



УДК: 373.016:514-021.121

**Ерназар КОСБЕРГЕНОВ,**  
Преподаватель Национального университета Узбекистана, PhD  
**Мухаммад АБДУМУТАЛОВ,**  
Студент Национального университета Узбекистана

На основе рецензии доцент ТГТУ имени И. Каримова, PhD, З.Кенжаев

## DETERMINATION OF FREE FALL ACCELERATION USING A RING PHYSICAL PENDULUM

Annotation

This article presents a technique for measuring the acceleration due to gravity using a ring pendulum. The work describes in detail the process of organizing a laboratory experiment, including its theoretical foundations and practical aspects. Particular attention is paid to the structure of the experimental setup, which ensures high measurement accuracy. Key elements necessary for creating effective laboratory work, as well as optimal conditions for obtaining reliable results, are discussed. The presented technique not only illustrates the physical principles underlying the phenomenon of free fall but also serves as a practical guide for students and teachers interested in conducting experiments on this topic.

**Keywords:** physical pendulum, moment of inertia, acceleration due to gravity, experiment.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОЛЬЦЕВОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Аннотация

В данной статье представлена методика измерения ускорения свободного падения с использованием кольцевого маятника. В рамках работы подробно описан процесс организации лабораторного эксперимента, включая его теоретические основы и практические аспекты. Особое внимание уделяется структуре экспериментальной установки, которая обеспечивает высокую точность измерений. Рассматриваются ключевые элементы, необходимые для создания эффективной лабораторной работы, а также оптимальные условия, способствующие получению достоверных результатов. Представленная методика не только иллюстрирует физические принципы, лежащие в основе явления свободного падения, но и служит практическим руководством для студентов и преподавателей, заинтересованных в проведении опытов по данной теме.

**Ключевые слова:** физический маятник, момент инерции, ускорение свободного падения, эксперимент.

## HALQA FIZIKI MAQTANISH FOYDALANISHI ERKIN TUSHISH TEZLANISHINI ANIQLASH

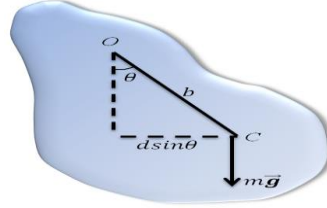
Annotatsiya

Ushbu maqolada halqa mayatnik yordamida erkin tushish tezlanishini o'lchash usuli keltirilgan. Ishda laboratoriya tajribasini tashkil etish jarayoni, uning nazariy asoslari va amaliy jihatlari batafsil yoritilgan. Eksperimental qurilmaning tuzilishiga alohida e'tibor berilgan bo'lib bu yuqori o'lchov aniqligini ta'minlaydi. Samarali laboratoriya ishlarini yaratish uchun zarur bo'lgan asosiy elementlar, shuningdek, ishonchli natijalarni olish uchun optimal sharoitlar muhokama qilinadi. Taqdim etilgan metodika nafaqat erkin tushish hodisasining fizik tamoyillarini ko'rsatibgina qolmay, balki ushbu mavzu bo'yicha tajribalar o'tkazishga qiziqqan talabalar va o'qituvchilar uchun amaliy qo'llanma bo'lib xizmat qiladi.

**Kalit so'zlar:** fizik mayatnik, inersiya momenti, tortishish tezlanishi, tajriba.

**Введение.** Актуальность темы измерения ускорения свободного падения заключается в том, что это фундаментальная физическая константа, играющая ключевую роль в различных областях науки и техники [1-3]. Точное определение ускорения свободного падения имеет важное значение для исследований в механике, астрономии, геофизике и даже в инженерных приложениях [4-7]. Существуют различные методы определения ускорения свободного падения, каждый из которых имеет свои особенности, преимущества и недостатки. Например: 1. Методы с использованием маятников: Они достаточно просты в реализации, но могут быть подвержены ошибкам из-за влияния внешних факторов, таких как трение и воздушные потоки [8]. 2. Методы с использованием свободного падения тел: Хотя они обеспечивают высокую точность, их реализация может быть сложной из-за необходимости создания идеальных условий для падения (отсутствие сопротивления воздуха, точное измерение времени) [9]. 3. Методы с использованием гироскопов и акселерометров: Эти методы могут быть высокотехнологичными и точными, но требуют сложного оборудования и могут быть чувствительными к калибровке и внешним воздействиям [10]. Предложенная методика с использованием кольцевого маятника позволяет избежать многих недостатков традиционных методов. Она обеспечивает более стабильные условия для измерений и позволяет минимизировать влияние внешних факторов. Кольцевой маятник, благодаря своей конструкции, позволяет точно фиксировать колебания и, следовательно, получать более надежные данные о периоде колебаний и, соответственно, ускорении свободного падения. Лабораторные работы по измерению ускорения свободного падения играют важную роль в изучении законов физики для студентов. Они не только помогают закрепить теоретические знания, но и развивают практические навыки работы с измерительным оборудованием, учат анализировать полученные

данные и делать выводы на основе экспериментов [11]. Такие занятия способствуют формированию научного мышления и критического подхода к решению задач, что является неотъемлемой частью обучения физике. Таким образом, актуальность данной темы заключается не только в возможности повышения точности измерений, но и в создании доступной и эффективной методики для студентов и преподавателей, что способствует более глубокому пониманию физических принципов и развитию экспериментальных навыков



1-рaсм

**Методика измерения.** Рассмотрим предмет произвольной формы, который свисает с точки  $O$  на расстоянии  $b$  от центра тяжести (точки  $C$ ) (см. рис. 1). При отклонении этого маятника от положения равновесия на угол  $\theta$  момент силы тяжести  $mg$ , возвращающий маятник в равновесие, выражается следующим образом:

$$M = -mgb\sin\theta$$

В данном случае  $b\sin\theta$  представляет собой плечо силы. Согласно основному закону динамики вращательного движения, момент  $M$  можно записать как:

$$-mgb\sin\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

Здесь  $I$  — момент инерции маятника относительно точки подвеса. При малых значениях угла отклонения допустимо использовать приближение  $\sin\theta \approx \theta$ . Это позволяет упростить уравнение (1) до следующего вида:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgb}{I}\right)\theta \quad (2)$$

Если мы введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{mgb}{I} \quad (3)$$

то уравнение (2) примет вид:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (4)$$

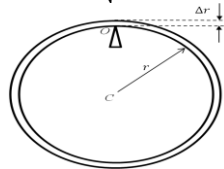
Данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка вида  $y'' + a^2y = 0$ . Решение этого уравнения имеет вид:  $y = C_1\cos(ax + C_2)$ . Следовательно, решение уравнения (4) можно записать как:

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

Это периодическая функция, период которой определяется формулой:  $T = 2\pi/\omega$

Подставляя значение  $\omega$ , получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}} \quad (6)$$



2-рисунок

Теперь рассчитаем период колебаний физического маятника в виде кольца. В качестве такого маятника используется кольцо с внутренним радиусом  $r$  и внешним радиусом  $R = r + \Delta r$  где  $\Delta r$  - небольшая величина по сравнению с  $r$  (см. рис. 2). Момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс  $C$  и перпендикулярной плоскости кольца (ось  $CC'$ ), выражается следующим образом (см. рис. 3):

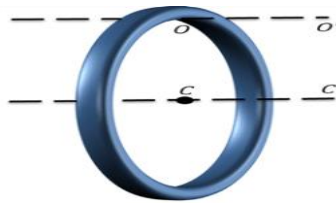
$$I_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) \quad (7)$$

Согласно теореме Штейнера, момент инерции кольца относительно оси  $OO'$ , параллельной оси  $CC'$  и проходящей через точку  $O$ , равен:

$$I = I_0 + mr^2 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) + mr^2 \quad (8)$$

При условии, что толщина кольца очень мала ( $\Delta r \ll R \approx r$ ), выражение (7) можно упростить до  $I_0 \approx mr^2$ . Тогда момент инерции маятника относительно оси  $OO'$ , с учетом условия  $\Delta r \ll R \approx r$ , будет равен:

$$I = \frac{1}{2}m(r^2 + r^2) + mr^2 = 2mr^2 \quad (9)$$



3-рисунок

Если точка подвеса физического маятника находится в точке  $O$ , то, используя уравнения (6) и (9), можно определить период колебаний маятника, представленного малым кольцом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}} \quad (10)$$

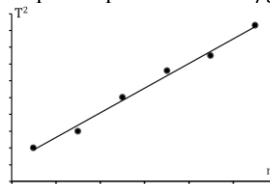
Предполагается, что  $b = r$ . В эксперименте величину ускорения свободного падения можно определить с помощью уравнения (10), измерив общее время  $t$  для  $N$  колебаний маятника и рассчитав период  $T = t/N$ :

$$g = \frac{8\pi^2 r}{T^2} \quad (12)$$

Ускорение свободного падения также можно определить следующим методом. Из выражения (10) следует, что квадрат периода колебаний тонкостенного кольцевого маятника ( $R \approx r \gg \Delta r$ ) прямо пропорционален радиусу кольца, то есть  $T^2 \sim r$ :

$$T^2 = \frac{8\pi^2}{g} \cdot r \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение (13) в виде линейной зависимости  $y = kx$ , где  $y = T^2$  и  $x = r$ . Постройте график зависимости  $y$  от  $x$  (см. рис. 4) и проведите прямую линию через полученные точки, определив ее угловой коэффициент. Значение  $g$  можно найти, учитывая, что угловой коэффициент этой прямой равен  $k = 8\pi^2/g$ .



4- рисунок

Для реализации данной лабораторной работы были использованы кольца различных радиусов, что позволило исследовать влияние геометрических параметров на динамику колебаний. При этом для подвеса колеблющихся систем были выбраны три различных формы: цилиндр, треугольная призма и конус. В первом случае, когда использовался цилиндрический подвес, было отмечено значительное влияние трения, что приводило к быстрому затуханию колебаний маятника. Это обстоятельство ограничивало возможность получения точных и стабильных результатов, поскольку быстрое затухание не позволяло наблюдать за полноценными колебательными процессами. Во втором случае, при использовании треугольной призмы в качестве подвеса, наблюдались более устойчивые колебания. Эта форма обеспечивала оптимальные условия для минимизации трения и затухания, что способствовало более продолжительным и регулярным колебаниям маятника. Данные результаты свидетельствуют о том, что треугольная призма является наиболее эффективным вариантом для проведения экспериментов в данной конфигурации. В третьем случае, когда был применен конус в качестве подвеса, маятник совершал колебания не только в одной плоскости, но и имел значительные отклонения в других направлениях. Это усложняло анализ динамики системы и снижало точность получаемых данных. Таким образом, анализ проведенных экспериментов позволил определить, что наилучшие результаты достигаются при использовании треугольной призмы в качестве подвеса. Этот выбор обеспечивает оптимальный баланс между устойчивостью колебаний и минимизацией влияния внешних факторов, что делает его предпочтительным для дальнейших исследований в области динамики колебательных систем.

**Порядок выполнения работы**

**I. Определение значения ускорения свободного падения**

**а) Геометрических размеров**

Определите внешний радиус  $R$ , измерив длину  $L$  внешней окружности кольца с помощью рулетки. Затем с помощью штангенциркуля измерьте толщину кольца  $\Delta r$  в трёх различных точках, и вычислите внутренний радиус кольца по формуле  $r = R - \Delta r$ . Внесите результаты в таблицу 1.

Таблица 1

| №   | $L_i$ | $R_i$ | $\Delta r$      |                 |                 | $\overline{\Delta r}$ | $r_i$ |
|-----|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|-------|
|     |       |       | $\Delta r_{1i}$ | $\Delta r_{2i}$ | $\Delta r_{3i}$ |                       |       |
| 1   |       |       |                 |                 |                 |                       |       |
| ... |       |       |                 |                 |                 |                       |       |

**б) Измерение периода колебаний**

Подвесьте кольцо в точке на опору  $O$  и измерьте время  $t$ , за которое оно совершает  $N = 25$  колебаний, отклоняя его на небольшой угол, не превышающий  $6^\circ$ , с помощью секундомера.

**с) Повторение измерений**

Переместите точку подвеса и повторите измерения трижды, фиксируя результаты в таблице 1.

**д) Расчёт периода колебаний**

Определите период колебаний маятника по формуле (11) и занесите полученные результаты в таблицу 2. Повторите указанные действия для других колец. Полученные значения внесите в таблицы 1 и 2.

Таблица 2

| №   | $N$ | $t_{1i}$ | $t_{2i}$ | $t_{3i}$ | $\bar{t}_i$ | $T_i$ | $T_i^2$ | $g_i$ | $\bar{g}$ |
|-----|-----|----------|----------|----------|-------------|-------|---------|-------|-----------|
| 1   |     |          |          |          |             |       |         |       |           |
| ... |     |          |          |          |             |       |         |       |           |

**е) Определение ускорения свободного падения**

На основе полученных данных рассчитайте значение ускорения свободного падения с использованием формулы (12). Представьте результат в виде:

$$g = \bar{g} \pm \Delta \bar{g}.$$

**д) Построение графика и анализ**

Постройте график зависимости квадрата периода колебаний маятника  $T_i^2$  от его радиуса  $r_i$ . Покажите, что график является прямой линией, и определите её наклон  $k$ . Вычислите значение  $k = 8\pi^2/g$ , используя соотношение в соответствии с уравнением (13).

**II. Определение момента инерции тела**

**а.** С помощью весов определите массу колец.

**б.** Считая ускорение свободного падения  $g$  известным, вычислите экспериментальное значение момента инерции кольца  $I_{\text{экс}}$  по формуле (6), используя данные, приведенные в таблицах 1 и 2.

**с.** На основании теоретической формулы (8) рассчитайте момент инерции кольца  $I_{\text{теор}}$  относительно оси  $OO'$ .

**д.** Определите отклонение экспериментального значения момента инерции от теоретического, рассчитав  $\delta = I_{\text{экс}} - I_{\text{теор}}$ . Внесите полученные результаты в таблицу 3.

Таблица 3

| №   | $m$ | $I_{\text{экс}}$ | $I_{\text{теор}}$ | $\delta$ |
|-----|-----|------------------|-------------------|----------|
| 1   |     |                  |                   |          |
| ... |     |                  |                   |          |

**Выводы.** В результате тщательного анализа проведенных экспериментальных исследований было установлено, что оптимальные результаты динамики колебаний достигаются при использовании треугольной призмы в качестве подвеса для колебательной системы. Эта форма подвеса обеспечивает не только высокую устойчивость колебаний, но и минимизирует влияние внешних факторов, таких как трение и затухание, что в свою очередь способствует получению более точных и воспроизводимых данных. Следует отметить, что данная лабораторная работа не требует использования дорогостоящего оборудования, что делает ее доступной для широкого круга исследователей и студентов. Это обстоятельство значительно расширяет возможности для проведения экспериментов в учебных заведениях и научных учреждениях, позволяя сосредоточиться на изучении принципов динамики колебательных систем без значительных финансовых затрат. Кроме того, с помощью предложенной методики возможно не только определить ускорение свободного падения, но и проверить теорему Штейнера, что подчеркивает универсальность и практическую значимость проведенных исследований. Данные результаты могут служить основой для дальнейших экспериментов и углубленного изучения механики колебаний, а также для практического применения в различных областях физики и инженерии

**ЛИТЕРАТУРА**

- Zdzisław P., Tadeusz H., Mass Moment Determination Using Compound Pendulum. International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy Vol. 8 (2013) pp. 85-100.
- Jiraporn P., Kotchakorn M., Onuma M., Oscillation of Full and Partial Ring Pendulum: Physics Laboratory Experiment. Original research article, Vol. 27 No.3 2022
- Candela D, Martini KM, Krotkov RV, Langley KH. Bessel's improved Kater pendulum in the teaching lab. Am. J. Phys. 2001; 69 (6):714-20.
- Kladivova M, Mucha L. Physical pendulum - a simple experiment can give comprehensive information about a rigid body. Eur. J. Phys. 2014; 35(2):02550181- 14.
- Kazachkov A., Castellanos A., Kostyukov V., Measuring g: An inexhaustible source of instruction and creativity. Lat. Am J Phys. Educ. 2012; 6:168-74.
- Jesus VLB, Sasaki DGG. A simple experiment to determine the moments of inertia of the fidget spinner by video analysis. Phys. Teach 2018; 56:639-42.
- Luca RD, Ganci S. A measurement of g with a ring pendulum. Rev. Bras. Ensino Fis 2011; 33(3):33011-5.
- Layton W, Rodriguez. Segmented Hoop as a Physical Pendulum. Phys. Teach. 2013; 51:418-9.
- Gonzalez M, Bol A., Controlled damping of a physical pendulum: experiments near critical conditions. Eur. J. Phys. 2006; 27(1):257-64.
- Schultz D. An inexpensive, multipurpose physical pendulum. Phys. Teach. 2012; 50: 436-9.
- Russeva G.B., Tsutsumanova G.G., Russev S.C., An experiment on a physical pendulum and Steiner's theorem. Phys. Educ. 2010; 45(1):58-63.