УДК 517.55

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА τ-ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

Манасыпова Р.З.
Национальный педагогический университет Узбекистана имени Низами, Ташкент
rezidabadrutdinova@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуются некоторые свойства пространства τ-замкнутых подмножеств топологических T_1-пространств X. На семействе τ-замкнутых подмножеств вводится база аналогичная топологии Виеториса. Доказывается, что если X есть T_1-пространство и $X_0 \subset X$, то множество $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$. Также доказывается, что если X есть T_1-пространство, то и пространство $\exp^\tau X$ есть T_1-пространство. Показано, что если Y есть всюду τ-плотное подмножество T_1-пространства X, то $\exp^\tau Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\exp^\tau X$. Аналогично, что если $\exp^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\exp^\tau X$, то показано, что пространство Y всюду τ-плотно в X. Доказывается аналог теоремы Майкла для плотности T_1-пространства, т.е., пусть X - бесконечное T_1-пространство, то $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. Показано, что если X - бесконечное T_1-пространство и U есть τ-открытое подмножество, тогда всякое τ-открытое подмножество в U есть τ-открытое подмножество в X.

Ключевые слова: τ-замкнутые множества, τ-открытые множества, τ-плотность, τ-замыкание, гиперпространство, топология Виеториса, пространство τ-замкнутых подмножеств.

1. Введение

Пусть X - топологическое T_1-пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число. Множество всех замкнутых подмножеств пространства X обозначим через $\exp X$. Базой топологии Виеториса, определённой на множестве $\exp X$, является семейство множеств вида:

$$O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle = \{F : F \in \exp X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i \neq \varnothing,\ \text{для } i = 1, ..., n\},$$

где U_1, U_2, ..., U_n - открытые подмножества пространства X [1].

В 1980 году I.Juhasz в книге [2] ввёл определение τ-замкнутого множества.

Определение 1 [2]. Подмножество $F \subset X$ называется τ-замкнутым в топологическом пространстве X, если для каждого подмножества $B \subset F$ такого, что мощность подмножества B не превосходит бесконечного кардинального числа τ, замыкание множества B в X лежит в F.

В 2016 году О.Г.Окуневым было введено следующее понятие τ-замыкания подмножества.

Определение 2 [3]. τ-замыканием подмножества A топологического пространства X называется множество вида

$$[A]_\tau = \bigcup \{\overline{B} : B \subset A, |B| \leq \tau\}$$

Множество называется τ-плотным, если его τ-замыкание совпадает со всем пространством X.

В 2023 году в работе [4] авторами D.N.Georgiou, N.K.Mamadaliyev, R.M.Zhuraev было введено определение τ-открытого подмножества и установлена связь между τ-открытыми, τ-замкнутыми подмножествами и τ-непрерывными отображениями, которые были введены А.В.Архангельским в 1983 году [5].

В 2023 году в работе [6] Р.Б.Бешимов, Н.К.Мамадалиев и Р.З.Манасыпова изучили некоторые свойства τ-замкнутых, τ-открытых подмножеств, свойства τ-замыкания, τ-внутренности и τ-границы множеств. Были приведены примеры топологических пространств, в которых демонстрируются схожесть и различия между τ-замыканием, τ-внутренностью, τ-границей подмножеств и замыканием, внутренностью, границей подмножеств соответственно.

В работе [7] была расширена теория τ-замкнутых подмножеств и введено определение некоторых кардинальных инвариантов, в частности, τ-плотности и τ-числа Суслина. Также были приведены примеры топологических пространств, в которых показывается разница между τ-плотностью и плотностью, а также τ-числом Суслина и числом Суслина.

Для топологического пространства X τ-плотностью определяется наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A есть τ-плотное подмножество X, т.е., $d^\tau(X) = \min\{|A|; A$ есть τ-плотное подмножество $X\}$.

В работе [8] было введено определение τ-базы и системы τ-окрестностей топологического пространства, а также были изучены их свойства. Было построено пространство τ-непрерывных отображений и было доказано, что оно является T_i-пространством когда образ τ-непрерывных отображений является T_i-пространством при $i = 0$, 1, 2, 3.

В данной статье вводится понятие пространства τ-замкнутых подмножеств и исследуются его некоторые топологические и кардинальные свойства.

2. Основные результаты

Пусть X - топологическое T_1-пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число. Через $\exp^\tau X$ обозначим семейство всех τ-замкнутых подмножеств пространства X.

В работе В.В.Федорчука и В.В.Филиппова доказаны следующие утверждения:

Теорема 1 [1]. Пусть X есть T_1-пространство и $X_0 \subset X$. Тогда множество $\{F : F \in \exp X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\exp X$.

Теорема 2 [1]. Если X есть T_1-пространство, то и пространство $\exp X$ есть T_1-пространство.

Теорема 3 [1]. Если Y есть всюду плотное подмножество пространства X, то $\exp Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\exp X$.

Напомним определение базы топологического пространства.

Определение 2 [9]. Семейство открытых подмножеств называется базой топологического пространства X, если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства B.

Всякая база обладает следующими свойствами:

1) Для любого $x \in X$ существует элемент $U \in B$, такой, что $x \in U$.

2) Для любых U_1, U_2 из B и любой точки x из $U_1 \cap U_2$ существует элемент $U \in B$ такой, что $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Пусть $U_1, ..., U_n$ есть τ-открытые подмножества пространства X.

Теорема 4. Семейства множеств вида

$$O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \{F : F \in \exp^\tau X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i \neq \varnothing,\ \text{для всякого } i = \overline{1.n}\}$$

образуют базу некоторой топологии на множестве $\exp^\tau X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы проверим вышеупомянутое семейство на свойства базы:

1) Для произвольного элемента F из множества $\exp^\tau X$ выберем в качестве U само пространство X. Тогда $O\langle X\rangle = \{E : E \subset X, E \cap X \neq \varnothing\}$. Поскольку всякий элемент F из множества $\exp^\tau X$ удовлетворяет этому условию, то $O\langle X\rangle = \exp^\tau X$. Следовательно, первое условие выполняется.

2) Для всякого элемента F из пересечения $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap O\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$ верно равенство:

$$O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap O\langle V_1, V_2, ..., V_k\rangle = \{F : F \in \exp^\tau X, F \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} V_j\right),$$

$$F \cap U_i \neq \varnothing, F \cap V_j \neq \varnothing\}$$

для всех $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., k$. Через W_{ij} обозначим τ-открытое множество такое, что $W_{ij} = U_i \cap V_j$, $F \cap (U_i \cap V_j) \neq \varnothing$, $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} V_k$. Пронумеруем все такие W_{ij} и получим конечное семейство τ-открытых множеств $W_1, W_2, ..., W_m$. Выберем произвольный элемент Φ из семейства $O\langle W_1, W_2, ..., W_m\rangle$. Тогда, во-первых, Φ пересекается со всяким W_{ij}, а во-вторых, Φ лежит в объединении $\bigcup\limits_{i,j=1}^{n,k} W_{ij}$, что эквивалентно следующему: $\Phi \cap (U_i \cap V_j) \neq \varnothing$ и $\Phi \subset \bigcup\limits_{i,j=1}^{n,k} (U_i \cap V_j) = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} V_j\right)$. Следовательно, Φ принадлежит также пересечению $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap O\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$. Из произвольности выбора Φ следует, что $O\langle W_1, W_2, ..., W_m\rangle \subset O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap O\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$. В частности, $F \in O\langle W_1, W_2, ..., W_m\rangle \subset O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap O\langle V_1, V_2, ..., V_n\rangle$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть X есть T_1-пространство и $X_0 \subset X$. Тогда множество $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда X_0 является одноточечным множеством. Тогда семейство $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\} = \{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \cap F \neq \varnothing\}$. Следовательно, $\exp^\tau X \setminus \{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \cap F \neq \varnothing\}$ совпадает с семейством $\{F' : F' \in \exp^\tau X, X_0 \cap F' = \varnothing\}$ и, значит, F' лежит в дополнении множества X_0. Обозначим через U множество $X \setminus X_0$. Тогда $O\langle U\rangle = \{F' : F' \in \exp^\tau X, F' \cap (X \setminus X_0) \neq \varnothing\}$. Отсюда вытекает, что семейство $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \cap F \neq \varnothing\}$ является замкнутым в пространстве $\exp^\tau X$.

2) Для произвольного $X_0 \subset X$ справедливо равенство $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\} = \bigcap\limits_{x \in X_0} \{F : F \in \exp^\tau X, x \in X\}$. Как было доказано ранее, множество вида $\{F : F \in \exp^\tau X, x \in X\}$ замкнуто в $\exp^\tau X$, а значит и произвольное пересечение $\bigcap\limits_{x \in X_0} \{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \cap F \neq \varnothing\}$ также замкнуто в $\exp^\tau X$ как пересечение замкнутых подмножеств. Теорема 5 доказана.

Утверждение 1. Если Y есть всюду τ-плотное подмножество T_1-пространства X, то $\exp^\tau Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\exp^\tau X$.

Доказательство. Пусть $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ есть произвольное непустое τ-открытое подмножество пространства $\exp^\tau X$. Так как Y является всюду τ-плотным подмножеством пространства X, то $U_i \cap Y$ не пусто для всякого $i = 1, 2, ..., n$. Выберем по точке $x_i \in U_i \cap Y$ для всех $i = 1, 2, ..., n$ и положим $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда $F \in O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle \cap \exp^\tau Y$. Из произвольности выбора $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ следует, что $\exp^\tau Y$ всюду плотно в пространстве $\exp^\tau(X)$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Если $\exp^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\exp^\tau X$, то пространство Y всюду τ-плотно в X.

Доказательство. Выберем произвольное τ-открытое подмножество U топологического пространства X, где $U_1, U_2, ..., U_n$ есть τ-открытые подмножества пространства X. Тогда $O\langle U\rangle$ есть открытое подмножество пространства $\exp^\tau X$. Так как $\exp^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\exp^\tau X$, то $O\langle U\rangle \cap \exp^\tau Y$ не пусто. Пусть F - не пусто и принадлежит $O\langle U\rangle \cap \exp^\tau Y$. Тогда $F \subset U$ и $F \subset Y$. Значит, $U \cap Y$ не пусто и пространство Y всюду τ-плотно в X. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть X есть топологическое T_1-пространство. Тогда пространство $\exp X$ есть всюду плотное подмножество пространства $\exp^\tau X$.

Доказательство. Выберем произвольное открытое подмножество $O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ пространства $\exp^\tau X$. Положим, что $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, где $x_i \in U_i$ для всякого $i = 1, 2, ..., n$. Рассмотрим пересечение $\exp X \cap O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$. Оно не пусто, поскольку содержит в себе элемент B. Следовательно, $\exp X$ есть всюду плотное подмножество пространства $\exp^\tau X$. Утверждение 3 доказано.

В работе [10] доказана следующая теорема:

Теорема 7 [10]. Пусть X - бесконечное T_1-пространство. Тогда $d(X) = d(\exp X)$. Сейчас мы докажем аналогичную теорему для τ-плотности и пространства τ-замкнутых подмножеств.

Теорема 8. Пусть X - бесконечное T_1-пространство. Тогда $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$.

Доказательство. Пусть $d^\tau(\exp^\tau X) = \kappa \geq \aleph_0$. Тогда существует такое семейство $\mu = \{E_\alpha : \alpha \in A, |A| = \kappa\}$, τ-замыкание которого совпадает со всем пространством $\exp^\tau X$. Из каждого множества $E_\alpha \in \mu$ выбираем по точке $a_\alpha \in E_\alpha$, $\alpha \in A$. Положим $B = \{a_\alpha : \alpha \in A\}$. Ясно, что $|B| = |\mu| = \kappa$. Покажем, что B является всюду τ-плотным в X. Пусть U - непустое τ-открытое подмножество пространства X. Рассмотрим открытое множество $O\langle U\rangle$ в $\exp^\tau X$. Так как μ - всюду τ-плотно в $\exp^\tau X$, то существует такое $E_\alpha \in \mu$, что $E_\alpha \in O\langle U\rangle$. По условию мы выбрали точку $a_\alpha \in E_\alpha \subset U$. Значит, $d^\tau(X) \leq \kappa$. Теорема 8 доказана.

Пусть A - произвольное подмножество топологического пространства X. Через $\exp^\tau(A, X)$ будем обозначать семейство всех непустых подмножеств множества A, которые τ-замкнуты в пространстве X, то есть,

$$\exp^\tau(A, X) = \{F : F \text{ является} \tau - \text{замкнутым в } X \text{ и } F \subset A\}.$$

Утверждение 6. Если X_0 есть τ-замкнутое подмножество пространства X, то $\exp^\tau(X_0, X)$ есть замкнутое подмножество пространства $\exp^\tau X$.

Доказательство. Рассмотрим дополнение множества $\exp^\tau(X_0, X)$. Оно состоит из τ-замкнутых подмножеств F пространства X, которые имеют непустое пересечение с множеством $X \backslash X_0$, то есть,

$$\exp^\tau X \backslash \exp^\tau(X_0, X) = \{F : F \text{ является } \tau\text{-замкнутым в } X \text{ и } F \cap (X \backslash X_0) \neq \varnothing\}.$$

По условию X_0 есть τ-замкнутое подмножество в X, значит его дополнение $U = X \backslash X_0$ есть τ-открытое подмножество пространства X. Тогда $\exp^\tau X \backslash \exp^\tau(X_0, X)$ совпадает с открытым множеством $O\langle U\rangle$. Следовательно, множество $\exp^\tau(X_0, X)$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$. Утверждение 6 доказано.

Теорема 9. Пусть множество X_0 лежит в T_1-пространстве X. Тогда имеет место равенство:

$$\exp^\tau([X_0]_\tau, X) = [\exp^\tau(X_0, X)]_\tau.$$

Доказательство. Согласно утверждению 6 множество $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$, а значит, и τ-замкнуто. Следовательно, $[\exp^\tau(X_0, X)]_\tau. \subset \exp^\tau([X_0]_\tau, X)$.

Докажем обратное включение: что $\exp^\tau(X_0, X)$ является подмножеством $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$. Выберем произвольный элемент F из $\exp^\tau(X_0, X)$, то есть, такое τ-замкнутое подмножество F, которое лежит в X_0. Из определения τ-замыкания множества следует, что $X_0 \subset [X_0]_\tau$ и $F \subset [X_0]_\tau$. Значит, F принадлежит $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$ и $\exp^\tau(X_0, X) \subset \exp^\tau([X_0]_\tau, X)$. По свойству оператора τ-замыкания $[\exp^\tau(X_0, X)]_\tau \subset [\exp^\tau([X_0]_\tau, X)]_\tau$. Теорема 9 доказана.

Литература

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В., Общая топология: Основные конструкции, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 117.
2. I.Juhasz, Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980, 13-14.
3. Okunev O., The minitightness of products, Topology and its Applications 208 (2016), 10-16.
4. Georgiou, N. K. Mamadaliev, R. M. Zhuraev, A Note on Functional Tightness and Minitightness of Space of the G-Permutation Degree, Comment. Math. Univ. Carolin., 2023.
5. Arhangel'skii A.V., Functional tightness, Q-spaces, and τ-embeddings, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 24(1) (1983) 105-119.
6. Бешимов Р. Б., Мамадалиев Н. К., Манасыпова Р. З., О некоторых свойствах τ-границы множества, Вестник НУУз, 2023, 176-183.
7. Beshimov R.B., D.N.Georgiou, R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, F.Sereti, Some topological properties of e-space and description of τ-closed sets, Filomat 39:8 (2025), 2625-2637, https://doi.org/10.2298/FIL2508625B.
8. Beshimov R.B., R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, On τ-base and e-density of topological spaces, Filomat 39:10 (2025), 3353-3358 https://doi.org/10.2298/FIL2510353B
9. Энгелькинг Р., Общая топология, Москва, МИР, 1986, 33-34.

10. Michael, E. ,Topologies on spaces of subsets, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 71 (1951), pp. 152-182.

REZYUME

Ushbu maqolada X topologik T_1-fazolarining τ-yopiq qism to'plamlari fazosining ba'zi xossalari o'rganiladi. τ-yopiq qism to'plamlar oilasiga Vietoris topologiyasiga o'xshash baza kiritiladi. Agar X fazo T_1-fazo va $X_0 \subset X$ bo'lsa, u holda $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ to'plam $\exp^\tau X$ fazoda yopiq. Shuningdek, agar X fazo T_1-fazo bo'lsa, u holda $\exp^\tau X$ fazosi ham T_1-fazo bo'lishi isbotlanadi. Agar Y fazo X T_1-fazoning zich qism to'plami bo'lsa, u holda $\exp^\tau Y$ $\exp^\tau X$ fazoning zich qism to'plami bo'ladi. Xuddi shunday, agar $\exp^\tau Y$ $\exp^\tau X$ fazoda barcha nuqtalarda zich joylashgan bo'lsa, u holda Y fazo barcha nuqtalarda τ X da zich joylashganligi ko'rsatilgan. T_1-fazoning zichligi uchun Maykl teoremasining analogi isbotlanadi, ya'ni X cheksiz T_1-fazo bo'lsin, u holda $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. Agar X cheksiz T_1-fazo va U τ-ochiq qism to'plam bo'lsa, u holda U dagi har qanday τ-ochiq qism to'plam X dagi τ-ochiq qism to'plam bo'lishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: τ-yopiq to'plamlar, τ-ochiq to'plamlar, τ-zichlik, τ-yopilma, giperfazo, Vietoris topologiyasi, τ-yopiq qism to'plamlar fazosi.

RESUME

This article investigates some properties of the space of τ-closed subsets of topological T_1-spaces X. In the family of τ-closed subsets, a base similar to the Vietoris topology is introduced. It is proven that if X is a T_1-space and $X_0 \subset X$, then the set $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ is closed in the space $\exp^\tau X$. It is also proven that if X is a T_1-space, then the space $\exp^\tau X$ is also a T_1-space. It is shown that if Y is the everywhere τ-dense subset T_1 of the X space, then $\exp^\tau Y$ is the everywhere $\exp^\tau X$ space. Similarly, if $\exp^\tau Y$ is everywhere dense in the space $\exp^\tau X$, then it is shown that the space Y is everywhere τ-dense in X. The analogy of Michael's theorem for the density of the T_1-space is proven, i.e., let X be an infinite T_1-space, then $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. It is shown that if X is an infinite T_1-space and U is a τ-open subset, then any τ-open subset in U is a τ-open subset in X.

Key words: τ-closed sets, τ-open sets, τ-density, τ-closure, hyperspace, Vietorice topology, space of τ-closed subsets.