



UDK: 37.372.8(372.851)

Ulug'bek XONKULOV,
Farg'ona davlat universiteti professori, PhD
E-mail: u_xonqulov@mail.ru

Fizika-matematika fanlari nomzodi, professor A.Yusupova taqrizi asosida

METHODS FOR FINDING THE ROOTS OF TRIGONOMETRIC EQUATIONS WITHIN A GIVEN INTERVAL

Annotation

This article provides an in-depth study of various methods for solving trigonometric equations and finding their roots in a given interval. It provides a theoretical and methodological analysis of such methods as arithmetic, algebraic, geometric, graphical, genetic, and visual-genetic. The advantages and disadvantages of each method are illustrated with experimental examples, and the need to choose methods that are adapted to the individual abilities of students is justified. The article compares the ways to solve trigonometric equations using classical and advanced approaches, which can serve as a practical methodological tool for teachers.

Keywords: Arithmetic, algebraic, geometric, graphic, genetic, visual-genetic.

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Аннотация

В данной статье подробно рассматриваются различные методы решения тригонометрических уравнений и нахождения их корней в заданном интервале. В нем анализируются такие методы, как арифметический, алгебраический, геометрический, графический, генетический и визуально-генетический с теоретической и методологической точки зрения. На экспериментальных примерах проиллюстрированы преимущества и недостатки каждого метода, обоснована необходимость выбора методов, адаптированных к индивидуальным возможностям учащихся. В статье сравниваются способы решения тригонометрических уравнений с использованием классических и усовершенствованных подходов, что может служить практическим методическим пособием для учителей.

Ключевые слова: Арифметический, алгебраический, геометрический, графический, генетический, визуально-генетический.

TRIGONOMETRIK TENGLAMALARNING BERILGAN ORALIQQA TEGISHLI ILDIZLARINI TOPISH USULLARI

Annotatsiya

Ushbu maqolada trigonometrik tenglamalarni yechish va ularning ildizlarini berilgan oraliqda tanlashga doir turli metodlar chuqur o'rganilgan. Unda arifmetik, algebraik, geometrik, grafik, genetik va vizual-genetik kabi metodlar nazariy va metodik jihatdan tahlil qilinadi. Har bir usulning afzalliklari va kamchiliklari eksperimental misollar bilan yoritilgan, shuningdek, o'quvchilarning individual qobiliyatlariga moslashgan holda metodlar tanlash zarurligi asoslab berilgan. Maqolada trigonometrik tenglamalarning klassik va ilg'or yondashuvlar yordamida yechimga olib boruvchi yo'llari taqqoslab o'rganilgan, bu esa o'qituvchilarga amaliy metodik vosita sifatida xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: Arifmetik, algebraik, geometrik, grafik, genetik, vizual-genetik.

Kirish. O'quvchilarga matematik masalalarni yechish usullarini o'rgatish matematikani o'qitishning muhim vazifalaridan biri sanaladi. Bu faqatgina formulalarni yodlash emas, balki ularni tushunish, qo'llash va turli yondashuvlar bilan yechim topish qobiliyatini shakllantirishni ham o'z ichiga oladi. Masalan, trigonometrik tenglamalarni turli usullardan foydalanib yechishga o'rgatish trigonometriyaga oid bilimlarni chuqurlashtirish bilan birgalikda, analitik tafakkurni rivojlantirishga ham muhim ahamiyatga ega. Matematika olimpiadalari va oliy ta'lim muassasalariga kirish imtihonlari tarkibiga trigonometrik tenglamalarni yechish va ularning ildizlarini berilgan oraliqda tanlashga oid masalalar kiritilganligi ma'lum. Trigonometrik tenglamalarni yechish bilan bog'liq muammolar tadqiqotchilar tomonidan ko'p marta muhokama qilingan bo'lsada, metodik jihatdan hamon dolzarb bo'lib qolmoqda. Boisi, turli usullarning taklif etilishi o'quvchilar tomonidan bilim olish va tanlash imkoniyatini oshiradi. Har bir o'quvchi o'zining intellektual qobiliyatiga qarab eng qulay usul bilan masalani yechishi mumkin bo'ladi. Agar o'quvchi faqat bir usulni mukammal o'zlashtirib qolgan usullarga e'tibor bermasa, ba'zi murakkab tenglamalarni yechishda qiyinalishi mumkin. Masalan, trigonometrik tenglama ildizlarini berilgan oraliqda tanlash va ildizlarini umumlashtirishga oid murakkab masalalarni mavjud standart usullar bilan yechish mumkin emas. Shu nuqtai nazardan analitik fikrlashga ega o'quvchilar algebraik usulni afzal ko'rsa, vizual fikrlaydiganlar esa geometrik usuldan foydalanishi mumkin bo'ladi. Masalani turli usullar bilan yechish orqali o'quvchilar qaysi usul tezroq natijaga olib kelishi, qaysi usul ko'proq vaqt talab qilishini tushunib oladilar.

Tadqiqot metodologiyasi qismi. Trigonometrik tenglamalarni yechish va ildizlarini berilgan oraliqda tanlashning bir necha usullari mavjud bo'lib biz ularni quyidagi guruhlariga ajratamiz: arifmetik usul; algebraik usul; geometrik usul (birlik aylana yordamida yechish); grafik usul; genetik usul. Ushbu usullarning har biri o'ziga xoslikka ega bo'lib, ularning qo'llanilishi matematik ifodaning berilishiga bog'liq.

Arifmetik usul [1] trigonometrik tenglamalarni yechishda qadam-baqadam hisoblash va parametrlarni tanlash orqali yechimni topishga asoslanadi. Bu usulda berilgan tenglamaning umumiy yechimi shakllantiriladi, so'ngra parametrga turli qiymatlar berish orqali mayyan oraliqdagi ildizlar ajratiladi va

tekshiriladi. Masalan, $\sin x = \frac{1}{2}$ tenglamaning $(-\pi; \pi)$ oraliqqa tegishli ildizlarini topishda

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ uchun n parametrga mos $(-\pi; \pi)$ oraliqqa tegishli ildizlarni topiladi.

Algebraik usul [1,2] tenglamani algebraik soddalashtirishlar va trigonometrik ifodalarni shakl almashtirishlar orqali yechishga asoslangan. Bu usul odatda trigonometrik ayniy almashtirishlar orqali tenglamani standart shaklga keltirish orqali amalga oshiriladi. Masalan,

$a \sin x + b \cos x = c$ tenglama quyidagi shakl almashtrish orqali yechiladi.

$$R \sin(x + \alpha) = c, \quad \text{bu yerda}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Geometrik usul [2] birlik aylana yordamida trigonometrik funksiya qiymatlarini inobatga olgan holda yechim topishga asoslanadi. Ushbu usul tenglamaning ildizlarini aniq tasavvur qilishga yordam beradi. Masalan, tenglama

$\sin x = a$ ko'rinishida bo'lsa birlik aylanani koordinatalar sistemasida $y = a$ to'g'ri chiziqi bilan kesishish nuqtalari topiladi. Topilgan nuqtalar tenglamaning ildizlarini aniqlaydi.

Grafik usul trigonometrik tenglamalarni yechishda funksiya grafigini chizish va ularning kesishish nuqtalarini aniqlash orqali amalga oshiriladi. Masalan, agar tenglama $\sin x = f(x)$ ko'rinishida bo'lsa, $\sin x$ va $f(x)$ funksiya grafiklarni chizish orqali ularning kesishish nuqtalari topiladi. Kesishish nuqtalari tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Genetik usul tenglamani yechishda trigonometrik funksiyalarning o'zgarishi va transformatsiyasini tahlil qilish orqali qabul qilinadigan eng samarali yondashuvni tanlashni nazarda tutadi. Usul tenglamaning asosiy xususiyatlarini chuqur tahlilda matematik nazariyaning tizimli qo'llanilishini nazarda tutadi va optimallashtirish imkonini beradi. Masalan, biz $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ga o'xshash ayniyatlarni tahlil qilsak, genetik usul barcha mumkin bo'lgan formulalar orqali ushbu ayniyatning mohiyatini ochib berish uchun matiqiy-tuzilmaviy aspektlarini chuqur o'rganish imkonini beradi.

Biz trigonometrik tenglamalar ildizlarini berilgan oraliqda tanlashning vizual-genetik usulini taklif qilamiz. Vizual-genetik usul spirallar usuliga [3] o'xshash bo'lsada, barcha usullar kombinatsiyasi va integratsiyaga qurilgan. Vizual-genetik usul geometrik, grafik va algebraik, genetik usullarni birlashtiradi, trigonometrik tenglamalarning qisqa va aniq yechimini topishni osonlashtiradi va ushbu usulni o'rganishning barcha bosqichlarida (dastlabki, chuqurlashtirilgan) qo'llash mumkin.

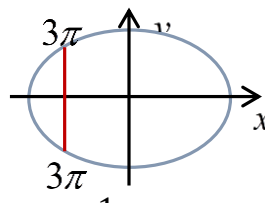
Tahlil va natijalar (Analysis and results). Trigonometrik tenglamalar ildizlarini berilgan oraliqda tanlash usullari A.G. Mordkovich [1], P.V. Semyonov [1], O.V. Shabashova [2], L.D. Ostroverxaya [3], va boshqa tadqiqotchilarning ilmiy va metodik ishlarida ko'rib chiqilgan. A.G. Mordkovich va P.V. Semyonov [1] tomonidan yozilgan adabiyotlarda $\sin kx = \alpha$, $\cos kx = \alpha$, $\operatorname{tg} kx = \alpha$ ko'rinishdagi

tenglamalar ildizlarini berilgan oraliqda tanlashning arifmetik va algebraik usuli keltirilgan. O.V. Shabashovanning maqolasida arifmetik, algebraik va geometrik (vizual model yordamida – birlik aylana) usullarining afzalliklari va kamchiliklari tahlil qilingan [2]. Arifmetik, algebraik va geometrik usullar muayyan yoshdagi o'quvchilar uchun foydali bo'lsada ulardan foydalanish ba'zi tenglamalarni yechishda ko'p vaqt talab qiladi. Shu bilan birga ayrim o'quvchilar trigonometrik ifodalarni shakl almashtrishda qiyinchilikka duch kelishadi. L.D. Ostroverxaya [3] esa trigonometrik tenglamalarni yechishda berilgan intervalga

(2π dan katta) tegishli ildizlarni tanlashning eng samarali bo'lgan spiral usulini taklif qiladi. Spirallar usuli trigonometrik funksiyalarning davriylik xossalriga asoslangan bo'lib, an'anaviy usullarga qaraganda matematik jihatdan samaraliroq va intuitiv tushunarlidir. Vizual tushunish osonligi, grafik usullar orqali natijalarni ko'rish va tahlil qilish imkoniyati mavjudligi bilan ajralib turadi. Lekin spiral usuli an'anaviy usullarga qaraganda biroz murakkab bo'lib, ayniqsa boshlang'ich bosqichda foydalanish, tushunish va qo'llashda ba'zi muammolar bo'lishi mumkin. Biz taklif qilgan usulning qo'llanilishini quyidagi misollar orqali ko'rib chiqamiz.

$$\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tenglamaning}$$

1-misol. Quyidagi $[-2; 3]$ kesmaga tegishli ildizlarini toping.



Yechish: Agar $x \in [-2; 3]$ bo'lsa, unda $3x \in [-6; 9]$. Endi tenglamani $3x$ bo'yicha yechamiz, buning uchun birlik aylana (trigonometrik aylana) dan $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ foydalanamiz (1-rasmga qarang). Kosinusning qiymati ga teng bo'lishi uchun burchaklar quyidagi holatlarga to'g'ri keladi:

-Musbat yo'nalishda (ya'ni 0 dan 9 gacha birlik aylana bo'ylab buramiz), quyidagi burchaklardan o'tamiz: $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.
-Manfiy yo'nalishda (ya'ni 0 dan -6 gacha burishda): $-\frac{3\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$.

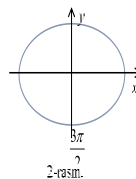
Demak, quyidagi qiymatlar tenglamaning $3x$ bo'yicha yechimlari bo'ladi:

$$3x = \frac{3\pi}{4}; 3x = \frac{11\pi}{4}; 3x = \frac{5\pi}{4}.$$

Endi har bir tenglamani 3 ga bo'lamiz va x ni topamiz:

$$x = -\frac{5\pi}{12}; x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{11\pi}{12}; x = \frac{5\pi}{12}.$$

Javob: $-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}$.



$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

2-misol. tenglamani yeching va quyidagilarni aniqlang:

a) eng kichik musbat ildizni toping;

b) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ oraliqqa tegishli ildizlarni toping;

c) eng katta manfiy ildizni toping;

d) $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqqa tegishli ildizlarni toping.

Yechish: a) Eng kichik musbat ildizni topamiz (2-rasm).

Tenglamani $\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ga nisbatan yechamiz va birlik

aylanada $\frac{3\pi}{2}$ qiymatni topamiz. Bundan x ni topamiz:

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{8}.$$

$$x = \frac{7\pi}{8}.$$

Javob:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

b) Agar bo'lsa:

$$2x \in [-\pi; 3\pi], 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right].$$

$$\left[-\frac{5\pi}{4}; 0\right]$$

Demak, kesmadagi ildizlar:

$$2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2x = -\frac{\pi}{4}, x = -\frac{\pi}{8}.$$

$$\left[0; \frac{11\pi}{4}\right]$$

U holda, kesmadagi ildizlar:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2x = \frac{7\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{8}.$$

$$-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}$$

Javob:

c) Eng katta manfiy ildizni topamiz. Birlik aylana bo'ylab

manfiy yo'nalishda buramiz. $\sin y = -1$ bo'ladigan birinchi

$$-\frac{\pi}{2}$$

nuqta bo'lgani uchun

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{8}.$$

$$-\frac{\pi}{8}$$

Javob:

$$x \in \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Agar

$$2x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{9\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right).$$

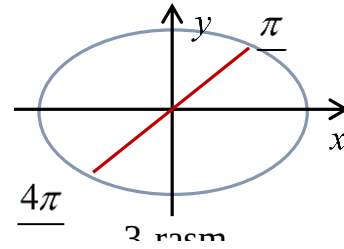
Demak:

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{8}.$$

$$-\frac{\pi}{8}$$

Javob:

4-misol. $tg 3x = \sqrt{3}$ tenglamaning $(-\pi; \pi)$ intervalga tegishli ildizlarini toping.



$$x \in (-\pi; \pi)$$

Yechish: Agar

bo'lsa

$$3x \in (-3\pi; 3\pi)$$

$$[0; 3\pi]$$

kesmada

ildizlarni topamiz (3-rasm) ikkita ildiz ko'rsatilgan:

$$3x = \frac{\pi}{3}; 3x = \frac{4\pi}{3}; 3x = \frac{7\pi}{3},$$

$$x = \frac{\pi}{9}; x = \frac{4\pi}{9}; x = \frac{7\pi}{9}.$$

Demak,

$[-3\pi; 0]$ kesmadagi ildizlarni topamiz:

$$3x = -\frac{2\pi}{3}; 3x = -\frac{5\pi}{3}; 3x = -\frac{8\pi}{3}$$

Demak,

$$x = -\frac{2\pi}{9}; x = -\frac{5\pi}{9}; x = -\frac{8\pi}{9}.$$

Javob:

$$-\frac{8\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; -\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}.$$

Endi algebraik usulda berilgan misolni yechamiz. Bunda asosiy formulalardan foydalanamiz:

$$3x = \arctg \sqrt{3} + \pi n; 3x = \frac{\pi}{3} + \pi n; x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$$

, $n \in \mathbb{Z}$. Buning uchun x ning $(-\pi; \pi)$ intervalga tegishli qiymatlarini topamiz, ya'ni $-\pi < x < \pi$ o'rinli

$$-\pi < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < \pi$$

bo'lishi kerak. Bundan

tengsizlikdan

$$-9 < 1 + 3n < 9; -10 < 3n < 8;$$

$$-\frac{10}{3} < n < \frac{8}{3}.$$

Bu yerda

n parametr $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ qiymatlarni

qabul qiladi. Agar $n = -3$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{9} - \pi = -\frac{8\pi}{9}$

; agar $n = -2$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{9}$; agar

$n = -1$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{9}$; $n = 0$ bo'lsa,

$$x = \frac{\pi}{9} + 0 = \frac{\pi}{9}; \quad n = 1 \quad \text{bo'lsa,} \quad \text{Javob: } -\frac{8\pi}{9}; -\frac{5\pi}{9}; -\frac{2\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}; \quad n = 1 \quad \text{bo'lsa,}$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}; \quad n = 2 \quad \text{bo'lsa,}$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}.$$

Xulosa va takliflar. O'quvchilarni trigonometrik tenglamalarni turli usullar bilan yechishga o'rgatish ko'plab afzalliklarga ega bo'lsa ham, bu yondashuv o'qitish strategiyasiga bog'liq. Shuning uchun dastlab o'quvchilarga oddiy usullardan boshlash kerak. Keyinroq ularni turli usullar bilan tanishtirish tavsiya etiladi. Har bir o'quvchining qaysi usulda yaxshiroq ishlashini nazorat sinovlari bilan aniqlash maqsadga muvofiq. Trigonometrik tenglamalarni turli usullar bilan yechish o'quvchilarga muammoga har xil pozitsiyada qarash imkonini beradi. Quyidagi jadvalda trigonometrik tenglamalar ildizlarini berilgan oraliqda tanlash usullari eksperimental natijalarga ko'ra solishtirildi.

Usul	Afzalliklari	Kamchiliklari
Arifmetik	Oddiy va aniq	Uzoq vaqt talab qiladi
Algebraik	Algebraik formulalarga asoslangan	Murakkab ifodalar bo'lishi mumkin
Geometrik	Vizual va intuitiv	Barcha tenglamalar uchun qo'llanilmaydi
Grafik	Grafikli tahlil imkoniyati	Grafik chizish talab etiladi
Genetik	Fundamental analizga asoslangan	Yuqori darajadagi tahlil talab qiladi
Vizual-genetik	Eng samarali usullarni birlashtiradi	Har doim qo'llash oson emas

Shunday qilib, qaysi usulni ishlatish o'quvchining bilim darajasi va masalaning murakkabligiga bog'liq bo'ladi. Algebraik usul, agar ildizlar tanlanadigan interval kichik bo'lsa va boshqa usullardan foydalanish noqulay hisob-kitoblar yoki konstruktsiyalarga olib keladigan holatda eng samarali

hisoblanadi. Vizual-genetik usul ildizlar tanlanadigan interval yetarlicha katta bo'lsa qo'llash yaxshi samara beradi. Shu bois taklif etilayotgan ushbu usul hisob-kitoblarning ravshanligi va soddaligi bilan ajralib turadi, o'quvchilarga tushunarli bo'ladi, hamda vaqtni tejaydi.

ADABIYOTLAR

1. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя. - М.: Мнемозина, 2010.
2. Шабашова О.В. Приёмы отбора корней в тригонометрических уравнениях // Математика в школе. - 2004. - № 1.
3. Островерхая Л. Д., Жданова О. К. Отбор корней тригонометрических уравнений методом спирали // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 100-109. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-100-109