



УДК:531.51:537.2:378.147

*Nuraddin K. ABDULLAYEV,*  
PhD, dotsent, O'zbekiston Milliy universiteti  
*Xushbak M. SHAMAYEV,*  
O'zbekiston Milliy universiteti katta o'qituvchisi  
*Ernazar J. KOSBERGENOV,*  
Dotsent v.b., PhD, O'zbekiston Milliy universiteti  
E-mail: ernazar.kosbergenov@gamil.com

TDTU dotsenti A.Sattorov taqrizi asosida

### THE SIGNIFICANCE OF GAUSS'S THEOREM IN TEACHING SPECIAL DISCIPLINES

Annotation

The article examines the methodological significance of applying Gauss's theorem to the gravitational field in the context of teaching fundamental physics disciplines. A rigorous derivation of gravitational field intensity for objects with central symmetry is presented in both integral and differential forms within a unified SI unit system. A comparative analysis of the structural similarities and principal differences between the equations of electrostatics and Newtonian gravitational theory is carried out. It is shown that introducing the concept of force field flux at an early stage of instruction significantly reduces the cognitive load when students subsequently study Maxwell's equations.

**Key words:** Gauss's theorem, gravitational field, electrostatics, field intensity, vector flux, Poisson's equation, physics teaching methodology.

### ЗНАЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА В ПРЕПОДАВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

Аннотация

В статье исследуется методологическое значение применения теоремы Гаусса к гравитационному полю в рамках преподавания фундаментальных физических дисциплин. Представлен строгий вывод напряжённости гравитационного поля для объектов с центральной симметрией в интегральной и дифференциальной формах в единой системе единиц СИ. Проведён сравнительный анализ структурного сходства и принципиальных различий уравнений электростатики и теории гравитации Ньютона. Показано, что введение концепции потока силового поля на раннем этапе обучения существенно снижает когнитивную нагрузку при последующем изучении уравнений Максвелла.

**Ключевые слова:** Теорема Гаусса, гравитационное поле, электростатика, напряжённость поля, поток вектора, уравнение Пуассона, методика преподавания физики.

### MAXSUS FANLARNI O'QITISHDA GAUSS TEOREMASINING AHAMIYATI

Annotatsiya

Maqolada fundamental fizika fanlarini o'qitish doirasida Gauss teoremasini gravitatsion maydonga qo'llashning metodologik ahamiyati tadqiq etiladi. Markaziy simmetriyaga ega jismlar uchun gravitatsion maydon kuchlanganligining SI o'lchov birliklari tizimida integral va differensial shakllardagi qat'iy chiqarilishi keltirilgan. Elektrostatika tenglamalari va Nyuton gravitatsiya nazariyasining tarkibiy o'xshashliklari hamda printsiplari farqlari qiyosiy tahlil qilingan. O'qitishning dastlabki bosqichida kuch maydoni oqimi tushunchasini kiritish talabalar keyinchalik Maksvell tenglamalarini o'rganishda kognitiv yukni sezilarli darajada kamaytirishini ko'rsatadi.

**Kalit so'zlar:** Gauss teoremasi, gravitatsion maydon, elektrostatika, maydon kuchlanganligi, vektor oqimi, Puasson tenglamasi, fizikani o'qitish metodikasi.

**Введение.** Одной из центральных задач современного технического образования является формирование у студентов системного мышления. При изучении специальных дисциплин – электродинамики, небесной механики, геофизики – учащиеся нередко воспринимают формулы как изолированные факты, не видя за ними общих физических принципов.

Теорема Гаусса традиционно рассматривается в разделе электростатики [1]. Однако её применение к гравитационному полю не только упрощает решение ряда практических задач, но и служит мощным инструментом для понимания теории поля в целом [2]. В настоящей работе обосновывается целесообразность введения концепции Гаусса уже на этапе изучения механики; все

формулы приводятся в системе единиц СИ для единообразия изложения.

Теоретические основы и математический аппарат Математическая аналогия между законом всемирного тяготения и законом Кулона позволяет рассматривать массу  $m$  как «гравитационный заряд» [3,4]. Оба закона описывают центральные поля с убыванием по закону  $1/r^2$ , что и обеспечивает применимость теоремы Гаусса в обоих случаях.

Интегральная форма  
Для гравитационного поля поток вектора напряжённости  $\vec{g}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  прямо пропорционален массе  $M_{\text{вн}}$  заключённой внутри этой поверхности [5,6]:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{вн}} \quad (1)$$

Знак «минус» отражает фундаментальное свойство гравитации: в отличие от электростатики, где возможно как притяжение, так и отталкивание, гравитационные силы всегда являются силами притяжения. Вектор  $\vec{g}$  всегда направлен к источнику поля, то есть внутрь замкнутой поверхности, откуда и следует отрицательный знак потока.

Дифференциальная форма: уравнение Пуассона

Применяя теорему Гаусса–Остроградского к уравнению (1), переходим от потока через поверхность к дивергенции поля в объёме [7]:

$$\text{div} \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (2)$$

Поскольку гравитационное поле потенциально, введём скалярный потенциал  $\phi$  через соотношение  $\vec{g} = -\nabla\phi$ . Подставляя в (2), получаем уравнение Пуассона для гравитационного потенциала:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (3)$$

Вне распределения масс ( $\rho = 0$ ) уравнение (3) переходит в уравнение Лапласа  $\Delta\phi = 0$ , что создаёт прямую связь с методами решения краевых задач в электродинамике и теплофизике.

Расчёт поля для тел с центральной симметрией

Рассмотрим однородный шар радиуса  $R$  и плотности  $\rho$ . В качестве гауссовой поверхности выберем сферу радиуса  $r$ , концентрическую с шаром. В силу симметрии задачи вектор  $\vec{g}$  на этой поверхности направлен радиально и имеет постоянный модуль  $g(r) = |\vec{g}|$ , что позволяет вынести его за знак интеграла.

Поле вне тела ( $r > R$ )

Вся масса  $M$  находится внутри гауссовой поверхности. Из уравнения (1):

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \Rightarrow g(r) = G \frac{M}{r^2} \quad (4)$$

Сравнение электростатического и гравитационного полей (СИ)

Параметр	Электростатика	Гравитация
Силовой закон	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Напряжённость поля	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$g = G \frac{m}{r^2}$
Потенциал $\phi$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$-G \frac{m}{r}$
Уравнение Пуассона	$\Delta\phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}$	$\Delta\phi = 4\pi G\rho_m$
Теорема Гаусса	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{вн}}}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{\text{вн}}$
Знак взаимодействия	притяжение и отталкивание	только притяжение
Экранирование	возможно (клетка Фарадея)	невозможно
Влияние среды	через $\epsilon_r$	отсутствует

Ключевые различия, которые необходимо акцентировать при преподавании:

Знак источника. В электростатике заряды бывают положительными и отрицательными, что допускает взаимную компенсацию полей и экранирование. В гравитации масса строго положительна, поэтому суммарный поток  $\vec{g}$  через любую замкнутую поверхность всегда отрицателен — полного экранирования быть не может.

Роль среды. Электрическое поле ослабляется относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$  вещества. Гравитационное поле проходит сквозь любую среду без ослабления — это уникальное свойство не имеет электростатического аналога.

Масштаб констант. Гравитационная постоянная  $G \approx 6,674 \times 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$  на 40 порядков слабее электромагнитного взаимодействия, однако на

Вектор  $\vec{g}$  направлен к центру шара. Результат (4) идентичен полю точечной массы [8]. Это доказывает важную теорему: сферически симметричное тело вне себя создаёт такое же гравитационное поле, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре.

Поле внутри тела ( $r \leq R$ )

Масса, заключённая внутри гауссовой сферы радиуса  $r$ :

$$M_{\text{вн}} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (1) и учитывая знаковое соглашение:

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

После сокращения получаем линейную зависимость:

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r \quad (6)$$

Из формулы следует, что внутри однородного тела напряжённость поля линейно убывает от поверхности к центру и обращается в нуль в центре масс. Этот результат имеет ключевое значение для понимания внутреннего строения планет и звёзд, а также для анализа приливных сил [9].

Сравнительный анализ: сходство и границы аналогии

Структурное сходство законов Кулона и Ньютона порождает изоморфизм математического аппарата (таблица 1), который целесообразно использовать в преподавании [10-12]. Вместе с тем существуют принципиальные физические различия, которые необходимо явно указывать студентам во избежание ложного отождествления двух теорий.

космических масштабах гравитация доминирует ввиду отсутствия экранирования [13-14].

Методические рекомендации для высшей школы

Предлагаемый подход реализует три взаимосвязанные педагогические задачи.

Опережающее формирование понятийного аппарата. Студенты, освоившие понятие потока вектора и теорему Гаусса на примере «наглядной» гравитации, демонстрируют существенно меньшие затруднения при переходе к уравнениям Максвелла. Это согласуется с принципом концентрического расширения знаний, описанным в работах по методике преподавания физики.

Развитие навыков абстрагирования. Переход от конкретных сил к понятиям потенциала, дивергенции и граничных условий формирует математическую культуру, необходимую инженеру-исследователю. Задача о поле

внутри тела демонстрирует, как симметрия задачи позволяет обойти сложное интегрирование.

Решение прикладных задач. В курсах геодезии, космонавтики и геофизики теорема Гаусса позволяет быстро оценивать поля неоднородных тел — например, эллипсоида Земли или полости внутри планеты — без численного интегрирования закона Ньютона по элементам объёма.

**Заключение.** Теорема Гаусса для гравитационного поля является не просто математическим приёмом, а фундаментальным принципом, связывающим классическую механику и теорию поля. Включение

данного раздела в преподавание специальных дисциплин позволяет достичь двойного эффекта: упростить вычисление полей для симметричных конфигураций и сформировать у студентов единую физическую картину мира.

Продемонстрированные результаты — линейное убывание поля внутри однородного шара (6), тождественность внешнего поля и поля точечной массы (4), а также явные границы аналогии с электростатикой — закладывают прочный фундамент для изучения общей теории относительности и современной теоретической физики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 8-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 536 с.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5: Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1977. — 299 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 1: Механика. 5-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 560 с.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. 11-е изд. — М.: Физматлит, 2010. — 272 с.
5. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1. М.: Астрель, 2003. — 336 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. 12-е изд. — М.: Физматлит, 2003. — 616 с.
7. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics. 4th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017. — 599 p.
8. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. — New York: Wiley, 1999. — 808 p.
9. Purcell E. M., Morin D. J. Electricity and Magnetism. 3rd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013. — 839 p.
10. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма. 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1991. — 288 с.
11. Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир, 1985. — 520 с.
12. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. — 352 с.
13. Мясников В. А., Осанова Н. И. Пособие по физике для поступающих в вузы. М.: Высшая школа, 2002. — 480 с.
14. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика в задачах для поступающих в вузы. М.: Физматлит, 2006. — 560 с.