O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
O'ZBEKISTON MATEMATIKA JAMIYATI

MATEMATIKA INSTITUTI BYULLETENI

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

BULLETIN OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS

2018
1

ISSN: 2181-9483
http://mib.mathinst.uz

Tahririyat

So‘z boshi

Hurmatli hamkasblar!

Mazkur yilda O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi, V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti hamda O‘zbekiston Matematika Jamiyati muassisligida "Matematika instituti byulleteni"elektron jurnali ta’sis etildi. Jurnal bir yilda 6 ta son ko‘rinishida chop etilishi rejalashtirilgan. Jurnalning vebsayti (www.mib.mathinst.uz) rasman ro‘yxatdan o‘tkazilgan bo‘lib, jurnal uchun ISSN (2181-9483) ham olindi. Shu yilning o‘zida O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya Komissiyasining ilmiy jurnallar ro‘yxatiga qo‘shilish borasida maqsadli harakatlar amalga oshirilmoqda.

Jurnalning o‘ziga xos jihatlaridan biri ilmiy maqolalarning 3 tilda (O‘zbek, rus va ingliz) chop etish mumkin. Maqola hajmiga hech qanday cheklov qo‘yilmagan. Jurnalda ma’lum bir yo‘nalishlarda tahliliy maqolalar chop etish imkoni ham bor. Respublikamizda o‘tkaziladigan ilmiy konferensiya materiallaridan saralangan maqolalarni maxsus son ko‘rinishida chop etish imkoniyati ham ko‘plab konferensiya tashkilotchilarida qiziqish uyg‘otadi degan fikrdamiz.

Bundan tashqari, "O‘zbek Matematika Jurnali"ning (http://uzmj.mathinst.uz) bu yildan boshlab faqat ingliz tilidagi ilmiy maqolalarni chop etishga ixtisoslashgani mamlakatimizdagi tadqiqotchilarga ma’lum bir noqulayliklar keltirishini hisobga olib ham muqobil ravishda bu jurnal ta’sis etildi.

Kelgusida bu elektron jurnalni ham xalqaro maydonga chiqarishni reja qilganmiz.

Bosh muharrir

Предисловие

Уважаемые коллеги!

В этом году учрежден электронный журнал "Бюллетень института математики". Учредителями данного журнала являются Институт математики имени В.И.Романовского, Академия наук Республики Узбекистан и Математическое Общество Узбекистана. Планируется ежегодно издавать 6 выпусков журнала. Вебсайт журнала (www.mib.mathinst.uz) официально зарегистрирован и для данного журнала получен ISSN (2181-9483). В этом же году планируется включить журнал в список научных журналов ВАК Республики Узбекистан.

Журнал принимает научные и обзорные статьи по математики на трех (узбекском, русском и английском) языках, ограничений на объем статей не предусмотрен. Кроме того, в данном журнале предусмотрено публикование избранных статей научных конференций.

Журнал "Бюллетень института математики"является альтернативой журналу "Uzbek Mathematical Journal"(http://uzmj.mathinst.uz), который публикует научные статьи на английском языке. В скором будущем планируется вывести журнал "Бюллетень института математики"на международный уровень.

Главный редактор

Foreword

Dear Colleagues!

Since this year the new electronic journal "Bulletin of the Institute of Mathematics"is established by V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics and Mathematical Society of Uzbekistan. We are planning to publish six issues per year. Webpage of this journal (www.mib.mathinst.uz) is officially registered and has ISSN (2181-9483). This year we are planning to include the journal to the official list of scientific journals of the Supreme Attestation Committee of the Republic of Uzbekistan.

The journal accept mathematical articles and surveys in three languages: Uzbek, Russian and English. There is no restriction to the size of articles. In addition, the special issues of selected articles of scientific conferences can be published.

This electronic journal is alternative to the "Uzbek Mathematical Journal"(http://uzmj.mathinst.uz), which is publishing articles only in English.

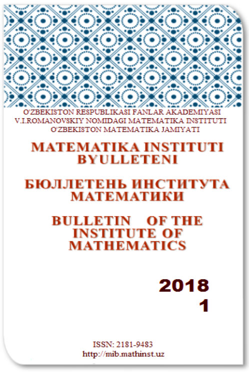
In nearest future we are planning to make up this journal to international level.

Editor in Chief

MUNDARIJA

CONTENT

СОДЕРЖАНИЕ



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.1-8

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.1-8

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.1-8

УДК 517.956.6 (MSC 2010: 35M10,35M20)

Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода в многомерном пространстве

Джамалов С.З

Ko‘p o‘lchovli fazoda ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masala haqida
Ushbu maqolada, ko‘p o‘lchovli fazoda ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining yagonaligi, mavjudligi va yechimning silliqligi Sobolev fazolarida o‘rganilgan.

On a nonlocal boundary value problem for the second order mixed-type equation of the second kind in a many-dimensional space.
In the present work a uniqueness, existence and smoothness of the solution of nonlocal boundary value problem for the second order mixed-type equation of the second kind are proved in certain Sobolev spaces.

1. Введение и постановка задачи.

Пусть $\Omega = \prod\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$, $n-$мерный параллелепипед Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $(x_1, ..., x_n)$, $0 < \alpha_i < x_i < \beta_i < +\infty$, $\forall i = \overline{1,n}.$
Обозначим через
$Q = \Omega \times (0,T) = \{(x,t); x \in \Omega, 0 < t < T < +\infty\}$ область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial\Omega \times (0,T)$.
В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Lu = K(t)\,u_{tt} - \left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j} + a(x,t)u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t), \tag{1}$$

здесь $K(0) \le 0 \le K(T)$,$\forall x \in \overline{\Omega}$. Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n и будем предполагать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественно значные и достаточно гладкие функции.
Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [2, 13].
Предположим:
$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ji}(\beta_k), \forall k = \overline{1,n};$ $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.
Кроме того, пусть выполнено одно из условий для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{\Omega}.$
(a). $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2$, где $a_0 - const > 0$,
(b). $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le a_1|\xi|^2$, где $a_1 - const \; < 0$.
Через $W_2^l(Q)$ $(2 \le l$-натуральное число) обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(,)_l$ и нормой $\|\cdot\|_{W_2^l(Q)}$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ -пространство квадратично суммируемых функций.
При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ:

$$\forall u, v > 0,\ \forall\sigma > 0, \qquad u \cdot v \le \frac{\sigma u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}.$$

Для производных порядка p удобно принять обозначение: $D_{z}^{p}u = \frac{\partial^{p} u}{\partial z^{p}}$; при этом $D_{z}^{0} u = u$.

Нелокальная краевая задача. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_{2}^{m+2}(Q)$, $(m = 0, 1, 2, ...)$ удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\gamma \cdot u\,(x,0) = u\,(x,T), \tag{2}$$

$$D_{x_i}^{p}\, u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^{p}\, u|_{x_i=\beta_i}, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$; где $D_{x_i}^{p} u = \frac{\partial^{p} u}{\partial x_i^{p}}$, $D_{x_i}^{0} u = u$, γ -некоторое постоянное число, отличное от нуля, значение которого будет уточнено ниже.

Различные нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода (1), были исследованы функциональными методами в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17], а для уравнения смешанного типа как первого так и второго рода задачи (2),(3) предложена и изучена в работах автора [7, 8].

В данной работе в случае $K(0) \le 0 \le K(T)$ для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1) в пространстве, изучается однозначная разрешимость и гладкость решения нелокальной краевой задачи (2),(3) с постоянными коэффициентами в многомерных пространствах Соболева $W_{2}^{m+2}(Q)$, $(0 \le m$- целое число).

Сначала рассмотрим случай $m = 0$.

2. Единственность решения задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнение (1), кроме того, пусть* $2a(x,t) - K_t(t) + \lambda\, K(t) \ge \delta_1 > 0$, $\lambda\, c(x,t) - c_t(x,t) \ge \delta_2 > 0$, *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\,\gamma\,| > 1$ *в случае a) и* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\,\gamma\,| < 1$ *в случае b)*, $c(x,0) \le c(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$, *если существует решение задачи (1)-(3) в пространстве* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно и для него справедливо следующее неравенство*:

$$\|u\|_1 \le c_1 \|f\|_0.$$

Через c_i- здесь и далее обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Доказательство.

Докажем единственность решение задачи (1)-(3)с помощью интеграла энергии.

Пусть существует решение задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$.

Рассмотрим тождество:

$$2\,(Lu, \rho(t)u_t)_0 = 2\,(f, \rho(t)u_t)_0. \tag{4}$$

где $\rho(t) = \exp(-\lambda t)$, $\lambda - const$ такое что,$\lambda > 0$.

В силу условий теоремы 1, учитывая краевые условия (2),(3) интегрированием по частям тождество (4) легко получить следующее неравенство

$$2\int\limits_{Q} Lu \cdot \rho(t) \cdot u_t\, d\,x d\,t \;\ge\; \int\limits_{Q} \rho(t)\, \left\{(2a - K_t + \lambda\, K) \cdot u_t^2 + \right.$$

$$\left. + \lambda\, a_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + (\lambda\, c - c_t) \cdot u^2 \right\}\, d\,x\,d\,t +$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \rho(t)\, \left\{K u_{t}^{2}\, \nu_t - 2a_{ij} u_{x_i}\, u_t\, \nu_{x_i} + a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, \nu_t + c \cdot u^2\, \nu_t\right\} ds, \tag{5}$$

где $\nu = (\nu_t = \cos(\nu,t); \nu_{x_i} = \cos(\nu, x_i); \forall i = \overline{1,n})-$ единичный вектор внешней нормали к границе ∂Q .

Условия теоремы 1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q и по границе ∂Q. Так как $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (2),(3), то для граничного интеграла имеем

$$\int\limits_{\partial Q} \exp(-\lambda\, t)\, \left\{K\, u_{t}^{2}\, \nu_t - 2\, a_{ij} u_{x_i}\, u_t\, \nu_{x_i} + a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, \nu_t + c\, u^2\, \nu_t\right\}\; d\,s \quad =$$

$$\int\limits_{\Omega} \{[K(T) e^{-\lambda t}\gamma^2 - K(0)]\; u_t^2(x,0) + [e^{-\lambda t}\gamma^2 - 1] u_{x_i}^2(x,0) +$$

$$+[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2 - c(x,0)]u^2(x,0)\}dx -$$

$$-2\cdot\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}...\int\limits_{\alpha_{j-1}}^{\beta_{j-1}}\int\limits_{\alpha_{j+1}}^{\beta_{j+1}}...\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n}\int\limits_0^T e^{-\lambda t}\cdot[u_{x_i}(\overline{x_{\beta_j}},t)\,u_t(\overline{x_{\beta_j}},t) - u_{x_i}(\overline{x_{\alpha_j}},t)\,u_t(\overline{x_{\alpha_j}},t)]d\overline{x}\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} J_i \geq \int\limits_{\Omega}\{[K(T)e^{-\lambda t}\gamma^2 - K(0)]\; u_t^2(x,0) +$$

$$+[c(x,T)e^{-\lambda t}\gamma^2 - c(x,0)]u^2(x,0)\}dx \geq 0. \tag{6}$$

где $\overline{x_{\alpha_j}} = (x_1,...,x_{j-1},\,\alpha_j,x_{j+1},...x_n)$, $\quad d\overline{x} = dx_1dx_2...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n$,
$J_i(i=1,2,3,4)-$ граничные интегралы. Учитывая условия теоремы 1,краевых условий (2),(3) и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$, получим, что граничные интегралы J_2, J_4- равны нулю а граничные интегралы $J_1, J_3 \geq 0$. Условия теоремы 1 обеспечивают не отрицательность интеграла по области Q. Отбрасывая положительные граничные интегралы в тождестве (5) и учитывая вышесказанное, из тождества (5) получим следующее неравенство:

$$2\int\limits_{\partial Q} Lu\cdot\rho(t)\cdot u_t dxdt \;\geq\; \int\limits_{Q}\rho(t)\{(2a+K_t+\lambda\,K)\cdot u_t^2 + \lambda a_\kappa\; u_x^2 +$$

$$+(\lambda\,c - c_t)\cdot u^2\}\;dxdt, \tag{7}$$

где $a_k = a_0$ в случае a), $a_k = a_1$ в случае b).
Применяя неравенства Коши с σ, к неравенству (7) получим необходимую первую априорную оценку,

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1\,\|f\|^2_{L_2(Q)}\,, \tag{8}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$. Пусть существует $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ два решения задачи (1)-(3)из $W_2^2(Q)$, тогда для $u = u_1 - u_2$ из неравенства (8)получим $\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq 0$, из которой следует единственность решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$.
Теорема-1 доказана. □

3.Уравнения составного типа с малым параметром.

Для доказательства существования решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$ используем метод "ε-регуляризации"в сочетании с методом Галеркина [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для уравнения составного типа с малым параметром.

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon + Lu_\varepsilon = f(x,t), \tag{9}$$

$$\gamma D_t^q\,u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q\,u_\varepsilon|_{t=T}, \qquad q = 0,1,2, \tag{10}$$

$$D_{x_i}^p\,u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p\,u|_{x_i=\beta_i}, \tag{11}$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ $-$оператор Лапласа, $D_{\,z}^{\,q} u = \frac{\partial^{\,q} u}{\partial\, z^{\,q}}$, $q = 0,1,2;$ $D_{\,z}^{\,0}\,u = u$, ε-достаточно малое положительное число, $\gamma - const \;\; \neq 0$, такое, что $|\,\gamma\,| > 1$ в случае a), $|\,\gamma\,| < 1$ в случае b).
Ниже используем уравнение составного типа с малым параметром (9) в качестве ε-регуляризирующего уравнения для уравнения (1) [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9].
В дальнейшим через W всюду ниже будем обозначать класс функций $u_\varepsilon(x,t) \in W_{\,2}^{\,2}(Q)$, $\frac{\partial}{\partial\, t}\Delta u_\varepsilon\, \in L_2(Q)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (10),(11).

Определение. Решением задачи (9)-(11) будем называть функцию $u_\varepsilon(x,t) \in W$, удовлетворяющую уравнению (9).

Теорема 2. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть* $2a - |K_t| + \lambda\, \geq \delta_{\,1}\;\; > 0$, $\lambda\; c - c_t \geq \delta_2 > 0$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\,\gamma\,| > 1$ *в случае a),* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\,\gamma\,| < 1$ *в случае b),* $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$, $a\;(\alpha_i,t) = a\,(\beta_i,t)$. *Тогда для любой функции* $f, f_t \in L_2(Q)$, *такой, что* $\gamma\cdot f(x,0) = f(x,T)$, *существует единственное решение задачи (9)-(11) и для нее справедливы следующие оценки*

$$I).\quad \varepsilon(\,\|u_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon tx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq c_2\,\|f\|_0^2\,,$$

$$II). \quad \varepsilon\left\|\frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_3\left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right].$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 осуществляется поэтапно, используя метод Галеркина с выбором специальной базис - функции. Доказательство неравенства I) проводится так же, как и доказательство теоремы 1, из которого следуют единственность решения задачи (9)-(11) и существование слабого обобщенного решения задачи (9)-(11)[8, 9, 14].

Сначала докажем первую априорную оценку для задачи (9)-(11) методом Галеркина. Рассмотрим следующие спектральные задачи:
Пусть $\phi_j(x,t)-$собственные функции следующей задачи

$$-\Delta\phi_j = \frac{\partial^2\phi_j}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x_i^2} = \nu_j^2\phi_j; \tag{12}$$

$$D_t^p\,\phi_j|_{t=0} = D_t^p\,\phi_j|_{t=T}\,,\ p=0,1; \tag{13}$$

$$D_{x_i}^p\,\phi_j|_{x=0} = D_{x_i}^p\,\phi_j|_{x=\ell}. \tag{14}$$

Из общей теории линейных самосопряженных эллиптических операторов известно, что все $\{\,\phi_j(x,t)\,\}-$ собственные функции задачи (12)-(14) образуют фундаментальную систему в $W_2^2(Q)$, ортогональную в $L_2(Q)$ [1, 14, 18].
Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$\exp[\frac{-1}{2}\lambda t]\omega_{jt} = \phi_j \tag{15}$$

$$\gamma\cdot\omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{16}$$

где, $\gamma - const \quad \neq 0$, такое, что $|\,\gamma\,| > 1$ в случае a), $|\,\gamma\,| < 1$ в случае b).
Очевидно, что задача (15),(16) однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\ell^{-1}\phi_j = \omega_j = \int_0^t \exp(\frac{\lambda\tau}{2})\phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^T \exp\,(\frac{\lambda t}{2})\,\phi_j dt. \tag{17}$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j\omega_j = 0$ для какого-нибудь набора есть последовательность $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ функций, то, действуя на эту сумму оператором ℓ, имеем $\sum\limits_{j=1}^{N} c_j\ell\omega_j = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\phi_j = 0$, а отсюда следует, что для всех $j = \overline{1,N}$ коэффициенты $c_j = 0$. Отметим, что из построения функции $\phi_j(x,t)$ вытекают следующие условия на функции $\omega_j(x,t)$.

$$\gamma D_t^q\,\omega_i|_{t=0} = D_t^q\,\omega_i|_{t=T}, \qquad q = 0,1,2 \tag{18}$$

$$D_{x_i}^p\,\omega_i|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p\,\omega_i|_{x_i=\beta_i}, \quad p=0,1. \tag{19}$$

Теперь приближенное решение задачи (9)-(11) ищем в виде $w = u_\varepsilon^N = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\omega_j$, где коэффициенты c_j для любого $j = \overline{1,N}$ определяются как решение линейной алгебраической системы

$$\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N\cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}}\,\phi_j\,dxdt \;\;=\;\; \int_Q f\cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}}\,\phi_j\,dxdt \tag{20}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (20). Умножая каждое уравнение из (20) на коэффициент $2c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, учитывая задачи (15)-(16), из (20) получим следующее тождество

$$\int_Q L_\varepsilon w\cdot e^{-\lambda t}\cdot\; w_t dxdt = \int_Q f\cdot e^{-\lambda t}\cdot w_t dxdt \tag{21}$$

из которого, в силу условий теоремы 2, интегрированием тождества (21) получим для приближенного решения задачи (9)-(11) оценки I), т.е.

$$\varepsilon\,(\left\|u^N_{\varepsilon tt}\right\|_0^2+\left\|u^N_{\varepsilon tx}\right\|_0^2)+\left\|u^N_{\varepsilon}\right\|_1^2\leq c_2\left\|f\right\|_0^2. \tag{22}$$

Отсюда вытекает разрешимость алгебраической системы (20), ибо для нее имеет место теорема единственности решения. В частности, из оценки (22) получим существование слабого обобщенного решения задачи (9)-(11) [8, 9, 14].

Теперь докажем вторую априорную оценку II.
Благодаря задаче (12)-(16), из тождества (20) получим

$$-\frac{1}{\nu_j^2}\int\limits_Q L_\varepsilon w\; e^{\frac{-\lambda t}{2}}\;\;\Delta\ell\omega_j\,dx\,dt\;=\;-\frac{1}{\nu_j^2}\int\limits_Q f\;e^{\frac{-\lambda t}{2}}\,\Delta\ell\omega_j\;\;dx\,dt\,. \tag{23}$$

где $\Delta\,\ell\,\omega_j=\exp\;\;[\;\frac{-\lambda\,t}{2}](\Delta\,\omega_{j\,t}-\lambda\,\omega_{j\,tt}+\frac{\lambda}{2}\,\omega_{j\,xx}-\frac{\lambda^2}{4}\omega_{j\,t}).$
Умножая каждое уравнение из (23) на $2\nu_j^2 c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, учитывая условия (18),(19), из (23) получим следующее тождество

$$-2\int\limits_Q L_\varepsilon w\;\;\cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}}\;\cdot\Delta\,\ell\,w\,dxdt\;\;\;=\;-2\int\limits_Q f\cdot\,e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot\Delta\,\ell\,w\;dxdt\;\;. \tag{24}$$

Интегрируя по частям (24) с учетом условия теоремы 2 и краевых условий (18),(19), получим следующее неравенство

$$c_3\cdot\left[\left\|f_t\right\|_0^2+\left\|f\right\|_0^2\right]\geq\varepsilon\left\|\frac{\partial\,\Delta w}{\partial\;t}\right\|_0^2+\int\limits_Q e^{-\lambda\cdot t}\,\{(\,2a-|K_t|+\lambda\,K\,)\,w_{\,tt}^{\,2}+$$

$$+(2a-|K_t|+\lambda\,K\,)w_{\,tx_i}^{\,2}+\lambda a_k\,(w_{\,x_ix_i}^{\,2}+w_{\,tx_i}^{\,2})\}\,dxdt\quad+\int\limits_{\partial Q}e^{-\lambda\cdot t}[(K\,w_{tt}^2-2a\,w_t\,w_{tt}+$$

$$+w_{x_ix_i}^2+2w_{x_ix_i}\,w_{tt}-w_{x_it}^2+Kw_{x_it}^2+2c\,w\,(w_{tt}+w_{x_ix_i}))\nu_t+$$

$$+(2K\,w_{tt}\,w_{x_it}-2w_{tt}\,w_{x_it}+2a\,w_t\,w_{x_it})\,\nu_{x_i}]ds-\sigma\,(\;\left\|w_{xx}\right\|_0^2+\left\|w_{xt}\right\|_0^2\,)\,-$$

$$-c(\sigma)\left\|u_{tt}\right\|_0^2-c_1\,(\,\left\|f\right\|_0^2)=\sum_{i=1}^{2}J_i, \tag{25}$$

где, J_1 – интегралы по области, J_2 - интегралы по границе. Выбирая коэффициенты $\lambda a_k-\sigma\geq\lambda_0>0$, $\delta_1-c(\sigma)>\delta_0>0$ и учитывая условие теоремы 2 и краевые условия (18),(19), получим, что $J_1>0$ и $J_2\geq 0$. Теперь из неравенства (25) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u^N_\varepsilon\right\|_0^2+\left\|u^N_\varepsilon\right\|_2^2\leq c_3\;\left[\left\|f\right\|_0^2+\left\|f_t\right\|_0^2\right]\;. \tag{26}$$

Следовательно, полученные оценки (22),(26) позволяют выполнить предельный переход по $N\to\infty$ и заключить, что некоторая под последовательность $\left\{u^{N_k}_\varepsilon\right\}$ сходится в силу единственности (теорема 1) в $L_2(Q)$ вместе с производными первого и второго порядка к искомому решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (9)-(11),обладающему свойствами, указанными в теореме 2 [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Для $u_\varepsilon(x,t)$ в силу (26) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\right\|_0^2+\left\|u_\varepsilon\right\|_2^2\leq c_3\;\;\left[\;\left\|f\right\|_0^2+\left\|f_t\right\|_0^2\right]\;. \tag{27}$$

Тем самым доказана теорема 2. □

4.Существование решения задачи

Теперь с помощью метода "ε-регуляризации"докажем разрешимость задачи (1)-(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^2(Q)$ существует и единственно.*

Доказательство. Единственность решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 1. Теперь докажем существование решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (9) с краевыми условиями (10),(11) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 2, то существует единственное решение задачи (9)-(11) при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы первая и вторая оценка. Отсюда следует, по известной теореме о слабой компактности [14, 18], что из множества функций $\{u_\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ можно извлечь слабо сходящуюся под последовательность функций в W такую, что $\{u_{\varepsilon_i}\} \to u$ при $\varepsilon_i \to 0$. Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ (1) почти всюду. В самом деле, так как последовательность $\{u_{\varepsilon_i}\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q)$ и последовательность $\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\varepsilon_i}\}, (\varepsilon > 0)$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, а оператор L - линейный, то имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\varepsilon_i} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\varepsilon_i}. \qquad (28)$$

Из тождества (28), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное решение задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$ [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. *Таким образом, теорема 3 доказана.* □

5.Гладкость решения задачи (1)-(3).

Теперь докажем более общий случай, когда $m \geq 1$. Всюду ниже для простоты предполагаем, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, кроме того, пусть,* $2(\alpha+mK_t)-|K_t|+\lambda K \geq \delta > 0$, $D_t^p K|_{t=0} = D_t^p K|_{t=T}$, $D_t^p a|_{t=0} = D_t^p a|_{t=T}$, $D_t^p c|_{t=0} = D_t^p c|_{t=T}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$, *такой, что* $f \in W_2^p(Q)$, $D_t^{p+1} f \in L_2(Q)$, $\gamma D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$, $(p = 0,1,2,3,...,m)$ *существует, притом единственное, решение задачи (1)-(3) из пространства* $W_2^{m+2}(Q)$, *где* $m = 1,2,3,...$

Доказательство. Из гладкости решения задачи (12)-(16) возникает следующее условие для приближенного решения задачи (9)-(11).

$w = u_\varepsilon^N \in C^\infty(\overline{Q})$.

$$\gamma D_t^q w|_{t=0} = D_t^q w|_{t=T}, \quad q = 0,1,2,...$$

$$D_{x_i}^p w|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p w|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0,1.$$

Учитывая условия теоремы 2 при $\varepsilon > 0$ и нелокальные условия при $t = 0$, $t = T$, из равенства

$$\left(^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot L_\varepsilon u_\varepsilon\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \left(-\varepsilon \cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial t} + e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot Lu_\varepsilon\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \left(e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot f(x,t)\right)\Big|_{t=0}^{t=T}$$

получим

$$\|\gamma \cdot u_{\varepsilon\, ttt}(x,0) - u_{\varepsilon\, ttt}(x,T)\|_0 \leq const.$$

Отсюда следует, что функция $\vartheta_\varepsilon(x,t) = u_{\varepsilon\, t}(x,t)$ принадлежит классу W и удовлетворяет следующему уравнению

$$P_\varepsilon \vartheta_\varepsilon = L_\varepsilon \vartheta_\varepsilon = f_t - a_t\, u_{\varepsilon\, t} - c_t\, u_\varepsilon = F_\varepsilon. \qquad (29)$$

Из теоремы 2 следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(Q)$, т.е.

$$\|F_\varepsilon\|_0^2 \leq c_4 \left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right].$$

Далее из условий теоремы 3 легко получить, что коэффициенты оператора P_ε $(\varepsilon > 0)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, отсюда на основании оценок I), II) и теоремы 2 для функции $\{\vartheta_\varepsilon\}$ получим аналогичные оценки

$$\varepsilon\left(\|\vartheta_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|\vartheta_{\varepsilon tx}\|_1^2\right) + \|\vartheta_\varepsilon\|_1^2 \leq c_5\left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right), \qquad (30)$$

$$\varepsilon \left\|\frac{\partial \Delta \vartheta_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2 + \|\vartheta_\varepsilon\|_2^2 \leq c_6 \left[\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\right]. \qquad (31)$$

Далее, функция $\{u_\varepsilon\}$ удовлетворяет параболическому уравнению с условиями (2),(3)

$$\Pi\, u_\varepsilon = u_{\varepsilon\, t} - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} u_{\varepsilon x_i}\right)_{x_j} = f + \varepsilon \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial t} - K(x,t)\, u_{\varepsilon\, tt} -$$

$$-(a - 1)\, u_{\varepsilon\, t} - c\, u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon, \qquad (32)$$

причем $\Phi_\varepsilon \in W_2^1(Q)$, а в силу вышедоказанного семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W_2^1(Q)$, т.е.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_1^2 \le c_7 \left[\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\right] \le c_7 \|f\|_2^2 . \tag{33}$$

Отсюда на основании априорных оценок для параболических уравнений [2, 14] и неравенства (33) получим

$$\| u_\varepsilon\|_3^2 \le c_8 \|f\|_2^2 . \tag{34}$$

Далее аналогично доказываются неравенства.

$$\|u_\varepsilon\|_{m+2}^2 \le c_9 \|f\|_{m+1}^2 , m = 2 , 3 , ... \tag{35}$$

[2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Отсюда получим существование единственного решения задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{m+2}(Q)$, $1 \le m \in N$.
Теорема 4 доказана. □

Литература

1. Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов Киев. 1965, 798 с.

2. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ. 1983, 84 с.

3. Глазатов С.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985, Т.26, No 6, 162-164

4. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // Уз.М.Ж. 2014, No 1, 5-14.

5. Djamalov S.Z. On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle // IIUM journal. 2016, V.17, No 2, 95-104.

6. Джамалов С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. // Мат. заметки СВФУ. 2017, No 4, 17-28.

7. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в прямоугольнике // Журнал Средне волжского мат общества. 2017, Т.19, No 4, 12-21.

8. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода // Вестник Сам.гос.техн.ун-та.Сер.физ.-мат.науки. 2017, Т.21, No 4, 1-14.

9. Dzamalov S.Z. The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed type of equation of the first kind in a plane. // Malaysian journal of mathematical sciences. 2018, T.12, No 1, 49-62

10. Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1978, Т.14, No-3, 546-548.

11. Каратопраклиева М.Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1991, Т.27, 68-79.

12. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.// Учебное пособие. Новосибирск: НГУ. 1990, 130 с.

13. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешенного типа и их приложения к газодинамике. Ленинград: ЛГУ. 1990, 204 с.

14. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. 1973, 407 с.

15. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл.РАН. 2007, Т.413, No 1, 23-26.

16. Терехов А.Н. "Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа"// В.кн: Неклассические уравнения математической физики, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 148-158

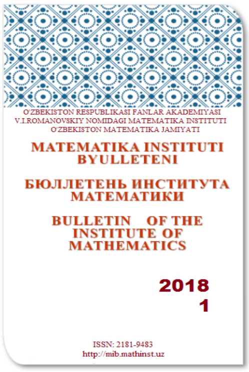
17. Цыбиков.Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа // В. кн: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1986, 201-206.

18. Треногин В.А. Функциональный анализ. М: Наука, 1980, 495 с.

Институт математики, Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент 100174, Узбекистан
E-mail: siroj63@mail.ru

Поступила: 14/06/2018

Принято: 20/06/2018



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.9-22

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.9-22

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.9-22

УДК 517.923

О разрешимости задачи Коши-Гурса для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

Уринов А.К., Исмоилов А.И.

Umumlashgan Eyler-Puasson-Darbu tenglamasi uchun Koshi–Gursa masalasi yechilishi haqida
Ushbu maqolada xarakteristik uchburchakda umumlashgan Eyler-Puasson-Dardu tenglamasi uchun Koshi-Gursa masalasi oʻrganilgan. Riman usulidan foydalanib masalaning yechimi uchun formula topilgan. Topilgan formula, berilgan funksiyalarga qoʻyilgan baʻzi shartlarda haqiqatdan ham Koshi–Gursa masalasi yechimini berishi isbotlangan.

On solvability of the Cauchy-Goursat problem for the generalized Euler-Poisson-Darboux equation.
In this paper we study the Cauchy-Goursat problem for the generalized Euler-Poisson-Darboux equation in the characteristic triangle. By the Riemann method, a formula is found for solving the problem under study. It is proved that under certain conditions on given functions, this formula actually gives a solution of the Cauchy-Goursat problem.

1. Введение

Известно что, при математическом моделировании многих вопросов газодинамики и гидродинамики [1, 2, 3, 4, 5, 6], теории оболочек [7, 8], механики сплошных сред [9, 10] и математической биологии [11] возникают вырождающиеся дифференциальные уравнения. Такие уравнения заменой независимых переменных приводятся к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами при младших членах. Одним из представителей дифференциальных уравнений гиперболического типа с сингулярными коэффициентами является, так называемое, уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$E_{\alpha,\beta}(u) \equiv u_{\xi\eta} - \beta(\xi-\eta)^{-1}u_\xi + \alpha(\xi-\eta)^{-1}u_\eta = 0.$$

Это уравнение и более общее уравнение $E_{\alpha,\beta}(u) + \gamma(\xi-\eta)^{-2}u = 0$ впервые изучены Эйлером при $\alpha=\beta=m$, $\gamma=n(m,n\in N)$ [12]. Этими уравнениями занимались также знаменитые математики Дарбу [7], Пуассон [13] и Риман [14], а также многие другие исследователи XX века.

Следующим представителем дифференциальных уравнений гиперболического типа с сингулярными коэффициентами является уравнение

$$L^{\gamma}_{\alpha,\beta}u \equiv u_{\xi\eta} + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} + \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_\xi + \left(\frac{\alpha}{\eta+\xi} - \frac{\beta}{\eta-\xi}\right)u_\eta + \gamma u = 0. \quad (1)$$

Из этого уравнения при $\alpha=0$ следует уравнение $E_{\beta,\beta}(v)=0$, а при $\alpha=\beta\neq 0$ замена $t=\sqrt{\xi}$, $z=\sqrt{\eta}$ уравнение $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u)=0$ переводить к уравнению $E_{\beta,\beta}(v)=0$, где $v(t,z)=u\left(\sqrt{\xi},\sqrt{\eta}\right)$. В этой связи, уравнение (1) в настоящее время, исследователями называется обобщенным уравнением Эйлера-Пуассона-Дарбу. В данной статье, рассматривая уравнение (1) характеристическом треугольнике $\Delta=\{(\xi,\eta):0<\xi<\eta<1\}$ исследована следующая

Задача Коши-Гурса. *Найти регулярное в области* Δ *решение* $u(\xi,\eta)\in C\left(\bar{\Delta}\right)$ *уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}(\eta-\xi)^{2\beta}(u_\xi-u_\eta)=\nu(\xi),\quad 0<\xi<1; \tag{2}$$

$$u(0,\eta)=\psi_1(\eta),\quad 0\le\eta\le1, \tag{3}$$

где $\nu(\xi)$ и $\psi_1(\eta)$ *– заданнные непрерывные функции.*

Задачи Коши-Гурса для уравнения $E_{\alpha,\beta}\left(u\right)=0$ в области Δ при $0<\alpha=\beta<1/2$ изучены Геллерстедтом [15]. Им построена функция Римана-Адамара этой задачи, с помощью чего ее решение выписано в явном виде. Из результатов, полученных в книгах [11] и [16] относительно уравнения $y^m u_{xx}-u_{yy}+ay^{(m/2)-1}u_x=0$, где $m,a=const$, $m>0$,$|a|<(m/2)$, следует,что задача Коши-Гурса для уравнения $E_{\alpha,\beta}\left(u\right)=0$ при $\alpha=(m-2a)\,/\,(2m+4)$, $\beta=(m+2a)\,/\,(2m+4)$ однозначно разрешима. Но там явный вид решения задачи не приведен. В работе [17] построена функция Римана-Адамара задачи Коши-Гурса для уравнения $E_{\alpha,\beta}\left(u\right)=0$ и методом Римана найдена формула решения этой задачи, доказаны теоремы существования решения задачи при $0\le\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$. Задача Коши-Гурса для уравнения $(-y)^m u_{xx}-x^m u_{yy}=0$, где $y<0$, $x>0$, $m>0$ в характеристическом треугольнике исследована в [18], построена функция Римана-Адамара, найдена формула для решения и доказано существование единственного решения. В [19, 20] найдена формула решения задачи Коши-Гурса при $\psi\left(x\right)\equiv0$ для уравнения $u_{xx}-u_{yy}+(2p/x)u_x+(2q/y)u_y+\gamma u=0$, но эта формула не исследована, т.е. не доказана теорема существования. В настоящей статье методом Римана найдена формула решения задачи Коши-Гурса для уравнения $L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(u\right)=0$ при $\alpha>0$, $0<\beta<(1/2)$, $\forall\gamma\in R$ и доказана теорема о существовании единственного решения.

2. Исследование задачи $\{(1),(2),(3)\}$

Поставленную задачу $\{(1),(2),(3)\}$ решим методом Римана. При этом существенно используется, так называемая, функция Римана-Адамара $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1^0. $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ по переменным ξ_0,η_0 является решением уравнения (1), а по переменным ξ,η- сопряженному ему уравнению:

$$M_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(V\right)\equiv V_{\xi\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V\right]-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)V\right]+\gamma V=0;$$

$$2^0.\ \ V_\eta-\left[\alpha(\eta+\xi)^{-1}+\beta(\eta-\xi)^{-1}\right]V=0\quad \textit{при}\ \ \xi=\xi_0,$$

$$V_\xi-\left[\alpha(\eta+\xi)^{-1}-\beta(\eta-\xi)^{-1}\right]V=0\quad \textit{при}\ \ \eta=\eta_0;$$

$$3^0.\ \ V(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0;\gamma)=1;\qquad 4^0.\ \lim_{\eta-\xi\to+0}V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=0;$$

$$5^0.\ \ \lim_{\eta-\xi\to+0}\left[V_\eta-V_\xi-4\beta(\xi-\eta)^{-1}V\right)=0;$$

$$6^0.\ \lim_{\varepsilon\to0}\Big(\left\{V_\xi-\left[\alpha(\eta+\xi)^{-1}-\beta(\eta-\xi)^{-1}\right]V\right\}\big|_{\eta=\xi_0+\varepsilon}-$$

$$-\left\{V_\xi-\left[\alpha(\eta+\xi)^{-1}-\beta(\eta-\xi)^{-1}\right]V\right)\big|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\Big\}=0,\varepsilon>0.$$

Пользуясь функциями Римана и Грина-Адамара, построенными М.Капилевичем в работе [20] для уравнения $u_{xx}-u_{yy}+(2\alpha/x)u_x-(2\beta/y)u_y+\lambda^2u=0$, нетрудно убедиться, что функция $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$, обладающая перечисленными выше свойствами 1^0-6^0, существует и определяется следующим равенством:

$$V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=\begin{cases}R_1\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)\ \text{при}\ \ \eta>\xi_0,\\ R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)\ \text{при}\ \ \eta<\xi_0,\end{cases} \tag{4}$$

где

$$R_1\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)=\sigma_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{(k!)^2}F_3\left(\beta,\alpha,1-\beta,1-\alpha;1+k;\sigma_2,\sigma_1\right),$$

$$R_2\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)=\chi\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{\left[(\xi_0-\xi)\left(\eta_0-\eta\right)\right]^{\beta}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{k!(1-\beta)_k}H_2\left(\beta-k,\beta,\alpha,1-\alpha;2\beta;\frac{1}{\sigma_2},-\sigma_1\right),$$

$$\sigma_0=\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta},\ \sigma_1=-\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)},\ \sigma_2=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)},\ \sigma_3=-\gamma(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0);$$

$\chi=\Gamma(\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера,

$$F_3(a,a',b,b',c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(a')_n\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n,$$

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{+\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m(c)_n(d)_n}{(e)_m m!n!}x^m y^n$$

–функции Аппеля и Горна [21] соответственно; $(z)_n$ – символ Похгаммера: $(z)_0=1$, $(z)_n=z(z+1)...(z+n-1)$, $n\in N$

В силу известных равенств [20, 22]

$$F_3(a,a',b,b';c;x,y)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(a')_m(b')_m}{(c)_m m!}y^m F(a,b;c+m;x),$$

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(c)_m(d)_m}{(1-a)_m m!}y^m F(a-m,b;e;x),$$

где $F(a,b;c;x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n$ - гипергеометрическая функция Гаусса [21], функции R_1 и R_2 переписывается в виде

$$R_1\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)=\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{(k!)^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{m!(1+k)_m}\sigma_1^m F\left(\beta,1-\beta;1+k+m;\sigma_2\right),\tag{5}$$

$$R_2\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)=\chi\left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\frac{(\eta-\xi)^{2\beta}}{\left[(\xi_0-\xi)\left(\eta_0-\eta\right)\right]^{\beta}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sigma_3^k}{k!(1-\beta)_k}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{m!(1-\beta+k)_m}\sigma_1^m F\left(\beta-k-m;\beta;2\beta;\frac{1}{\sigma_2}\right),\tag{6}$$

Пользуясь разложениями (5) и (6) функций R_1 и R_2, можно убедиться, что функция (4) действительно удовлетворяет условиям 1^0-6^0.

Пусть $u(\xi,\eta)$-решение задачи Коши-Гурса для уравнения (1), а $P(\xi_0,\eta_0)$ - произвольная точка области $\bar{\Delta}\backslash\{(\xi,\eta):\ \xi=0,0\le\eta\le1\}$. Найдем $u(\xi_0,\eta_0)$.

В треугольнике $O'A'B'$, ограниченном отрезками $O'A'$, $A'B'$, $O'B'$ прямых $\eta=\xi+\varepsilon$, $\eta=\xi_0-\varepsilon$, $\xi=0$ соответственно, и прямоугольнике $B''A''P''P'$,ограниченном отрезками $B''A''$, $A''P''$, $P''P'$, $P'B''$ прямых $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\xi=\xi_0-2\varepsilon$, $\eta=\eta_0$, $\xi=0$ соответственно, справедливо тождество

$$2\left[VL^{\gamma}_{\alpha,\beta}(u)-uM^{\gamma}_{\alpha,\beta}(V)\right]\equiv\frac{\partial}{\partial\eta}\left[Vu_\xi-uV_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[Vu_\eta-uV_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV\right]\equiv0,\tag{7}$$

где ε-достаточна малое положительное число.

Интегрируя это тождество по треугольнику $O'A'B'$ и прямоугольнику $B''A''P''P'$, а затем применяя формулу Грина к полученным интегралам, имеем

$$\left(\int\limits_{\partial O'A'B'}+\int\limits_{\partial B''A''P''P'}\right)\left[Vu_\eta-uV_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV\right]d\eta-$$

$$-\left[Vu_\xi-uV_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uV\right]d\xi=0.\tag{8}$$

Отсюда, учитывая свойства 1^0-6^0 функции $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)$ и краевых условий (2), (3), вычислим интегралы по сторонам треугольника и прямоугольника. Затем, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим представление решения задачи Коши-Гурса $\{(1)(2)(3)\}$:

$$u\left(\xi_0,\eta_0\right)=\frac{1}{2}\chi\int\limits_0^{\xi_0}\left(\frac{2\xi}{\xi_0+\eta_0}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(\xi\right)}{\left[\left(\xi_0-\xi\right)\left(\eta_0-\xi\right)\right]^{\beta}}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;\sigma_1,\sigma_2\right)\Bigg|_{\eta=\xi}d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi'_1\left(\eta\right)+\frac{\alpha+\beta}{\eta}\psi_1\left(\eta\right)\right]V\left(0,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)d\eta, \tag{9}$$

где $\Xi_2\left(a,b;c;x,y\right)$- гипергеометрическая функция Гумберта [21]:

$$\Xi_2\left(a,b,c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n.$$

Лемма 1. *Если $\nu\left(\xi\right)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta>\beta$ на $[0,1)$, то функция*

$$I\left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\chi\int\limits_0^{\xi}\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt$$

где $y_1=-(\xi-t)(\eta-t)/[2t(\xi+\eta)]$, $y_2=-\gamma(\xi-t)(\eta-t)$, обладает следующими свойствами:

1. Частные производные I_ξ и I_η представимы в виде

$$\frac{\partial I}{\partial\xi}=-\frac{\alpha I}{\eta+\xi}+\frac{1}{2}\beta\chi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(\xi\right)-\nu\left(t\right)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)}{\left(\xi-t\right)^{1+\beta}\left(\eta-t\right)^{\beta}}dt+$$

$$+\frac{\chi}{2}\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\chi\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}\left(\eta-\xi\right)^{-2\beta}F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right); \tag{10}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\eta}=-\frac{\alpha I}{\eta+\xi}+\frac{1}{2}\beta\chi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(\xi\right)-\nu\left(t\right)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)}{\left(\xi-t\right)^{\beta}\left(\eta-t\right)^{1+\beta}}dt+$$

$$+\frac{\chi}{2}\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\frac{\partial}{\partial\eta}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\beta\chi\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(2+\alpha-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1-\beta}\left(\eta-\xi\right)^{-2\beta}F\left(1-\beta,1+\alpha-2\beta;2+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right). \tag{11}$$

2. $I(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\eta-\xi\right)^{2\beta}\left(I_\xi-I_\eta\right)=\nu\left(\xi\right),0<\xi<1; \tag{12}$$

$$I\left(0,\eta\right)=0,\quad 0\le\eta\le 1. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I^{\varepsilon}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\chi\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\frac{\nu(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{\beta}}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})\,dt,$$

где ε- достаточно малое положительное число.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}I^{\varepsilon}(\xi,\eta)=I(\xi,\eta)$.

Непосредственное дифференцирование даёт

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi}I^{\varepsilon}(\xi,\eta)=-\frac{\alpha}{\xi+\eta}I^{\varepsilon}(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\chi\nu(\xi-\varepsilon)[\varepsilon(\eta-\xi+\varepsilon)]^{-\beta}\times\\ \times\left(\frac{2\xi-2\varepsilon}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha,1-\beta;y_{1},y_{2})|_{t=\xi-\varepsilon}+\\ +\frac{1}{2}\beta\chi\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu(\xi)-\nu(t)\,\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})}{(\xi-t)^{1+\beta}(\eta-t)^{\beta}}dt+\\ +\frac{\chi}{2}\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi}\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})\,dt-\\ -\frac{1}{2}\beta\chi\nu(\xi)\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}(\xi-t)^{-1-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt.\end{gathered}\tag{14}$$

Справедливы следующие равенства

$$\begin{gathered}-\beta\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha}(\xi-t)^{-1-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt=-\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial t}(\xi-t)^{-\beta}dt=\\ =-(\xi-\varepsilon)^{\alpha}(\eta-\xi+\varepsilon)^{-\beta}\varepsilon^{-\beta}+\alpha\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha-1}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt+\\ +\beta\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-1-\beta}dt.\end{gathered}$$

Учитывая это, равенство (14) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi}I^{\varepsilon}(\xi,\eta)=-\frac{\alpha}{\xi+\eta}I^{\varepsilon}(\xi,\eta)+\frac{1}{2}\chi\left(\frac{2\xi-2\varepsilon}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}[\varepsilon(\eta-\xi+\varepsilon)]^{-\beta}\times\\ \times\left[\nu(\xi-\varepsilon)\,\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})|_{t=\xi-\varepsilon}-\nu(\xi)\right]+\\ +\frac{1}{2}\beta\chi\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu(\xi)-\nu(t)\,\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})}{(\xi-t)^{1+\beta}(\eta-t)^{\beta}}dt+\\ +\frac{\chi}{2}\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu(t)}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{\beta}}\frac{\partial}{\partial\xi}\Xi_{2}(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_{1},y_{2})\,dt+\\ +\frac{1}{2}\chi\nu(\xi)\left(\frac{2}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\left[\alpha\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha-1}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt+\right.\\ \left.+\beta\int\limits_{0}^{\xi-\varepsilon}t^{\alpha}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-1-\beta}dt\right].\end{gathered}\tag{15}$$

Рассмотрим выражение

$$l=\alpha\int\limits_0^{\xi}t^{\alpha-1}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}dt+\beta\int\limits_0^{\xi}t^{\alpha}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-1-\beta}dt.$$

Заменяя переменное интегрирование по формуле $t=\xi s$ и принимая во внимание интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса [21]

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-xt\right)^{-a}dt,$$

можно показать, что

$$l=\xi^{\alpha-\beta}\eta^{-\beta}\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}F\left(\alpha,\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+$$

$$+\frac{\beta\xi^{1+\alpha-\beta}}{\eta^{1+\beta}}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(2+\alpha-\beta\right)}F\left(1+\alpha,1+\beta;2+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)=$$

$$=\frac{\xi^{\alpha-\beta}}{\eta^{\beta}}\cdot\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(2+\alpha-\beta\right)}\left[\left(1+\alpha-\beta\right)F\left(\alpha,\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\frac{\xi}{\eta}F\left(1+\alpha,1+\beta;2+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

Отсюда, используя равенства [21, 23]

$$F\left(a,b;c;z\right)=\left(1-z\right)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b;c;z\right),$$

$$cF\left(a,b;c;z\right)-cF\left(a+1,b;c;z\right)+bzF\left(a+1,b+1;c+1;z\right)=0,$$

находим

$$l=\frac{\xi^{\alpha-\beta}\eta^{\beta}}{\left(\eta-\xi\right)^{2\beta}}\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right).\tag{16}$$

Теперь из (15), переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая равенства (16) и $\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1-\beta;y_1,y_2)|_{t=\xi-\varepsilon}=1+\varepsilon O(1)$, а также условие на $\nu\left(\xi\right)$, получим равенство (10).

Аналогично доказывается равенство (11). Утверждение 1 доказано.

Теперь, принимая во внимание (10), (11) и равенство [23]

$$c\,F\left(a,b;c;z\right)+a\,z\,F\left(a+1,b+1;c+1;z\right)=c\,F\left(a,b+1;c;z\right),\tag{17}$$

находим

$$I_{\xi}-I_{\eta}=\frac{1}{2}\beta\chi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\left(\eta-\xi\right)\left[\nu\left(\xi\right)-\nu\left(t\right)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)\right]}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{1+\beta}}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\chi\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt+\frac{1}{2}\chi\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}$$

$$\times\nu\left(\xi\right)\left(\eta-\xi\right)^{-2\beta}\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right).\tag{18}$$

Умножая обе части равенства (18) на функцию $(\eta-\xi)^{2\beta}$ и переходя к пределу при $\eta-\xi\to+0$, имеем

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\left(\eta-\xi\right)^{2\beta}\left(I_{\xi}-I_{\eta}\right)=$$

$$=\frac{\chi}{2}\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;1\right)=$$

$$= \frac{\chi}{2}\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\nu(\xi)=\nu(\xi), \qquad 0<\xi<1,$$

т.е. справедливо равенство (12) причем здесь использованы следующие равенства [21]

$$\Gamma\left(1+z\right)=z\Gamma\left(z\right), \quad F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ c-a-b>0. \tag{19}$$

Проверка справедливости равенства (13) трудность не представляет.
Теперь докажем равенство $L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(I)=0$. Из (10) следует, что

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\alpha}{\eta+\xi}\left(I_\xi+I_\eta\right)=\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\eta+\xi\right)^2}I-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\chi\int\limits_0^\xi\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^\alpha\frac{\nu\left(\xi\right)-\nu\left(t\right)\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{1+\beta}}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\chi\int\limits_0^\xi\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^\alpha\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\times$$

$$\times\left[\frac{\beta}{\xi-t}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\beta}{\eta-t}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\chi\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^\alpha\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}\left(\eta-\xi\right)^{-2\beta}F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right]. \tag{20}$$

Принимая во внимание (10), (11),(18) и (20), находим

$$L^{\gamma}_{\alpha,\beta}(I)=\frac{1}{2}\chi_2\int\limits_0^\xi\left(\frac{2t}{\xi+\eta}\right)^\alpha\frac{\nu\left(t\right)}{\left[\left(\xi-t\right)\left(\eta-t\right)\right]^{\beta}}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\beta}{\xi-t}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-t}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\left(1-\alpha\right)}{\left(\eta+\xi\right)^2}+\gamma\right]\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\chi\frac{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(1+\alpha-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)\left(\frac{2\xi}{\xi+\eta}\right)^\alpha\times$$

$$\times\left\{\beta\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}\left(\eta-\xi\right)^{-1-2\beta}F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}\left(\eta-\xi\right)^{-2\beta}F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

Нетрудно убедиться , что

$$\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)=-\frac{\beta}{2t\left(\xi+\eta\right)}\frac{\partial}{\partial y_1}-\beta\gamma\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\frac{\beta}{\xi-t}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\beta}{\eta-t}\frac{\partial}{\partial\xi}=-\left[\frac{\beta}{2t\left(\xi+\eta\right)}+\frac{\beta}{\left(\eta+\xi\right)^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_1}-2\beta\gamma\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{1}{\left(\xi+\eta\right)^2}\left[y_1\left(y_1-1\right)\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+\left(2y_1-1\right)\frac{\partial}{\partial y_1}\right]+$$

$$+(-\gamma)\left[y_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+y_1\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_2}\right].$$

Тогда

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\beta}{\xi-t}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-t}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\,(1-\alpha)}{(\eta+\xi)^2}+\gamma\right]\Xi_2\,(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2)=$$

$$=-\frac{1}{(\eta+\xi)^2}\left[y_1\,(1-y_1)\,\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+y_2\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+(1-\beta-2y_1)\,\frac{\partial}{\partial y_1}-\right.$$

$$\left.-\alpha\,(1-\alpha)\right]\Xi_2\,(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2)+$$

$$+(-\gamma)\left[y_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+y_1\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial y_2}+(1-\beta)\,\frac{\partial}{\partial y_2}-1\right]\times$$

$$\times\Xi_2\,(\alpha,1-\alpha;1-\beta;y_1,y_2)=0, \qquad (22)$$

так как функция $\Xi_2\,(a,b;c;x,y)$ удовлетворяет системе [21]

$$\begin{cases}\left[x(1-x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+[c-(a+b+1)x]\dfrac{\partial}{\partial x}-ab\right]\Xi_2=0,\\ \left[y\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial y}-1\right]\Xi_2=0.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим выражение

$$l_1=\beta(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(\eta-\xi)^{-2\beta}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

Применяя формулу [21] $(d/dz)[z^aF\,(a,b;c;z)]=az^{a-1}F\,(a+1,b;c;z)$ и выполняя некоторые преобразования, имеем

$$l_1=\beta(\eta-\xi)^{-1-2\beta}(\xi/\eta)^{-\beta}\times$$

$$\times\left\{F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)-F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)+\right.$$

$$+\left[\left(1-\frac{\xi}{\eta}\right)F\left(1-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right]\right\}.$$

В силу равенства [21]

$$c\,(1-z)\,F\,(a,b;c;z)-cF\,(a-1,b;c;z)=(b-c)\,zF\,(a,b;c+1;z)$$

сумма в квадратной скобке равна

$$-\left[\beta/\left(1+\alpha-\beta\right)\right]\frac{\xi}{\eta}F\left(1-\beta,1+\alpha-2\beta;2+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Принимая во внимание это, получим

$$l_1=\beta(\eta-\xi)^{-1-2\beta}(\xi/\eta)^{-\beta}\times$$

$$\times\left[F\left(-\beta,\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)-F\left(-\beta,1+\alpha-2\beta;1+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\beta/(1+\alpha-\beta)\right]\frac{\xi}{\eta}F\left(1-\beta,1+\alpha-2\beta;2+\alpha-\beta;\frac{\xi}{\eta}\right)\right].$$

В силу равенства (17) выражение в квадратной скобке равно нулю. Тогда, $l_1 = 0$.

Если учесть это и (22), то из (21) следует, что $L_{\alpha,\beta}^{\gamma}(I) = 0$.

Лемма 1 полностью доказана. □

Лемма 2. *Если $\psi_1(\eta) \in C^2[0,1]$ и $\psi''(\eta)$ удовлетворяет условию Гельдера на $[0,1]$, то функция*

$$\Phi(\xi,\eta) = \int_0^\eta \left[{\psi_1}'(t) + (\alpha+\beta)\, t^{-1}\psi_1(t)\right] V(0,t;\xi,\eta;\gamma)\, dt$$

обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(\xi,\eta)$ и ее производные представимы в виде

$$\Phi(\xi,\eta) = \varphi(\xi)\int_0^\eta s^{-1}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds -$$

$$-\left[\int_0^\xi \varphi'(t)\, dt \int_0^t \frac{R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds}{s} - \int_\xi^\eta \varphi'(t)\, dt \int_t^\eta \frac{R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds}{s}\right], \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\xi,\eta) = \varphi(\xi)\cos(\beta\pi)\,\xi^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta} + \varphi(\xi)\int_0^\eta s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds -$$

$$-\left[\int_0^\xi \varphi'(t)\, dt \int_0^t s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds - \int_\xi^\eta \varphi'(t)\, dt \int_t^\eta s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds\right] \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi(\xi,\eta) = \varphi(\eta)\,\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta} + \varphi(\xi)\int_0^\eta s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds -$$

$$-\left[\int_0^\xi \varphi'(t)\, dt \int_0^t s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds - \int_\xi^\eta \varphi'(t)\, dt \int_t^\eta s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\, ds\right], \tag{25}$$

где $\varphi(t) = t{\psi_1}'(t) + (\alpha+\beta)\psi_1(t)$.

2. $\Phi(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}(\eta-\xi)^{2\beta}(\Phi_\xi - \Phi_\eta) = 0, 0 < \xi < 1;$$

$$\Phi(0,\eta) = \psi_1(\eta), 0 \le \eta \le 1.$$

Доказательство. Полагая $\eta = \xi$ и принимая во внимание обозначение $\varphi(t)$ и вид функции $V(z,t;\xi,\eta)$,имеем

$$\Phi(\xi,\xi) = \int_0^\xi \varphi(t)\, t^{-1}V(0,t;\xi,\xi;\gamma)\, dt =$$

$$= \chi\int_0^\xi \varphi(t)\, t^{-1}\left(\frac{t}{2\xi}\right)^\alpha \frac{t^{2\beta}}{[\xi(\xi-t)]^\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\beta)\,[-\gamma\xi(\xi-t)]^n}{\Gamma(1-\beta+n)\, n!}\times$$

$$\times H_2\left[\beta-n,\beta,\alpha,1-\alpha;2\beta;0,\frac{\xi-t}{2t}\right] dt.$$

Отсюда, применяя равенства [20, 21]

$$H_2(a,b,c,d;e;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(e)_m m!}x^m F(c,d;1-a-m;-y),$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}F[a,c-b,c;z/(z-1)],$$

получим

$$\Phi(\xi,\xi)=\chi\int\limits_0^\xi \varphi(t)\left(\frac{t}{2\xi}\right)^{\alpha}\frac{t^{2\beta-1}}{[\xi(\xi-t)]^{\beta}}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-\gamma\xi(\xi-t)]^n}{(1-\beta)_n n!}F\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta+n;\frac{t-\xi}{2t}\right)dt=$$

$$=\chi\int\limits_0^\xi \varphi(t)\left(\frac{t}{2\xi}\right)^{\alpha}\frac{t^{2\beta-1}}{[\xi(\xi-t)]^{\beta}}\left(\frac{2t}{\xi+t}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-\gamma\xi(\xi-t)]^n}{(1-\beta)_n n!}F\left(\alpha,\alpha-\beta+n;1-\beta+n;\frac{\xi-t}{\xi+t}\right)dt.$$

Заменяя переменную в виде $t=\xi s$, имеем

$$\Phi(\xi,\xi)=\chi\int\limits_0^1 \varphi(\xi s)\,s^{2\alpha+2\beta-1}(1+s)^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{2n}[\gamma(s-1)]^n}{(1-\beta)_n n!}F\left(\alpha,n+\alpha-\beta,n+1-\beta;\frac{1-s}{1+s}\right)ds.$$

Если учесть обозначение $\varphi(t)$, то из последнего равенства легко следует, что $\Phi(\xi,\xi)\in C^1[0,1]$ и $\Phi'(\xi,\xi)$ удовлетворяет условию Гельдера, а если $\psi_1(0)=0$, то $\lim\limits_{\xi\to 0}\Phi(\xi,\xi)=0$.

Принимая во внимание процесс получения формулы (9) и обозначение $\varphi(t)$, функцию $\Phi(\xi,\eta)$ можно переписать в виде

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)\varphi(t)\,t^{-1}V(0,t;\xi,\eta;\gamma)\,dt.$$

Отсюда, полагая $u=\varphi(t)$, $dv=t^{-1}V(0,t,\xi,\eta;\gamma)dt$ и применяя правило интегрирования по частям, получим

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\{[\varphi(\xi-\varepsilon)\mu_2(\xi-\varepsilon;\xi,\eta)-\varphi(\xi+\varepsilon)\mu_1(\xi+\varepsilon;\xi,\eta)]-$$

$$\left.-\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\mu_2(t,\xi,\eta)\,dt-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)\mu_1(t,\xi,\eta)\,dt\right\},$$

где

$$\mu_1(t,\xi,\eta)=-\int\limits_t^{\eta}s^{-1}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds,\qquad \mu_2(t,\xi,\eta)=\int\limits_0^{t}s^{-1}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds.$$

Подставляя выражения функций $\mu_1(t,\xi,\eta)$ и $\mu_2(t,\xi,\eta)$, а затем переходя к пределу, при $\varepsilon\to 0$, получим равенство (23).

Теперь, перепишем равенство (22) в виде

$$\Phi(\xi,\eta)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds-\right.$$

$$-\left[\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\,dt\int\limits_0^{t}s^{-1}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds-\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(\eta)\,dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds\right]\right\}. \tag{26}$$

Дифференцируя это равенство по ξ, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\varphi(\xi)\left[s^{-1}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\right]\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}+\right.$$

$$+\varphi'(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}V(0,s,\xi,\eta;\gamma)\,ds+\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}V(0,s,\xi,\eta;\gamma)\,ds-$$

$$-\varphi'(\xi-\varepsilon)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}s^{-1}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds-\varphi'(\xi+\varepsilon)\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}s^{-1}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds-$$

$$\left.-\left[\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\,dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}R_2(0,s,\xi,\eta;\gamma)\,ds\;-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)\,dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}R_1(0,s,\xi,\eta;\gamma)\,ds\right]\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}=\varphi(\xi)\lim_{\varepsilon\to+0}\left[s^{-1}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\right]\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}+\varphi(\xi)\int\limits_0^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds-$$

$$-\left[\int\limits_0^{\xi}\varphi'(t)\,dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds-\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi'(t)\,dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds\right]\right\}. \qquad (27)$$

Пользуясь разложениями (5) и (6) функций R_1 и R_2, а также второй из формул (19) и формулы [21]

$$F(a,b;c;1-x)=-\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b;1;x)\,lnx+$$

$$+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\times\left[\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]x^k,$$

нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}s^{-1}V\,(0,s,\xi,\eta;\gamma)|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}=\frac{\cos(\pi\beta)\,\xi^{\alpha+\beta-1}}{(\eta+\xi)^{\alpha}(\eta-\xi)^{\beta}}. \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получим равенство (24).

Далее, дифференцируя равенство (26) по η, находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\varphi(\xi)\,\eta^{-1}\,R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)+\right.$$

$$+\varphi(\xi)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}V(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds+\eta^{-1}R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)\left[\varphi(\eta)-\varphi(\xi+\varepsilon)\right]-$$

$$\left.-\left[\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'(t)\,dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'(t)\,dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)\,ds\right]\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая

$$\eta^{-1}R_1(0,\eta;\xi,\eta;\gamma)=\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}, \qquad (29)$$

получим равенство (25).

Аналогично, дифференцируя равенство (25) по ξ, находим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}=-\varphi\left(\eta\right)\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\varphi\left(\xi\right)s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}V\left(0,s,\xi,\eta;\gamma\right)\Big|_{s=\xi+\varepsilon}^{s=\xi-\varepsilon}+\right.$$

$$+\varphi'\left(\xi\right)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}V\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds+$$

$$+\varphi\left(\xi\right)\left(\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}+\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\right)s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}V\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds-$$

$$-\varphi'(\xi-\varepsilon)\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_2(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds-\varphi'(\xi+\varepsilon)\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}R_1(0,s;\xi,\eta;\gamma)ds-$$

$$\left.-\left[\int\limits_0^{\xi-\varepsilon}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}R_2\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds-\int\limits_{\xi+\varepsilon}^{\eta}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi\partial\eta}R_1\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds\right]\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая равенства (28), получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}=-\varphi\left(\eta\right)\eta^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)-$$

$$-\cos(\pi\beta)\varphi\left(\xi\right)\xi^{\alpha+\beta-1}(\eta+\xi)^{-\alpha}(\eta-\xi)^{-\beta}\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)+$$

$$+\varphi\left(\xi\right)\int\limits_0^{\eta}s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}V\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds-\left[\int\limits_0^{\xi}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_0^{t}s^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}R_2\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi\partial\eta}R_1\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds\right].\qquad(30)$$

Из (23), (24), (25) и (30) следует, что

$$L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(\Phi\right)=\varphi\left(\xi\right)\int\limits_0^{\eta}s^{-1}L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[V\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)\right]ds-$$

$$-\left[\int\limits_0^{\xi}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_0^{t}s^{-1}L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[R_2\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)\right]ds-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi'\left(t\right)dt\int\limits_t^{\eta}s^{-1}L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left[R_1\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)\right]ds\right],$$

откуда в силу свойства функций R_1 и R_2 следует, что $L_{\alpha,\beta}^{\gamma}\left(\Phi\right)\equiv 0$, т.е. функция $\Phi\left(\xi,\eta\right)$ удовлетворяет уравнению (1).

Теперь, пользуясь равенствами (24), (25) и легко проверяемым равенством

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)R_2\left(0,s;\xi,\eta;\gamma\right)ds=0,$$

нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim\limits_{\eta-\xi\to+0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\Phi_\xi-\Phi_\eta\right)=0,\ 0<\xi<1.$

Докажем равенство $\Phi(0,\eta)=\psi_1(\eta)$, $0\le\eta\le1$. В силу $\sigma_0=(\eta/\eta_0)^{\alpha+\beta}$, $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ при $\xi=\xi_0=0$, из (4) и (5) следует, что $V\left(0,t;0,\eta;\gamma\right)=(t/\eta)^{\alpha+\beta}$. Учитывая это и очевидное равенство

$$\left[\psi'{}_1\left(t\right)+\left(\alpha+\beta\right)t^{-1}\psi_1\left(t\right)\right]t^{\alpha+\beta}=\left[t^{\alpha+\beta}\psi_1\left(t\right)\right]',$$

получим

$$\Phi\left(0,\eta\right)=\int\limits_0^\eta\left[\psi_1{}'\left(t\right)+\left(\alpha+\beta\right)t^{-1}\psi_1\left(t\right)\right]V\left(0,t;0,\eta;\gamma\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\eta\left[\psi_1{}'\left(t\right)+\left(\alpha+\beta\right)t^{-1}\psi_1\left(t\right)\right](t/\eta)^{\alpha+\beta}dt=\psi_1\left(\eta\right),\ 0\le\eta\le1,$$

Лемма 2 полностью доказана. □

На основании лемм 1 и 2 справедлива

Теорема 1. *Если $\nu(\xi)$ удовлетворяет условия Гельдера с показателем $\delta>\beta$ на $[0,1)$, а $\psi_1(\eta)\in C^2[0,1]$ и $\psi_1''(\eta)$ удовлетворяет условия Гельдера на $[0,1]$, то функция, определяемая формулой (9), является единственным решением задачи Коши-Гурса* $\{(1),(2),(3)\}$.

Теперь рассмотрим задачу Коши-Гурса для уравнения (1) в следующей постановке: *найти регулярное в области Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и*

$$u\left(\xi,1\right)=\psi_2\left(\xi\right),\quad 0\le\xi\le1. \tag{31}$$

Функция Римана-Адамара $\tilde V\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)$ для этой задачи определяется равенством

$$\tilde V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma)=\begin{cases}R_1\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma\right) & \text{при }\ \xi<\eta_0,\\ R_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0;\gamma) & \text{при }\ \xi>\eta_0,\end{cases}$$

где R_1 и R_2 - функции, определяемые равенствами (5) и (6).

Функция $\tilde V$ удовлетворяет условиям 1^0-5^0 функции V и

$$6^{0\prime}.\quad \lim_{\varepsilon\to0}\left\{\left[\tilde V_\eta-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)\tilde V\right]\Big|_{\xi=\eta_0+\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-\left[\tilde V_\eta-\left(\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right)\tilde V\right]\Big|_{\xi=\eta_0-\varepsilon}\right\}=0,\quad\varepsilon>0.$$

Методом, примененным выше, можно доказать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Если $\nu\left(\xi\right)$ удовлетворяет условия Гельдера с показателем $\delta>\beta$ на $(0,1]$, а $\psi_2\left(\xi\right)\in C^2\left[0,1\right]$ и $\psi''{}_2\left(\xi\right)$ удовлетворяет условия Гельдера на $[0,1]$, то решение задачи Коши-Гурса* $\{(1),(2),(31)\}$ *существуют, единственно и оно определяется формулой*

$$u\left(\xi_0,\eta_0\right)=\frac12\chi\int\limits_{\eta_0}^1\left(\frac{2\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^\alpha\frac{\nu\left(\xi\right)}{\left[\left(\xi-\xi_0\right)\left(\xi-\eta_0\right)\right]^\beta}\times$$

$$\times\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;\sigma_1\cdot\sigma_3\right)\big|_{\eta=\xi}d\xi-$$

$$-\int\limits_{\xi_0}^1\left[\psi'{}_2\left(\xi\right)+\left(\frac{\alpha}{1+\xi}-\frac{\beta}{1-\xi}\right)\psi_2\left(\xi\right)\right]\tilde V\left(\xi,1;\xi_0,\eta_0;\gamma\right)d\eta.$$

Задача Коши-Гурса для уравнения (1), когда условие (2) земенена с $\lim\limits_{\eta-\xi\to0}u(\xi,\eta)=\tau(\xi)$, $0\le\xi\le1$ (т.е. задача Дарбу для уравнения (1)), изучена в работе [24].

Литература

1. Баранцев Р.Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Издательство ЛГУ, 1965.

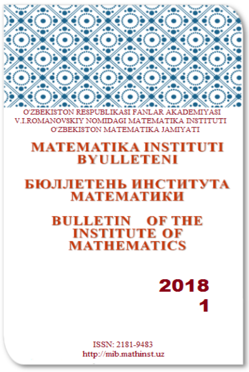
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой динамики. -М.: ИЛ, 1961. -208 с.

3. Коган М.Н. О магнитогидродинамических течениях смешанного типа // Прикладная математика и механика, 25, 1, 1961. -С. 132-137.
4. Станюкович К.П. Теория неустановившихся движений газа. -М.: Оборонгиз, 1948.
5. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Известия АН СССР. Серия математ., 9, 2, 1945. -С. 121-142.
6. Чаплыгин С.А. О газовых струях. Полн. собрание сочинений. Т.2. -М. -Л.: Гостехиздат, 1933.
7. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. -М.: Физматгиз, 1959.
8. Darbux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces. IV. Paris. 1915.
9. Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Механика сплошных сред. -М.: Гостехиздат, 1953.
10. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. -М.: Физматгиз, 1960.
11. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 301 с.
12. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т.3. -М.: ГИФМЛ, 1958.
13. Poisson S.D. Memoire sur l'integration des equations lineaires aux derivees partieeles // Jaurnal l'Ecole Roy. Polytechnique, 1823, T. 12, №19. -Pp. 215-248.
14. Риман Б. О распространении волн конечной амплитуды. Сочинения. -М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
15. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de tipe mixte. Thesis, Uppsala, 1935.
16. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. - Минск: Вышейшая школа, 1977. - 160 с.
17. Уринов А.К. Исмоилов А.И. Задача Коши - Гурса для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и свойства её решения // Узбекский математический журнал, 2012, № 2. -С.130-139.
18. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. Задача Коши-Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика, 2003, № 5. -С. 21-29.
19. Капилевич М.Б. О сингулярных задачах Коши и Трикоми // Доклады АН СССР, 1967, Т.177, № 6. -С. 1265-1268.
20. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциальные уравнения. -Минск, 1968, Т.4, № 8. -С. 1465-1483.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. -М .: Наука, 1965. -296 с.
22. Appell P., Kampe de Friet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques, Polynomes d'Hermite.-Paris, Gauthier-Villars. 1926. -440 p.
23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов,сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1962. - 1100 с.
24. Уринов А.К., Исмоилов А.И., А.О.Маманазаров. Задача Дарбу для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Украинский математический журнал, 2017, т.69. № 1. -С. 52-70.

Ферганский государственный университет, Узбекистан
E-mail: urinovak@mail.ru
Ферганский государственный университет, Узбекистан
E-mail: ismoilovaxror@yandex.com

Поступила: 14/04/2018

Принято: 11/06/2018



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.23-27

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.23-27

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.23-27

УДК 517.98

Периодические меры Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли

Хакимов Р.М., Аюбжонова М.С.

Keli daraxti ustida to'rt holatli ferromagnit Potts modeli uchun davriy Gibbs o'lchovlari
Maqolada to'rt holatli ferromagnit Potts modeli uchun barcha davriy Gibbs o'lchovlari parametrning ixtiyoriy qiymatlarida translyatsion-invariant bo'lishi ko'rsatilgan.

Periodic Gibbs measures for the four state ferromagnetic Potts model on a Cayley tree
In this paper at any values of the parameters of the four state ferromagnetic Potts model it is proved that all periodic Gibbs measures are translation-invariant.

1. Введение

Основной задачей теории мер Гиббса является описание всех мер Гиббса для данного гамильтониана. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы и говорят, что существует фазовый переход, если мера Гиббса не единственна (см. [1]-[4]).

Работа [5] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем и доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса. В работе [6] изучены периодические меры Гиббса и при некоторых условиях доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. В частности, для ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли прозвольного порядка и для антиферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка при некоторых условиях, показано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Кроме того, найдены условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические меры Гиббса.

Работа [7] является продолжением работы [6]. Доказана существование не менее трех периодических мер Гиббса с периодом два на дереве Кэли порядка три и четыре для модели Поттса с тремя состояниями и с нулевым внешним полем. А в работе [8] изучена модель Поттса с q-состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 3$ и на некоторых инвариантах показано существование периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса при некоторых условиях на параметры этой модели. Кроме того, указана нижняя граница количества существующих периодических мер Гиббса. В работе [9] улучшены результаты из [8] и даны явные формулы для трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k = 3$. В работе [10] дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с q-состояниями и показано, что их количество равно $2^q - 1$.

В данной работе изучаются периодические меры Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с четырьмя состояниями на дереве Кэли произвольного порядка и доказана их трансляционно-инвариантность.

2. Определения и известные факты

Дерево Кэли $\Im^k$ порядка $k \geq 1$ - бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Im^k = (V, L, i)$, где V — есть множество вершин $\Im^k$, L — его множество ребер, и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in$

V. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l = \langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y), x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min \{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такой, что } \langle x_0, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Аналогично определяются конфигурации σ_n и ω_n на V_n и W_n, соответственно. Множество всех конфигураций на V (соответственно V_n, W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ (соответственно $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Легко видеть, что $\Phi^{V_n} = \Phi^{V_{n-1}} \times \Phi^{W_n}$. Конкатенация конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ и $\omega_n \in \Phi^{W_n}$ определяется следующей формулой (см. [11])

$$\sigma_{n-1} \vee \omega_n = \{\{\sigma_{n-1}(x), x \in V_{n-1}\}, \ \{\omega_n(y), y \in W_n\}\}.$$

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} \delta_{1\sigma(x)}, \tag{1}$$

где $J \in R$, $\alpha \in R-$ внешнее поле, $\langle x, y\rangle-$ ближайшие соседи и $\delta_{ij}-$ символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ i \neq j \\ 1, & \text{если } \ i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ_n в обьеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x),x}\right\}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0-$ температура, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель и $\{\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x}, \dots, \tilde{h}_{q,x}) \in R^q, x \in V\}$ совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{1\sigma(x)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (2) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}).$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть конкатенация конфигураций, т.е. $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Phi^{V_n}$ такое, что $(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)|_{V_{n-1}} = \sigma_{n-1}$ и $(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)|_{W_n} = \omega_n$. В этом случае, существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответсвующей гамильтониану (1) и векторзначной функции $\tilde{h}_x, x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на $\tilde{h}_x$, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1.[5] *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$ в (2) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \tag{3}$$

где $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h, \theta, \alpha) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln\left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),$$

$\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)-$ *множество прямых потомков точки* x *и* $h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q-1,x})$ *с условием*

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}, \quad i = 1, \dots, q-1.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, соответсвенно.

Пусть $\widehat{G}_k-$ нормальный делитель конечного индекса группы G_k.

Определение 1. *Совокупность векторов* $h = \{h_x,\, x \in G_k\}$ *называется* $\widehat{G}_k$*-периодической, если* $h_{yx} = h_x$ *для* $\forall x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$.

G_k- периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2. *Мера* μ *называется* $\widehat{G}_k$*-периодической, если она соответствует* $\widehat{G}_k$*-периодической совокупности векторов* h.

В [6] доказана следующая теорема.

Теорема 2. [6] *Пусть* $H-$ *нормальный делитель конечного индекса в* G_k. *Тогда для модели Поттса все* $H-$ *периодические меры Гиббса являются либо* $G_k^{(2)}-$ *периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где* $G_k^{(2)}$ *есть подгруппа, состоящая из слов четной длины.*

3. Ферромагнитный случай

Рассмотрим случай $q \geq 3$, $\alpha = 0$, т.е. $\sigma : V \to \Phi = \{1, 2, 3, ..., q\}$. В силу Теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h = \{h_x \in R^{q-1} : x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h, & \text{если } |x| - \text{четно}, \\ l, & \text{если } |x| - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Здесь $h = (h_1, h_2, ..., h_{q-1})$, $l = (l_1, l_2, ..., l_{q-1})$. Тогда в силу (3) имеем:

$$\begin{cases} h_i = k \ln \frac{(\theta-1)\exp(l_i) + \sum_{j=1}^{q-1} exp(l_j) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} exp(l_j) + \theta}, \\ l_i = k \ln \frac{(\theta-1)\exp(h_i) + \sum_{j=1}^{q-1} exp(h_j) + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} exp(h_j) + \theta}, \end{cases} \quad i = \overline{1, q-1}.$$

Введем следующие обозначения: $\exp(h_i) = x_i$, $\exp(l_i) = y_i$. Тогда последнюю систему уравнений при $i = \overline{1, q-1}$ можно переписать:

$$\begin{cases} x_i = \left(\frac{(\theta-1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k, \\ y_i = \left(\frac{(\theta-1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим отображение $W : R^{q-1} \times R^{q-1} \to R^{q-1} \times R^{q-1}$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} x_i^{'} = \left(\frac{(\theta-1)y_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} y_j + \theta} \right)^k, \\ y_i^{'} = \left(\frac{(\theta-1)x_i + \sum_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{q-1} x_j + \theta} \right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что (4) есть уравнение $z = W(z)$. Чтобы решить систему уравнений (4), надо найти неподвижные точки отображения (5): $z^{'} = W(z)$, где $z = (x_1, ..., x_{q-1}, y_1, ..., y_{q-1})$.

Лемма 1. *Следующие множества являются инвариантными относительно отображения* W*:*

$$I_1 = \{z \in R^{2q-2} : x_1 = x_2 = \ldots = x_{q-1} = y_1 = y_2 = \ldots = y_{q-1}\},$$

$$I_2 = \{z \in R^{2q-2} : x_1 = x_2 = \ldots = x_{q-1},\ y_1 = y_2 = \ldots = y_{q-1}\},$$

$$I_3 = \{z \in R^{2q-2} : x_i = y_i,\ i = 1, 2, \dots, q-1\},$$

$$I_4 = \{z \in R^{2q-2} : x_i = y_{q-i},\ i = 1, 2, \dots, q-1\}\},$$

$$I_5 = \{z \in R^{2q-2} : x_1 = y_1 = 1\}, \quad I_6 = \{z \in R^{2q-2} : x_{q-1} = y_{q-1} = 1\}.$$

Доказывается аналогично Лемме 2 из [6].

Замечание 1. Заметим, что отображение W может иметь инвариантные множества, отличные от $I_1 - I_6$, т.е. множества $I_1 - I_6$ не полностью описывают все инвариантные множества отображения W.

Лемма 2. *Меры Гиббса для модели Поттса на инвариантных множествах I_1 и I_3 являются трансляционно-инвариантными.*

Доказательство. Очевидно, так как на инвариантных множествах I_1 и I_3 имеем $h_x = const$.

Замечание 2. 1. При $q = 2$ модель Поттса совпадает с моделью Изинга, которая была изучена в работе [5].

2. В работе [6] доказано, что при $k \geq 1,\ q = 3,\ J > 0$ для модели Поттса с нулевым внешним полем все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $k \geq 2,\ q = 4,\ J > 0,\ \alpha = 0$. Тогда для модели Поттса все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.*

Доказательство. Пусть $k \geq 2,\ q = 4,\ J > 0,\ \alpha = 0$. Сделав некоторые преобразования для разностей $x_i - y_i,\ i = 1, 2, 3$ в (4), можем иметь

$$x_i - y_i = \frac{A_i(\theta - 1)}{XY} \cdot \left(\theta(y_i - x_i) + y_i \sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j) + (y_i - x_i)\sum_{j=1}^{3} y_j + \sum_{j=1}^{3} y_j - \sum_{j=1}^{3} x_j \right),$$

где $X = x_1 + x_2 + x_3 + \theta,\ Y = y_1 + y_2 + y_3 + \theta$ и A_i имеют следующие виды

$$A_i = \left(\frac{(\theta - 1)y_i + \sum_{j=1}^{3} y_j + 1}{\sum_{j=1}^{3} y_j + \theta} \right)^{k-1} + \ldots + \left(\frac{(\theta - 1)x_i + \sum_{j=1}^{3} x_j + 1}{\sum_{j=1}^{3} x_j + \theta} \right)^{k-1}, \ i = 1, 2, 3.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) + a_{13}(x_3 - y_3) = 0 \\ a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) + a_{23}(x_3 - y_3) = 0 \\ a_{31}(x_1 - y_1) + a_{32}(x_2 - y_2) + a_{33}(x_3 - y_3) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

матрица которой имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A_1(\theta-1)(\theta+y_2+y_3+1)}{XY} & \frac{(\theta-1)(1-y_1)A_1}{XY} & \frac{(\theta-1)(1-y_1)A_1}{XY} \\ \frac{(\theta-1)(1-y_2)A_2}{XY} & 1 + \frac{A_2(\theta-1)(\theta+y_1+y_3+1)}{XY} & \frac{(\theta-1)(1-y_2)A_2}{XY} \\ \frac{(\theta-1)(1-y_3)A_3}{XY} & \frac{(\theta-1)(1-y_3)A_3}{XY} & 1 + \frac{A_3(\theta-1)(\theta+y_1+y_2+1)}{XY} \end{pmatrix}.$$

Как известно, система уравнений (6) имеет только нуловое решение, если определитель матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля. После некоторых преобразований определитель матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{detA} = (T_1 - T_2 - T_3 - T_4) + (T_5 - T_6) + (T_7 - T_8) + (T_9 - T_{10}),$$

где

$$T_1 = \frac{[(\theta + y_2 + y_3 + 1)(\theta + y_1 + y_3 + 1)(\theta + y_1 + y_2 + 1) + 2(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_3)] \cdot (\theta - 1)^3 A_1 A_2 A_3}{(XY)^3},$$

$$T_2 = \frac{(\theta - 1)^3(1 - y_1)(1 - y_3)(\theta + y_1 + y_3 + 1)A_1 A_2 A_3}{(XY)^3},$$

$$T_3 = \frac{(\theta - 1)^3(1 - y_2)(1 - y_3)(\theta + y_2 + y_3 + 1)A_1 A_2 A_3}{(XY)^3},$$

$$T_4 = \frac{(\theta - 1)^3(1 - y_1)(1 - y_2)(\theta + y_1 + y_2 + 1)A_1 A_2 A_3}{(XY)^3},$$

$$T_5 = \frac{(\theta - 1)^2(\theta + y_2 + y_3 + 1)(\theta + y_1 + y_3 + 1)A_1 A_2}{(XY)^2}, \ T_6 = \frac{(\theta - 1)^2(1 - y_1)(1 - y_2)A_1 A_2}{(XY)^2},$$

$$T_7 = \frac{(\theta-1)^2(\theta+y_2+y_3+1)(\theta+y_1+y_2+1)A_1A_3}{(XY)^2}, \; T_8 = \frac{(\theta-1)^2(1-y_1)(1-y_3)A_1A_3}{(XY)^2},$$

$$T_9 = \frac{(\theta-1)^2(\theta+y_1+y_3+1)(\theta+y_1+y_2+1)A_2A_3}{(XY)^2}, \; T_{10} = \frac{(\theta-1)^2(1-y_2)(1-y_3)A_2A_3}{(XY)^2}.$$

Когда рассматривается ферромагнитный случай ($\theta > 1$), не трудно показать, что $\mathbf{detA} > 0$. Значит, система уравнений (6) имеет только нулевое решение, т.е. $x_1 = y_1, \; x_2 = y_2, \; x_3 = y_3$. Следовательно, $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in I_3$. По Лемме 2 получим требуемое. Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание 3. В работе [10] доказано, что ферромагнитная модель Поттса с q-состояниями имеет $2^q - 1$ трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Литература

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. - М.: Мир, 1992.

2. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. - М. : Мир, 1977.

3. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. - М.: Наука, 1980.

4. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific.-2013.

5. Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А. Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли. ТМФ, 1997, 111(1), с.109-117.

6. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. ТМФ, 2013, 175(2), с. 300-312.

7. Хакимов Р.М. О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. Узб. мат. журн., No 3, 2014, 134–142.

8. Khakimov R.M. New periodic Gibbs measures for q-state Potts model on a Cayley tree. JSFU. Mathematics and Phisics, 2014, 7(3), p.297-304.

9. Хакимов Р.М., Хайдаров Ф.Х. Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. ТМФ, 2016, 189(2), с. 286-295.

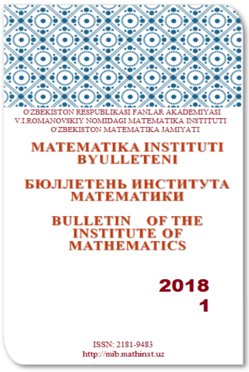
10. Külske C., Rozikov U.A., Khakimov R.M. Description of all translation-invariant (splitting) Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. Jour. Stat. Phys. **156**(1) (2014), 189-200.

11. Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Mendes J.F.F. On the three state Potts model with competing interactions on the Bethe lattice // J. Statist. Mech. 2006. 29 p.

Наманганский государственный университет
E-mail: rustam-7102@rambler.ru
Наманганский государственный университет
E-mail: aa5271359@mail.ru

Поступила: 23/03/2018

Принято: 11/06/2018



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.28-31

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.28-31

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.28-31

УДК 517.98

О крайних мерах Гиббса для HC моделей с тремя состояниями на дереве Кэли

Хакимов Р.М., Тожибоев Б.З.

Keli daraxti ustida uch holatli HC modellari uchun chekka Gibbs o'lchovlari haqida
Maqolada uch holatli HC modellari uchun chekka Gibbs o'lchovlari yagona bo'lmaydigan shartlar topilgan.

Extreme Gibbs measures for the three state HC models on a Cayley tree
In this paper we find conditions under which the extreme Gibbs measures are not unique.

1. Введение

В изучении теории мер Гиббса одним из важных задач является описание всех предельных мер Гиббса и исследование их крайности. Известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см. например, [1]-[4]), и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Работы [5]-[9] посвящены изучению мер Гиббса для HC-модели с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$ и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса не единственна. В частности, в работе [5] выделены плодородные HC модели, соответствующие графам "петля", "свисток", "жезл" и "ключ". В работе [6] были изучены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для HC модели в случае "ключ" на дереве Кэли и была доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для любой положительной активности λ. В [7] были изучены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для HC модели в случаях "свисток", "жезл" и "петля" и показано, что (случай "петля") из положительной активности не следует единственность трансляционно-инвариантных мер. Работа [9] посвящена изучению трансляционно-инвариантных мер Гиббса для HC моделей с тремя состояниями на дереве Кэли произвольного порядка. Найдены области, где трансляционно-инвариантные меры являются (не)крайними на дереве Кэли второго порядка.

В данной работе изучаются меры Гиббса для HC-моделей с тремя состояниями на дереве Кэли порядка два. Расширена область, где крайняя мера Гиббса для некоторых HC моделей не единственна.

2. Определения и известные факты

Дерево Кэли Γ^k порядка $k \geq 1$ - бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин Γ^k, $L-$ множество его ребер, и $i-$ функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l = \langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y), x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min \{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \ \text{ такой, что } \ \langle x_0, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) = n\},\ V_n = \{x \in V |\ d(x, x^0) \leq n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим (множество "прямых потомков"вершины x)

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x "занята" , а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x "вакантна".

Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x),\ x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в $\Phi = \{0, 1, 2\}$. Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω. Аналогичном образом можно определить конфигурации в V_n (W_n), и множество всех конфигураций в V_n (W_n) обозначается как Ω_{V_n} (Ω_{W_n}).

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G. С помощью графа G мы определим G-допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация σ называется G-допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x),\ \sigma(y)\}-$ребро графа G для любой ближайшей пары соседей $x,\ y$ из V (из V_n). Обозначим множество $G-$допустимых конфигураций через Ω^G $(\Omega^G_{V_n})$.

Замечание 1. Для рассматриваемой модели условие допустимости на конфигурацию мотивируется тем, что если x, y считать объектами обслуживаний (при этом в вершине со спином нуль отсутствует обслуживание), то значения спина 1 или 2 в вершинах x и y означают качество обслуживания данных объектов.

Множество активности для графа G есть функция $\lambda : G \to R_+$ из множества вершин G во множество положительных действительных чисел. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \ \{0, 1, 2\}$ называется ее "активностью"(см.[5]).

Для данных G и λ определим гамильтониан $G-$НС-модели как

$$H^\lambda_G(\sigma) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \ \notin \Omega^G. \end{cases}$$

Для $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$ положим

$$\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

число занятых вершин в V_n. Здесь

$$\mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_n(x) \geq 1, \\ 0, & \text{если } \sigma_n(x) = 0. \end{cases}$$

Пусть $z :\ x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in R^3_+$ векторнозначная функция на V. Для $n = 1, 2, \ldots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega^G_{V_n}$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}. \tag{1}$$

Здесь Z_n- нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\widetilde{\sigma}_n \in \Omega^G_{V_n}} \lambda^{\#\widetilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\widetilde{\sigma}(x),x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega^G_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \cdot \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^G_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть конкатенация конфигураций, т.е. $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega^G_{V_n}$ такое, что $(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)|_{V_{n-1}} = \sigma_{n-1}$ и $(\sigma_{n-1} \vee \omega_n)|_{W_n} = \omega_n$. В этом случае существует единственная мера μ на (Ω^G, B) такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Omega^G_{V_n}$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega^G :\ \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $B-\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G.

Определение 1. Мера μ, определенная формулой (1) с условием (2), называется $(G-)$НС-мерой Гиббса с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z : x \in V \backslash \{x^0\} \mapsto z_x$. При этом НС-мера Гиббса, соответствующая постоянной функции $z_x \equiv z$, называется трансляционно-инвариантной гиббсовской мерой (ТИГМ).

Определение 2. [5] Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Из работы [5] известно, что существуют только четыре типа плодородных графов с тремя вершинами $0, 1, 2$ (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеют следующие виды:

$$\begin{array}{ll} \textit{петля}: & \{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}; \\ \textit{жезл}: & \{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}\{2,2\}; \\ \textit{ключ}: & \{0,0\}\{0,1\}\{0,2\}\{1,1\}; \\ \textit{свисток}: & \{0,0\}\{0,1\}\{1,2\}. \end{array}$$

Пусть $L(G)-$ множество ребер графа G, обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G, т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x, гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

Теорема 1.[7] Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z'_{1,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11} z'_{1,y} + a_{12} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

$$z'_{2,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21} z'_{1,y} + a_{22} z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z'_{1,y} + a_{02} z'_{2,y}},$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}, \quad i = 1, 2$.

Мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0, \ i = 1, 2$. Тогда для любых функций $x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$, удовлетворяющих равенству

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}}, \quad i = 1, 2,$$

существует единственная $G-$НС-мера Гиббса μ и наоборот.

Изучим трансляционно-инвариантные решения, т.е. $z_x = z \in R_+^2$ не зависит от $x, \ x \neq x_0$.

Из работ [7] и [9] при $k = 2$ известны следующие теоремы.

Теорема 2. [7] Пусть $k = 2$ и $\lambda_{cr} = \frac{9}{4}$. Тогда для НС-модели в случае $G =$ *петля* при $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существует единственная ТИГМ μ_0, а при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три ТИГМ $\mu_0, \ \mu_1, \ \mu_2$.

Теорема 3. [7] Пусть $k = 2$ и $\lambda^*_{cr} = 1$. Тогда для НС-модели в случае $G =$ *жезл* при $\lambda \leq \lambda^*_{cr}$ существует единственная ТИГМ μ^*_0, а при $\lambda > \lambda^*_{cr}$ существуют ровно три ТИГМ $\mu^*_0, \ \mu^*_1, \ \mu^*_2$.

Теорема 4. [9] Пусть $k = 2$ и $\lambda_0 \approx 7,0355$. Тогда для НС-модели в случае $G =$ *петля* верны следующие утверждения:

1. Мера μ_0 при $\lambda > \lambda_0$ не является крайней.

2. Мера μ_0 при $0 < \lambda < \lambda_0$ и меры μ_1, μ_2 при $2.25 < \lambda < 0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1)$ являются крайними.

Теорема 5. [9] Пусть $k = 2$, $\lambda_1 \approx 2.287572$ и $\lambda_2 \approx 1.303094$. Тогда для НС-модели в случае $G =$ *жезл* верны следующие утверждения:

1. Мера μ^*_0 при $\lambda > \lambda_1$ не является крайней.

1. мера μ^*_0 при $0 < \lambda < \lambda_1$ и меры $\mu^*_1, \ \mu^*_2$ при $1 < \lambda < \lambda_2$ являются крайними.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 6. Если $k = 2$, то для НС модели в случае $G =$ *петля* при $0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1) < \lambda < \lambda_0$ кроме μ_0 существует по крайней мере еще одна крайняя мера Гиббса.

Доказательство. Пусть $k = 2$. Из Теоремы 2 известно, что при $0 < \lambda \leq \lambda_{cr}$ существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса μ_0. В силу Теоремы 4 при $0 < \lambda < \lambda_0$ мера μ_0 является крайней, а при $\lambda > \lambda_{cr} = 2,25$ имеем меру μ_0 и по крайней мере две меры μ_1, μ_2, упомянутых в Теореме 2. Если предположим, что меры μ_1, μ_2 (или другие меры, если они существуют) не являются крайними в интервале $(0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1), \lambda_0)$, то остается только одна крайняя мера μ_0. Но в этом случае не крайную меру нельзя выразить с помощью единственной меры μ_0. Следовательно, при $0.5 \cdot (5\sqrt{2} - 1) < \lambda < \lambda_0$ по крайней мере одна новая мера должна быть крайней. Теорема доказана. $\square$

Теорема 7. Если $k = 2$, то для НС модели в случае $G =$ *жезл* при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ существуют по крайней мере две крайние меры Гиббса, одна из которых есть μ^*_0.

Доказывается аналогично предыдущей теореме.

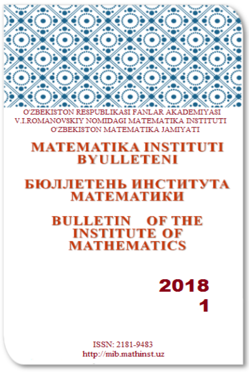
Литература

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. - М.: Мир, 1992.
2. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. - М. : Мир, 1977.
3. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. - М.: Наука, 1980.
4. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific.-2013.
5. Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theor, Series B. - 1999. - V. 77. - P. 221- 262.
6. Martin J., Rozikov U.A., Suhov Yu.M. A three state hard-core model on a Cayley tree. J. Nonlinear Math. Phys. 2005, V. 12, No 3. P. 432-448.
7. Rozikov U.A., Shoyusupov Sh.A. Fertile three state HC models on Cayley tree, Theor. Math. Phys. 156 (3) (2008), 1319–1330.
8. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для плодородных моделей HC с тремя состояниями на дереве Кэли. ТМФ, 2015, 183(3), с. 441-449.
9. Rozikov U.A, Khakimov R.M. Gibbs measures for fertile three-state hard core models on a Cayley tree. Queueing Systems, 2015, 81(1), p. 49-69.

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан
E-mail: rustam-7102@rambler.ru
Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан
E-mail: ab0261127@mail.ru

Поступила: 23/03/2018

Принято: 11/06/2018



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.32-39

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.32-39

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.32-39

UDC 512.554.38 (MSC 2010: 17A32, 17A36)

On Leibniz-derivation of order k of the nilpotent Leibniz algebras

Khudoyberdiyev A. Kh., Sattarov A. M.

Nilpotent Leibniz algebralarining k tartibli Leibniz differensiallashlari

Ma'lumki, nilindeksi s bo'lgan ihtiyoriy nilpotent Leibniz algebrasi $\left[\frac{s}{2}\right]+1$-tartibli nilpotent bo'lmagan Leibniz differensiallashga ega. Maqolada ixtiyoriy $\left[\frac{s}{2}\right]$ - tartibli Leibniz differensiallashi nilpotent bo'lgan Leibniz algebrasi mavjudligi ko'rsatilgan.

О Лейбницевых дифференцированиях порядка k в нильпотентных алгебр Лейбница

Известно, что произвольная нильпотентная алгебра Лейбница нильиндекса s имеет ненильпотентное Лейбницево дифференцирование порядка $\left[\frac{s}{2}\right]+1$. В данной работе показано существование нильпотентной алгебры Лейбница, у которой всякое Лейбницево дифференцирование порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$ нильпотентно.

1. Introduction

The notion of Leibniz algebra has been introduced in [9] as a non-antisymmetric generalization of Lie algebras. During the last 25 years the theory of Leibniz algebras has been actively studied and many results of the theory of Lie algebras have been extended to Leibniz algebras. Since the study of derivations and automorphisms of a Lie algebra plays essential role in the structure theory, the natural question arises whether the corresponding results for Lie algebras can be extended to more general objects.

In 1955, Jacobson [7] proved that a Lie algebra over a field of characteristic zero admitting a non-singular derivation is nilpotent. The problem, whether the inverse of this statement is correct, remained open until work of Dixmier and Lister [4], where an example of an nilpotent Lie algebra, whose all derivations are nilpotent (and hence, singular), was constructed. Such types of Lie algebras are called characteristically nilpotent Lie algebras.

If all derivations of an algebra are nilpotent (inner derivations are nilpotent, as well), then by Engel's theorem we conclude that a characteristically nilpotent Lie algebra is nilpotent. Inverse statement is not true, because there exist nilpotent Lie algebras admitting non-nilpotent derivations. Therefore, the subset of characteristically nilpotent Lie algebras is strictly embedded into the set of nilpotent Lie algebras.

The study of derivations of Lie algebras lead to appearance of natural generalization – pre-derivations of Lie algebras [11]. In [2] it was proved that Jacobson's result is also true in terms of pre-derivations. Similar to the example of Dixmier and Lister several examples of nilpotent Lie algebras, whose pre-derivations are nilpotent were presented in [3]. Such Lie algebras are called strongly nilpotent.

In paper [10] a generalized notion of derivations and pre-derivation of Lie algebras is defined as Leibniz-derivation of order k and it was proved that a Lie algebra is nilpotent if and only if it admits an invertible Leibniz-derivation. This result is extended for the Leibniz algebras in [5]. More exactly, it is proved that any nilpotent Leibniz algebra with nilindex equal to s has an invertible Leibniz-derivation of order $\left[\frac{s}{2}\right]+1$.

In this paper we investigate derivations and pre-derivations of nilpotent algebras. Moreover, we show that there exist an n-dimensional nilpotent Leibniz algebra whose any Leibniz derivation of order $\left[\frac{s}{2}\right]$ is nilpotent, where s is a nilindex of the Leibniz algebra.

2. Preliminaries

In this section we give necessary definitions and preliminary results.

Definition 1. *An algebra $(L, [-,-])$ over a field F is called a (right) Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$, the so-called Leibniz identity*

$$\big[[x,y],z\big] = \big[[x,z],y\big] + \big[x,[y,z]\big]$$

holds.

Recall that derivation of Leibniz algebra is a linear transformation, such that

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)],$$

for any $x, y \in L$.

Definition 2. *A linear transformation P of a Leibniz algebra L is called Leibniz derivation of order k or k-derivation if for any $x_1, x_2, x_3, ..., x_k \in L$,*

$$P([[[[x_1,x_2],x_3],\dots],x_k]) = [[[[P(x_1),x_2],x_3],\dots],x_k] + [[[[x_1,P(x_2)],x_3],\dots],x_k]+$$

$$+[[[[x_1,x_2],P(x_3)],\dots],x_k] + \dots + [[[[x_1,x_2],x_3]\dots],P(x_k)]].$$

Note that Leibniz derivation of order 2 is a derivation and Leibniz derivation of order 3 are called pre-derivation

A nilpotent Leibniz algebra is called *characteristically nilpotent* if all its derivations are nilpotent. We say that a Leibniz algebra is *strongly nilpotent* if its any pre-derivation is nilpotent.

Denote by $LDer_k(L)$ the set of all Leibniz-derivations of order k for a Leibniz algebra L and let $LDer(L)$ be the set of all Leibniz-derivations, i.e. $LDer(L) = \bigcup_{n\in N} LDer_n(L)$.

Lemma 1.[5] *The following statements are true*

$$(1)\ If\ \ s,t \in N\ and\ s \mid t,\ the\ L\ Der_{s+1}(L) \subset LDer_{t+1}(L),$$

$$(2)\ for\ any\ k,l \in N\ ,LDer_k(L) \cap LDer_l(L) \subseteq LDer_{k+l-1}.$$

From the previous lemma we have that any derivation of a Leibniz algebras is a pre-derivation (moreover, Leibniz-derivation of any order). It implies that a strongly nilpotent Leibniz algebra is characteristically nilpotent.

For a given Leibniz algebra L consider the following central lower series:

$$L^1 = L, \qquad L^{k+1} = [L^k, L^1] \qquad k \geq 1.$$

Definition 3. *A Leibniz algebra L is called nilpotent if there exists $s \in \mathbb{N}$ such that $L^s = 0$.*

In the following Proposition it is shown that any finite-dimensional nilpotent Leibniz algebra has an invertible Leibniz derivation.

Proposition 1.[5] *Every nilpotent Leibniz algebra with a nilindex equal to s has an invertible Leibniz derivation of order $[\frac{s}{2}]+1$.*

Definition 4. *A Leibniz algebra L is said to be filiform if $\dim L^i = n - i$, where $n = \dim L$ and $2 \leq i \leq n$.*

Note that filiform Leibniz algebras a subclass of nilpotent algebras which nilindex is equal to the dimension of the algebra. The following theorem decomposes all n-dimensional filiform Leibniz algebras into three families of algebras.

Theorem 1. [1], [6] *Any complex n-dimensional filiform Leibniz algebra admits a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that the table of multiplication of the algebra has one of the following forms:*

$$F_1(\alpha_4,\dots,\alpha_n,\theta) = \begin{cases} [e_1,e_1] = e_3, \quad [e_i,e_1] = e_{i+1} \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1,e_2] = \sum\limits_{t=4}^{n-1} \alpha_t e_t + \theta e_n, \\ [e_j,e_2] = \sum\limits_{t=j+2}^{n} \alpha_{t-j+2} e_t, \quad 2 \leq j \leq n-2. \end{cases}$$

$$F_2(\beta_4,\dots,\beta_n,\gamma) = \begin{cases} [e_1,e_1] = e_3, \quad [e_i,e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1,e_2] = \sum\limits_{t=4}^{n} \beta_t e_t, \quad [e_2,e_2] = \gamma e_n, \\ [e_j,e_2] = \sum\limits_{t=j+2}^{n} \beta_{t-j+2} e_t, \quad 3 \leq j \leq n-2. \end{cases}$$

$$F_3(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_1]=\theta_1 e_n,\ [e_1,e_2]=-e_3+\theta_2 e_n,\ [e_2,e_2]=\theta_3 e_n,\\ [e_i,e_j]=-[e_j,e_i]\in span<e_{i+j+1},\dots,e_n>, 2\le i<j\le n-1,\\ [e_i,e_{n+1-i}]=-[e_{n+1-i},e_i]=\alpha(-1)^{i+1}e_n, \quad 2\le i\le n-1.\end{cases}$$

where all omitted products are equal to zero and $\alpha\in\{0,1\}$ for even n and $\alpha=0$ for odd n. Moreover, the structure constants of an algebra from $F_3(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ should satisfy the Leibniz identity.

It should be noted that all non-characteristic nilpotent filiform Leibniz algebras were classified in [8].

3. k-derivations of filiform Leibniz algebras

In this section we give some results according to Leibniz-derivation of Leibniz algebras.

The next example presents 7-dimensional Leibniz algebra possessing only nilpotent derivations, but admits non nilpotent pre-derivation.

Example 1. *Let L be an 7-dimensional Leibniz algebra and let $\{e_1,e_2,\dots,e_7\}$ be a basis of L with the following table of multiplication:*

$$\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \qquad 2\le i\le 6,\\ [e_1,e_2]=e_4-2e_5+5e_6+e_7,\\ [e_2,e_2]=e_4-2e_5+5e_6,\\ [e_3,e_2]=e_5-2e_6+5e_7,\\ [e_4,e_2]=e_6-2e_7,\\ [e_5,e_2]=e_7,\end{cases}$$

(omitted products are equal to zero). Using derivation property it is easy to see that every derivation of L has the following matrix form:

$$\begin{pmatrix}0&0&a_3&a_4&a_5&a_6&a_7\\0&0&a_3&a_4&a_5&a_6&b_7\\0&0&0&a_3&a_4&a_5&a_6\\0&0&0&0&a_3&a_4&a_5\\0&0&0&0&0&a_3&a_4\\0&0&0&0&0&0&a_3\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Any pre-derivation of this algebra have the matrix form:

$$\begin{pmatrix}a_1&a_1&a_3&a_4&a_5&a_6&a_7\\0&2a_1&a_3&a_4&a_5&b_6&b_7\\0&0&3a_1&a_3+a_1&a_4-2a_1&c_6&c_7\\0&0&0&4a_1&a_3+2a_1&a_4-4a_1&a_5+10a_1\\0&0&0&0&5a_1&a_3+3a_1&a_4-6a_1\\0&0&0&0&0&6a_1&a_3+4a_1\\0&0&0&0&0&0&7a_1\end{pmatrix}.$$

Thus, this Leibniz algebra is characteristically nilpotent, but is not strongly nilpotent.

In the next example we present strongly nilpotent Leibniz algebra.

Example 2. *Let L be an 7-dimensional Leibniz algebra and let $\{e_1,e_2,\dots,e_7\}$ be a basis of L with the following table of multiplication:*

$$\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le 6,\\ [e_1,e_2]=e_4,\\ [e_i,e_2]=e_{i+2}, \quad 2\le i\le 5,\end{cases}$$

Any pre-derivation of the this algebra have the matrix form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & c_6 & c_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Thus, this Leibniz algebra is strongly nilpotent.

Consider the following $n = 2k+1$ dimensional filiform Leibniz algebra.

$$F_1(1,0,\ldots,0) = \begin{cases} [e_1,e_1] = e_3,\ [e_i,e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-1, \\ [e_1,e_2] = e_4,\ [e_j,e_2] = e_{j+2}, & 2 \le j \le n-2. \end{cases}$$

Since $F_1(1,0,\ldots,0)$ is a filiform, the nilindex of this algebra equal to $s = 2k+1$. According to Proposition such filiform Leibniz algebra has an invertible derivation of order $k+1$. In the following proposition we describe all Leibniz derivation of order k, i.e., its order is equal to $[\frac{s}{2}]$.

Theorem 2. *Any Leibniz-derivation of order k of $(2k+1)$-dimensional filiform Leibniz algebra $F_1(1,0,\ldots,0)$ have the following form:*

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & a_{1,k+3} & \cdots & a_{1,2k} & a_{1,2k+1} \\
0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & a_{2,k+3} & \cdots & a_{2,2k} & a_{2,2k+1} \\
0 & 0 & 0 & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & a_{3,k+3} & \cdots & a_{3,2k} & a_{3,2k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{k,k+3} & \cdots & a_{k,2k} & a_{k,2k+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,2k-1} & a_{1,2k} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2k-2} & a_{1,2k-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,2k-3} & a_{1,2k-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,4} & a_{1,5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1,3} & a_{1,4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Proof. Let P be a k-derivation of $(2k+1)$-dimensional filiform Leibniz algebra $F_1(1,0,\ldots,0)$. Put

$$P(e_i) = \sum_{t=1}^{2k+1} a_{i,t}e_t, \quad 1 \le i \le k.$$

Note that $P([[[[e_1,e_1],e_1],\ldots],e_i]) = 0$, for any i $(3 \le i \le k)$.

By the property of k-derivation

$$P([[[[e_1,e_1],e_1],\ldots],e_i]) = [[[[P(e_1),e_1],e_1],\ldots],e_i] + [[[[e_1,P(e_1)],\ldots],e_1],e_i] + \ldots +$$

$$+[[[[e_1,e_1],e_1],\ldots],P(e_i)] = [e_k, \sum_{t=1}^{2k+1} a_{i,t}e_t] = a_{i,1}e_{k+1} + a_{i,2}e_{k+2},$$

we have $a_{i,1} = a_{i,2} = 0$, for $3 \le i \le k$.

Considering the chain of equalities

$$P(e_{k+1}) = P([[[[e_2,e_1],e_1],\ldots],e_1]) = [[[[P(e_2),e_1],e_1],\ldots],e_1] + [[[[e_2,P(e_1)],\ldots],e_1],e_1] +$$

$$+[[[[e_2,e_1],P(e_1)],\ldots],e_1] + \ldots + [[[[e_2,e_1],e_1],\ldots],P(e_1)] =$$

$$= [[[[\sum_{t=1}^{2k+1} a_{2,t}e_t, e_1], e_1], \ldots], e_1] + [[[[e_2, \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t], \ldots], e_1], e_1] + \ldots + [[[[e_2, e_1], e_1], \ldots], \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t] =$$

$$= [[[a_{2,1}e_3 + \sum_{t=2}^{2k} a_{2,t}e_{t+1}, e_1], \ldots], e_1] + [[[a_{1,1}e_3 + a_{1,2}e_4, e_1], \ldots], e_1], e_1] + \ldots + [[[e_3, e_1], \ldots], \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t] =$$

$$= ((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{2,t-k+1}e_t.$$

we obtain

$$P(e_{k+1}) = ((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{2,t-k+1}e_t.$$

Similarly, from the property of k-derivation

$$P([[[e_{i+1}, e_1], \ldots], e_1]) = [[[P(e_{i+1}), e_1], \ldots], e_1] + [[[e_{i+1}, P(e_1)], \ldots], e_1] + \ldots + [[[e_{i+1}, e_1], \ldots], P(e_1)]$$

for $2 \leq i \leq k-1$ we have

$$P(e_{k+i}) = (k-1)a_{1,1}e_{k+i} + (k-1)a_{1,2}e_{k+i+1} + \sum_{t=3}^{k+2} a_{i+1,t}e_{k+t-1}. \tag{1}$$

Now consider

$$P(e_{2k}) = P([[[[e_{k+1}, e_1], e_1], ...], e_1]) = [[[[P(e_{k+1}), e_1], e_1], ...], e_1]+$$
$$+[[[[e_{k+1}, P(e_1)], ...], e_1], e_1] + ... + [[[[e_{k+1}, e_1], e_1], ...], P(e_1)] =$$
$$= [[[[((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{2,t-k+1}e_t, e_1], e_1], ...], e_1]+$$
$$+[[[[e_{k+1}, \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t], ...], e_1], e_1] + ... + [[[[e_{k+1}, e_1], e_1], ...], \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t] =$$
$$= ((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{2k} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{2k+1} + (k-1)a_{1,1}e_{2k} + (k-1)a_{1,2}e_{2k+1} =$$
$$= ((2k-1)a_{1,1} + a_{1,2})e_{2k} + ((2k-2)a_{1,2} + a_{1,3})e_{2k+1}.$$

Thus, we get

$$P(e_{2k}) = ((2k-1)a_{1,1} + a_{1,2})e_{2k} + ((2k-2)a_{1,2} + a_{1,3})e_{2k+1}.$$

Similarly, from

$$P([[[e_{k+2}, e_1], ...], e_1]) = [[[P(e_{k+2}), e_1], ...], e_1] + [[[e_{k+2}, P(e_1)], ...], e_1] + ... + [[[e_{k+2}, e_1], ...], P(e_1)]$$

we get

$$P(e_{2k+1}) = ((2k-2)a_{1,1} + a_{3,3})e_{2k+1}.$$

Now consider

$$P([[[[e_{k+1}, e_2], e_1], \ldots], e_1]) = [[[[P(e_{k+1}), e_2], e_1], \ldots], e_1]+$$
$$+[[[[e_{k+1}, P(e_2)], \ldots], e_1], e_1] + \ldots + [[[[e_{k+1}, e_2], e_1], \ldots], P(e_1)] =$$
$$= [[[[((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{2,t-k+1}e_t, e_2], e_1], \ldots], e_1]+$$
$$+[[[[e_{k+1}, \sum_{t=1}^{2k+1} a_{2,t}e_t], \ldots], e_1], e_1] + \ldots + [[[[e_{k+1}, e_2], e_1], \ldots], \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t] =$$
$$= ((k-1)a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2})e_{2k+1} + a_{2,1}e_{2k} + a_{2,2}e_{2k+1} + (k-2)a_{1,1}e_{2k+1} =$$
$$= a_{2,1}e_{2k} + ((2k-3)a_{1,1} + a_{2,1} + 2a_{2,2})e_{2k+1}.$$

On the other hand

$$P[[e_{k+1}, e_2], \dots, e_1] = P(e_{2k+1}) = ((2k-2)a_{1,1} + a_{3,3})e_{2k+1}.$$

Comparing the coefficients at the basis element, we obtain

$$a_{2,1} = 0, \quad 2a_{2,2} = a_{1,1} + a_{3,3}.$$

Similarly,

$$P([[[e_k, e_2], \dots], e_1]) = [[[P(e_k), e_2], \dots], e_1] + [[[e_k, P(e_2)], \dots], e_1] + \dots + [[[e_k, e_2], \dots], P(e_1)] =$$

$$= ((k-2)a_{1,1} + a_{2,2} + a_{k,k})e_{2k} + ((k-2)a_{1,2} + a_{k,k+1})e_{2k+1} + \sum_{t=k+3}^{2k-1} a_{k,t-k}e_t.$$

On the other hand

$$P[[e_k, e_2], \dots, e_1] = P(e_{2k}) = ((2k-1)a_{1,1} + a_{1,2})e_{2k} + ((2k-2)a_{1,2} + a_{1,3})e_{2k+1}.$$

Comparing the coefficients at the basis element, we obtain

$$\begin{gathered} (k+1)a_{1,1} + a_{1,2} = a_{2,2} + a_{k,k}, \quad ka_{1,2} + a_{1,3} = a_{k,k+1}. \\ a_{k,t} = 0, \ 3 \le t \le k-1, \end{gathered} \tag{2}$$

Consider the property of k-derivation

$$P([[[e_1, e_1], \dots], e_1]) = [[[P(e_1), e_1], \dots], e_1] + [[[e_1, P(e_1)], \dots], e_1] + \dots + [[[e_1, e_1], \dots], P(e_1)] =$$

$$= [[[\sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t, e_1], \dots], e_1] + [[[e_1, \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t], \dots], e_1] + \dots + [[[e_1, e_1], \dots], \sum_{t=1}^{2k+1} a_{1,t}e_t] =$$

$$= (ka_{1,1} + a_{1,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{1,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{1,t-k+1}e_t.$$

On the other hand,

$$P([[[e_1, e_1], \dots], e_1]) = P(e_{k+1}) = ((k-1)a_{1,1} + a_{2,2})e_{k+1} + ((k-1)a_{1,2} + a_{2,3})e_{k+2} + \sum_{t=k+3}^{2k+1} a_{2,t-k+1}e_t$$

Comparing the coefficients at the basis element, we get

$$a_{2,2} = a_{1,1} + a_{1,2} \quad a_{2,i} = a_{1,i}, \quad 3 \le i \le k+2.$$

Similarly, from the equality

$$P([[[e_1, e_2], \dots], e_1]) = [[[P(e_1), e_2], \dots], e_1] + [[[e_1, P(e_2)], \dots], e_1] + \dots + [[[e_1, e_2], \dots], P(e_1)] =$$

$$= (ka_{1,1} + 2a_{1,2})e_{k+2} + ((k-2)a_{1,2} + a_{1,3})e_{k+3} + \sum_{t=k+4}^{2k+1} a_{1,t-k}e_t$$

and

$$P([[[e_1, e_2], \dots], e_1]) = P(e_{k+2}) = \big((k-1)a_{1,1} + a_{3,3}\big)e_{k+2} + \big((k-1)a_{1,2} + a_{3,4}\big)e_{k+3} + \sum_{t=k+4}^{2k+1} a_{3,t-k+1}e_t$$

we obtain

$$\begin{gathered} a_{3,3} = a_{1,1} + 2a_{1,2}, \quad a_{3,4} = a_{1,3} - a_{1,2}, \\ a_{3,i+1} = a_{1,i}, \qquad 4 \le i \le k+1. \end{gathered}$$

Now consider $P([[[[e_i, e_2], e_1], \dots], e_1])$ for $2 \le i \le k-1$. Using the property of k-derivation, inductively we obtain

$$P(e_{k+i}) = P([[[[e_i, e_2], e_1], \dots], e_1]) = [[[P(e_i), e_2], \dots], e_1] + [[[e_i, P(e_2)], \dots], e_1] + \dots + [[[e_i, e_2], \dots], P(e_1)] =$$

$$= [[[[(a_{1,1}+(i-1)a_{1,2})e_i+(a_{1,3}-(i-2)a_{1,2})e_{i+1}+\sum_{t=i+2}^{k+2}a_{1,t-i+2}e_t+\sum_{t=k+3}^{2k+1}a_{i,t}e_t,e_2],e_1],\dots],e_1]+$$

$$+[[[[e_i,(a_{1,1}+a_{1,2})e_2+\sum_{t=3}^{k+2}a_{1,t}e_t+\sum_{t=k+3}^{2k+1}a_{2,t}e_t],\dots],e_1],e_1]+\dots+[[[[e_i,e_2],e_1],\dots],\sum_{t=1}^{2k+1}a_{1,t}e_t]=$$

$$[[[(a_{1,1}+(i-1)a_{1,2})e_{i+2}+(a_{1,3}-(i-2)a_{1,2})e_{i+3}+=\sum_{t=i+4}^{k+4}a_{1,t-i}e_t,e_1],\dots],e_1]+$$

$$+[[[[(a_{1,1}+a_{1,2})e_{i+2},e_1],\dots],e_1],e_1]+\dots+[[[e_{i+2},e_1],\dots],\sum_{t=1}^{2k+1}a_{1,t}e_t]=$$

$$=(ka_{1,1}+ia_{1,2})e_{k+i}+((k-i)a_{1,2}+a_{1,3})e_{k+i+1}+\sum_{t=k+i+2}^{2k+1}a_{1,t-k-i+2}e_t.$$

On the other hand, $P(e_{k+i})$ defined as the equality (1). Comparing the coefficients at the basis elements of the previous equality and the equality (1) we have

$$\begin{cases} a_{i+1,i+1}=a_{1,1}+ia_{1,2}, & \\ a_{i+1,i+2}=a_{1,3}-(i-1)a_{1,2}, & \\ a_{i+1,j}=0, & 3\le j\le i, \\ a_{i+1,j+i-1}=a_{1,j}, & 4\le j\le k-i+3, \end{cases} \tag{3}$$

where $3\le i\le k-1$.

From the first two equalities of (3) for $i=k-1$ we get

$$a_{k,k}=a_{1,1}+(k-1)a_{1,2},\quad a_{k,k+1}=a_{1,3}-(k-2)a_{1,2}.$$

From equality (2) we have

$$a_{k,k}=ka_{1,1},\quad a_{k,k+1}=ka_{1,2}+a_{1,3}.$$

From these equalities immediately we have $a_{1,1}=a_{1,2}=0$, which implies $a_{i,i}=0$, $a_{i,i+1}=a_{1,3}$ for $2\le i\le k$.

Corollary 1. *Any Leibniz derivation of order k of $(2k+1)$-dimensional filiform Leibniz algebra $F_1(1,0,\dots,0)$ is nilpotent.*

References

1. Ayupov SH.A., Omirov.B.A. On some classes of nilpotent Leibniz algebras, Siberian Math. J. 42 (1) (2001) 15–24.

2. Bajo.I. *Lie algebras admitting non-singular prederivations.* Indag. Mathem., 8 (4) (1997) 433–437.

3. Burde.D. *Lie algebra prederivations and strongly nilpotent Lie algebras.* Comm. Algebra, 30 (7) (2002) 3157–3175.

4. Dixmer.J., Lister.W.G. *Derivations of nilpotent Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957) 155–158.

5. Fialowski.A., Khudoyberdiyev.A.Kh., Omirov.B.A. A characterization of nilpotent Leibniz algebras, J. Alg. Rep. Theory 16 (5) (2013) 1489–1505.

6. Gómez.J.R., Omirov.B.A., On classification of complex filiform Leibniz algebras, Algebra Colloquium, 22(1) (2015) 757–774.

7. Jacobson.N., A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) 281–283.

8. Khudoyberdiyev.A.Kh., Ladra.M, OmirovB.A., The classification of non-characteristically nilpotent Leibniz algebras, J. Alg. Rep. Theory. 17 (3) (2014) 945–969.

9. Loday.J.L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, Enseign. Math. (2) 39 (3-4) (1993) 269–293.

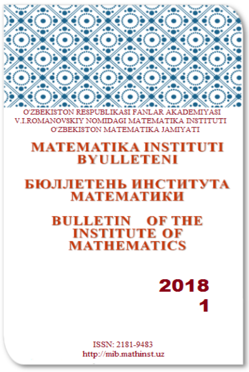
10. Moens.W.A. A characterisation of nilpotent Lie algebras by invertible Leibniz-derivations. Comm. in Algebra 41 (7) (2013) 2427–2440

11. Muller.D. *Isometries of bi-invariant pseudo-Remannian metrics on Lie groups.* Geom. Dedicata, 29 (1989) 65–96.

National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 100174, Uzbekistan
E-mail: khabror@mail.ru
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: saloberdi90@mail.ru

Received: 18/06/2018

Accepted: 22/06/2018



Matematika Instituti Byulleteni
2018,№1, b.40-49

Bulletin of the Institute of Mathematics
2018,№1, pp.40-49

Бюллетень Института математики
2018,№1, pp.40-49

MSC 2010: 35A02, 35J25, 35J70

A problem with conditions given on piece of boundary characteristic and on the line of degeneracy for a class of mixed type equations

Ruziev M. Kh.

Aralash tipdagi tenglamalarning bir sinfi uchun shartlar buzulish chizig'ida va chegaraviy xarakteristika bo'lagida berilgan masala. Maqolada aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masala o'rganilgan. Masala ychimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida, masala yechimining mavjudligi esa integral tenglamalar usuli bilan isbotlangan.

Задача с условиями заданными на куске граничной характеристики и на линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа.
В работе изучается краевая задача для уравнения смешанного типа. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения методом интегральных уравнений.

1. Introduction and formulation of the problem

The initial fundamental results were obtained by F.Tricomi for the mixed type equation $yu_{xx} + u_{yy} = 0$. After these works the theory of boundary value problems for mixed type equations was developed due to A.E.Holmgren,S.Gellerstedt, M.Cibrario, F.Frankl,A.V.Bitsadze, M.Protter and others.The existence and the uniqueness of solutions of various mixed problems for mixed type equations in bounded domains were studied by many authors, for instance see [2, 5, 6, 7, 10, 11, 13]. Boundary value problems for mixed type equations in an infinite domains were investigated in the works [3, 12, 15].

Let $D = D^+ \cup D^- \cup I$ be a domain of the complex plane $z = x + iy$, where D^+ is a half-plane $y > 0$, D^- is a finite domain of the half plane $y < 0$, bounded by characteristics AC and BC of the equation

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \tag{1}$$

outgoing from the points $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, and by the segment AB of the straight line $y = 0$, $I = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$. In (1) m is positive real number.

Moreover, we introduce D_R^+ as a finite domain separated from D^+ by the arc $A_R B_R$ of the normal curve

$$x^2 + 4y^{m+2}/(m+2)^2 = R^2, -R \le x \le R, 0 \le y \le \left(\frac{(m+2)R}{2}\right)^{2/(m+2)},$$

and with the points $A_R(-R, 0)$,$B_R(R, 0)$.

In the further considerations we use the following notations:

$\bar{I}_1 = \{(x, y) : -\infty < x \le -1, y = 0\}$, $\bar{I}_2 = \{(x, y) : 1 \le x < \infty\}$,

$C_0(respectively, C_1)$ is the point of intersection of the characteristic $AC(BC)$ with characteristic outgoing from the point $E(c, 0)$, where $c \in I$ is an arbitrary fixed number. Finally, $D_R = D_R^+ \cup D^-$, so D_R is a bounded subdomain of the unbounded domain D.

Let $p(x) \in C^1[-1,c]$ be a diffeomorphism that maps the interval [-1,c] onto [c,1], while we assume $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. As an example we may take the linear function $p(x) = \delta - kx$, where $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$.

Problem B**.** Find a function $u(x,y)$ in the domain D with properties:

1. function $u(x,y)$ is continuous on any subdomain $\bar{D}_R$ of the unbounded domain D;
2. $u(x,y)$ belongs to the space $C^2(D^+)$ and satisfies Eq.(1) in that domain;
3. $u(x,y)$ is a generalized solution of the class R_1 ($\tau'(x)$,$\nu(x) \in H$; some explanations for functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are given below) in the domain D^- [14];
4. it satisfies the relation

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0,\ y \geq 0, R^2 = x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2}; \tag{2}$$

5. $u(x,y)$ satisfies the boundary conditions

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x), x \in \bar{I}_i, i = 1,2; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi(x), -1 \leq x \leq (c-1)/2; \tag{4}$$

$$u(p(x),0) = \mu u(x,0) + f(x), -1 \leq x \leq c \tag{5}$$

and the conjugation condition

$$\lim_{y\to+0} y^{-m/2}u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{-m/2}u_y, x \in I/\{c\}, \tag{6}$$

these limits may have at $x = \pm 1$, $x = c$ a singularity of order less than one,

here $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1,2$ are given functions with the following regularity assumptions: $f(x) \in C[-1,c] \cap C^{(1,\delta_1)}(-1,c)$, $f(c) = 0$, $f(-1) = 0$, $\psi(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^{1,\delta_2}(-1,(c-1)/2)$, $\psi(-1) = 0$, μ is a given constant, the functions $\varphi_i(x)$ are expressed as $\varphi_1(x) = (1+x)\bar{\varphi}_1(x)$ and $\varphi_2(x) = (1-x)\bar{\varphi}_2(x)$ in a neighborhood of the points $x = -1$, $x = 1$, and they satisfy a Hölder condition on any interval $(-N,-1)$, $(1,N)$, $N > 1$. For sufficiently large absolute values of $|x|$ they satisfy the inequality $|\varphi_i(x)| \leq M|x|^{-\delta}$, where δ, M are positive constants.

In the paper [8] above formulated the problem for equation $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0$, at $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ studied in an unbounded domain D.

Note that in the Tricomi problem the values of the unknown function at all points of the characteristic $AC : u(x,y)|_{AC} = \psi(x)$ are given. We study the well-posedness of a problem in which, unlike the Tricomi problem,part of the characteristic AC is free of the boundary condition and this missing Tricomi condition is replaced by an inner boundary condition with local shifting on the parabolic line of degeneracy.

2. Uniqueness for problem B

Theorem 1. *Let $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1,2$, $\psi(x) \equiv 0$,$f(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Then problem B has only trivial solution.*

Proof. The solution of the modified Cauchy problem with initial data $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, $\lim_{y\to-0} (-y)^{-m/2}u_y = \nu(x)$, $x \in I$ for equation (1) in the domain D^- is given by the D'Alembert formula [7]

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\tau[x - (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}] + \tau[x + (2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}]}{2} \\ &-\frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2}\int_{-1}^{1} \nu(x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2})dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Satisfying (7) to condition (4), after straight-forward calculations we obtain

$$\tau'(X) - \nu(X) = \psi'\left(\frac{X-1}{2}\right), X \in (-1,c), \tag{8}$$

where we considered $\tau(-1) = 0$, $X = 2x+1$. Relation (8) is the first functional correlation between the given functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ on an interval $(-1,c)$ of the axis $y = 0$. We shall prove that if $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1,2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$, then the only solution of problem B in the domain $D^+ \cup I_1 \cup I \cup I_2$ is the trivial one by virtue of condition (2).

Let (x_0, y_0) be a point of positive maximum of the function $u(x,y)$ in the domain $\bar{D}_R^+$. By virtue of (2), there exists for all $\forall\varepsilon > 0$ a radius $R_0 = R_0(\varepsilon)$ such that for all $R > R_0(\varepsilon)$ it holds

$$|u(x,y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in A_R B_R. \tag{9}$$

Considering designation $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, condition (5) can be written as

$$\tau(p(x)) = \mu\tau(x) + f(x), x \in [-1, c]. \tag{10}$$

Hence, at $x = c$ (where $f(x) = 0$) we get $\tau(p(c)) = \mu\tau(c)$. Then, taking $p(c) = c$ into account,we have $\tau(c)\,(1-\mu) = 0$, i.e., $\tau(c) = 0$. By the Hopf maximum principle [1], the function $u(x,y)$ cannot reach its positive maximum or its negative minimum in inner points of the domain $\bar{D}_R^+$. By virtue of $0 < \mu < 1$, from (10) (where $f(x) \equiv 0$) it follows that there are no points of extremum in the interval $(c, 1)$ of the axis $y = 0$.

Assume that the sought function takes its positive maximum and negative minimum in points of the interval $(-1, c)$ of the axis $y = 0$.

Let $(x_0, 0)$, $x_0 \in (-1, c))$ be a point of positive maximum (negative minimum) of the function $u(x,0) = \tau(x)$. Then from [7], it follows

$$\nu(x_0) < 0(\nu(x_0) > 0). \tag{11}$$

On the other hand , due to the corresponding homogeneous correlation (8) (where $\psi\left(\frac{X-1}{2}\right) \equiv 0$) we have

$$\nu(x_0) = 0. \tag{12}$$

The inequalities (11) and (12) contradict the conjugation condition (6). Therefore, $x_0 \notin (-1, c)$. Consequently, there is no point of positive maximum(negative minimum) of the function $u = u(x,y)$ in the interval AB.

Let $R > R_0$. By the Hopf maximum principle and the statements obtained above it follows $(x_0, y_0) \cup A_R B_R$, and by virtue of (9) we may conclude $|u(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Consequently, $|u(x,y)| < \varepsilon$ for all $\forall(x,y) \in \bar{D}_R^+$. From here, due to arbitrariness of the choice of ε and the choice $R \to \infty$ we arrive at $u(x,y) \equiv 0$ in the domain $D^+ \cup I_1 \cup \bar{I} \cup I_2$. Then

$$\lim_{y\to+0} u(x,y) = 0, x \in \bar{I}, \lim_{y\to+0} y^{-m/2} u_y = 0, x \in I. \tag{13}$$

By using (13), the continuity of the solution in the domain $\bar{D}_R^+$ and the conjugation condition (6), after reconstructing the unknown function $u = u(x,y)$ in the domain D^- as the solution of the modified Cauchy problem with homogeneous data, we obtain $u(x,y) \equiv 0$ in the domain $\bar{D}^-$. Theorem 1 is proved. □

3. Existence for problem B

Theorem 2. *Let $p(x) = \delta - kx$, where $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$, $0 < \mu < 1$. Then problem B has a solution.*

Proof. The solution of the Dirichlet problem with the conditions (2),(3) and $u(x,0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$ can be represented in the form

$$u(x,y) = k_2 y^{(m+2)/2} \int_{-1}^{1} \tau(t) [(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}]^{-1} dt + F_1(x,y), \tag{14}$$

where

$$F_1(x,y) = k_2 y^{(m+2)/2} \int_{-\infty}^{-1} \varphi_1(t) [(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}]^{-1} dt +$$

$$+ k_2 y^{(m+2)/2} \int_{1}^{\infty} \varphi_2(t) [(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}]^{-1} dt,$$

$k_2 = \frac{2}{(m+2)\pi}$.

After simple computations, from (14), we obtain

$$\nu(x) = -k_2 \frac{m+2}{2} \int_{-1}^{1} \tau'(t)(x-t)|x-t|^{-2} dt + \Phi(x), x \in I, \tag{15}$$

where

$\Phi(x) = \lim\limits_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = k_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi_1(t)dt}{(x-t)^2} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\varphi_2(t)dt}{(t-x)^2} \right).$

Note that (15) which holds on I is the second functional relation between the unknown functions $\nu(x)$ and $\tau(x)$ brought to the interval I of the axis $y=0$ from the upper half-plane.

Dividing the interval $(-1,1)$ into intervals $(-1,c)$ and $(c,1)$, we make the change of variables $t = p(s) = \delta - ks$ in the interval with bounds $c, 1$. By taking into account (10) we reduce relation (15) to

$$\nu(x) = -k_2\frac{m+2}{2}\left(\int\limits_{-1}^{x} \tau'(t)(x-t)^{-1}dt - \int\limits_{x}^{c} \tau'(t)(t-x)^{-1}dt\right)$$

$$-k_2\frac{m+2}{2}\left(\mu\int\limits_{-1}^{c} (p(s)-x)^{-1}\tau'(s)ds + \int\limits_{-1}^{c} (p(s)-x)^{-1}f'(s)ds\right)$$

$$+\Phi(x), for\ all\ x\in(-1,c). \tag{16}$$

By using (6) and by eliminating the function $\nu(x)$ from (8) and (16), we obtain the relation

$$\tau'(x) + k_2\frac{m+2}{2}\left(\int\limits_{-1}^{x} \frac{\tau'(t)dt}{x-t} - \int\limits_{x}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{t-x} + \mu\int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{p(t)-x}\right) = F_0(x), \tag{17}$$

where

$F_0(x) = -k_2\frac{m+2}{2} \int\limits_{-1}^{c} \frac{f'(s)ds}{p(s)-x} + \Phi(x) + \psi(\frac{X-1}{2}).$

Equality (17) we integrate along $-1, x$:

$$\int\limits_{-1}^{x} \tau'(s)ds + k_2\frac{m+2}{2}\int\limits_{-1}^{x} ds\left(\int\limits_{-1}^{s} \frac{\tau'(t)dt}{s-t} - \int\limits_{s}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{t-s} + \mu\int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{p(t)-s}\right)$$

$$= \int\limits_{-1}^{x} F_0(s)ds. \tag{18}$$

Next, let us consider the inner integral in (18)

$$A_1(x) = \int\limits_{-1}^{x} ds\left(\int\limits_{-1}^{s} \frac{\tau'(t)dt}{s-t} - \int\limits_{s}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{t-s}\right). \tag{19}$$

Calculating integral (19), we get

$$A_1(x) = \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(t)dt}{x-t} + \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(t)dt}{1+t}. \tag{20}$$

Now calculating the following integral

$$B_1(x) = \mu\int\limits_{-1}^{x} ds \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{p(t)-s}.$$

After some calculations we obtain

$$B_1(x) = \mu\int\limits_{-1}^{x} ds \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau'(t)dt}{p(t)-s} = -\mu k\int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(t)dt}{p(t)-x} + \mu k\int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(t)dt}{1+p(t)}. \tag{21}$$

Taking (20) and (21) into account, we rewrite (18) as follows

$$\tau(x) + k_2\frac{m+2}{2}\int\limits_{-1}^{c} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{1+t}\right)\tau(t)dt =$$

$$= k_2\mu k\frac{m+2}{2}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1}{p(t)-x}-\frac{1}{1+p(t)}\right)\tau(t)dt+\int_{-1}^{x}F_0(s)ds.$$

In view of $\frac{1}{x-t}+\frac{1}{1+t}=-\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{1}{t-x}$,
$\frac{1}{p(t)-x}-\frac{1}{1+p(t)}=\left(\frac{1+x}{1+p(t)}\right)\frac{1}{p(t)-x}$, taking into account $k_2=\frac{2}{(m+2)\pi}$ we have

$$\tau(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}=\frac{\mu k}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(t)}\right)\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x}+F_1(x), \tag{22}$$

where $F_1(x)=\int_{-1}^{x}F_0(s)ds$.

The integral operator on the right-hand side of (22) is not regular, since the integrand has an isolated singularity of first order on $x=c$, $s=c$, that is why this term has been singled out in (22). Assuming right-hand side of (22) as a known function, we rewrite this equation in the form

$$\tau(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g_0(x), \tag{23}$$

where

$$g_0(x)=\frac{\mu k}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+p(t)}\right)\frac{\tau(t)dt}{p(t)-x}+F_1(x). \tag{24}$$

Setting $(1+x)^{-1}\tau(x)=\rho(x)$, $(1+x)^{-1}g_0(x)=g(x)$, we rewrite equation (23) as

$$\rho(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\frac{\rho(t)dt}{t-x}=g(x), x\in(-1,c). \tag{25}$$

We search for a solution of equation (25) in a class of functions satisfying a Hölder condition on $(-1,c)$, remain bounded at $x=c$ and allowed to tend to infinity with order less than one at $x=-1$. The index χ of equation (25) is equal to zero in this class. By applying the Carleman-Vekua method [9], its solution can be found in the closed form

$$\rho(x)=\frac{g(x)}{2}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{c-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{-1}^{c}\frac{g(t)dt}{\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\frac{1}{4}}(t-x)}.$$

Hence,backward transformation leads to

$$\tau(x)=\frac{g_0(x)}{2}+\frac{1}{2\pi}(1+x)^{\frac{3}{4}}(c-x)^{\frac{1}{4}}\int_{-1}^{c}\frac{g_0(t)dt}{(c-t)^{\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{3}{4}}(t-x)}. \tag{26}$$

Now, by substituting (24) into (26),by virtue of the relation $p(x)=\delta-kx$, after straight-forward calculations we get

$$\tau(x)=\frac{\mu k}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+\delta-kt}\right)\frac{\tau(t)dt}{\delta-kt-x}+\frac{\mu k}{2\pi^2}(1+x)^{\frac{3}{4}}(c-x)^{\frac{1}{4}}$$

$$\times\int_{-1}^{c}\frac{dt}{(c-t)^{\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{3}{4}}(t-x)}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+t}{1+\delta-ks}\right)\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-t}+F_2(x), \tag{27}$$

where $F_2(x)=\frac{F_1(x)}{2}+\frac{1}{2\pi}(1+x)^{\frac{3}{4}}(c-x)^{\frac{1}{4}}\int_{-1}^{c}\frac{F_1(t)dt}{(c-t)^{\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{3}{4}}(t-x)}$.

We rewrite equation (27) as

$$\tau(x)=\frac{\mu k}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+\delta-kt}\right)\frac{\tau(t)dt}{\delta-kt-x}+\frac{\mu k}{2\pi^2}(1+x)^{\frac{3}{4}}(c-x)^{\frac{1}{4}}$$

$$\times \int_{-1}^{c} \frac{\tau(s)ds}{1+\delta-ks} \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(t-x)(\delta-ks-t)} + F_2(x). \tag{28}$$

Further, in (28) we calculate the inner integral:

$$A(x,s) = \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(t-x)(\delta-ks-t)}$$

$$= \frac{1}{\delta-ks-x} \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{\delta-ks-t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\delta-ks-x} \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\delta-ks-x} \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{\delta-ks-t}$$

$$= \frac{1}{\delta-ks-x}(J_1(x,s)+J_2(x,s)). \tag{29}$$

We calculate the

$$J_1(x,s) = \int_{-1}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{t-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\{-\int_{-1}^{x} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(x-t)^{1-\varepsilon}}$$

$$+\int_{x}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(t-x)^{1-\varepsilon}}\} = J_{11}(x,s) + J_{12}(x,s). \tag{30}$$

We calculate: $J_{11}(x,s) = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{x} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(x-t)^{1-\varepsilon}}$.
Changing variables $t=-1+(1+x)\sigma$, after some calculations we obtain
$J_{11}(x,s) = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}}{(1+c)^{\frac{1}{4}}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)} F\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}+\varepsilon; \frac{1+x}{1+c}\right)$,
where $\Gamma(z)$ and $F(a,b,c;z)$ are Euler's gamma function and hypergeometric function [14].
Applying the auto-transformation formula [14]
$F(a,b,c;z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z)$ to we get

$$J_{11}(x,s) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}(c-x)^{\varepsilon-\frac{1}{4}}}{(1+c)^{\varepsilon}}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)} F\left(\varepsilon, 1+\varepsilon, \frac{5}{4}+\varepsilon; \frac{1+x}{1+c}\right). \tag{31}$$

Now we calculate:
$J_{12}(x,s) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{x}^{c} \left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{(t-x)^{1-\varepsilon}}$.
Changing variables $t = x+(c-x)\sigma$, we get
$J_{12}(x,s) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}}{(c-x)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}} \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)} F\left(\varepsilon, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}+\varepsilon; \frac{x-c}{1+x}\right)$.
Using the formula [14] $F(a,b,c;z) = (1-z)^{-b}F(c-a,b,c;\frac{z}{z-1})$, we obtain

$$J_{12}(x,s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+c)^{\frac{1}{4}}}{(c-x)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}} \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)} F\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}+\varepsilon; \frac{c-x}{1+c}\right). \tag{32}$$

Now substituting (31) and (32) to (30), we get

$$J_1(x,s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\{-\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}(c-x)^{\varepsilon-\frac{1}{4}}}{(1+c)^{\varepsilon}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\varepsilon\right)} F\left(\varepsilon, 1+\varepsilon, \frac{5}{4}+\varepsilon; \frac{1+x}{1+c}\right)$$

$$+\frac{(1+c)^{\frac{1}{4}}}{(c-x)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)}F\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4}+\varepsilon;\frac{c-x}{1+c}\right)\}. \tag{33}$$

Applying the Bolz's formula [14]

$$F\left(a,b,c;z\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F\left(a,b,a+b-c+1;1-z\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F\left(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z\right),$$

to the first summand in the right-hand side of (33) and
using the auto-transformation formula
$F(a,b,c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z)$ we convert it to the form

$$J_1(x,s)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{(c-x)^{\varepsilon-\frac{1}{4}}(1+c)^{\frac{1}{4}}F\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4}+\varepsilon;\frac{c-x}{1+c}\right)$$

$$\times\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right)\Gamma(\varepsilon)$$

$$-(1+x)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}(1+c)^{-\frac{1}{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\varepsilon-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1+\varepsilon)}F\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4}-\varepsilon;\frac{c-x}{1+c}\right)\}. \tag{34}$$

It is easy to see that

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right)\Gamma\left(\varepsilon\right)=-\pi. \tag{35}$$

In view of formula (35) and $F\left(a,b,b;z\right)=(1-z)^{-a}$ we rewrite equation (34) in the form

$$J_1(x,s)=\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{t-x}=-\pi(c-x)^{-\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}-\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right). \tag{36}$$

Further, we calculate the integral $J_2(x,s)=\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{\delta-ks-t}$.

Changing the variable $t=-1+(1+c)\sigma$ after some calculations, we get

$$J_2(x,s)=\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{\delta-ks-t}=$$

$$=(1+c)(\delta-ks+1)^{-1}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)F\left(\frac{5}{4},1,2;\frac{1+c}{\delta-ks+1}\right).$$

Further, applying the auto-transformation formula, we obtain

$$J_2(x,s)=\int\limits_{-1}^{c}\left(\frac{1+t}{c-t}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{dt}{\delta-ks-t}=(1+c)(\delta-ks+1)^{-\frac{3}{4}}$$

$$\times(\delta-ks-c)^{-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)F\left(\frac{3}{4},1,2;\frac{1+c}{\delta-ks+1}\right). \tag{37}$$

Now, substituting expressions from (36) and (37) in (29), we get

$$A(x,s)=\frac{1}{\delta-ks-x}\left(-\pi(c-x)^{-\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}-\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\delta-ks-x}(1+c)(\delta-ks+1)^{-\frac{3}{4}}(\delta-ks-c)^{-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\times F\left(\frac{3}{4},1,2;\frac{1+c}{\delta-ks+1}\right). \tag{38}$$

By virtue of (38), we write equation (28) as

$$\tau(x) = -\frac{\mu k}{2\pi^2} B\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)(1+x)^{\frac{3}{4}} \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(s)(c-x)^{\frac{1}{4}}}{(1+\delta-ks)(\delta-ks-x)} ds$$

$$+\frac{\mu k}{2\pi^2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)(1+c) \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(s)}{1+\delta-ks}\left(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{c-x}{\delta-ks-c}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\times \frac{1}{\delta-ks-x} F\left(\frac{3}{4}, 1, 2; \frac{1+c}{\delta-ks+1}\right) ds + F_2(x). \tag{39}$$

Further, by virtue of $(\delta-ks-c)^{\frac{1}{4}} = k^{\frac{1}{4}}(c-s)^{\frac{1}{4}}$, we rewrite equation (39) in the form

$$\tau(x) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}}{2\pi^2} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)(1+c) \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(s)}{1+\delta-ks}\left(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\times \frac{1}{\delta-ks-x} F\left(\frac{3}{4}, 1, 2; \frac{1+c}{\delta-ks+1}\right) ds + R[\tau] + F_2(x), \tag{40}$$

where

$$R[\tau] = -\frac{\mu k}{2\pi^2} B\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)(1+x)^{\frac{3}{4}} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{c} \frac{\tau(s)(c-x)^{\frac{1}{4}}}{(1+\delta-ks)(\delta-ks-x)} ds$$

is a regular operator.

By extracting the characteristic part in this equation and applying the formula [14] $F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, we reduce equation (40) to the form

$$\tau(x) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} \int\limits_{-1}^{c} \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\tau(s) ds}{\delta-ks-x} + R_1[\tau] + F_2(x), \tag{41}$$

where

$$R_1[\tau] = R[\tau] + \frac{\mu k^{\frac{3}{4}} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)}{2\pi^2} \int\limits_{-1}^{c} \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\tau(s)}{\delta-ks-x}$$

$$\times \left(\left(\frac{1+c}{1+\delta-ks}\right)\left(\frac{1+x}{1+\delta-ks}\right)^{\frac{3}{4}} F\left(\frac{3}{4}, 1, 2; \frac{1+c}{1+\delta-ks}\right) - F\left(\frac{3}{4}, 1, 2; 1\right)\right) ds$$

is a regular operator.

By virtue of $k = \frac{1-c}{1+c}$, $\delta = \frac{2c}{1+c}$ we rewrite equation (41) as

$$\tau(x) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} \int\limits_{-1}^{c} \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\tau(s) ds}{(c-s)\left(k + \frac{c-x}{c-s}\right)} + R_1[\tau] + F_2(x). \tag{42}$$

After making the change of variables $x = c - (1+c)e^{-\xi}$, $s = c - (1+c)e^{-t}$ and introducing the notation $\rho(\xi) = \tau(c - (1+c)e^{-\xi})e^{-\frac{1}{4}\xi}$, we rewrite (42) as

$$\rho(\xi) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\rho(t) dt}{k e^{\frac{\xi-t}{2}} + e^{-\frac{\xi-t}{2}}} + R_2[\rho] + F_3(\xi), \tag{43}$$

where $R_2(\rho) = R_1(\tau)e^{-\frac{1}{4}\xi}$, $F_3(\xi) = F_2(c - (1+c)e^{-\xi})e^{-\frac{1}{4}\xi}$.

Introducing $K(\xi) = \frac{1}{ke^{\frac{\xi}{2}}+e^{-\frac{\xi}{2}}}$, we rewrite equation (43) as

$$\rho(\xi) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} \int\limits_0^\infty K(\xi - t)\rho(t)dt + R_2(\rho) + F_3(\xi). \quad (44)$$

The integral equation (44) is of Wiener-Hopf [4] and can be reduced by Fourier transform to a Riemann boundary value problem. The functions $K(\xi)$ and $F_3(\xi)$ have exponential order decay at infinity. Moreover, $K'(\xi) \in C(0,\infty)$, $F_3(\xi) \in H_1^\alpha(0,\infty)$.

Fredholm theorems for integral equations of convolution type only hold in the special case where the index of these equations is zero. The index of equation (44) coincides with that one for the term

$$1 - \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi) \quad (45)$$

with opposite sign, where

$$K^\wedge(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi t}dt}{ke^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}. \quad (46)$$

By the aid of residue theory calculating the Fourier integral (46), we have

$K^\wedge(\xi) = \frac{\pi e^{-i\xi \ln k}}{\sqrt{k} ch(\pi\xi)}$.

Now let us calculate the index of the term(45). Since

$\mathrm{Re}\, \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi) = \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\pi \cos(\xi \ln k)}{\sqrt{k} ch(\pi\xi)} = \frac{\mu k^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{2} \frac{\cos(\xi \ln k)}{ch(\pi\xi)} \le \frac{\mu k^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{2} < 1$,

then $\mathrm{Re}\left(1 - \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi)\right) > 0$. Consequently,

$Ind\left(1 - \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi)\right) = \frac{1}{2\pi}\left[arctg \frac{Jm\left(1 - \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi)\right)}{\mathrm{Re}\left(1 - \frac{\mu k^{\frac{3}{4}}\sqrt{2}}{2\pi} K^\wedge(\xi)\right)}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$

Therefore, the integral equation (44) can be reduced to a Fredholm integtal equation of second kind, whose unique solvability follows from the uniqueness of the solution of Problem B. Theorem 2 is proved. □

References

1. Bitsadze A.V. Some Classes of Partial Equations. -Moscow: Nauka,1981, 448p.

2. Chorieva S.T. The Bitsadze-Samarskii problem with the Frankl condition on the degeneration line for a mixed-type equation with singular coefficient. Russian Mathematics,57(5),2013,pp.42-50.

3. Fleisher N.M. Some problems with data on characteristics for mixed type equations. Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquies, XII(8), 1967, pp.1053-1058.

4. Gakhov F.D., Cherskii Yu.I. Equations of Convolution Type. -Moscow: Nauka, 1978, 296p.

5. Lerner M.E.,Pulkin S.P. On uniqueness of solutions of problems satisfying the Frankl and Tricomi conditions for the general Lavrent'ev-Bitsadze equation. Diff.Uravn.,2(9),1966, pp.1256-1263.

6. Mirsaburova Gulbakhor M. A problem with nonlocal conditions for mixed-type equations. Russian Mathematics, 58(10), 2014, pp.29-35.

7. Mirsaburov M., Ruziev M.Kh. A problem with non-local conditions on the line of degeneracy and parallel characteristics for a mixed type equation with singular coefficient. Functional Equations, Difference Inequalities and Ulam Stability Notions (F.U.N.),(Mathematics research developments), 8, 2010, pp.95-105.

8. Mirsaburov M., Ruziev M.Kh. A boundary value problem for a class of mixed-type equations in an unbounded domain. Differen.equations,47(1), 2011, pp.112-119.

9. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations, Boundary value problems of function theory and some of their applications to mathematical physics. -Moscow: Nauka,1968, 513p.

10. Rassias J.M. Existence of weak solutions for a parabolic elliptic-hyperbolic Tricomi problem. Tsukuba Journal of mathematics,23(1), 1999, pp.37-54.

11. Rassias J.M. Uniqueness of quasi-regular solutions for a bi-parabolic elliptic bi-hyperbolic Tricomi problem. Complex Variables,47(8), 2002, pp.707-718.

12. Ruziev M.Kh. Generalized Frankl-Rassias problem for a class of mixed type equations in an infinite domain. Journal of Partial Differential Equations,27(2), 2014, pp.176-188.

13. Salakhitdinov M.S., Mirsaburov M. A problem with a non-local boundary condition on the characteristic for a class of equations of mixed type. Mathematical notes,86(5), 2009, pp. 704-715.

14. Smirnov M.M. Equations of Mixed Type, -Moscow: Vysshaya shkola, 1985,304p.

15. Wolfersdorf v.L. Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung. Mathemat. Nachrichten,29(3/4), 1965, pp.161-178.

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent 100174, Uzbekistan
E-mail: mruziev@mail.ru

Received: 30/03/2018

Accepted: 11/06/2018