  $f(x; \theta)$  не зависит от  $\theta$ :  $N_f = \{x : f(x; \theta) > 0\}$  постоянно по  $\theta$ .

(У2) Смешанные производные  $\frac{\partial^2 F(x; \theta)}{\partial x \partial \theta}$  и  $\frac{\partial^2 G(x; \theta)}{\partial x \partial \theta}$  существуют и равны  $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial g(x; \theta)}{\partial \theta}$  соответственно.

(У3) Производные  $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$  и  $\frac{\partial g(x; \theta)}{\partial \theta}$  существуют и ограничены почти всюду для всех  $\theta \in \Theta$ .

(У4) Информации Фишера  $I^X(\theta)$  и  $I^Y(\theta)$  конечны и положительны:  $0 < I^X(\theta), I^Y(\theta) < \infty$ .

(У5)  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия регулярности (У1)-(У5). Тогда информация Фишера для  $(Z, \delta)$  может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} I^{(Z, \delta)}(\theta) &= I^X(\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \log \lambda_X(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) G(x; \theta) dx + \\ &+ I^Y(\theta) - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \log \lambda_X(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 g(y; \theta) F(y; \theta) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \log \lambda_X(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) \bar{G}(x; \theta) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \log \lambda_Y(y; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 g(y; \theta) \bar{F}(y; \theta) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь рассмотрим случай, когда цензурирующая с.в. зависит от неизвестного параметра специальным образом: модель пропорциональных интенсивностей (МПИ). В МПИ между распределениями наблюдаемой и цензурирующей с.в. выполняется следующее соотношение:

$$\bar{G}(x; \theta) = [\bar{F}(x; \theta)]^\beta, \quad (9)$$

где  $\beta > 0$  - константа, характеризующая степень цензурирования. Используя функции интенсивности с.в.  $X$  и  $Y$  выражение (9) можно написать следующим образом

$$\lambda_Y(x; \theta) = \beta \lambda_X(x; \theta).$$

Таким образом, МПИ подразумевает, что функция интенсивности для  $Y$  пропорциональна функции интенсивности для  $X$  с коэффициентом пропорциональности  $\beta$ . Имеет место

**Теорема 2.** В МПИ информация Фишера для  $(Z, \delta)$  совпадает с информацией Фишера для  $X$

$$I^{(Z, \delta)}(\theta) = I^X(\theta).$$

В МПИ цензурирование происходит таким образом, что информация о параметре  $\theta$  не теряется, несмотря на наличие цензурирования. Это связано с тем, что цензурирующая величина  $Y$  несёт такую же информацию о  $\theta$ , как и наблюдаемая величина  $X$ .

*Пример.* В этом примере мы покажем, что в МПИ информация Фишера для цензурированных наблюдений  $(Z, \delta)$  совпадает с информацией Фишера для нецензурированных наблюдений  $X$ , то есть  $I^{(Z, \delta)}(\theta) = I^X(\theta)$ . Для этого рассмотрим случай, когда время до события  $X$  и время цензурирования  $Y$  распределены экспоненциально. Пусть  $f_X(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$ ,  $x \geq 0$ ,  $f_Y(y; \theta) = \beta \theta e^{-\beta \theta y}$ ,  $y \geq 0$ . Проверим, что выполняется условие МПИ:

$$\bar{F}_Y(x; \theta) = [\bar{F}_X(x; \theta)]^\beta.$$

Действительно,

$$[\bar{F}_X(x; \theta)]^\beta = [e^{-\theta x}]^\beta = e^{-\beta \theta x} = \bar{F}_Y(x; \theta).$$



Вычислим информацию Фишера для  $(Z, \delta)$ :

$$I^{(Z,\delta)}(\theta) = I^X(\theta) - \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda_X(x; \theta) \right)^2 f_X(x; \theta) \bar{F}_Y(x; \theta) dx + \\ I^Y(\theta) - \int_0^\infty \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda_Y(y; \theta) \right)^2 f_Y(y; \theta) \bar{F}_X(y; \theta) dy.$$

В МПИ  $\lambda_Y(y; \theta) = \beta \lambda_X(y; \theta)$ , и обе функции интенсивности имеют одинаковые логарифмические производные  $\frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda_Y(y; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log(\beta \theta) = \frac{1}{\theta}$ . Учитывая это вычислим интегралы

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{\theta} \right)^2 f_X(x; \theta) \bar{F}_Y(x; \theta) dx = \frac{1}{\theta^2(1 + \beta)}, \\ \int_0^\infty \left( \frac{1}{\theta} \right)^2 f_Y(y; \theta) \bar{F}_X(y; \theta) dy = \frac{\beta}{\theta^2(1 + \beta)}.$$

Подставляем все в выражение для  $I^{(Z,\delta)}(\theta)$

$$I^{(Z,\delta)}(\theta) = I^X(\theta) - \frac{1}{\theta^2(1 + \beta)} + I^Y(\theta) - \frac{\beta}{\theta^2(1 + \beta)}.$$

Учитывая, что  $I^X(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$  и  $I^Y(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ , получаем

$$I^{(Z,\delta)}(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2(1 + \beta)} + \frac{1}{\theta^2} - \frac{\beta}{\theta^2(1 + \beta)} = \frac{1}{\theta^2}.$$

Таким образом в МПИ

$$I^{(Z,\delta)}(\theta) = \frac{1}{\theta^2} = I^X(\theta).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Abdushukurov, I.A., Kim, L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattacharya bounds for randomly censored observations J. Soviet Math. 1987. P. 2171–2185.
2. Prakasa Rao, B. L. S. Identifiability in Stochastic Models: Characterization of Probability Distributions. 1992. Academic Press.
3. Gang, A. L. Fisher Information in Randomly Censored Data. Journal of Statistical Planning and Inference, 2000. 90(2), P. 333–345.
4. Efron, B., Hinkley, D. V. Assessing the Accuracy of the Maximum Likelihood Estimator: Observed Versus Expected Fisher Information. Biometrika, 1978. 65(3), P. 457–483.

### REZYUME

Fisher informatsiyasi statistik xulosa qilish nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, statistik modellarning parametrlarini baholashda muhim rol o'ynaydi. U noma'lum parametrga nisbatan kuzatilmaning informativligini o'lchash mezoni hisoblanadi. Tasodifiy senzurlanish modelida, ya'ni kuzatilmalarning bir qismi to'liq bo'lmagan hollarda, Fisher informatsiyasini hisoblash murakkab hisoblanadi. Ushbu maqolada o'ng tomondan tasodifiy senzurlanish modelida Fisher informatsiyasi o'rganilgan.

***Kalit so'zlar:*** tasodifiy senzurlanish, Fisher informatsiyasi, intensivlik funksiyasi, proporsional intensivliklar modeli.

### RESUME

Fisher information is a fundamental concept in the theory of statistical inference and plays an important role in parameter estimation of statistical models. It represents a measure of the informativeness of observed data with respect to the unknown parameters of the model. In the context of random censoring, where part of the observations may be incomplete or censored, calculating Fisher information becomes a challenging task. This paper investigates Fisher information in the model of right-censored data.

***Key words:*** random censoring, Fisher information, hazard function, proportional hazards model.

УДК 517.55

## О СПЕКТРЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Халхужаев А. М., Хужамиеров И. А \*

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается трехчастичный дискретный оператор Шредингера  $H_{\mu,\gamma} := H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$ ,  $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi, \pi)$ , ассоциированный с системой трех частиц (двух фермионов с массой 1 и одной другой частицы с массой  $m = 1/\gamma < 1$ ), взаимодействующих с помощью парных отталкивающих контактных потенциалов  $\mu > 0$  на четырехмерной решетке  $\mathbb{Z}^4$ . Доказано, что оператор  $H_{\mu,\gamma}$ , при  $\gamma > \gamma_0$  имеет единственное четырехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра при достаточно больших  $\mu$ .

**Ключевые слова:** оператор Шредингера на решетке, гамильтониан, контактный потенциал, фермион, собственное значение, квазиимпульс, инвариантное подпространство, оператор Фаддеева.

## Введение

В моделях физики твердого тела [1], [2], а также в решетчатой квантовой теории поля [3] рассматриваются дискретные операторы, являющиеся решетчатыми аналогами трехчастичного оператора Шредингера на евклидовом пространстве.

Существование хотя бы одного собственного значения трехчастичного дискретного оператора Шредингера  $H_{\mu}(\mathbf{K}) = H_0(\mathbf{K}) - \mu V$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ) для размерностей  $d = 1, 2$  приведены в [4] и [5], доказательства которых основаны на неограниченности нормы оператора Фаддеева  $\mathbf{T}(\mathbf{K}, z)$  в нижней границе существенного спектра  $z = \inf(\sigma_{ess}(H_{\mu}(\mathbf{K})))$ . Если  $d \geq 3$ , то оператор  $\mathbf{T}(\mathbf{K}, z)$  ограничен и на краю существенного спектра, т.е. в этом случае методы для  $d = 1, 2$  не применимы.

В [6] изучен модельный оператор  $H_{\gamma}^{as}$  (см. (2.6) работы [6], связанный с трехчастичным дискретным оператором Шредингера на трехмерной кубической решетке с парными контактными притягивающими потенциалами, где в качестве двухчастичного дискретного оператора Шредингера взято семейство моделей Фридрихса с параметрами  $h_{\alpha}(\mathbf{k})$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^4$ . Доказано существование критического значения  $\gamma^*$  параметра  $\gamma$ , что если двухчастичные подсистемы имеют резонанс с нулевой энергией и не имеют связанных состояний с отрицательной энергией, то  $H_{\gamma}^{as}$  имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра при  $\gamma > \gamma^* \approx 13.607$ , и отсутствует эффект Ефимова при  $\gamma < \gamma^*$ . Существенный спектр оператора  $H_{\mu,\gamma}$  состоит из объединения

\*Халхужаев А. М. –Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан, ahmad\_x@mail.ru

\*Хужамиеров И. А – Самаркандский государственный университет, им Ш.Рашидова, Самарканд, Узбекистан, хужамиеров1990@mail.ru

двух отрезков. "Двухчастичная ветвь" существенного спектра оператора  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  сдвигается к  $+\infty$  с порядком  $\mu$  при  $\mu \rightarrow +\infty$ , в результате которого некоторая часть дискретного спектра "поглощается" существенным спектром. Поэтому возникает естественный вопрос: существуют ли собственные значения оператора  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$ , лежащие правее существенного спектра при достаточно больших  $\mu$ , и если существуют, то сколько?

В данной работе доказывается, что существует критическое значение  $\gamma_0$  такое, что при  $\gamma > \gamma_0$  и достаточно больших  $\mu > 0$  оператор  $H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  имеет единственное четырехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра.

Применяя теорию возмущений можно показать, что полученные результаты (кроме кратности собственного значения) сохраняются при малых значениях  $\mathbf{K}$ . Однако чувствительность ядра интегрального оператора  $F(z)$  относительно изменения  $\mathbf{K}$  приводит к изменению числа собственных значений оператора  $H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$ .

## Постановка задачи и формулировка основных результатов

Трехчастичный дискретный оператор Шредингера  $H_{\mu,\gamma}$ , соответствующий системе трех частиц (две-фермионы с массой 1 и одна другая с массой  $m = \frac{1}{\gamma}$ ), взаимодействующих с парными контактными потенциалами, действует в подпространстве антисимметричных функций относительно перестановки переменных

$$L^{2,as}[(\mathbb{T}^4)^2] := \{f : L^2[(\mathbb{T}^4)^2] : f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -f(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}.$$

по формуле

$$H_{\mu,\gamma} = H_{0,\gamma} + \mu(V_1 + V_2),$$

где

$$(H_{0,\gamma}f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})f(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 8 + 4\gamma - \xi(\mathbf{p}) - \xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{p} + \mathbf{q}),$$

$$\xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 \cos p_i$$

$$(V_1f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^4} f(\mathbf{p}, \mathbf{s})d\mathbf{s}, \quad (V_2f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^4} f(\mathbf{s}, \mathbf{q})d\mathbf{s}.$$

$\gamma > 0$ — отношение масс фермиона и другой частицы.

Пусть

$$\gamma_0 = \left( \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sin^2 s_1}{\varepsilon(\mathbf{s})} d\mathbf{s} \right)^{-1} > 0. \quad (1)$$

Сформулируем основной результат этой работы.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma > \gamma_0$ . Тогда существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu_\gamma$  оператор  $H_{\mu,\gamma}$  имеет единственное четырехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра. Кроме того, соответствующие собственные функции принадлежат подпространству  $L^{2,as,o}[(\mathbb{T}^4)^2] := \{f : L^{2,as}[(\mathbb{T}^4)^2] : f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -f(-\mathbf{p}, -\mathbf{q})\}$ .

## О спектре двухчастичного оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$

Существенный спектр оператора  $H_{\mu,\gamma}$  описывается через спектр “оператора канала”, который связан с оператором двухчастичной подсистемы, [10]. Поэтому сначала следует изучить спектр двухчастичного оператора. Двухчастичный дискретный оператор Шредингера  $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$  действует в  $L^2(\mathbb{T}^4)$  по формуле

$$h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = h_{0,\gamma}(\mathbf{k}) + \mu v,$$

где

$$(h_{0,\gamma}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}),$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 4 - \xi(\mathbf{p}), \quad (vf)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^4} f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

По теореме Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях [8], существенный спектр  $\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}))$  оператора  $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$  совпадает со спектром  $\sigma(h_{0,\gamma}(\mathbf{k}))$  невозмущенного оператора  $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$ , т.е.

$$\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) = [\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k})],$$

где

$$\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^4} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q}) = 4(1 + \gamma) - \sum_{i=1}^4 \sqrt{1 + 2\gamma \cos k_i + \gamma^2}$$

и

$$\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^4} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q}) = 4(1 + \gamma) + \sum_{i=1}^4 \sqrt{1 + 2\gamma \cos k_i + \gamma^2}.$$

Пусть  $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k})]$  и  $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$  – детерминант Фредгольма оператора  $I - \mu v r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ , где  $r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$  – резольвента оператора  $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$ ,  $v$  – интегральный оператор с ядром  $v(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1$ . Функция  $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$  имеет вид:

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 1 - \mu D_\gamma(\mathbf{k}, z), \quad D_\gamma(\mathbf{k}, z) = \int_{\mathbb{T}^4} \frac{d\mathbf{q}}{z - \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})}. \quad (2)$$

**Лемма 1.** Число  $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k})]$  является собственным значением оператора  $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$  тогда и только тогда, когда  $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 0$ . Обозначим через

$$\mu_0 = (1 + \gamma) \left( \int_{\mathbb{T}^4} \frac{d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})} \right)^{-1}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\mu > \mu_0$ . Тогда для каждого  $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^4$  оператор  $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$  имеет единственное простое собственное значение  $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ , лежащее правее существенного спектра.

**Замечания 1.** Собственное значение  $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = z_{\mu,\gamma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  – симметричная функция относительно перестановки переменных  $k_i, k_j$  и четна по  $k_i \in [-\pi, \pi]$ , монотонно убывает по  $k_i \in [0, \pi], i, j = \overline{1, 4}$ .

**Лемма 2.** Для каждого  $\gamma > 0$  и  $\mu > 4(1 + \gamma)$  справедливы следующие оценки

$$\mu + 4(1 + \gamma) < z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) < \mu + 4(1 + \gamma) + \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu}.$$

*Доказательство.* Из утверждения леммы 2 непосредственно вытекает соотношение  $z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0})$ . Если мы покажем существование чисел  $z', z'' > 8 + 8\gamma$  таких, что

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}, z') < \Delta_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}, z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})) = 0 = \Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}, z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0})) < \Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}, z''),$$

тогда из монотонной возрастаемости функции  $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, \cdot)$  на  $(\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}), +\infty)$  можно заключить, что  $z' < z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$  и  $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) < z''$ . Для каждого  $z > 8 + 8\gamma$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}, z) &= 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{s})} = \\ &= 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z - 4(1 + \gamma) - (\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})} = 1 - \frac{\mu}{z - 4(1 + \gamma)} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{1 - \frac{(\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})}{z - 4(1 + \gamma)}} = \\ &= 1 - \frac{\mu}{z - 4(1 + \gamma)} \int_{\mathbb{T}^4} \left[ 1 + \frac{(\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})}{z - 4(1 + \gamma)} + \left( \frac{(\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^2 + \dots \right] ds \\ &= 1 - \frac{\mu}{z - 4(1 + \gamma)} \int_{\mathbb{T}^4} \left[ 1 + \left( \frac{(\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^2 + \left( \frac{(\gamma - 1)\xi(\mathbf{s})}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^4 + \dots \right] ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\int_{\mathbb{T}^4} \xi^{2n-1}(\mathbf{s}) ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть  $z' = \mu + 4(1 + \gamma)$ . Тогда из (3) имеем

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}, z') < 1 - \frac{\mu}{z' - 4(1 + \gamma)} \int_{\mathbb{T}^4} ds = 1 - \frac{\mu}{z' - 4(1 + \gamma)} = 0.$$

Принимая во внимание, что  $|\xi(\mathbf{s})| \leq 4$ , из (3) для каждого  $z > 8 + 8\gamma$  можно получить.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}, z) &> 1 - \frac{\mu}{z - 4(1 + \gamma)} \int_{\mathbb{T}^4} \left[ 1 + \left( \frac{4(1 + \gamma)}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^2 + \left( \frac{4(1 + \gamma)}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^4 + \dots \right] ds \\ &= 1 - \frac{\mu}{z - 4(1 + \gamma)} \frac{1}{1 - \left( \frac{4(1 + \gamma)}{z - 4(1 + \gamma)} \right)^2}. \end{aligned}$$

Теперь выбирая  $z'' = \mu + 4(1 + \gamma) + \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu}$ , получим

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}, z'') > 1 - \frac{\mu}{\mu + \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu}} \frac{1}{1 - \left( \frac{4(1 + \gamma)}{\mu + \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu}} \right)^2} = \frac{\left( \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu} \right)^2}{\mu^2 + 16(1 + \gamma)^2 + \left( \frac{16(1 + \gamma)^2}{\mu} \right)^2} > 0.$$

□

## Существенный и дискретные спектры трехчастичного оператора $H_{\mu,\gamma}$ .

Обозначим

$$E_{\min,\gamma} = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^4} E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad E_{\max,\gamma} = \max_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^4} E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$\tau_{\min}(\mu, \gamma) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^4} \{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\}, \quad \tau_{\max}(\mu, \gamma) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^4} \{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\}.$$

Существенный спектр  $\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$  оператора  $H_{\mu,\gamma}$  состоит из множества [10]

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}) = [E_{\min,\gamma}, E_{\max,\gamma}] \cup [\tau_{\min}(\mu, \gamma), \tau_{\max}(\mu, \gamma)].$$

Отрезки  $[\tau_{\min}(\mu, \gamma), \tau_{\max}(\mu, \gamma)]$  и  $[E_{\min,\gamma}, E_{\max,\gamma}]$  называются "двухчастичной ветвью" и "трехчастичной ветвью" существенного спектра  $H_{\mu,\gamma}$ , соответственно.

Из положительности оператора  $V = V_1 + V_2$  и принципа минимакса заключаем

$$\begin{aligned} \inf_{\|f\|=1} (H_{\mu,\gamma}f, f) &= \inf_{\|f\|=1} [(H_{0,\gamma}f, f) + \mu(Vf, f)] \geq \\ &\geq \inf_{\|f\|=1} (H_{0,\gamma}f, f) = E_{\min,\gamma}, \end{aligned}$$

из которого следует, что  $\sigma(H_{\mu,\gamma}) \cap (-\infty, E_{\min,\gamma}) = \emptyset$ .

Отсюда получим, что для каждого  $\mu > 0, \gamma > 0$  оператор  $H_{\mu,\gamma}$  не имеет собственных значений, лежащих левее  $E_{\min,\gamma}$ .

Теперь найдем эквивалентное уравнение для собственных функций трехчастичного оператора  $H_{\mu,\gamma}$ .

Пусть  $z > \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ . Обозначим

$$\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z) = \Delta_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}, z - \varepsilon(\mathbf{p})).$$

Для каждого  $z > \tau_{\max}(\mu, \gamma)$  определим самосопряженный оператор  $F(z)$  по формуле

$$(F(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}},$$

который определен в подпространстве

$$D(F(z)) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{T}^4) : \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s}) ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} = 0 \right\}.$$

Следует отметить, что для каждого  $z > \tau_{\max}(\mu, \gamma)$  функция  $\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)$ , определенная по формуле (2), является положительной при всех  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^4$ .

**Лемма 3.** Число  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\gamma})$  является собственным значением оператора  $H_{\mu,\gamma}$  тогда и только тогда, когда  $\lambda = 1$  является собственным значением оператора  $F(z)$ .

*Доказательство.* Пусть число  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\gamma})$  есть собственное значение оператора  $H_{\mu,\gamma}$  и  $f$  – соответствующая собственная функция, т.е. уравнение

$$H_{0,\gamma}f + \mu(V_1 + V_2)f = zf \quad (4)$$

имеет ненулевое решение  $f \in L^{2,as}[(\mathbb{T}^4)^2]$ . Вводя обозначение

$$\varphi(\mathbf{p}) = (V_1f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^4} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds, \quad (5)$$

из (4) для  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\gamma})$  имеем

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mu \frac{\varphi(\mathbf{p}) - \varphi(\mathbf{q})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})}. \quad (6)$$

Из антисимметричности функции  $f$  следует, что функция  $\varphi$ , определенная по формуле (5) принадлежит пространству  $L^2(\mathbb{T}^4)$  и удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{T}^4} \varphi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = 0.$$

Подставив выражение (6) в (5) мы получим, что уравнение

$$\varphi(\mathbf{p}) \left( 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} \right) = -\mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\varphi(\mathbf{s}) ds}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})}$$

имеет ненулевое решение. Отсюда, используя обозначение (2) убедимся, что  $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^4)$  является решением следующего уравнения

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\varphi(\mathbf{s}) ds}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})}. \quad (7)$$

Если обозначим через  $\psi(\mathbf{p}) = \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)} \varphi(\mathbf{p})$ , тогда из (7) имеем

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s}) ds}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}},$$



т.е.  $\lambda = 1$  есть собственное значение оператора  $F(z)$  и

$$\int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s}) ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} = 0.$$

**(Необходимость.)** Пусть для некоторого  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$  число 1 является собственным значением оператора  $F(z)$  и  $\psi \in D(F(z))$  – соответствующая собственная функция. Тогда функция  $f$ , определенная по формуле (6) принадлежит пространству  $L^{2,as}[(\mathbb{T}^4)^2]$  и удовлетворяет равенству (4).  $\square$

**Замечания 1.** *Кратность собственного значения  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma})$  оператора  $H_{\mu,\gamma}$  совпадает с кратностью собственного значения  $\lambda = 1$  оператора  $F(z)$ .*

Для ограниченного самосопряженного оператора  $B$ , действующего в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$  определим число  $n[\lambda, B]$  через

$$n[\lambda, B] := \max\{\dim \mathcal{H}_B(\lambda) : \mathcal{H}_B(\lambda) \subset \mathcal{H}; (B\varphi, \varphi) > \lambda, \varphi \in \mathcal{H}_B(\lambda), \|\varphi\| = 1\}.$$

Если какая-то точка существенного спектра оператора  $B$  больше  $\lambda$ , то  $n[\lambda, B]$  равно бесконечности, и если  $n[\lambda, B]$  конечно, то оно равно числу собственных значений оператора  $B$ , которые больше  $\lambda$  (см. напр. лемму Глазмана [9]).

Следующая лемма следует из известного принципа Бирмана Швингера [7].

**Лемма 4.** *Пусть  $\mu > \mu_0$ . Тогда для каждого  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$  имеет место равенство*

$$n[z, H_{\mu,\gamma}] = n[1, F(z)].$$

## Инвариантные подпространства оператора $F(z)$

Известно, что гильбертово пространство  $L^2(\mathbb{T}^4)$  представляется в виде прямой суммы пространств четных и нечетных функций:

$$L^2(\mathbb{T}^4) = L^{2,o}(\mathbb{T}^4) \oplus L^{2,e}(\mathbb{T}^4).$$

**Лемма 5.** *Подпространства  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  и  $L^{2,e}(\mathbb{T}^4)$  инвариантны относительно оператора  $F(z)$ .*

*Доказательство.* Ядро  $K(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z)$  оператора  $F(z)$  удовлетворяет условию  $K(-\mathbf{p}, -\mathbf{q}; z) = K(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z)$ . Отсюда следует доказательство леммы.  $\square$

Обозначим через  $P^o$  и  $P^e$  операторы проектирования пространства  $L^2(\mathbb{T}^4)$  на подпространства  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  и  $L^{2,e}(\mathbb{T}^4)$ , соответственно, т.е. для  $f \in L^2(\mathbb{T}^4)$  верны равенства

$$(P^o f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}[f(\mathbf{p}) - f(-\mathbf{p})], \quad (P^e f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}[f(\mathbf{p}) + f(-\mathbf{p})].$$

Из инвариантности подпространств  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  и  $L^{2,e}(\mathbb{T}^4)$  относительно оператора  $F(z)$  следуют, что проекторы  $P^o$  и  $P^e$  перестановочны с оператором  $F(z)$ , т.е.

$$P^o F(z) = F(z)P^o, \quad P^e F(z) = F(z)P^e.$$

Обозначим через  $F^o(z)$  и  $F^e(z)$  сужения оператора  $F(z)$  на подпространство  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  и  $L^{2,e}(\mathbb{T}^4)$ , соответственно. Тогда имеем

$$(F^o(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sum_{i=1}^4 \sin p_i \sin s_i \psi(\mathbf{s}) ds}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}))(z - E_\gamma(\mathbf{p}, -\mathbf{s}))\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}}. \quad (8)$$

$$(F^e(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{[z - \varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - 4\gamma - \gamma \sum_{i=1}^4 \cos p_i \cos s_i] \psi(\mathbf{s}) ds}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}))(z - E_\gamma(\mathbf{p}, -\mathbf{s}))\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}}.$$

**Лемма 6.** Пусть  $z > \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ . Оператор  $F^e(z)$  — отрицателен.

*Доказательство.* Доказательство аналогичной леммы приведено в работе [10].  $\square$

**Лемма 7.** Пространство нечетных функций  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  является подпространством пространства  $D(F(z))$ . Кроме того  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  можно представить в виде прямой суммы

$$L^{2,o}(\mathbb{T}^4) = \sum_{i=1}^8 \oplus \mathcal{H}_i,$$

подпространства  $\mathcal{H}_i$  представляются в виде тензорных произведений где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}), & \mathcal{H}_2 &= L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}), \\ \mathcal{H}_3 &= L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}), & \mathcal{H}_4 &= L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}), \\ \mathcal{H}_5 &= L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}), & \mathcal{H}_6 &= L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}), \\ \mathcal{H}_7 &= L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}), & \mathcal{H}_8 &= L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

**Лемма 8.** Подпространства  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = \overline{1,8}$ , инвариантны относительно оператора  $F(z)$ .

*Доказательство.* В силу аналогичности рассуждений достаточно показать инвариантность подпространства  $\mathcal{H}_1$  относительно оператора  $F(z)$ . Пусть  $\psi \in \mathcal{H}_1$  — произвольный элемент. Покажем, что  $F(z)\psi \in \mathcal{H}_1$ . Подставляя вместо подынтегральной функции  $\psi(\mathbf{s})$  функцию  $-\psi(-s_1, s_2, s_3, s_4)$ , заменяя  $(-s_1, s_2, s_3, s_4)$  через  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$  пользуясь тождеством

$$E_\gamma(-p_1, p_2, p_3, p_4, -q_1, q_2, q_3, q_4) = E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

имеем

$$(F(z)\psi)(-p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \times$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s})ds}{(z - E_\gamma(-p_1, p_2, p_3, p_4, -s_1, s_2, s_3, s_4))\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} = \\ & = \frac{\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{q}, z)}} = -(F(z)\psi)(p_1, p_2, p_3, p_4). \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\begin{aligned} (F(z)\psi)(p_1, -p_2, p_3, p_4) &= (F(z)\psi)(p_1, p_2, p_3, p_4) = (F(z)\psi)(p_1, p_2, -p_3, p_4) \\ &= (F(z)\psi)(p_1, p_2, p_3, -p_4), \end{aligned}$$

инвариантность подпространства  $\mathcal{H}_1$  относительно оператора  $F(z)$ . □

Обозначим через  $F_\alpha^o(z)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , и  $F_{231}^o(z), F_{134}^o(z), F_{124}^o(z), F_{123}^o(z)$  сужения оператора  $F(z)$  на подпространства  $\mathcal{H}_i$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$  и  $H_5, \mathcal{H}_6, \mathcal{H}_7, \mathcal{H}_8$  соответственно.

В пространстве  $L^{2,o}(\mathbb{T}^4)$  вводим унитарный оператор  $U_{\alpha\beta} : L^{\beta,o} \rightarrow L^{\alpha,o}$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ , который сопоставит функции  $f(p_1, p_2, p_3, p_4)$  ее же значение, с замененными местами аргументами  $p_\alpha$  и  $p_\beta$ . Например, оператор  $U_{12}$  определяется следующим образом:

$$(U_{12}f)(p_1, p_2, p_3, p_4) = f(p_2, p_1, p_3, p_4).$$

**Лемма 9.** *Операторы  $F_1^o(z), F_2^o(z), F_3^o(z), F_4^o(z)$  унитарно эквивалентные, т.е.*

$$F_1^o(z) = U_{21}^* F_2^o(z) U_{21} = U_{31}^* F_3^o(z) U_{31} = U_{41}^* F_4^o(z) U_{41}.$$

В заключении параграфа отметим, что в силу леммы 8 оператор  $F^o(z)$  можно представить в виде:

$$F^o(z) = F_1^o(z) + F_2^o(z) + F_3^o(z) + F_4^o(z) + F_{234}^o(z) + F_{134}^o(z) + F_{124}^o(z) + F_{123}^o(z).$$

## О главной и остаточной частях оператора $F(z)$

Известно, что трехчастичная ветвь  $[E_{\min,\gamma}(\boldsymbol{\pi}), E_{\max,\gamma}(\boldsymbol{\pi})]$  существенного спектра оператора  $H_{\mu,\gamma}$  не зависит от параметра  $\mu > 0$ , а двухчастичная ветвь  $[z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}), z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8]$  существенного спектра сдвигается к  $+\infty$ , когда  $\mu \rightarrow +\infty$  (см. лемму 2).

**Лемма 10.** *Пусть  $\mu > 8(1 + \gamma)$  и  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ . Тогда верны неравенства*

$$\frac{(z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - 8 - 8\gamma)(z - 16 - 8\gamma)}{\mu(z - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))} \leq \frac{1}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)} \leq \frac{z \cdot z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p})}{\mu(z - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))}. \tag{9}$$

Если  $\mu > 0$  достаточно большое и  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ , то верна асимптотика

$$\frac{1}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, \tau_{\max,\gamma}(\mu))} = \frac{\mu}{\varepsilon(\mathbf{p})} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right). \tag{10}$$

где  $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$  – собственное значение двухчастичного оператора  $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$ .

*Доказательство.* По лемме 1 для всех  $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^4$  имеет место

$$\mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{s})} = 1.$$

Пользуясь этим имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z) &= 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} = \\ &= \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - (\mathbf{p} + \mathbf{s}))} - \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{z - \varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - (\mathbf{p} + \mathbf{s}))} = \\ &= \mu \int_{\mathbb{T}^4} \frac{[z - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p})] ds}{[z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - (\mathbf{p} + \mathbf{s}))][z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})]}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из неравенств  $0 \leq \varepsilon(\mathbf{s}) \leq 8$  и  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma) = z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8 > 0$  следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p})} &\leq \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - (\mathbf{p} + \mathbf{s}))} \leq \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - 8 - 8\gamma}, \\ \frac{1}{z} &\leq \frac{1}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} \leq \frac{1}{z - 16 - 8\gamma}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из соотношений (11)-(12) непосредственно вытекает (9).

Для доказательства (10) воспользуемся (13) и соотношением

$$\frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{s}) - \gamma\varepsilon(\boldsymbol{\pi} - (\mathbf{p} + \mathbf{s}))} = \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - 4 - 4\gamma} \left( 1 - \frac{\xi(\mathbf{s}) - \gamma\xi(\mathbf{p} + \mathbf{s})}{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - 4 - 4\gamma} \right).$$

Пользуясь тождеством  $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x}$ , ( $x \neq -1$ ), имеем

$$\frac{1}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} = \frac{1}{(z - 4 - 4\gamma) \left( 1 + \frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s})}{z - 4 - 4\gamma} \right)} = \frac{1}{z - 4 - 4\gamma} \left( 1 - \frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} \right). \quad (13)$$

Если учесть неравенства  $z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) < \mu + 4(1 + \gamma) + \frac{16(1+\gamma)^2}{\mu} \leq z$  и утверждение леммы 2, то из (11) для больших  $\mu$  получим равенство

$$\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z) = \frac{\mu(z - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))}{[z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{p}) - 4 - 4\gamma][z - 12 - 4\gamma]} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right].$$

Отсюда непосредственно вытекает равенство (10).  $\square$

В дальнейшем предположим, что  $\mu$  достаточно большое и  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma) \equiv z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8$ .

Если оператор  $F$  представляется в виде суммы операторов  $F_1$  и  $F_2$ , при этом норма оператора  $F_2$  стремится к нулю при  $\mu \rightarrow +\infty$ , то оператор  $F_2$  назовем *остаточной частью*,

а оператор  $F_1 = F - F_2$  главной частью оператора  $F$ . Если норма оператора  $F$  стремится к нулю при  $\mu \rightarrow +\infty$ , то будем считать, что главная часть оператора  $F$  равна нулю. Остаточную часть оператора  $F$  обозначим через  $F^r$ , а главную часть через  $F^l$ .

**Лемма 11.** Пусть  $z \geq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8$ . Оператор  $F_1^o(z)$  представляется в виде суммы главной и остаточной частей, т.е.

$$F_1^o(z) = F_1^{o,l}(z) + F_1^{o,r}(z), \quad (14)$$

Здесь

$$(F_1^{o,l}\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu\gamma}{(z-4-4\gamma)^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sum_{i=1}^4 \sin p_i \sin s_i \psi(\mathbf{s}) ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)} \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} \quad (15)$$

$$(F_1^{o,r}(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu}{(z-4-4\gamma)^2 \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\eta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s}) \psi(\mathbf{s}) ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}},$$

$$\eta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s}) = -\frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} - \frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, -\mathbf{s})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, -\mathbf{s})} + \frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})} \frac{\zeta(\gamma; \mathbf{p}, -\mathbf{s})}{z - E_\gamma(\mathbf{p}, -\mathbf{s})}.$$

$$E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = 4 + 4\gamma - \zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s}),$$

где  $\zeta(\gamma; \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \xi(\mathbf{p}) + \xi(\mathbf{s}) - \gamma\xi(\mathbf{p} + \mathbf{s}) - 4$ .

*Доказательство.* Подставляя (13) в (8) получим равенство (14). Теперь покажем, что существует  $\mu(\gamma) > 0$  такое, что при  $\mu > \mu(\gamma)$  верно

$$\|F^{o,r}(z)\| \leq \frac{C_\gamma}{\mu},$$

которая выполняется равномерно по  $z \geq \tau_{\max}(\mu)$ , и  $C$ —положительная константа, зависящая только от  $\gamma$ .

Пусть  $\psi \in L^2(\mathbb{T}^4)$  и  $\|\psi\| = 1$ . Пользуясь неравенствами  $\xi(\mathbf{p}) \leq 4$  и  $E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \geq 0$ , имеем

$$\begin{aligned} |(F^{o,r}(z)\psi, \psi)| &\leq \frac{\mu}{(z-4-4\gamma)^2} \int_{\mathbb{T}^4} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{|\eta(\gamma, \mathbf{p}, \mathbf{s})| |\psi(\mathbf{s})| |\overline{\psi(\mathbf{p})}| ds d\mathbf{p}}{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)} \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \leq \\ &\leq \frac{\mu \left( (4+8\gamma)^2 - 2(4+8\gamma) \right)}{(z-4-4\gamma)^3} \int_{\mathbb{T}^4} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{|\psi(\mathbf{s})| |\overline{\psi(\mathbf{p})}| ds d\mathbf{p}}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)} \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} = \\ &= \frac{\mu \left( (4+8\gamma)^2 - 2(4+8\gamma) \right)}{(z-4-4\gamma)^3} \left( \int_{\mathbb{T}^4} \frac{|\psi(\mathbf{s})| ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} \right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как  $z > z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) + 8 \geq \tau_{\max}(\mu)$ , учитывая (9), при  $\mu > 8(1 + \gamma)$  получим

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{T}^4} \frac{|\psi(\mathbf{s})| ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}} \right)^2 &\leq \left( \int_{\mathbb{T}^4} \sqrt{\frac{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{s})z}{\mu(z - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{s}) - \varepsilon(\mathbf{s}))}} |\psi(\mathbf{s})| ds \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{z^2}{\mu} \int_{\mathbb{T}^4} |\psi(\mathbf{s})|^2 ds \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{\varepsilon(\mathbf{s})}. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как

$$\frac{z}{z - 4 - 4\gamma} \leq 2, \quad z \geq \mu + 4(1 + \gamma),$$

из (16) и (17) при  $\mu > 8(1 + \gamma)$  имеем

$$|(F^{o,r}(z)\psi, \psi)| \leq \frac{3 \left( (4 + 8\gamma)^2 - 2(4 + 8\gamma) \right) W}{\mu \left( 1 - \frac{3}{\mu} \right)} \leq \frac{C_\gamma}{\mu},$$

где  $C_\gamma = 6 \left( (4 + 8\gamma)^2 - 2(4 + 8\gamma) \right) W$ .

□

**Лемма 12.** Оператор  $F_1^{o,l}(z)$  имеет единственное простое положительное собственное значение

$$\lambda_{\mu,\gamma}(z) = \frac{\mu\gamma}{(z - 4 - 4\gamma)^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sin^2 s_1}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)} ds$$

с соответствующей собственной функцией

$$\psi_1(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \in L_1^o.$$

*Доказательство.* Доказательство леммы тривиально, поэтому пропускаем его. □

Обозначим через  $P_1^-, P_2^-, P_3^-, P_4^-$  операторы проектирования  $L^2(\mathbb{T}^4)$  на подпространства

$$L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}), \quad L^2(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T})$$

и

$$L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}), \quad L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^2(\mathbb{T}) \otimes L^{2,o}(\mathbb{T}),$$

соответственно.

Отметим, что для любого  $f \in L^2(\mathbb{T}^4)$  имеет место

$$(P_1^- f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [f(p_1, p_2, p_3, p_4) - f(-p_1, p_2, p_3, p_4)].$$

Аналогично определяются проекторы  $P_2^-, P_3^-, P_4^-$ .

Оценим нормы операторов  $F_{231}^o(z) = P_1^- P_3^- P_2^- F(z)$ . Сначала оценим норму оператора  $P_3^- P_2^- F(z)$ .

С этой целью вводим одномерный оператор  $B(z)$ ,  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ , действующий в  $L^2(\mathbb{T}^4)$  по формуле

$$(B(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu(z - 16 - 8\gamma)^{-2}}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\psi(\mathbf{s}) ds}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}}. \quad (18)$$

Норма этого оператора равна его положительному собственному значению

$$\|B(z)\| = \frac{\mu}{(z - 16 - 8\gamma)^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}.$$

**Лемма 13.** Пусть  $\mu > 8(1 + \gamma)$ . Тогда существует  $C > 0$  такое, что при всех  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$  и  $\gamma > 0$  выполняется

$$\|B(z)\| \leq C. \quad (19)$$

*Доказательство.* Известно, что если  $z > \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ , то при всех  $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^4$  имеет место

$$\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z) > 0$$

и она монотонно возрастает на  $[\tau_{\max}(\mu, \gamma), +\infty)$  по  $z$ . Таким образом

$$\|B(z)\| \leq \|B(\tau_{\max}(\mu, \gamma))\| = \frac{\mu}{(z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) - 8(1 + \gamma))^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8 - \varepsilon(\mathbf{s}))}.$$

Отсюда, учитывая неравенство (9), имеем:

$$\|B(\tau_{\max}(\mu, \gamma))\| \leq \frac{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8}{(z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) - 8(1 + \gamma))^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{s}) ds}{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8 - z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi} - \mathbf{s}) - \varepsilon(\mathbf{s})}.$$

Отсюда и из неравенств  $\mu > 8(1 + \gamma)$ ,  $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) \geq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) > \mu + 4(1 + \gamma)$  вытекает, что

$$\|B(\tau_{\max}(\mu, \gamma))\| \leq \frac{(z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8)z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0})}{(z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) - 8(1 + \gamma))^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{8 - \varepsilon(\mathbf{s})} \leq 24 \int_{\mathbb{T}^4} \frac{ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} < \infty.$$

□

**Лемма 14.** Пусть  $\mu > 8(1 + \gamma)$ . Тогда существует  $C > 0$  такое, что при всех  $z \geq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8$  верно неравенство

$$\|P_\beta^- P_\alpha^- F(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}.$$

*Доказательство.* Доказательство леммы приводим для оператора  $P_3^- P_2^- F(z)$ . Из определений операторов  $P_2^-$  и  $F(z)$  следует, что

$$(P_2^- F(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}))^{-1} \sin p_1 \sin s_1 \psi(\mathbf{s}) ds}{(z - E_\gamma(-p_1, p_2, p_3, p_4, \mathbf{s})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{s}, z)}}.$$

Умножим на  $P_3^-$  слева оператор  $P_2^- F(z)$ , т.е.

$$(P_3^- P_2^- F(z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [(P_1^- F(z)\psi)(\mathbf{p}) - (P_1^- F(z)\psi)(p_1, -p_2, p_3, p_4)].$$

Учитывая последнее равенство, после несложных вычислений получим следующее представление для ядра оператора  $P_3^- P_2^- F(z)$ :

$$F_{23}^{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = \frac{-2\mu\gamma^2 \sin p_1 \sin q_1 \sin p_2 \sin q_2}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}(z - E_\gamma(-p_1, p_2, p_3, p_4, \mathbf{q}))(z - E_\gamma(p_1, -p_2, p_3, p_4, \mathbf{q}))} \times \\ \frac{z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \gamma(\sin p_1 \sin q_1 + \sin p_2 \sin q_2)}{(z - E_\gamma(-p_1, -p_2, p_3, p_4, \mathbf{q}))(z - E_\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{q}, z)}}.$$

Отсюда и из оценок (12) следует, что

$$|F_{23}^{--}(z; \mathbf{p}, \mathbf{q})| \leq 2\gamma^2 B(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z) \left[ \frac{1}{z - 16 - 8\gamma} + \frac{2\gamma}{(z - 16 - 8\gamma)^2} \right]$$

где функция  $B(\mathbf{p}, \mathbf{q}; z)$  – ядро интегрального оператора (18). Отсюда из соотношений

$$z \geq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8 \geq \mu + 4(1 + \gamma)$$

и (19) получим

$$\|P_3^- P_2^- F(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}.$$

□

Из леммы 13, неравенства  $\|FB\| \leq \|F\| \cdot \|B\|$  и  $\|P_\alpha\| = 1, \alpha = 1, 2, 3, 4$ , вытекает:

**Следствие 1.** Пусть  $\mu > 8(1 + \gamma)$ . Тогда существует  $C > 0$  такое, что при всех  $z \geq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) + 8$  имеют место

$$\|F_{231}^o(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}, \quad \|F_{134}^o(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}, \quad \|F_{124}^o(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}, \quad \|F_{123}^o(z)\| \leq C \frac{\gamma^2}{\mu}.$$

## Доказательства основных результатов

Следующая лемма играет важную роль при доказательстве основных результатов этой работы:



**Лемма 15.** Пусть  $\gamma > 0$ . Тогда существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что для любого  $\mu > \mu_\gamma$  собственное значение  $\lambda_{\mu,\gamma}(\tau_{\max}(\mu, \gamma))$  оператора  $F_1^{o,l}(\tau_{\max}(\mu, \gamma))$  удовлетворяет равенству

$$\lambda_{\mu,\gamma}(\tau_{\max}(\mu, \gamma)) = \frac{\gamma}{\gamma_0} + O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где  $\gamma_0$  определено по формуле (1).

*Доказательство.* Из утверждений лемм 2 и 10 следует, что для фиксированного  $\gamma > 0$  существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что при  $\mu > \mu_\gamma$  имеет место

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu,\gamma}(\tau_{\max}(\mu, \gamma)) &= \frac{\mu\gamma}{(\tau_{\max}(\mu, \gamma) - 4 - 4\gamma)^2} \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sin^2 p_1 d\mathbf{p}}{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, \tau_{\max}(\mu, \gamma) - \varepsilon(\mathbf{p}))} = \\ &= \frac{\gamma}{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) - 4(\gamma - 1)} \int_{\mathbb{T}^4} \sin^2 p_1 \left[ \frac{\mu}{\varepsilon(\mathbf{p})} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) \right] d\mathbf{p} + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = \\ &= \gamma \int_{\mathbb{T}^4} \left[ \frac{\sin^2 p_1}{\sum_{i=1}^4 (1 + \cos p_i)} \right] d\mathbf{p} + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = \gamma \int_{\mathbb{T}^4} \frac{\sin^2 p_1 d\mathbf{p}}{\varepsilon(\mathbf{p})} + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

□

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $\gamma > \gamma_0$ . Покажем, что существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что при  $\mu > \mu_\gamma$  имеет место равенство  $n[1, F(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] = 4$ .

Из прямой суммы

$$F(z) = F^o(z) \oplus F^e(z), \quad z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$$

и отрицательности оператора  $F^e(z)$  следует, что

$$n[1, F(z)] = n[1, F^o(z)] + n[1, F^e(z)] = n[1, F^o(z)], \quad z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma).$$

Из унитарной эквивалентности операторов  $F_1^o(z)$ ,  $F_2^o(z)$ ,  $F_3^o(z)$ ,  $F_4^o(z)$  вытекает, что

$$n[1, F^o(z)] = 4n[1, F_1^o(z)].$$

Отсюда и из неравенства Вейля получаем

$$n[1, F_1^o(z)] = n[1 - \varepsilon + \varepsilon, F_1^{o,l}(z) + F_1^{o,r}(z)] \leq n[1 - \varepsilon, F_1^{o,l}(z)] + n[\varepsilon, F_1^{o,r}(z)].$$

Из следствия 1 заключаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\mu_\gamma > 0$  такое, что

$$n[1, F_{234}^o(z)] = n[1, F_{134}^o(z)] = n[1, F_{124}^o(z)] = n[1, F_{123}^o(z)] = n[\varepsilon, F_1^{o,r}(z)] = 0,$$

$$z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$$

при всех  $\mu > \mu_\gamma$ . Далее, из леммы 12 следует, что  $n[1, F(z)] \leq 4$ .

Теперь мы покажем, что  $n[1, F(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] \geq 4$ .

Так как по лемме 15 для любого  $\mu > \mu_\gamma$

$$1 = n[1, F_1^{o,l}(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] \leq n[1, F_1^o(\tau_{\max}(\mu, \gamma))],$$

из равенства

$$n[1, F(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] = n[1, F^o(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] = 4n[1, F_1^o(\tau_{\max}(\mu, \gamma))]$$

имеем, что  $n[1, F(\tau_{\max}(\mu, \gamma))] \geq 4$ .

Из нечетности собственной функции  $\psi$ , соответствующей собственному значению  $\lambda > 1$  оператора  $F(z)$ ,  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ , и четности  $\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)$  по каждому аргументу  $p_i$  вытекает, что

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{\psi(\mathbf{p})}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}, z)}} \in L^{2,o}(\mathbb{T}^4).$$

Из формулы (6), связывающей собственные функции операторов  $F(z)$  и  $H_{\mu,\gamma}$  следует, что собственная функция  $f$  оператора  $H_{\mu,\gamma}$ , соответствующая собственному значению  $z \geq \tau_{\max}(\mu, \gamma)$ , принадлежит подпространству  $L^{2,as,o}[(\mathbb{T}^4)^2]$ .  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mattis D. C. The few-body problem on lattice. Rev. Mod. Phys, 1986, 58(2), 361–379 с.
2. Mogilner A. I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrödinger operators: problems and results. Adv. Sov. Math, 1991, V. 5, P. 139–94.
3. Malishev V. A., Minlos R. A. Translations of Mathematical Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1995, 143.
4. Lakaev S. N., Lakaev Sh. S. The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice. J. Phys. A: Math. Theor, 2017, V. 50, P. 335202–17.
5. Lakaev S. N, Dell'Antonio G. F and Khalkhuzhaev A. M. Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice, J. Phys. A: Math. Theor, 2016, V. 49, P. 145204–15.
6. Dell'Antonio G. F., Muminov Z. I. and Shermatova Y. M. On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices. J. Phys. A: Math. Theor, 2011, V. 44, P. 315302–27.
7. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics. Ann. Henri Poincaré, 2004, V. 5, P. 743–72 .
8. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Analysis of Operators. Academic, 1979.
9. Pankov A. A. Lecture Notes on Schrödinger equations. Nova Science. New York, 2007.

10. Абдуллаев Ж. И., Халхужаев А. М., Хужамиеров И. А. Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Изв. вузов. Матем, 2023, V. 2, P. 3–25.

### REZYUME

To'rt o'lchamli  $\mathbb{Z}^4$  panjarada juft-jufti bilan itaruvchi  $\mu > 0$  kontakt potensial yordamida ta'sirlashuvchi uch zarrachali (massasi 1 ga teng ikkita fermion va  $m = \frac{1}{\gamma} < 1$  massasi boshqa zarracha) sistemaga mos uch zarrachali  $H_{\mu,\gamma}$  diskret Shryodinger o'patorlari qaralgan. Yetarlicha katta  $\mu > 0$  va  $\gamma > \gamma_0$  lar uchun  $H_{\mu,\gamma}$  operatorning muhim spektrdan o'ngda yagona to'rt karrali xos qiymatga ega ekanligi isbotlangan.

**Kalit so'zlar:** panjaradagi Shryodinger operatori, gamiltonian, kontakt potensial, fermion, xos qiymat, kvaziimpuls, invariant qism fazo, Faddeev operatori.

### RESUME

We consider a three-particle discrete Schrodinger operator  $H_{\mu,\gamma} := H_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi})$ ,  $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi, \pi)$ , associated with a system of three particles (two fermions with mass 1 and one other particle with mass  $m = 1/\gamma < 1$ ) interacting via pairwise repulsive contact potentials  $\mu > 0$  on a four-dimensional lattice  $\mathbb{Z}^4$ . It is proved that the operator  $H_{\mu,\gamma}$ , for  $\gamma > \gamma_0$  has a unique four-fold eigenvalue lying to the right of the essential spectrum for sufficiently large  $\mu$ .

**Key words:** : lattice Schrodinger operator, Hamiltonian, contact potential, fermion, eigenvalue, quasi-momentum, invariant subspace, Faddeev operator.

УДК 517.55

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА МАСС ГОРНОГО МАССИВА ОГРАНИЧЕННОГО БОРТОМ КАРЬЕРЫ И ПЛОСКОСТЬЮ СКОЛЬЖЕНИЯ

Худойбердиев О. Ж., Норов Г. М \*

\*

### РЕЗЮМЕ

Данная статья посвящена определению координат центра масс горного массива при ведении открытых горных работ. Определяя координат центра масс горного массива и рассматривая его как материальную точку, можно использовать для обеспечения устойчивости борта карьеры или уступа. Как известно, коэффициент запаса устойчивости (КЗУ) определяется как отношение удерживающих сил  $K_{уд}$  породы к сдвигающим её силам  $K_{сд}$ . По определенным координатам центра масс можно вычислить действующие силы на борта карьеры как на материальную точку горной породы, после чего определить КЗУ.

**Ключевые слова:** Координат центра масс, борт карьеры, уступ, горный массив, коэффициент запаса устойчивости, удерживающие силы, сдвигающие силы, кубическая сплайн функция.

### Введение

Многолетний опыт недропользования показывает устойчивую тенденцию преимущественного развития открытого способа разработки месторождений твердых полезных ископаемых, на долю которого приходится основной объем мировой добычи полезных ископаемых. Развитие горнодобывающей промышленности в Республике Узбекистан сопровождается ростом удельного веса открытого способа разработки полезных ископаемых, который имеет ряд преимуществ перед подземным способом. Несмотря на многочисленные исследования, проблема обеспечения устойчивости бортов в их предельном положении из-за сложности и широкого разнообразия горнотехнических и гидрогеологических условий месторождений для глубоких карьеров до конца еще не решена [1-2]. В данной статье авторами предлагается рассмотреть горную породу как систему материальных точек, разбивая её на несколько частей, и найти для каждой части их координаты центра масс. Далее, из определенных координат центра масс частей, используя известную формулу сложения векторов, найти координаты центра масс горного массива. Рассматривая центр масс породы как материальную точку, можно определить действующие на нее удерживающие и сдвигающие силы. Используя теорему о движении центра масс тела можно прогнозировать

\* **Худойбердиев О. Ж.** – Навоийского государственного горно-технологического университета, Навои, Узбекистан, khudayberdiyev@mail.ru

\* **Норов Г. М** – Навоийского государственного педагогического института, Навои, Узбекистан, norovg91@mail.ru

устойчивость или неустойчивости горной породы в рассматриваемом участке. Для нахождения координаты центра масс горной породы требуется определить контур той области горного массива, который окружает его. С этой целью используется метод кубического сплайна. Определенный контур служит граничными условиями при вычислении координаты центра масс, как каждой части, так и целого массива. При нахождении координаты центра масс плоской фигуры используем сведения из [3-4]. Пусть для плоской области горного массива породы её плотность  $\gamma$  является переменной величиной, т.е.  $\gamma = \gamma(x, y)$ , тогда соответствующие координаты центра масс находятся по формулам [3-4]:

$$x_c = \frac{\int \int_D x\gamma(x, y) dx dy}{\int \int_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\int \int_D y\gamma(x, y) dx dy}{\int \int_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad (20)$$

где  $D$ —область интегрирования, определяющая плоскую фигуру.

Пусть в результате экспериментов получены значения функции, измеренные в нескольких точках. Требуется решать следующую задачу: как найти значения функции в промежуточных точках? Такая задача называется задачей интерполяции и часто возникает на практике. На практике наиболее часто используются кубические сплайны  $S_3(x)$ —сплайны третьей степени с непрерывной, по крайней мере, первой производной.

Для определения границы плоской области используем метод кубического сплайна. Применяя этот метод, находим выпуклую кривую, как формы траектории горного массива. Эта кривая будет верхней границей области. Для того, чтобы найти кубического сплайна используем результат работы [4]. Приводим общий вид кубического сплайна для номера  $i$ , где  $i = \overline{0, n}$ :

$$y_i = S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \quad (21)$$

Теперь переходим к непосредственному изложению решение поставленной задачи, иллюстрируя это на конкретном примере.

**Пример.** Рассматривается задача определения верхней границы горного уступа (борт карьеры) длиной основания 20 ед. и высотой 16 ед. т.е., построить выпуклую форму траектории уступа (борта карьеры), если в результате экспериментов, получена некоторая зависимость функции  $y = f(x)$  от переменной  $x$ , в виде таблицы (таб. 1).

Таблица 1.

<b>i</b>	0	1	2	3	4
<b>x</b>	0	4	8	12	16
<b>y</b>	0	9	14	18	20

В результате эксперимента получена зависимость функции  $y = f(x)$  от переменной  $x$ .  $i$ —номер точек,  $x$ —значения переменной,  $y$ —значения функции. Нижнюю границу области определим следующим образом. Находится уравнение прямой проходящее через две точки  $O(0; 0)$  и  $A(x_n; y_n)$ . Эта прямая будет служить как линия скольжения горного массива.

Обозначим через  $A_i = A(x_i; y_i)$ , где  $i = \overline{0, 4}$ , соответствующие точки на плоскости  $Oxy$ . Далее, находим промежуточные кубические сплайн функций  $S_i$ , где  $i = \overline{0, 3}$ , используя результаты работы [4] и формулы (2).

В конечном результате составим следующую систему:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 9, a_2 = 14, a_3 = 18, c_0 = 0 \\ 4b_0 + 64d_0 = 9 \\ 4b_1 + 16c_1 + 64d_1 = 5 \\ b_2 + 4c_2 + 16d_2 = 1 \\ 2b_3 + 8c_3 + 32d_3 = 1 \\ b_0 - b_1 + 48d_0 = 0 \\ -c_1 + 12d_0 = 0 \\ b_1 - b_2 + 8c_1 + 48d_2 = 0 \\ c_2 - c_3 + 12d_2 = 0 \\ c_3 + 12d_3 = 0 \end{cases}$$

Для краткости эту систему напомним в матричном виде, как

$$AX = B,$$

здесь  $A$  – матрица коэффициентов,  $X$  – матрица-столбец неизвестных,  $B$  – матрица-столбец свободных чисел. Далее находится соответствующая обратная матрица, для этой цели используется готовая программа в Excel. Наденную обратную матрицу умножая на матрицу столбец-свободных членов

$$B^T = [0; 9; 14; 18; 0; 9; 5; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0],$$

находятся неизвестные коэффициенты полученной СЛАУ.

Определим обратную матрицу  $A^{-1}$  к матрице  $A$ . Так, как уравнение  $AX = B$  имеет решение  $X = A^{-1}B$ , то используя программу из Excel, находим произведение  $A^{-1}B$ . Далее, находим неизвестных коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i (i = \overline{0, 3})$ , в виде таблицы (таб. 2):

Таблица 2.

<b>i</b>	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
<b>0</b>	0	2,508929	0	-0,01618
<b>1</b>	9	1,732143	-0,1942	0,018415
<b>2</b>	14	1,0625	0,026786	-0,0106
<b>3</b>	18	0,767857	-0,10045	0,008371

Приведены значения неизвестных коэффициентов, для соответствующих кубических сплайнов. Итак, определены все неизвестные коэффициенты. Подставляя их в кубические многочлены соответственно, получим кубические сплайны, которые интерполируют искомую функцию в заданных частичных отрезках.

Теперь, в частичных отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ , где  $i = \overline{0, 3}$ , задавая последовательно шаг, например 0,5 получим таблицу (таб. 3) значений  $y$  для соответствующих отрезков  $x$ .

Таблица 3.

x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	4,5	9,819824	8,5	14,53662	12,5	18,35986
0,5	1,252441	5	10,55636	9	15,07868	13	18,67578
1	2,492746	5,5	11,22342	9,5	15,61823	13,5	18,95403
1,5	3,708775	6	11,83482	10	16,14732	14,5	19,42264
2	4,888393	6,5	12,40437	10,5	16,65799	14,5	19,42264
2,5	6,019461	7	12,94587	11	17,1423	15	19,62556
3	7,089844	7,5	13,47314	11,5	17,59229	15,5	19,81592
3,5	8,087402	8	14	12	18	16	20
4	9						

В таблице приведены значения  $x$  и  $y$  соответствующие частичным отрезкам  $[x_i, x_{i+1}]$ , где  $i = \overline{0, 3}$ .

Теперь построим график кубического сплайна, определяющего форму уступа (борта карьеры), который приведен на рисунке 1.

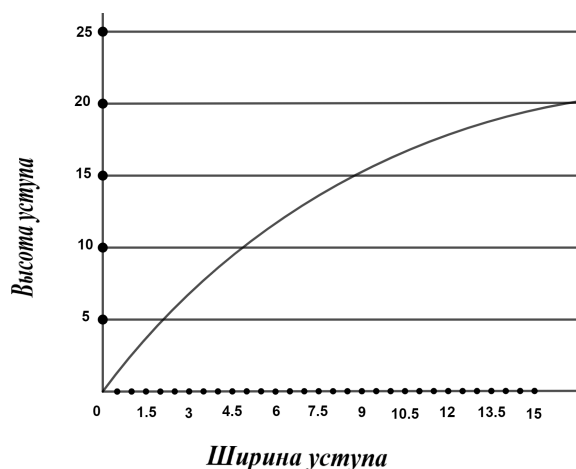


Рис. 16

Рис. 1. Траектория уступа (борта карьеры), полученная кубическим сплайном

Теперь приступим к определению координат центра масс горного массива, ограниченного указанными линиями.

Координаты центра масс  $O_i$  вычисляются по формулам (20). Вычисления являются элементарными, но громоздкими, поэтому пропуская их, приводим полученные результаты, где через  $(x_{ci}; y_{ci}), i = \overline{0, 3}$ , обозначены соответствующие координаты центра масс  $O_i$ . Следующим шагом является определение границы области интегрирования, которых обозначим через  $D_i, i = \overline{1, 4}$ . Для частичного интервала  $(x_i; x_{i+1})$ , область  $D_i$  определяется следующим образом: Сверху соответствующим уравнением  $S_i$ , снизу уравнением прямой, проходящей через точки  $(x_i; 0)$  и  $(x_{i+1}; 0)$ , слева  $x = x_i$  и справа  $x = x_{i+1}$ , где  $i = \overline{0, 3}$ . Геометрическое изображение вышесказанных данных приведен на рисунке 2 (см. рис.2).

Рис. 2. Изображение нахождения координат центра масс горного массива.

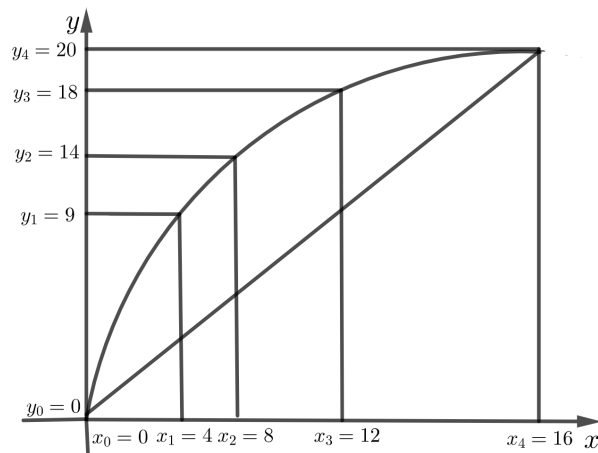


Рис. 17

В результате получены следующие координаты центра масс  $O_i$  частей горного массива, на которых он разделен:

$$(x_{c0} = 2,634; y_{c0} = 3,432), \quad (x_{c1} = 6,548; y_{c1} = 6,197),$$

$$(x_{c2} = 10,027; y_{c2} = 15,047), \quad (x_{c3} = 14,017; y_{c3} = 19,308).$$

Пропуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$x_c = 8,3; \quad y_c = 10,9.$$

Тогда искомый центр масс горного массива, ограниченного областью  $D$ , будет

$$O(x_c; y_c) = O(8,3; 10,9).$$

Используя точку  $O(x_c; y_c)$  как центр масс горного массива, можно определить действующие на нее силы, т.е. удерживающих и сдвигающих сил. Далее, находя отношение этих сил можно найти КЗУ для борта карьеры или уступа. Рассмотренный метод позволяет определить КЗУ более простым способом, что облегчает решение данной задачи специалистам по горному делу.

### Вывод

Таким образом, приведены расчетные формулы определения границ области, изучаемого горного массива, рассмотрен пример и определены координаты центра масс разрабатываемого участка. Рассмотренный метод можно использовать для определения КЗУ борта карьеры или уступа, так как, при этом все действующие силы прилагается только к одной точке  $O(x_c; y_c)$ , что упрощает вычисления КЗУ. Приведенные формулы легко применимы для определения форму траектории борта карьеры или уступа, чтобы в дальнейшем использовать их в целях безопасности и устойчивости горного массива.

### ЛИТЕРАТУРА



1. Силкин А.А, Кольцов В.Н, Шеметов П.А, Жиянов Ю.А, Иноземцев С.Б Управление долговременной устойчивостью откосов на карьерах Узбекистана. Ташкент: Фан 2005, 229 с.
2. Норов Ю.Д, Заиров Ш.Ш Проектирование карьеров и обеспечение устойчивости бортов. – Монография. Навои, Изд. «Навои» 2015, 252 с.
3. Пискунов С.Н Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов, т. 2. Москва 2006, 555 с.
4. Norov G.M, Khudayberdiev O.J, Rakhmatov S.Kh, Mekhmonov M.R Assessment of the stability of the pit wall using the cubic spline method and the slope angle of the pit wall trajectory. EPRA International Journal of Research and Development (IJRD), USA, August 2023, Volume: 8, Issue: 8. p.75–80.
5. Демин А.М Устойчивость открытых горных выработок и отвалов. – М.: Недра 1973, 232 с.
6. Письменный Д.Т Конспект лекции по высшей математике, ч-1,2. Москва 2008, Айрис Пресс, 288с.
7. Степанова Т.Ю, Бойцова В.В Прикладная механика: учебное пособие. Иван. гос. хим.- техол. ун-т. – Иваново, 2018. – 156 с.
8. Norov G.M, Khudayberdiev O.J, Rakhmatov S.Kh, Mekhmonov M.R Determination of convex shape of the trajectory of the quarry board trajectory by the method of cubic splines. The American Journal of Interdisciplinary Innovations Research (ISSN – 2642-7478), Volume 05, Issue 11, Pages: 51–62.
9. Худайбердиев О.Ж, Рахматов С.Х, Норов Г.М, Карабекян С.Х Задача об определении формы отвалов, методах вычисления их объёмов и массы. Горный вестник Узбекистана научно-технический и производственный журнал. №4(95) октябрь-декабрь 2023 йил. с. 69–71.
10. Худайбердиев О.Ж, Норов Г.М, Мехмонов М.Р Об использовании координат центра масс горной породы для определения коэффициента запаса устойчивости борта карьеры. Материалы V международной конференции по комплексное инновационное развитие зарафшанского региона: достижения, проблемы и перспективы, 18-19 апреля 2024 г. Навои, Узбекистан, с. 135–137.

## REZYUME

Ushbu maqola ochiq usulda qazib olish jarayonida tog‘ jinslarining massa markazining koordinatalarini aniqlashga bag‘ishlangan. Tog‘ jinslari massasi markazining koordinatalarini aniqlash va uni moddiy nuqta sifatida ko‘rib chiqish, uni karer yoki to‘siq tomonining barqarorligini ta‘minlash uchun foydalanish mumkin. Ma‘lumki, barqarorlik xavfsizligi koeffitsienti (BXK) tog‘ jinslarining ushlab turuvchi kuchlari Kut ning harakatga keltiruvchi kuchlari Khk nisbati sifatida aniqlanadi. Massa markazining ma‘lum koordinatalaridan foydalanib,

toshning moddiy nuqtasida bo'lgani kabi, karyerning yon tomonlariga ta'sir qiluvchi kuchlarni hisoblash va keyin barqarorlik xavfsizligi koeffitsientini(BXK) aniqlash mumkin.

***Kalit so'zlar:*** Massa markazining koordinatalari, karyer tomoni, qirradi, tosh massasi, barqarorlik koeffitsienti, ushlab turuvchi kuchlari, harakatga keltiruvchi kuchlari, kubik splayn funktsiyasi.

### RESUME

This article is devoted to determining the coordinates of the centre of mass of the rock mass during open-cut mining operations. Determining the coordinates of the centre of mass of the rock mass and considering it as a material point, can be used to ensure the stability of the side of the pit or ledge. As it is known, the stability reserve factor (SRF) is defined as the ratio of retaining forces  $K_{re}$  of the rock to the shear forces  $K_{sh}$ . According to certain coordinates of the centre of mass, it is possible to calculate the acting forces on the sides of the quarry as a material point of rock, and then to determine the SRF.

***Key words:*** : Centre of mass coordinates, quarry face, ledge, rock massif, stability factor, restraining forces, shear forces, cubic spline function.