



Suyunjon X. XOLIKOV,
PhD, dotsent, Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekiston
E-mail: xolikovsuyunjon@gmail.com, <https://ORCID.org/0009-0000-5279-8622>
Aziza ABDUSALOMOVA,
Magistrant, Navoiy davlat universiteti, Navoiy, O'zbekiston
Temurmaliq IBRAGIMOV,
Osiyo xalqaro universiteti magistranti

BuxDU dotsenti, 3pB H.Turdiyev taqrizi asosida

QUALITATIVE ANALYSIS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT AND THEIR APPLICATIONS IN APPLIED MODELS

Annotation

This article investigates the qualitative analysis of systems of differential equations with piecewise continuous argument and their relationship with applied models. The study considers the Cauchy problem for a nonhomogeneous two-variable differential system involving the integer part of the argument. In such systems, the derivatives of the unknown functions depend not only on the current state but also on the values at previous integer time moments. Therefore, these systems appear as interconnected models of continuous and discrete dynamics. In the article, on each interval $[n, n + 1)$, the system is solved in the form of ordinary linear differential equations, and the local solutions are connected at the nodal points by means of continuity conditions. As a result, recurrence relations for the given differential system are derived, and a method for constructing the general solution is presented. The obtained results are distinguished by their applicability to the modelling of delayed and discretely affected processes arising in biological populations, economic processes, electrical circuits, and control systems.

Keywords: system of differential equations with piecewise continuous argument, Cauchy problem, qualitative analysis, recurrence relation, nodal values, continuous and discrete dynamics, delayed effect.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЯХ

Аннотация

В данной статье исследуется качественный анализ систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывным аргументом и их связь с прикладными моделями. В работе рассматривается задача Коши для неоднородной дифференциальной системы с двумя неизвестными функциями, содержащей целую часть аргумента. В таких системах производные неизвестных функций зависят не только от текущего состояния, но и от значений в предыдущие целочисленные моменты времени. Поэтому данные системы выступают как взаимосвязанные модели непрерывной и дискретной динамики. В статье на каждом интервале $[n, n + 1)$ система решается в виде обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, а локальные решения связываются в узловых точках с помощью условий непрерывности. В результате получены рекуррентные соотношения для рассматриваемой дифференциальной системы и показан способ построения общего решения. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании процессов с запаздывающим и дискретным воздействием, встречающихся в динамике биологических популяций, экономических процессах, электрических цепях и системах управления.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывным аргументом, задача Коши, качественный анализ, рекуррентное соотношение, узловые значения, непрерывная и дискретная динамика, запаздывающее воздействие.

BO'LAKLI UZLUKSIZ ARGUMENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARINING SIFAT TAHLILI VA ULARNING AMALIY MODELLARDAGI TADBIQLARI

Annotatsiya

Ushbu maqolada bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar sistemalarining sifat tahlili va ularning amaliy modellar bilan bog'liqligi o'rganiladi. Tadqiqotda argumentning butun qismi qatnashgan ikki o'zgaruvchili bir jinsli bo'lmagan differensial sistema uchun Koshi masalasi qaratiladi. Bunday sistemalarda noma'lum funksiyalarning hosilalari nafaqat joriy holatga, balki oldingi butun vaqt momentlaridagi qiymatlarga ham bog'liq bo'ladi. Shu sababli ular uzluksiz va diskret dinamikaning o'zaro bog'langan modeli sifatida namoyon bo'ladi. Maqolada har bir $[n, n + 1)$ oraliqda sistema oddiy chiziqli differensial tenglamalar ko'rinishida yechilib, tugun nuqtalarda uzluksizlik shartlari yordamida lokal yechimlar o'zaro bog'lanadi. Natijada berilgan differensial sistema uchun rekurrent munosabatlar hosil qilinadi va umumiy yechimning qurilish usuli ko'rsatiladi. Olingan natijalar biologik populyatsiyalar, iqtisodiy jarayonlar, elektr zanjirlari va boshqaruv tizimlarida uchraydigan kechikuvchi hamda diskret ta'sirli jarayonlarni modellashtirishda qo'llanilishi bilan ajralib turadi.

Kalit so'zlar. Bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar sistemasi, Koshi masalasi, sifat tahlili, rekurrent munosabat, tugun qiymatlar, uzluksiz va diskret dinamika, kechikuvchi ta'sir.

Kirish. Tabiat va jamiyatda kuzatiladigan ko'plab jarayonlar vaqt davomida o'zgarib boruvchi o'zaro bog'langan kattaliklar orqali tavsiflanadi. Bunday jarayonlarni matematik jihatdan ifodalashda oddiy differensial tenglamalar sistemalari muhim jihatlardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, bir nechta parametrlarning bir vaqtning o'zida o'zgarishini o'rganishda differensial sistemalar real jarayonning ichki dinamikasini aniqlash imkonini beradi. Shu sababli differensial tenglamalar sistemalari zamonaviy matematik modellashirishning asosiy yo'nalishlaridan biri sifatida qaraladi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Differensial tenglamalar nazariyasining dastlabki rivojlanishi klassik mexanika masalalarini tadqiq qilish bilan bog'liq bo'lib, A. Puankare tomonidan differensial sistemalarning geometrik xossalari tadqiq qilish asosida faza tasviri va traektoriyalar nazariyasi rivojlantirildi. Puankarening ilmiy ishlari keyinchalik sifat nazariyasining rivojlanishiga asos bo'ldi. A. M. Lyapunov differensial tenglamalar sistemalarining turg'unligini tadqiq qilish uchun maxsus funksiyalar usulini ishlab chiqdi. Lyapunovning to'g'ri usuli hozirgi kunda ham murakkab dinamik sistemalarning turg'unligini tekshirishda eng samarali metodlardan biri hisoblanadi. Ushbu usul yordamida mexanik, elektr va biologik sistemalarning asimptotik turg'unligi tadqiq qilinadi. Oddiy differensial tenglamalar sistemalarining sifat xossalari bag'ishlangan tadqiqotlarda E. A. Koddington va N. Levinsonning ishlari alohida ahamiyatga ega. Ularning tadqiqotlarida yechimlarning mavjudligi va yagonaligi, integral egri chiziqlar hamda sistemalarning parametrlariga bog'liq xossalari batafsil o'rganilgan. Shuningdek, L. Perko va J. Hale tomonidan dinamik sistemalar nazariyasi va bifurkatsiya masalalari bo'yicha muhim ilmiy natijalar olingan. Zamonaviy avtomatik boshqaruv nazariyasida differensial sistemalar elektr va elektron qurilmalarning barqarorligini tekshirishda asosiy matematik apparat sifatida qo'llaniladi. Biologik modellashirish sohasida differensial tenglamalar sistemalari populyatsiyalar dinamikasini tavsiflashda keng qo'llanilgan. A. Lotka va V. Volterra tomonidan taklif etilgan yirtqich o'lja modeli biologik sistemalarning klassik matematik modeli hisoblanadi. Ushbu model yordamida populyatsiyalar sonining vaqt bo'yicha o'zgarishi, biologik muvozanat hamda davriy tebranishlar o'rganiladi.

So'nggi yillarda bo'lakli o'zgaras argumentli differensial tenglamalar sistemalariga bag'ishlangan ilmiy tadqiqotlar soni ortib bormoqda. Ushbu yo'nalishdagi dastlabki tadqiqotlar S. Shah va J. Wiener ishlari bilan bog'liq bo'lib, ularda argumentning butun qismi qatnashgan differensial tenglamalarning asosiy xossalari o'rganilgan. Keyinchalik M. U. Akhmet tomonidan bo'lakli argumentli differensial tenglamalarning turg'unligi, davriy yechimlari hamda diskret analoglari batafsil tadqiq etildi. Bo'lakli o'zgaras argumentli sistemalar uzluksiz va diskret dinamikaning uyg'unlashgan modeli sifatida real jarayonlarni tavsiflashda samarali qo'llanilmoqda. Bunday sistemalarda joriy holatning oldingi vaqt momentlaridagi qiymatlarga bog'liqligi hisobga olinadi. Shu sababli ular biologik populyatsiyalar, iqtisodiy modellar, avtomatik boshqaruv tizimlari va raqamli signal uzatish masalalarini tadqiq qilishda muhim matematik apparat hisoblanadi.

Tahlil qilingan ilmiy adabiyotlar shuni ko'rsatadiki, oddiy differensial tenglamalar sistemalarining sifat xossalari o'rganish zamonaviy matematik modellashirishning dolzarb

$$x'_{nj}(t) = ax_{nj}(t) + by_{nj}(n) + f_{nj}(n) \quad (4)$$

$$y'_{nj}(t) = cy_{nj}(t) + dx_{nj}(n) + g_{nj}(n) \quad (5)$$

$$x_{nj}(t) = e^{a(t-n)}x_{nj}(n) + \frac{b}{a}(e^{a(t-n)} - 1)y_{nj}(n) + \frac{e^{a(t-n)} - 1}{a}f_{nj}(n) \quad (6)$$

$$y_{nj}(t) = e^{c(t-n)}y_{nj}(n) + \frac{d}{c}(e^{c(t-n)} - 1)x_{nj}(n) + \frac{e^{c(t-n)} - 1}{c}g_{nj}(n) \quad (7)$$

$t = n + 1$ da (6)-(7) tengliklardan tugun nuqtalar uchun rekurrent munosabatlar hosil qilamiz bunda:

$$E_j(t) = \frac{b}{a}(e^{at} - 1), \quad M_j(t) = \frac{d}{c}(e^{ct} - 1),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad A_0 = 1, B_0 = 0, C_0 = 0, D_0 = 1.$$

$$A_{m+1} = e^a A_m + E_j(1)C_m, \quad B_{m+1} = e^a B_m + E_j(1)D_m,$$

yo'nalishlaridan biri bo'lib qolmoqda. Ayniqsa, bir jinsli bo'lmagan bo'lakli uzluksiz argumentli differensial sistemalarning amaliy jarayonlarni tavsiflashdagi imkoniyatlari hali ham yetarlicha tadqiq etishni talab qiladi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqot obyekti sifatida quyidagi bo'lakli o'zgaras argumentli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi qaraladi:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by([t]) + f([t]) \\ y'(t) = cy(t) + dx([t]) + g([t]) \end{cases} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

Ushbu sistema uzluksiz va diskret dinamikaning birlashgan modeli bo'lib, unda joriy holat $x(t), y(t)$ bilan birga oldingi butun vaqt momentidagi $x([t]), y([t])$ qiymatlar ham hisobga olinadi.

$a - x(t)$ ning ichki o'zgarish tezligi, ya'ni tizimning o'z-o'zini rivojlantirish yoki so'nish darajasi.

$b - y(t)$ ning oldingi holati $x(t)$ ga ta'sir kuchi (kechikuvchi o'zaro bog'lanish).

$c - y(t)$ ning ichki dinamikasi.

$d - x(t)$ ning oldingi holati $y(t)$ ga ta'siri.

$f([t]) - x(t)$ tizimiga tashqi ta'sir (kuch, signal, iqtisodiy risk).

$g([t]) - y(t)$ tizimiga tashqi diskret ta'sir.

Koshi masalasi berilgan boshlang'ich shartlar asosida sistemaning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini aniqlashga xizmat qiladi hamda boshlang'ich holatini belgilaydi va undan keyingi barcha dinamik jarayonlar shu nuqtadan boshlanishini anglatadi.

Fizika nuqtai nazaridan: Bu sistema inertsia va kechikish mavjud bo'lgan dinamik tizimlarni ifodalaydi. Masalan:

-jism harakatida oldingi tezlikning hozirgi harakatga ta'siri;

-elektr zanjirlarda signalning kechikib ta'sir qilishi.

Biologiya:

-populyatsiyaning avvalgi davrdagi soni hozirgi o'sishga ta'sir qiladi;

-yirtqich-o'lja tizimida kechikuvchi reproduksiya.

Iqtisodiyot:

-talab va taklifning oldingi davr qiymatlariga bog'liqligi;

-bozorning kechikuvchi reaksiyasi;

-iqtisodiy risklar $f([t]), g([t])$ tizimga bosqichma-bosqich ta'sir qiladi;

-narx dinamikasi "xotirali bozor" modelini hosil qiladi.

Yuqoridagi sistema va unga qo'yilgan Koshi masalasidan shuni ko'rish mumkinki hozirgi holat faqat joriy qiymatlarga emas, balki o'tgan holatlarga ham bog'liqligi, sistemada xotira effekti mavjudligi hamda tashqi ta'sirlar diskret shaklda ta'sir etadi.

Endi yuqoridagi qo'yilgan (1)-(2) masalani yechimini topish bilan shug'ullanamiz:

$$n \leq t < n + 1 \text{ oraliqda } [t] = n, x_{nj}([t]) = x_{nj}(n).$$

$$\begin{cases} x'_{nj}(t) = ax_{nj}(t) + by_{nj}(n) + f_{nj}(n) \\ y'_{nj}(t) = cy_{nj}(t) + dx_{nj}(n) + g_{nj}(n) \end{cases} \quad (3)$$

$$x_{0j}(0) = x_0, y_{0j}(0) = y_0 \quad (3')$$

Sistemadagi tenglamalarni har biri birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama bo'lib ularni alohida ishlaymiz:

$$C_{m+1} = M_j(1)A_m + e^c C_m, \quad D_{m+1} = M_j(1)B_m + e^c D_m.$$

$$x_{nj}(n+1) = e^a x_{nj}(n) + E_j(1)y_{nj}(n) + \frac{E_j(1)}{b} f_{nj}(n) \quad (8)$$

$$y_{nj}(t) = e^c y_{nj}(n) + M_j(1)x_{nj}(n) + \frac{M_j(1)}{d} g_{nj}(n) \quad (9)$$

$x_{nj}(n+1) = x_{n+1j}(n+1)$ uzluksizlik shartidan foydalanib quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$x_{nj}(n) = A_n x_{0j}(0) + B_n y_{0j}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{E_j(1)}{b} f_{kj}(k) A_{n-k-1} + \frac{M_j(1)}{d} g_{kj}(k) B_{n-k-1} \right] \quad (10)$$

$$y_{nj}(n) = C_n x_{0j}(0) + D_n y_{0j}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{E_j(1)}{b} f_{kj}(k) C_{n-k-1} + \frac{M_j(1)}{d} g_{kj}(k) D_{n-k-1} \right] \quad (11)$$

(10), (11) ni mos ravishda (6), (7) qo'yib (1)-(2) masalaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} x_{nj}(t) = & (e^{a(t-n)} A_n + E_j(t-n) C_n) x_{0j}(0) + (e^{a(t-n)} B_n + E_j(t-n) D_n) y_{0j}(0) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} (e^{a(t-n)} A_{n-k-1} + E_j(t-n) C_{n-k-1}) \frac{E_j(1)}{b} f_{kj}(k) + \sum_{k=0}^{n-1} (e^{a(t-n)} B_{n-k-1} + E_j(t-n) D_{n-k-1}) \frac{M_j(1)}{d} g_{kj}(k) \\ & + \frac{E_j(t-n)}{b} f_{nj}(n) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_{nj}(t) = & (e^{c(t-n)} C_n + M_j(t-n) A_n) x_{0j}(0) + (e^{c(t-n)} D_n + M_j(t-n) B_n) y_{0j}(0) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} (e^{c(t-n)} C_{n-k-1} + M_j(t-n) A_{n-k-1}) \frac{E_j(1)}{b} f_{kj}(k) + \sum_{k=0}^{n-1} (e^{c(t-n)} D_{n-k-1} + M_j(t-n) B_{n-k-1}) \frac{M_j(1)}{d} g_{kj}(k) \\ & + \frac{M_j(t-n)}{d} g_{nj}(n) \end{aligned} \quad (13)$$

Tahlil va natijalar. Tadqiqotda bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar sistemasining sifat xossalari va amaliy modellar bilan bog'liqligi o'rganildi. Qaralgan sistema argumentning butun qismi orqali berilganligi sababli, uning dinamikasi har bir $[n, n+1)$ oraliqda alohida tahlil qilinadi. Agar $t \in [n, n+1)$ da $[t] = n$ bo'ladi. Natijada sistemada qatnashuvchi $x([t])$, $y([t])$, $f([t])$ va $g([t])$ hadlari mos ravishda $x_{nj}(n)$, $y_{nj}(n)$, $f_{nj}(n)$ va $g_{nj}(n)$ qiymatlariga teng bo'ladi. Shu asosda berilgan differensial sistema har bir $[n, n+1)$ oraliqda birinchi

tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu holat yechimni bosqichma-bosqich qurish imkonini beradi.

Xulosa va takliflar. Maqolada bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar sistemalarining sifat tahlili va ularning amaliy modellar bilan bog'liqligi o'rganildi. Qaralgan sistema har bir $[n, n+1)$ oraliqda oddiy chiziqli differensial tenglama ko'rinishiga kelishi, tugun nuqtalarda esa rekurrent munosabatlar orqali ifodalanishi ko'rsatildi. Bu esa bo'lakli argumentli sistemalarning uzluksiz va diskret dinamika orasidagi bog'lovchi model ekanligini tasdiqlaydi.

ADABIYOTLAR

1. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892.
2. A. M. Lyapunov, The General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, London, 1992.
3. E. A. Koddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
4. J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, New York, 1969.
5. L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 2001.
6. A. J. Lotka, Elements of Physical Biology, Williams & Wilkins, Baltimore, 1925.
7. V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
8. S. M. Shah, J. Wiener, Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 6 (1983) 671–703.
9. K. L. Cooke, J. Wiener, Retarded differential equations with piecewise constant delays, Journal of Mathematical Analysis and Applications 99 (1984) 265–297.
10. A. R. Aftabizadeh, J. Wiener, J. M. Xu, Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument, Proceedings of the American Mathematical Society 99 (1987) 673–679.
11. J. Wiener, A. R. Aftabizadeh, Differential equations alternately of retarded and advanced type, Journal of Mathematical Analysis and Applications 129 (1988) 243–255.
12. A. R. Aftabizadeh, J. Wiener, Oscillatory and periodic solutions for systems of two first order linear differential equations with piecewise constant argument, Applicable Analysis 26 (1988) 327–333.
13. J. Wiener, Generalized Solutions of Functional Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1993.
14. G. Papaschinopoulos, Linearisation near the integral manifold for a system of differential equations with piecewise constant argument, Journal of Mathematical Analysis and Applications 215 (1997) 317–333.
15. M. U. Akhmet, Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 66 (2007) 367–383.
16. M. U. Akhmet, Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 2 (2008) 456–467.
17. H. Bereketoglu, G. Seyhan, A. Ogun, Advanced impulsive differential equations with piecewise constant arguments, Mathematical Modelling and Analysis 15(2) (2010) 175–187.