



Ikrom XURRAMOV,
O'zbekiston Milliy universiteti magistranti
Fazliddin SHAMSHIYEV,
O'zbekiston Milliy universiteti dotsenti, f.-m.f.n
E-mail: ikromjonakramvich98@gmail.com

Chirchiq davlat pedagogika universiteti professori, f.-m.f.d I.Tadjibaev taqrizi asosida

THE APPLICATION OF LOCAL INTEGRALS IN STELLAR DYNAMICS

Annotation

This article focuses on the application of local integrals in stellar dynamics and solving the second integral problem for an arbitrary mass distribution by plotting isoenergetic level curves. It also involves comparing these curves with the potential level curves of a rotationally symmetric galaxy in the first approximation and analyzing them.

Key words: local integral, isoenergetic levels, spherical symmetry.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ДИНАМИКЕ ЗВЁЗД

Аннотация

Данная статья посвящена применению локальных интегралов в динамике звёзд и решению задачи второго интеграла при произвольном распределении массы путем построения изоэнергетических уровней линий. Также проводится их сравнение с потенциальными уровнями линиями галактики в состоянии вращательной симметрии в первом приближении и их анализ.

Ключевые слова: локальный интеграл, изоэнергетические уровни, сферическая симметрия.

YULDUZLAR DINAMIKASIDA LOKAL INTEGRALINING QO'LLANILISHI

Annotatsiya

Mazkur maqola yulduzlar dinamikasida lokal integralning qo'llanilishini va massaning ixtiyoriy taqsimotida ikkinchi integral muammosini yechish uchun izoenergetik sath chiziqlarini chizish, ularni birinchi yaqinlashishdagi galaktikaning rotatsion-simmetrik holatdagi potensial sath chiziqlari bilan taqqoslash va tahlil qilishga bag'ishlangan.

Kalit so'zlar: lokal integral, izoenergetik sathlar, sferik-simmetriya.

Kirish. Uch o'lchamli maydonda mahalliy integralga yo'l qo'yadigan potentsiallarni o'rganish nazariy mexanikada muhim tadqiqot yo'nalishlaridan biridir, ayniqsa bunday maydonlardagi zarralar harakatini hisobga olgan holda. Ushbu ishning maqsadi - MATLAB dasturi yordamida uch o'lchamli maydonda mahalliy integralga ega bo'lgan potentsiallarning izoyuzali (isosurface) chiziqlarini sonli hisoblashdan iborat. Tadqiqotda bu nazariy potentsiallar haqiqiy fizik potentsiallar, masalan, tortishish yoki elektrostatik maydonlar bilan solishtiriladi va tahlil qilinadi. Hisob-kitoblar orqali bunday maxsus potentsiallarning fizik kontekstdagi xatti-harakati va xossalari chuqurroq tushunishga erishiladi. Ayniqsa, nazariy potentsiallar real tizimlardan qanday farq qilishi yoki qanday o'xshashligi aniqlanadi, bu esa ularning amaliy qo'llanilishdagi ahamiyatini ko'rsatadi. MATLAB dasturining sonli modellashirish imkoniyatlari izoyuzali tasvirlarni aniq ko'rsatib, fizikada uchraydigan potentsiallar bilan keng qamrovli taqqoslash imkonini beradi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Integral muammosi ustida bir qancha olimlar izlanishlar olib borgan misol uchun: G.M. Idlis potentsialning ba'zi maxsus shakllari uchun umuman ko'p qiymatli bo'lgan integralning bir qiymatli funksiyaga aylanadigan holatlarini ko'rib chiqadi [4-6]. G.G. Kuzmin [5]-ishida statsionar Galaktikani modellashirishda uch o'qli tezlik taqsimotini ta'minlaydigan kvadratik harakat integrali qo'llanilishi batafsil yoritilgan. Shuningdek, ushbu integralning xususiyatlari [7, 9]-maqolalarda ko'p marta muhokama qilingan. D. Lynden-Bell tomonidan o'rganilganidek, statsionar tizimlar uchun ma'lum bo'lgan har bir harakat integrali shu kabi tizimlarning butun bir sinfi uchun o'z ahamiyatini saqlab qoladi. Bu sinfni yoki uning bir qismini ayrim bir o'zgaruvchi funksiyasini o'zgartirish orqali hosil qilish mumkin. Ushbu funksiya potentsial va harakat integraliga lokal shaklda, ya'ni differensiallash va integrallashsiz kiradi [8]. Integral mu'ammosidan kelib chiqib V.A. Antonov ham ish olib borgan. Antonovning ishi integral muammolari uchun yechim topish maqsadida ularni analitik ko'rinishda hisoblaganlar.

Tadqiqot metodologiyasi. Mahalliy integral mavjud bo'lgan va ikki qiymatli tezlik maydonini namoyon qiladigan bir qancha potentsial misollarni oldingi bo'limda keltirilgan differensial tenglamalarni yechish orqali qurish mumkin. Eng oddiy misollardan biri sferik simmetrik potentsialdir. Bunday holatda tezlik maydoni markazdan radial yo'nalishda tarqalayotgan yorug'lik nurlari strukturasi bilan o'xshash bo'ladi. [4]da ko'rilgan ba'zi uch o'lchovli potentsiallar energiya doimiysi qanday bo'lishidan qat'i nazar, faqat ikki qiymatli fazoviy tezlik maydonini hosil qiladigan hol uchun,

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \alpha R \\ v &= v_0 + \beta R \\ w &= w_0 + \gamma R \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

sonli hisoblashlarni bajaramiz. Keltirilgan ushbu formulada R , u_0 , v_0 , va w_0 , koordinatalar bo'yicha funktsiyalar, α , β va γ esa yo'nalish kosinuslari. Bunday tezliklar maydoni mavjudligini ta'minlovchi potensial quyidagicha ifodalanadi:

$$U = \frac{1}{2}[(grad\Phi)^2 + \rho(L)], \quad (2)$$

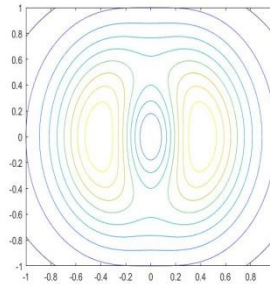
bu yerda r — markazdan radial masofa, H esa burchak koordinatalarga bog'liq ixtiyoriy funksiya. Bu potensial har bir fazo nuqtasi uchun ikkita ehtimoliy harakat yo'nalishini bildiruvchi tizimni tavsiflaydi. Qiziqarli maxsus holatlardan biri — potensialni belgilovchi funksiya F radius-vektor yo'nalish kosinuslariga bog'liq bo'lsa, potensialning quyidagi shakli vujudga keladi.

$$f = \frac{(b-a)^2[n_y^2(1-n_z^2)+n_z^2(1-n_y^2)-2n_y^2n_z^2]}{[a+(b-a)(n_y^2+n_z^2)]^4} = \frac{(b-a)^2n_y^2+n_z^2-(n_y^2+n_z^2)^2}{[a+(b-a)(n_y^2+n_z^2)]^4}.$$

(3)

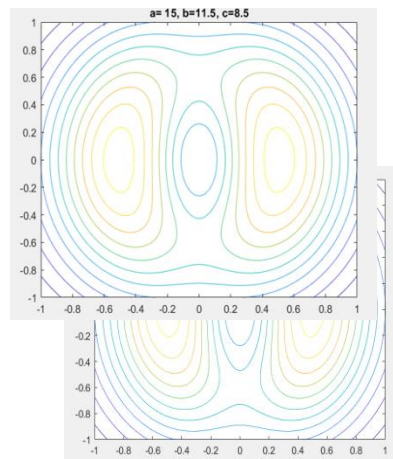
Bunday xatti-harakat namunasi potensial funksiyadagi a, b, c konstantalari turlicha bo'lganda kuzatiladi - bu esa potensial sirtlarining deformatsiyalanishiga olib keladi. Bunday deformatsiyalanish xususiyatlarini aniqlash uchun barqaror radiusli sferadagi potensialning ekstremum nuqtalarini tahlil qilish zarur. Tahlil natijasida ma'lum bo'ladiki, ayrim a, b, c konfiguratsiyalari uchun potensial sirtlarida minimumlar, maksimumlar va egri nuqtalar (saddle points) paydo bo'ladi.

Ushbu energetik sathlarni chizuvchi dastur "Matlab"da quyidagi ko'rinishga ega:



```
a=10;
b=7;
c=5;
[X, Y]=meshgrid(-1:.01:1);
u1=(b-c).*(b-c).*(1-Y.*Y).*Y.*Y;
u2=(a-c).*(a-c).*(1-X.*X).*X.*X;
u3=-2*(a-c).*(b-c).*Y.*Y.*X.*X;
u=u1+u2+u3;
w=((b-c).*Y.*Y+(a-c).*X.*X+c).^4;
F=u./w;
contour(X,Y,F);
```

Sath chiziqlarini turlicha ko'rinishini olish uchun a, b, c ning turlicha qiymatlarida Matlab dasturida grafiklar chizdik.



1-rasm $a = 10$, $b = 7$ va $c = 4$ holatda f ning sath chiziqlari topologiyasi

Ko'rib turgan grafimiz(1-rasm) Antonov tomonidan xisoblangan izoenergetik sath chiziqlarining topologiyasini ifodalaydi. Antonov o'z ishida ikkinchi integral muammosining yechimini izlash maqsadida hisoblangan analitik yechimni bilan biz xisoblagan raqamli ko'rinishdagi yechimni solishtiradigan bo'lsak bunda bizning grafik(1-rasm) Antonov tomondan xisoblangan grafik bilan o'xshash ekanligi kelib chiqdi. Ko'rishimiz mumkinki bu grafiklardan ixtiyoriy f funksiyaning sath chiziqlari a, b, c ning o'zaro bog'liqligidan grafik xam o'zgarib borgan (1-rasm). Ushbu ishda keyingi qadam sifatida xisoblangan izoenergetik sath chiziqlarini qanday sistemalar uchun ekanligini tekshirish edi, aynan shu maqsadda biz ularni tekshirish uchun faqat ikki koordinataga bog'liq bo'lgan xol uchun tekshirish talab etilardi. Chunki grafiklardan ma'lumki izoenergetik sath chiziqlari faqat ikki koordinataga bog'liq xolda keltirilgan buning sababi esa birlik vektorlarda $n_x = 0$ va $n_y^2 + n_z^2 = 1$ xolda bo'ladi.

Tahlil va natijalar. Birinchi yaqinlashishdagi galaktikalarining aksariyat qismini rotatsion-simmetrik shaklga ega deb, ya'ni simmetriya o'qiga va unga ortogonal simmetriya tekisligiga ega deb qarash mumkin. Bunday sistemada regulyar maydonning potentsiali faqat ikkita koordinataga bog'liq bo'ladi, ya'ni simmetriya o'qigacha bo'lgan masofa R ga va simmetriya tekisligigacha bo'lgan masofa z ga. Bu holda potentsial, $U(R, z)$ ega bo'ladi.

Ushbu tekislikdagi yulduzning harakat tenglamalari quydagicha bo'ladi:

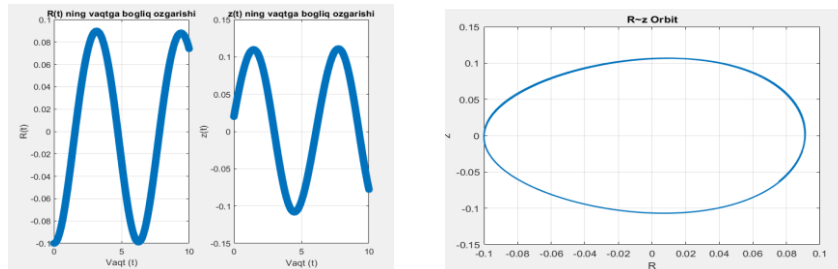
$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial R} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (4)$$

Biz quyidagi modelda, barqaror bo'lmagan davriy orbitaga yaqin masofalarda tezliklar maydoninig o'zgarishini ko'rib chiqib

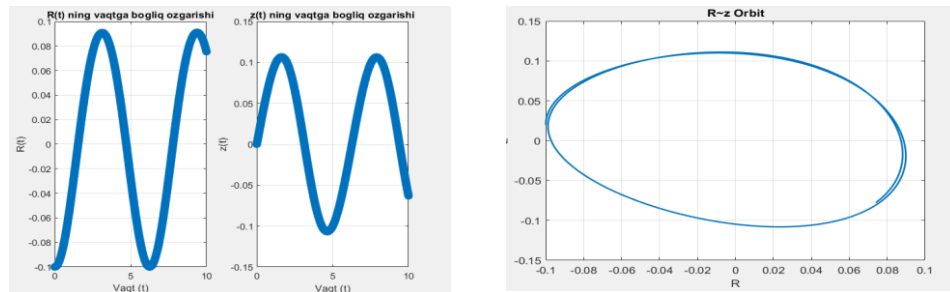
$$U(R, z) = -\frac{1}{2}(R^2 + z^2) - Rz^2 + \frac{1}{3}R^3 \quad (5)$$

Bu potentsilada ko'plab davriy orbitalar mavjud.

Biz ushbu (5) orqali berilgan potentsialda, $R_0 = -0.1$ va $z_0 = 0.0$ boshlang'ich shartlarda uchun harakat tenglamasini (4) Matlab dasturida 4-tartibli Runge-Kutta usuli yordamida integralladik va $R \sim z$ orbitani chizichdik.



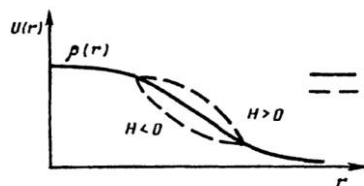
2-rasm. R va z orasidagi bo'lanishdan ko'rish mumkinki, ularning bo'liqligi ellips shaklidagi orbita ko'rinishida. biz yuqorida chizgan grafikni (1-rasm) tahlil qilish uchun aynan shu (2-rasm) real potentsial uchun grafik chizdik va biz bundan shuni ko'rishimiz mumkinki potentsialning ($R \sim z$) bog'lanish grafigi biz chizgan energetik sath chiziqlari bilan aynan o'xshash. Dastlab biz chizgan energetik sath chiziqlarini tahlil qildik unda ko'rdikki izoenergetik sath chiziqlari ma'lum bir orbitalalarni ifodalaydi chunki undagi energetik sath chiziqlaridagi ranglarning taqsimlanishi orbita shaklida tarqalgan bo'lib ranglar to'q (ko'p) bo'lgan sohalarida harakat bo'lganligini bildiradi. Ya'ni ushbu sohada harakat ko'p bo'lgan bu o'z navbatida ularning harakatning chegaraviy orbitasini ifodalaydi. Energiya sathlari va potentsialning grafigidan shuni ko'rish mumkinmi bizning grafik Antonov va Shamshievning [1992, AJ] maqolasidagi energetik sathlariga mos tushadi. Lokal integral bizga ma'lumki global integraldan farqli ravishda fazoda ma'lum bir qismlarda o'rganiladi va ular to'siq vazifasini ifodalaydi. (2-rasm) xam gallaktikamizning bir tomonidagi harakatlanayotkan obektlar uchun harakat maydonini ko'rsatadi, albatta bu ularning harakat traektoriyalari emas, ammo ularning harakati shu ellipsdan chiqmasligini ko'rsatmoqda. Biz esa butun gallaktikamiz uchun energiya taqsimlanishini ko'rsatdik.



Bundan ko'rinadiki gallaktika markazga yaqinroq qimida obektlar ko'p va harakat ham ko'proq qolaversa ularning harakat orbitalari (1-rasm) izoenergetik sathlardan chetga chiqmagan xolda ushbu chiziqlar ichida amalga oshadi. Antonov va Shamshievning [1992, AJ] maqolasida topilgan potentsial $U(x, y, z)$ ixtiyoriy sfera $r = const$ da o'rganilgan edi, ya'ni quyidagi ifoda

$$U = \frac{1}{2} \left[\rho(L) + \frac{H}{r^2} \right]$$

ning birinchi hadi doimiydek. Agar $U(x, y, z)$ ni butun fazoda o'rganadigan bo'lsak, u holda biz H/r^2 had $U(x, y, z) = const$ yuzani deformatsiyalanishiga olib kelshini ko'rishimiz mumkin bo'lardi, aks holda esa bu sirtlar faqat sferalardan tashkil topgan bo'lar edi.



3-rasm (1) Sferik jismning potentsiali va (2) sirt deformatsiyasi.

Ushbu ishda biz potensial U ning $\rho(L)$ hadini e'tiborga olgan holda, bu funksiyaning bir necha ko'rinishlari uchun energetik sath yuzalarini MATLAB dasturida chizib tahlil qildik. Shuni aniqladikki, sferik-simmetriyaga ega jismning potentsialida $\rho(L)$ ning qiymati kamayib borar ekan. Misolimizdagi a, b va c parametrlarning o'zaro teng bo'lmagan qiymatlarida $U(x, y, z) = \text{const}$ ning yuzalari uch o'lchamli ellipsodda kamroq o'xshar ekan ekan (**1-rasm**). Hususiy hollar $a > b = c$ da esa sirtlar rotatsion-simmetrik yuzalarni ifodalashini aniqladik.

Xulosa. Mazkur tadqiqotdan olingan natijalar deyarli sferik simmetrik bo'lgan yulduz tizimlaridagi yulduzlar harakatini tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega. Bu yerda taqdim etilgan sonli modelashtirish asosida bunday tizimlarni o'rganish va ularning dinamik xususiyatlarini tushunish imkoni yaratiladi. Mahalliy integralga yo'l qo'yadigan potentsiallar tadqiqi tezlik maydonining xos xususiyatlari va mos potensial sirtlarini ochib beradi. Keltirilgan shartlar va misollar uch o'lchamli fazodagi zarralar harakatini yangicha nazariy nuqtai nazardan ko'rib chiqishga imkon yaratadi va bu yondashuv klassik mexanika, astronomiya hamda astrofizikaning keng doirasidagi muammolarga qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Antonov V. A., Leningrad davlat universiteti axborotnomasi, 19, 97 (1981).
2. Jacobi's, Dynamics bo'yicha ma'ruzalar, ikkinchi qayta ishlangan nashri, Hindustan Book Agency (Hindiston), 2009.
3. Whittaker, E. T., & Watson, G. N., Zamonaviy tahlil kursi, Kembrij universiteti nashriyoti, beshinchi nashr, 2021.
4. Idlis G.M., Astronomiya jurnali, 1959, 36, №1, 85-88.
5. Idlis G.M., QozSSR Fanlar akademiyasi astrofizika instituti asarlari, 1-jild, 1961, 1963, 6.51.330 K.
6. Idlis G.M., QozSSR Fanlar akademiyasi astronomiya instituti axborotnomasi, 1959, 8, 24-52.
7. Kuzmin G.G., Astronomiya jurnali, 1956, 33, №1, 27-45, 1957, №3, 2042.
8. Lynden-Bell D., Qirollik astronomiya jamiyati oylik xabarlar, 124, 95. DOI:10.1093/mnras/124.2.95 (1962).
9. Ollongren A., "Uch o'lchamli galaktik yulduz orbitasi", Niderlandiya astronomiya instituti byulleteni, 1962, 16, №521, 211-295.