УДК 517.977

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН С ДРОБНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ МИЛЛЕРА–РОССА, В СЛУЧАЕ С ЗАДЕЛАННЫМИ И СВОБОДНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш. Г.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
shokiraka@mail.ru
Реймбаева Д. К.
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза, Нукус
dilya201127@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи колебаний пластин с дробными операторами Миллера–Росса, в случае с заделанными и свободно закрепленными условиями в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи, для которой найдены её собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена решения поставленной начально–граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка, начально–граничная задача, дробная производная по времени, собственные значения, собственные функции, полнота, спектральный метод, существование, единственность, ряд.

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.141-143; 2; 3, с. 3375-3389; 4, с. 52-62; 5, с. 650-671; 6, с. 63-77; 7, с. 614-628; 8, с. 311-324; 9, с. 89-100; 10, с. 665-671]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [11, с. 364-374].

В работе [4] исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных трёх начально–граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

В работе [6] изучена задача с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально–граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классе регулярных и обобщённых решений.

В работе [7] для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области изучена первая граничная задача. Показано, что корректность постановки задачи существенным образом зависит от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Установлен критерий единственности решения. Доказаны оценки устойчивости решения от заданных граничных функций и правой части.

В работе [12] для уравнения смешанного типа с дробными производными изучена первая граничная задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ортогонального ряда и показана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения. Установлена устойчивость решения относительно заданных граничных функций в классе непрерывных и квадратично–суммируемых функций.

Отметим, что в работе [15] доказано теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. В работе [16] исследуется начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае и установлено теорема об однозначной разрешимости начально–граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае. В работе [17] доказано о разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. В работе [25] доказано об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи, связанные с уравнениями колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе, с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

В работе [22] изучена начально–граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закреплённой балки. Такие линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка описывает изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы при отсутствии вращательного движения при изгибе.

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0,T)$ где $\Pi = (0,l) \times \ldots \times (0,l)$, а $l, T-$заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$D_j^{\alpha} u(x_1,...,x_N,t) + a^2 \Delta^{4\rho} u(x_1,...,x_N,t) + b^2 D_j^{\alpha} \Delta^{4\rho} u(x_1,...,x_N,t)$$

$$+c^2 u(x_1,...,x_N,t) = f(x_1,...,x_N,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$n-1 \le \alpha < n,\ 0 \le j \le n-1,\ N,\ n,\ j+1 \in \mathbb{N},\ \rho \in \mathbb{N},\ \ a>0,\ b>0,\ \ c=const \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x),\ \ i=0,\ldots,j-1,\ \ \left.\frac{\partial^s u(x,t)}{\partial x^s}\right|_{t=0} = \varphi_s^0(x),\ \ s=0,\ldots,n-j-1 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\left.\frac{\partial^{4k} u(x,t)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1} u(x,t)}{\partial x_p^{4k+1}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2} u(x,t)}{\partial x_p^{4k+2}}\right|_{x_p=l} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+3} u(x,t)}{\partial x_p^{4k+3}}\right|_{x_p=l} = 0, \tag{3}$$

$k = \overline{0,\rho-1},\ p = \overline{1,N}$,
где $(x,t) = (x_1,\ldots,x_N,t) \in \Pi \times (0,T)$ и $f(x,t)$, $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i=0,\ldots,j-1$, $\varphi_s^0(x)$, $s=0,\ldots,n-j-1-$ достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\left\{v_{m_1,\ldots,m_N}(x_1,\ldots,x_N),\ (m_1,\ldots,m_N) \in \mathbb{N}^N\right\}$ следующей спектральной задачи:

$$\Delta^{4\rho} v(x_1,...,x_N,t) - \lambda v(x) = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{4k} v(x)}{\partial x_p^{4k}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+1} v(x)}{\partial x_p^{4k+1}}\right|_{x_p=0} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+2} v(x)}{\partial x_p^{4k+2}}\right|_{x_p=l} = 0,\ \left.\frac{\partial^{4k+3} v(x)}{\partial x_p^{4k+3}}\right|_{x_p=l} = 0, \tag{5}$$

$k = \overline{0,\rho-1},\ j = \overline{1,N}$,
$\lambda-$спектральный параметр. $D_j^{\alpha}-$интегро–дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля.

Пусть $f(t):\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ функция n раз непрерывно дифференцируемая и $n-1 \le \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. Дробная производная по Римана–Лиувилля порядка α определяется с равенством

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{6}$$

где $\Gamma(\cdot)$−гамма–функция Эйлера. Эта функция удовлетворяет равенство $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Дробная производная или регуляризованной дробной производной по Капута порядка α определяется с равенством

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{7}$$

Справедлива формула

$$D^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, производная в смысле Римана–Лиувилля может быть представлена в виде суммы сингулярных членов

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0) \tag{9}$$

и регуляризованной дробной производной по Капута порядка α:

$$\frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau. \tag{10}$$

Присутствие слагаемых (9) приводит к тому, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие чётко физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная порядка α $(n-1 \le \alpha < n\,,\ n \in \mathbb{N})$

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0), \tag{11}$$

которая была впервые введена в работе Капуто [13], а также независимо от него в работах Джрбашяном и Нерсесяном [20].

Как производные Римана–Лиувилля, так и производные Капуто не обладают ни полугрупповым свойством, ни тем более свойством коммутативности, т.е. существует функции $f(t)$ и $g(t)$, который

$$\mathbf{D}^{\alpha+\beta}f(t) \ne \mathbf{D}^{\alpha}\mathbf{D}^{\beta}f(t), \quad \mathbf{D}^{\alpha}\mathbf{D}^{\beta}f(t) \ne \mathbf{D}^{\beta}\mathbf{D}^{\alpha}f(t),$$

$$\mathbf{D}^{(\alpha+\beta)}f(t) \ne \mathbf{D}^{(\alpha)}\mathbf{D}^{(\beta)}f(t), \quad \mathbf{D}^{(\alpha)}\mathbf{D}^{(\beta)}f(t) \ne \mathbf{D}^{(\beta)}\mathbf{D}^{(\alpha)}f(t).$$

В связи с этим Миллером и Россом [14] были введены так называемые секвенциальные производные, дробного порядка:

$$\mathrm{D}^{\alpha}f(t) = \mathbf{D}^{\alpha_1}\mathbf{D}^{\alpha_2}\ldots\mathbf{D}^{\alpha_m}f(t), \tag{12}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$− мультииндекс, функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Вообще говоря, в качестве оператора $\mathbf{D}^{\alpha}$, лежащего в основе секвенциальной производной Миллера–Росса, можно использовать оператор дробного дифференцирования по Риману–Лиувилля, Капута или любую другую его разновидность. В частности, для целых α_i это может быть оператор обычного дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_i}$. Использование секвенциальных производных Миллера–Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений.

Выберем некоторое ν, $n-1 \le \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha = (j,\, \nu-n+1,\, n-1-j)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Определим производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля и в смысле Миллера–Росса по Капута с равенствами соответственно

$$\mathrm{D}_j^{\nu}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{\nu-n+1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j}f(t), \quad \mathrm{D}_j^{(\nu)}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(\nu-n+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j}f(t),$$

где $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Эти производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля $\mathrm{D}_j^{\nu} f(t)$ и в смысле Миллера–Росса по Капута $\mathrm{D}_j^{(\nu)} f(t)$ связаны с равенствами

$$\mathrm{D}_0^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}^{\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$\mathrm{D}_1^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}_0^{\nu} f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) + \frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0) = \mathrm{D}^{\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}_{j-1}^{\nu} f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) =$$

$$= \mathrm{D}^{\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$\mathrm{D}_{n-1}^{(\nu)} f(t) = \mathrm{D}_{n-2}^{\nu} f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = \mathrm{D}^{\nu} f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0),$$

$$\mathrm{D}_{n-1}^{\nu} f(t) = \mathrm{D}^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = \mathrm{D}^{\nu} f(t),$$

где $n-1 \le \nu < n,\ l \in \mathbb{N}$ и для функции $f(t)$ производная порядка $l-1$ абсолютно непрерывная функция. Доказательство этих утверждений дано в работах Чикрий и Матичина [24].

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$ вводится так:

$$\left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right)_{W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)} = \left(f\left(x\right), g\left(x\right)\right)_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{N} \left(D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f\left(x\right), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} g\left(x\right)\right)_{L_2(\Pi)} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le N} \left(D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f\left(x\right), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} g\left(x\right)\right)_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \ldots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_N \le N} \left(D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \ldots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f\left(x\right), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \ldots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} g\left(x\right)\right)_{L_2(\Pi)}.$$

Тогда соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$ определяется по формуле

$$\|f(x)\|^2_{W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)} = \|f(x)\|^2_{L_2(\Pi)} + \sum_{i_1=1}^{N} \left\|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le N} \left\|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} + \ldots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_N \le N} \left\|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \ldots\ D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left.\frac{\partial^{4k_i} f(x)}{\partial x_i^{4k_i}}\right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{4s_i - N}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+1} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}}\right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{4s_i - N - 2}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+2} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}}\right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{4s_i - N - 4}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+3} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}}\right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{4s_i - N - 6}{8}$, $\quad i = \overline{1, N}$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$ функций $N-$переменных $f\left(x\right) = f\left(x_1, \ldots, x_N\right)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1, \ldots, m_N}\left(x_1, \ldots, x_N\right) = X_{m_1}\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot X_{m_N}\left(x_N\right), \tag{13}$$

где

$$X_{m_i}(x)=\frac{1}{\sqrt{1+b_{m_i}^{4s_i}}}\times$$

$$\times\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{l}|ctg\frac{b_{m_i}l}{2}|}\left(\frac{\cos b_{m_i}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{b_{m_i}l}{2}}-\frac{shb_{m_i}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{ch\frac{b_{m_i}l}{2}}\right), & \\ \qquad m_i=2k_i,\ k_i=1,\ 2,\ \ldots & \\ \frac{1}{\sqrt{l}|tg\frac{b_{m_i}l}{2}|}\left(\frac{\sin b_{m_i}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{b_{m_i}l}{2}}+\frac{chb_{m_i}\left(x-\frac{l}{2}\right)}{sh\frac{b_{m_i}l}{2}}\right), & \\ \qquad m_i=2k_i-1,\ k_i=1,2,\ldots, & \end{cases}\tag{14}$$

b_{m_i}−корень трансцендентного уравнения

$$ch(lb)\cdot\cos(lb)=-1.\tag{15}$$

Из графиков функций $\cos(lb)$ и $\frac{-1}{ch(lb)}$ видно, что в каждом из интервалов $\frac{\pi(n-1)}{l}+\frac{\pi}{2l}<b_n<\frac{\pi n}{l}$, $n=2i-1,\ i=1,2,...,$ и $\frac{\pi(n-1)}{l}<b_n<\frac{\pi(n-1)}{l}+\frac{\pi}{2l}$, $n=2i,\ i=1,2,...,$ имеется ровно один корень b_n, причем $b_{2i-1}-\frac{\pi(4i-3)}{2l}\to 0$ при $i\to\infty$ и $\frac{\pi(4i-1)}{2l}-b_{2i}\to 0$ при $i\to\infty$. Отсюда видно, что существует счетное множество корней (собственных значений) уравнения (15):

$$0<b_1<\cdots<b_n<\cdots$$

при этом при больших n справедлива асимптотическая формула

$$b_n=\frac{\pi(n-1)}{l}+\frac{\pi}{2l}+O\left(e^{-\pi n}\right).\tag{16}$$

Соответственно, имеем

$$b_{m_i}=\frac{\pi(m_i-1)}{l}+\frac{\pi}{2l}+O\left(e^{-\pi m_i}\right).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Система собственных функций

$$\{v_{m_1,\ldots,m_N}(x_1,\ldots,x_N)\}_{(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^N}=\left\{\prod_{i=1}^{N}X_{m_i}(x_i)\right\}_{(m_1,\ldots,m_N)\in\mathbb{N}^N}\tag{17}$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированный системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x)\in H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left.\frac{\partial^{4k_i}f(x)}{\partial x_i^{4k_i}}\right|_{x_i=0}=0$ при $0\le k_i<\frac{2s_i-N}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+1}f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}}\right|_{x_i=0}=0$ при $0\le k_i<\frac{2s_i-N-2}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+2}f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}}\right|_{x_i=l}=0$ при $0\le k_i<\frac{2s_i-N-4}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+3}f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}}\right|_{x_i=l}=0$ при $0\le k_i<\frac{2s_i-N-6}{8}$, $\quad i=\overline{1,N}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$.

Теоремы 1 и 2 доказана в работе 23.

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$ назовем функцию $u(x,t)$ из класса

$$u(x_1,...,x_N,t)\in C(\bar{Q}),\quad D_j^{\alpha}u(x_1,...,x_N,t)\in C(\bar{Q}),$$

$$\Delta^{4\rho}u(x_1,...,x_N,t)\in C(\bar{Q}),\quad D_j^{\alpha}\Delta^{4\rho}u(x_1,...,x_N,t)\in C(\bar{Q})$$

удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x_1,...,x_N,t)\in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left.\frac{\partial^{4k_i} f(x)}{\partial x_i^{4k_i}}\right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{2s_i-N}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+1} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}}\right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{2s_i-N-2}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+2} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}}\right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{2s_i-N-4}{8}$, $\left.\frac{\partial^{4k_i+3} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}}\right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \le k_i < \frac{2s_i-N-6}{8}$, $i = \overline{1,N}$.

Функцию $u(x,t)$ назовем регулярным решением задача (1)–(3) в области Q, если функция $u(x,t)$– регулярные решение уравнения (1) в области Q из класса

$$u(x_1,...,x_N,t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^{\alpha} u(x_1,...,x_N,t) \in C(\bar{Q}),$$

$$\Delta^{4\rho} u(x_1,...,x_N,t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^{\alpha}\Delta^{4\rho} u(x_1,...,x_N,t) \in C(\bar{Q})$$

и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,...,s_N,\theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1,N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x,t)$ является регулярным решением задача (1)–(3) в области Q).

Докажем теперь существование и единственность решения начально-граничной задачи (1)–(3). Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0,\dots,j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0,\dots,n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1,N}$ и правая часть $f(\cdot,t) \in C\left([0,T];\ \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)\right)$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho_p + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1,N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1}\varphi^0_{s;\ m_1,...,m_N}\cdot t^s\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}\cdot t^{\alpha};\ s+1\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{j-1}\tilde{\varphi}^0_{i\ ;\ m_1,...,m_N}\cdot t^{\alpha-i-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}\cdot t^{\alpha};\ \alpha-i\right)+$$

$$\left.+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{a^2\lambda_{m_1,...,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}(t-\tau)^{\alpha};\alpha\right]\frac{1}{1+b^2\lambda_{m_1,...,m_N}}f_{m_1,...,m_N}(\tau)d\tau\right]\cdot v_{m_1,...,m_N}(x). \quad (18)$$

Здесь $E_\eta(x;\ \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k\eta^{-1}+\mu)}$ функция Миттаг-Лефлера, $\lambda_{m_1,...,m_N} = \left(\sum\limits_{p=1}^{N} b^2_{m_p}\right)^{2\rho}$, где b_{m_p} корень трансцендентного уравнения корень трансцендентного уравнения (15) и коэффициенты определяется по формулам

$$f_{m_1,...,m_N}(t) = \int_{\Pi} f(x,t)\, v_{m_1,...,m_N}(x)dx, \quad \tilde{\varphi}^0_{i\,;\,m_1,...,m_N} = \int_{\Pi}\tilde{\varphi}^0_i(x)v_{m_1,...,m_N}(x)dx,$$

$i = 0,\dots,j-1\,;\ \ m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^0_{s;\,m_1,...,m_N} = \int_{\Pi}\varphi^0_s(x)\,\tilde{v}_{m_1,...,m_N}(x)\,dx, \quad s = 0,\dots,-\lfloor -\alpha\rfloor - j - 1,\ \ m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Введем функции

$$T_{m_1,...,m_N}(t) = \int_{\Pi} u(x,t)\, v_{m_1,...,m_N}(x)\,dx, \quad (19)$$

где

$$v_{m_1,...,m_N}(x) = \prod_{i=1}^{N} X_{m_i}(x_i). \quad (20)$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_m(t) = T_{m_1,\dots,m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_j^\alpha T_{m_1,\dots,m_N}(t) + \frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}} T_{m_1,\dots,m_N}(t) = f_{m_1,\dots,m_N}(t), \;\; m_p \in \mathbb{N}, \;\; n-1<\alpha\le n, \\ 0 \le j \le n-1, \; N, \;\; n, \; j+1 \in \mathbb{N}, \; \rho \in \mathbb{N}, \; a>0, \; b>0, \; c=const \tag{21}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} T_{m_1,\dots,m_N}(t) = \tilde{\varphi}^0_{i\,;\,m_1,\dots,m_N}, \;\; i=0,\dots,j-1; \;\; m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{d^s T_{m_1,\dots,m_N}(t)}{dt^s} = \varphi^0_{s\,;\,m_1,\dots,m_N}, \;\; s=0,\dots,-[-\alpha]-j-1; \;\; m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

где

$$f_{m_1,\dots,m_N}(t) = \int\limits_\Pi f(x,\,t) v_{m_1,\dots,m_N}(x)dx, \tag{23}$$

$$\tilde{\varphi}^0_{i\,;\,m_1,\dots,m_N} = \int\limits_\Pi \tilde{\varphi}^0_i(x)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(x)dx, \; i=0,\dots,j-1; \;\; m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$\varphi^0_{i\,;\,m_1,\dots,m_N} = \int\limits_\Pi \varphi^0_i(x) v_{m_1,\dots,m_N}(x)dx, \; s=0,\dots,-[-\alpha]-j-1;\, m_1,\dots,m_N \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Решение задачи Коши (21), (22) известно (см., например [24]), и оно имеет вид

$$T_{m_1,\dots,m_N}(t) = \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi^0_{s;\,m_1,\dots,m_N}\cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha;\;\; s+1\right) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}^0_{i\,;\,m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha-i-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha;\; \alpha-i\right) + \\ + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}(t-\tau)^\alpha;\;\; \alpha\right]\frac{1}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}} f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)d\tau, \tag{26}$$

где

$$\lambda_{m_1,\dots,m_N} = \left(\sum_{p=1}^N b^2_{m_p}\right)^{2\rho}, \tag{27}$$

$$b_{m_p} = \frac{\pi(m_p-1)}{l} + \frac{\pi}{2l} + O\left(e^{-\pi m_p}\right), \tag{28}$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha;\;\; s+1\right) = \sum_{q=0}^\infty \frac{\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha\right)^q}{\Gamma(\alpha q+s+1)}, \tag{29}$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha;\; \alpha-i\right) = \sum_{q=0}^\infty \frac{\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot t^\alpha\right)^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-i)}, \tag{30}$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}}\left[-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}(t-\tau)^\alpha;\;\; \alpha\right] = \sum_{q=1}^\infty \frac{\left(-\frac{a^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}+c^2}{1+b^2\lambda_{m_1,\dots,m_N}}\cdot (t-\tau)^\alpha\right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha q)}. \tag{31}$$

Поскольку функции (19) построены в явном виде (23), то на основании полноты системы собственных функций (17) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(x,t)\equiv 0$ и $\varphi_i(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,-[-\alpha]}$. Тогда из формулы (23)–(25) и (26) следует, что

$$\int\limits_\Pi u(x,t)\, v_{m_1,\dots,m_N}(x)\, dx = 0$$

при всех $m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (17) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x,t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$.

Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x,t)$ непрерывна на $\bar{Q}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(Q)$ по переменной x является функцией из класса $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5):

$$u(x,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=1}^{\infty} T_{m_1,\ldots,m_N}(t) \cdot v_{m_1,\ldots,m_N}(x), \tag{32}$$

где $v_{m_1,\ldots,m_N}(x) = \prod\limits_{i=1}^{N} X_{m_i}(x_i)$, $T_{m_1,\ldots,m_N}(t)$ определяется по формуле (19).

После подстановки (26) в (32) мы получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi^0_{s;\,m_1,\ldots,m_N} \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} \cdot t^{\alpha};\ s+1 \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}^0_{i\,;\,m_1,\ldots,m_N} \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} \cdot t^{\alpha};\ \alpha - i \right) +$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} (t-\tau)^{\alpha}; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} f_{m_1,\ldots,m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1,\ldots,m_N}(x). \tag{33}$$

Поскольку система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$, любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$. Поэтому ряд (33) сходится в $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ при любом $t \in [0, T]$. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(Q)$. Согласно теореме 2, система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(Q)$.

Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}^0_i(x),\ i = 0, \ldots, j-1$; $\varphi^0_s(x),\ s = 0, \ldots, n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2},\ p = \overline{1,N}$ и правая часть $f(\cdot,t) \in C\left([0,T];\, \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)\right)$. Тогда по теореме вложения Соболева справедливо неравенство

$$\|u(x,t)\|^2_{C^{4\rho,4\rho,\ldots,4\rho}(\Pi)} \le c_8 \|u(x,t)\|^2_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)} \le$$

$$\le c_9 \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi^0_{s;\ m_1,\ldots,m_N} \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} \cdot t^{\alpha};\ s+1 \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}^0_{i\ ;\ m_1,\ldots,m_N} \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} \cdot t^{\alpha};\ \alpha - i \right) +$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} (t-\tau)^{\alpha};\ \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1,\ldots,m_N}} f_{m_1,\ldots,m_N}(\tau) d\tau \right|^2 < const.$$

Отсюда следует что, если начальные функции $\tilde{\varphi}^0_i(x),\ i = 0, \ldots, j-1$; $\varphi^0_s(x),\ s = 0, \ldots, n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2},\ p = \overline{1,N}$, и правая часть $f(\cdot,t) \in C\left([0,T];\, \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)\right)$, то регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2},\ p = \overline{1,N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда (18). Теорема 3 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. МГУ, М. 1999.

2. Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. Наука, М. 1965.

3. K.B. Sabitov, and A.G. Khakimov. Determination of the Spectrum of Frequencies and Vibrations of a Rectangular Plate, Mobily Employed Around the Edge, in Different Media // Mechanics of Solids, 2024, Vol. 59, No. 6, pp. 3375-3389. https://doi.org/10.1134/S002565442460435X

4. K.B. Sabitov. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate // Russian Mathematics. 2021. Vol. 65. No. 10. P. 52-62. https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054.

5. K.B. Sabitov. Vibrations of plate with boundary "hinged attachment"conditions // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, No. 4. P. 650-671. [In Russian]. https://doi.org/10.14498/vsgtu1950.

6. K.B. Sabitov. Plate oscillations with mixed boundary conditions // Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2023. No. 3. P. 63-77. [In Russian]. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77.

7. K.B. Sabitov. Direct and inverse problems for the equation of oscillations of a rectangular plate to find the source // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 614-628. [In Russian]. https://doi.org/10.31857/S0044466923040142.

8. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, №2. С. 311-324.

9. Сабитов К.Б. К теории начально–граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №1, с. 89-100.

10. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №5, С. 665-671.

11. Сабитов К.Б. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференциальные уравнения, 2021, том 57, №3. С. 364-374.

12. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными // Изв. вузов. Матем., 2022, №9, С. 83-94. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-9-83-94.

13. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529-539.

14. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley & Sons, 1993.

15. O.A. Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes // Mathematics 2019, 7, 235. №1. P. 1-20. Basel, Switzerland.

16. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае // Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том 55, №10, с. 1379-1391.

17. Kasimov Sh.G., Ilhan O. A., Madraximov U.S., Baskonus H. M. Solvability of the mixed problem of a high-order PDE with fractional time derivatives, Sturm-Liouville operators on spatial variables and non-local boundary conditions // Rocky mountain journal of mathematics volume 49, number 4, 2019, pp. 1191-1206.

18. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М. 1969.

19. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М. 1965.

20. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3-29.

21. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. 1966.

22. Сабитов К.Б., Фадеева О.Б. Начально–граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 25, №1. С. 51-66.

23. Kasimov Sh.G., Madrakhimov U.S. On the unique solvability for initial-boundary problems of vibrations of a beam, one end of which is fixed and other is free, in the Sobolev classes in the multidimensional case // Uzbek mathematical jurnal, 2019, №4, pp. 92-106.

24. Chikriy A.A., Matichin I.I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Rossa // J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1-11.

25. Sh.G. Kasimov, and A.P. Koshanov. On the unambiguous solvability of a multidimensional initial-boundary value problem for the beam oscillation equation with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes // Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, (11), 5546-5558 (2024).

ANNOTATSIYA

Mazkur ishda Sobolev sinflarida kasr tartibli Miller–Rossa operatori qatnashgan plastinka tebranishlari tenglamasini qoʻzgʻalmas va erkin qoʻyilgan shartlardagi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan. Koʻrib chiqilayotgan masalaning yechimi koʻp oʻlchamli spektral masalaning xos funksiyalari sistemasi boʻyicha yoyilgan qator koʻrinishida qurilgan. Shuningdek, bu spektral masalaning xos qiymatlari transsendent tenglamaning ildizlari sifatida topilgan va mos xos funksiyalari sistemasi qurilgan. Bu xos funksiyalar sistemasi Sobolev fazolarida toʻla va Riss bazisini tashkil etishi koʻrsatilgan. Xos funksiyalar sistemasining toʻlaligi asosida qoʻyilgan boshlangʻich–chegaraviy masalaning yechimi qurilgan.

Kalit soʻzlar: yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar, boshlangʻich–chegaraviy masala, vaqt boʻyicha kasr tartibli hosila, xos funksiyalar, toʻlalik, spektral usul, mavjudlik, yagonalik, qator.

ANNOTATION

The paper proves the existence and uniqueness theorem for the solution of the problem of plate vibrations with fractional Miller–Ross operators, in the case of fixed and freely fixed conditions in Sobolev classes. The solution of the problem under consideration is constructed as the sum of a series according to the system of eigenfunctions of a multidimensional spectral problem, for which its eigenvalues are found as the roots of the transcendental equation and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev spaces. Based on the completeness of the system of eigenfunctions, solutions to the initial boundary value problem are obtained.

Key words: high–order partial differential equation, initial–boundary value problem, fractional time derivative, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, spectral method, existence, uniqueness, series.