УДК 517.918

О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированный с обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке

Неъматова Ш. Б.
Бухарский государственный университет, Узбекистан
s.b.nematova@buxdu.uz

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$, который соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Приведены необходимые и достаточные условие для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией, где $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то установлено положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ и приведена двусторонная оценка для определителя Фредгольма, где $\varepsilon_h(\cdot)$ – функция дисперции специального вида и $l_1 > 0$. В случае, когда оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, получен разложение для определителя Фредгольма.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, функция дисперции, нецелочисленная решетка, резонанс с нулевой энергией, определитель Фредгольма, положительный оператор.

Введение. Во многих задачах анализа, математической физики и теории вероятностей возникают операторы, носящие название операторов Фридрихса [1] и обобщенных операторов Фридрихса [2]. Обобщенная модель Фридрихса вида операторной матрицы второго порядка впервые была введена в работе [2]. В этой работе доказано конечность дискретного спектра обобщенной модели Фридрихса в одномерном случае. Подробно изучены характер ветвления и особенности определителя Фредгольма в окрестностях "особых точек" непрерывного спектра. Доказано, что при изменении ядра оператора его собственные значения изчезают "поглощаясь" непрерывным спектром или появляются "испускаясь" из непрерывного спектра, при этом поглощаясь непрерывным спектром собственные значения превращаются в резонансы. Эта модель рассмотрена также в ряде других работ, из которых мы упомянем статью [3], статью [4] - в ней результаты, полученные для обобщенной модели Фридрихса, применяются к проблемам случайного блуждания частицы в случайной среде, а также работу [5], в которой исследованы так называемые связанные состояния для определенного семейства обобщенных моделей Фридрихса.

В работе [6] рассматривается самосопряженный случай и построена резольвента обобщенной модели Фридрихса, доказано существование (и полнота) волновых операторов и с их помощью найдены обобщенные собственные векторы непрерывного спектра (вторые компоненты которых являются элементами некоторого явно описанного пространства обобщенных функций).

В настоящей работе обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$ рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в двухчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Этот модель соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Получены следующие результаты:

– найдены необходимые и достаточные условие для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией, где $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$;

– установлено положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ и приведена двусторонная оценка для определителя Фредгольма, если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, где $\varepsilon_h(\cdot)$ – функция дисперции специального вида и $l_1 > 0$.

– получен разложение для определителя Фредгольма, в случае, когда оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией.

Следующие два раздела посвящены формулировке и строгому математическому доказательству этих результатов.

Обобщенная модель Фридрихса и его спектр. В данном разделе представлена постановка задачи, определение обобщенной модели Фридрихса и описание ее спектра. Для начала давайте введем основные обозначения. Пусть $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ есть множество всех комплексных, вещественных и целых чисел, соответственно. Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbb{T}_h^3$ обозначим куб $(-\pi/h; \pi/h]^3$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbb{T}_h^3$ рассматривается как абелева группа в котором операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^3$ по модулю $((2\pi/h)\mathbb{Z})^3$. По строению множества $\mathbb{T}_h^3$ видно, что для любого $A \subset \mathbb{R}^3$ существует $h = h(A) > 0$ такое, что $A \subset \mathbb{T}_h^3$, т.е. $\lim\limits_{h\to 0} \mathbb{T}_h^3 = \mathbb{R}^3$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^3)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пространства $\mathcal{H}_0$, и $\mathcal{H}_1$ называются нульчастичной и одночастичной подпространства фоковского пространства $F(L_2(\mathbb{T}_h^3))$ по $L_2(\mathbb{T}_h^3)$, соответственно, где

$$F(L_2(\mathbb{T}_h^3)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}_h^3) \oplus L_2((\mathbb{T}_h^3)^2) \oplus \cdots \oplus L_2((\mathbb{T}_h^3)^n) \oplus \cdots .$$

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ обычно называют обрезанной двухчастичной подпространства пространства Фока.

Элемент f пространства $\mathcal{H}$ является вектор-функцией вида $f = (f_0, f_1)$, где $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f_1 \in \mathcal{H}_1$. Для удобства напомним норму элемента в пространстве $\mathcal{H}$ и скалярное произведение элементов. Норма элемента $f \in \mathcal{H}$ определяется формулой

$$\|f\| = \left(|f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}_h^3} |f_1(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

А скалярное произведение двух элементов $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1) \in H$ определяется как

$$(f, g) = f_0 \cdot \overline{g_0} + \int_{\mathbb{T}_h^3} f_1(t)\overline{g_1(t)}dt.$$

При каждом фиксированном $h > 0$ введем семейства обобщенных моделей Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $k \in \mathbb{T}_h^3$, действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{A}_h(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(h;k) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h;k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h;k) : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$ и $A_{01}(h) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ определяются по правилам

$$A_{00}(h;k)f_0 = (l_2\varepsilon_h(k) + 1)f_0, \quad A_{01}(h)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{T}_h^3} v_h(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h;k)f_1)(p) = E_h(k;p)f_1(p), \quad E_h(k;p) := l_1\varepsilon_h(p) + l_2\varepsilon_h(k-p).$$

Здесь l_1, l_2-вещественные положительные числа, при каждом фиксированном $h > 0$ функция $v_h(\cdot)$ вещественнозначная ограниченная функция на $\mathbb{T}_h^3$, а так называемая функция дисперсии $\varepsilon_h(\cdot)$ имеет вид:

$$\varepsilon_h(k) := \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{3} (1 - \cos(hk_i)), \; k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}_h^3.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}_h(k)$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}$.

Следует отметить, что в современной математической физике оператор $A_{01}(h)$ называется оператором уничтожения, а его сопряженный оператор $A_{01}^*(h)$ - оператором рождения. Используя соответствующие определения из курса функционального анализа и свойства пространства $\mathcal{H}$, устанавливаем, что сопряженный оператор $A_{01}^*(h)$ имеет вид

$$(A_{01}^*(h)f_0)(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_h(p)f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0.$$

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора. Напомним, что множество всех конечнократных изолированных собственных значений ограниченного и самосопряженного оператора B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется его дискретным спектром. Множество $\sigma(B)\setminus\sigma_{\mathrm{disc}}(B)$ называется его существенным спектром. В этом случае остаточный спектр оператора B является пустым множеством. Очевидно, что $\sigma(B)=\sigma_{\mathrm{ess}}(B)\sqcup\sigma_{\mathrm{disc}}(B)$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_h^0(k)$, $k\in\mathbb{T}_h^3$ действует в $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_h^0(k):=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & h_{11}(k)\end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $\mathcal{A}_h(k)-\mathcal{A}_h^0(k)$ оператора $\mathcal{A}_h^0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечнего ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_h(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_h^0(k)$. Очевидно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_h^0(k))=[m_h(k);M_h(k)]$, где числа $m_h(k)$ и $M_h(k)$ определяются следующим образом:

$$m_h(k):=\min_{p\in\mathbb{T}_h^3}E_h(k;p),\quad M_h(k):=\max_{p\in\mathbb{T}_h^3}E_h(k;p).$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_h(k))=[m_h(k);M_h(k)]$.

В частности $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_h(\mathbf{0}))=[0;3/h^2]$, где $\mathbf{0}:=(0,0,0)\in\mathbb{T}_h^3$.

Далее вычислим $m_h(k)$ и $M_h(k)$. Для этого найдем точку минимума функции $E_h(\cdot;\cdot)$ и перепишем его в виде

$$E_h(k;p)=\frac{3(l_1+l_2)}{h^2}-\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{3}\left[a_h(k_j)\cos(hp_j)+b_h(k_j)\sin(hp_j)\right],\tag{17}$$

где коэффициенты $a_h(k_j)$ и $b_h(k_j)$ определены по равенствами

$$a_h(k_j):=l_1+l_2\cos(hk_j),\quad b_h(k_j):=l_2\sin(hk_j).\tag{18}$$

Тогда из равенства (17) имеем следующий представление для $E_h(\cdot;\cdot)$:

$$E_h(k;p)=\frac{3(l_1+l_2)}{h^2}-\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{3}r_h(k_j)\cos(h(p_j-p_h^{(0)}(k_j)),\tag{19}$$

где

$$r_h(k_j):=\sqrt{a_h^2(k_j)+b_h^2(k_j)},\quad p_h^{(0)}(k_j):=\arcsin\frac{b_h(k_j)}{r_h(k_j)},\quad k_j\in(-\frac{\pi}{h};\frac{\pi}{h}].$$

Учитывая равенства (18) получим, что вектор-функция

$$p_h^{(0)}:\mathbb{T}_h^3\to\mathbb{T}_h^3,\quad p_h^{(0)}(k)=p_h^{(0)}(k_1,k_2,k_3)=(p_h^{(0)}(k_1),p_h^{(0)}(k_2),p_h^{(0)}(k_3))\in\mathbb{T}_h^3$$

является нечетной регулярной функцией и для любого $k\in\mathbb{T}_h^3$ точка $p_h^{(0)}(k)$ является точкой минимума для функции $E_h(\cdot;\cdot)$. Из определения видно, что

$$p_h^{(0)}(k)=\frac{hl_2}{l_1+l_2}k+O(k^3)$$

при $k\to\mathbf{0}$. Простые вычислении показывают, что

$$m_h(k)=\frac{l_1l_2}{2(l_1+l_2)}k^2+O(|k|^4),\quad k\to\mathbf{0}.\tag{20}$$

Очевидно что в точке $p=p_h^{(0)}(k)$ функция $E_h(k;p)$ имеет минимума:

$$m_h(k):=\min_{p\in\mathbb{T}_h^3}E_h(k;p)=\frac{3(l_1+l_2)}{h^2}-\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{3}r_h(k_j),$$

а в точке $\pi + p_h^{(0)}(k)$ имеет максимум:

$$M_h(k) := \max_{p\in\mathbb{T}_h^3} E_h(k;p) = \frac{3(l_1+l_2)}{h^2} + \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{3} r_h(k_j).$$

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}_h^3$ определим регулярную в $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_h(k))$ функцию (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_h(k)$)

$$\Delta_h(k\,;z) := l_2\varepsilon_h(k) + 1 - z - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t)dt}{E_h(k;t)-z}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_h(k)$ и нулями функции $\Delta_h(k\,;\cdot)$. Эта лемма является прямым следствием принципа Бирмана-Швмнгера и теоремы Фредгольма.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $h > 0$ и $k \in \mathbb{T}_h^3$ число $z_h(k) \in \mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_h(k))$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_h(k\,;z_h(k)) = 0$.*

Основные свойства определителя Фредгольма $\Delta_h(k\,;\cdot)$.

Далее, на протяжении всей работы будут предпологаться, что функция $|v_h(\cdot)|$ является четной по каждой переменной в отдельности и все частные производные второго порядка функции $v_h(\cdot)$ непрерывны в $\mathbb{T}_h^3$.

Через $C(\mathbb{T}_h^3)$ (соот. $L_1(\mathbb{T}_h^3)$) обозначим банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^3$.

Определение 1. *Говорят, что оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора*

$$(G_h\psi)(p) = \frac{v_h(p)}{2(l_1+l_2)}\int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h(t)\psi(t)dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}_h^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$. Если число $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора G_h, то число $z = 0$ называется регулярной точкой оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$.

Известно, что при каждом фиксированном $h > 0$ функция $E_h(\mathbf{0};\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум равный нулью в точке $\mathbf{0} \in \mathbb{T}_h^3$ и при всех $k \in \mathbb{T}_h^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ функция $E_h(k;\cdot)$ положителен в $\mathbb{T}_h^3$. Поэтому из непрерывности функции $v_h(\cdot)$ в $\mathbb{T}_h^3$ следует, что при всех $k \in \mathbb{T}_h^3$ существует конечный положительный интеграл

$$\int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t)dt}{E_h(k;t)}.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta_h(\mathbf{0}\,;0) = \lim_{k\to\mathbf{0}} \Delta_h(k\,;0).$$

Для $\delta > 0$ положим

$$U_\delta(\mathbf{0}) := \{q \in \mathbb{T}_h^3 : |q| < \delta\}.$$

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией.

Теорема 1. а) *Оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) = 0$;*

б) *Оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) \neq 0$.*

Для доказательство теоремы 1 см. [9].

Теорема 2. *Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ оператор $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ не имеет отрицательных собственных значений. Здесь $I-$единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательства. Сначала мы находим вид определителя Фредгольма, соответствующего оператору $\mathcal{A}_h(-k)+l_1\varepsilon_h(k)I$:

$$\Delta_h(-k\,;z-l_1\varepsilon_h(k)):=l_1\varepsilon_h(k)+l_2\varepsilon_h(-k)+1-z-\frac{1}{2}I(k;z).$$

здесь

$$I(k;z):=\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h^2(t)dt}{\omega_h(k,t)-z},$$

$$\omega_h(k,t):=l_1\varepsilon_h(k)+l_2\varepsilon_h(k+t)+l_1\varepsilon_h(t)$$

По определению, для каждого $k\in\mathbb{T}_h^3$ функция $\omega_h(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках множества $\mathbb{T}_h^3$.

$$\min_{k,t\in\mathbb{T}_h^3}\omega_h(k,t)=0,\ h>0.$$

Кроме этого имеет место равенство

$$\omega_0(k,t)=\omega_h(k,t).$$

Теперь мы докажем, что неравенство $\Delta_h(-k\,;-l_1\varepsilon_h(k))>\Delta_h(\mathbf{0}\,;0)$ выполняется для любого ненулевого значения $k\in\mathbb{T}_h^3$. Поскольку $\omega_0(\cdot,\cdot)$ и $v_h(\cdot)$ четна, функция $I(\cdot;0)$ также четна. Тогда мы получаем

$$I(k;0)-I(\mathbf{0};0)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{2\omega_0(\mathbf{0},t)-(\omega_0(k,t)+\omega_0(-k,t))}{\omega_0(k,t)\omega_0(-k,t)\omega_0(\mathbf{0},t)}\times$$

$$\times[\omega_0(k,t)+\omega_0(-k,t)]v_h^2(t)dt-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{(\omega_0(k,t)-\omega_0(-k,t)^2)}{\omega_0(k,t)\omega_0(-k,t)\omega_0(\mathbf{0},t)}v_h^2(t)dt. \tag{21}$$

Из равенства

$$\omega_0(\mathbf{0},t)-\frac{\omega_0(k,t)+\omega_0(-k,t)}{2}=\sum_{i=1}^{3}(\cos{(hk_i-1)})(\cos{(hk_i+1)})$$

и (21) получаем неравенство $I(k;0)<I(\mathbf{0};0)$ для всех ненулевых $k\in\mathbb{T}_h^3$, то есть функция $I(\cdot;0)$ имеет глобальный максимум.

Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо нулевое собственное значение, то по теореме 1 мы имеем $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0)=0$. Следовательно, по неравенству

$$\Delta_h(-k\,;z-l_1\varepsilon_h(k))>\Delta_h(-k\,;z-l_1\varepsilon_h(k))\geq\min_{k\in\mathbb{T}_h^3}\Delta_h(-k\,;z-l_1\varepsilon_h(k))=\Delta_h(\mathbf{0};0)=0$$

мы имеем $\Delta_h(-k\,;z-l_1\varepsilon_h(k))>0$ для всех $k\in\mathbb{T}_h^3$ и $z>0$. Согласно лемме 1 оператор $\mathcal{A}_h(-k)+l_1\varepsilon_h(k)I, k\in\mathbb{T}_h^3$ не имеет отрицательных собственных значений, то есть для любого $k\in\mathbb{T}_h^3$ оператор $\mathcal{A}_h(-k)+l_1\varepsilon_h(k)I$ является положительным. Теорема 2 доказана.

Следующее разложение играет важную роль при изучении асимптотики дискретного спектра соответствующий 3×3 операторной матрицы.

Теорема 3. *Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, то имеет место представление*

$$\Delta_h(k\,;z)=\frac{2\sqrt{2}\pi^2v_h^2(\mathbf{0})}{(l_1+l_2)^{3/2}}\,[m_h(k)-z]^{\frac{1}{2}}+\Delta_h^{(1)}(m_h(k)-z)+\Delta_h^{(2)}(k\,;z),$$

где $\Delta_h^{(1)}(m_h(k)-z)=O(m_h(k)-z)$ при $z\to m_h(k)$ и $\Delta_h^{(2)}(k\,;z)=O(k^2)$ при $k\to\mathbf{0}$ равномерно по $z\leq m_h(k)$.

Доказательство. Дадим основную идею доказательства. Введем вспомогательную функцию $E_h(\cdot,\cdot)$ определенную в $\mathbb{T}_h^3$ по правилу

$$E_h(k,p):=E_h(p+p_h^{(0)}(k))-m_h(k),$$

где точка $p_h^{(0)}(k)$ является точкой минимума для функции $E_h(\cdot;\cdot)$, т.е. $m_h(k)=E_h(p_h^{(0)}(k))$. Тогда используя равенство (19) имеем, что

$$E_h(k,p)=\frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{3}r_h(k_j)\left[1-\cos(h(p_j-p_h^{(0)}(k_j)))\right].$$

Пусть

$$\mathbb{C}_+:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}z>0\},\quad \mathbb{R}_+:=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}.$$

Определим функции $\widetilde{\Delta}_h(\cdot;\cdot)$ в $\mathbb{T}_h^3\times\mathbb{C}_+$ по формуле $\widetilde{\Delta}_h(k\,;\zeta):=\Delta_h(k\,;m_h(k)-\zeta^2)$. Тогда функции $\widetilde{\Delta}_h(\cdot;\cdot)$ можно записать как

$$\widetilde{\Delta}_h(k\,;\zeta)=l_2\varepsilon(k)+1-m_h(k)+\zeta^2-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h^2(t)dt}{E_k(t)-m_h(k)+\zeta^2}=$$

$$=l_2\varepsilon_h(k)+1-m_h(k)+\zeta^2-\frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h^2(t+p_h^{(0)}(k))dt}{\sum\limits_{j=1}^{3}r_h(k_j)(1-\cos(h(t_j-p_h^{(0)}(k_j)))+\zeta^2}.$$

Далее, следуя схемы доказательство леммы 3.5 из работы [7] и используя асимптотику (20), а также $\varepsilon_h(k)=O(k^2)$ при $k\to\mathbf{0}$, можно показать, что

$$\widetilde{\Delta}_h(k\,;\zeta)=\widetilde{\Delta}_h(\mathbf{0}\,;0)+\frac{2\sqrt{2}\pi^2v_h^2(\mathbf{0})}{(l_1+l_2)^{3/2}}\zeta+\widetilde{\Delta}_h^{(1)}(\zeta)+\widetilde{\Delta}_h^{(2)}(k\,;\zeta),\tag{22}$$

где $\widetilde{\Delta}_h^{(1)}(\zeta)=O(\zeta^2)$ при $\zeta\to 0$ и $\widetilde{\Delta}_h^{(2)}(k\,;\zeta)=O(k^2)$ при $k\to\mathbf{0}$ равномерно по $z\in\mathbb{R}_+$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда в силу утверждение б) теоремы 1 имеем $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0)=0$ и $v_h(\mathbf{0})\neq 0$. Теперь учитывая равенство $\Delta_h(k\,;z)=\widetilde{\Delta_h}(k\,;\sqrt{m_h(k)-z})$ и асимптотику $\varepsilon_h(k)=O(k^2)$ при $k\to\mathbf{0}$, из разложения (22) получим доказательство теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $h>0$. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение, то существуют $C_1(h),C_2(h),C_3(h)>0$ и $\delta(h)>0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*
а) $C_1(h)k^2\leq\Delta_h(k\,;-l_1\varepsilon(k))\leq C_2(h)k^2$, $p\in U_{\delta(h)}(\mathbf{0})$;
б) $\Delta_h(k\,;-l_1\varepsilon(k))\geq C_3(h)$, $k\notin U_{\delta(h)}(\mathbf{0})$.

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение. Тогда в силу утверждение а) теоремы 1 имеет место равенство $v_h(\mathbf{0})=0$. По определение функции $\Delta_h(\cdot;\cdot)$ имеем

$$\Delta(k\,;-l_1\varepsilon_h(k))=(l_1+l_2)\varepsilon_h(k)-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{v_h^2(t)dt}{\omega_h(k,t)},$$

где

$$\omega_h(k,t):=l_1\varepsilon_h(k)+l_2\varepsilon_h(k+t)+l_1\varepsilon_h(k)$$

Рассуждая аналогично как это делалось в работе [8] можно доказать, что функция $\Delta_h(\cdot\,;-l_1\varepsilon_h(\cdot))$ имеет единственный минимум в точке $\mathbf{0}\in\mathbb{T}_{\mathrm{h}}^3$. Теперь докажем, что эта точка является точкой невырожденного минимума.

Так как при всех $k,q\in\mathbb{T}_h^3$, $k\neq\mathbf{0}$ имеет место неравенство $w_h(k,t)>0$, то для любого $k\neq\mathbf{0}$ интегралы

$$\lambda_{ij}^{(1)}(h;k)=\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{\partial^2 w_h(k,t)}{\partial k_i\partial k_j}\frac{v_h^2(t)dt}{(w_h(k,t))^2},\quad i,j=1,2,3$$

и

$$\lambda_{ij}^{(2)}(h;k)=\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{\partial w_h(k,t)}{\partial k_i}\frac{\partial w_h(k;t)}{\partial k_j}\frac{v_h^2(t)dt}{(w_h(k,t))^3},\quad i,j=1,2,3$$

являются конечными, а конечность этих интегралов в точке $k=\mathbf{0}$, легко вытекает из условия $v_h(\mathbf{0})=0$. Тем самым мы определим непрерывные на $\mathbb{T}_h^3$ функции $\lambda_{ij}^{(1)}(h;\cdot)$ и $\lambda_{ij}^{(2)}(h;\cdot)$.

Функция $\Delta_h(\cdot\,; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ дважды непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{T}_h^3$ и

$$\frac{\partial^2\Delta_h(k\,; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i\partial k_j} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_h(k)}{\partial k_i\partial k_j} + \frac{1}{2}\lambda_{ij}^{(1)}(h;k) - \lambda_{ij}^{(2)}(h;k), \quad i,j=1,2,3.$$

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера. Так как

$$\frac{\partial w_h(\mathbf{0},q)}{\partial k_i} = \frac{l_2}{h}\sin(hq_i), \quad \frac{\partial^2 w_h(\mathbf{0},q)}{\partial k_i\partial k_j} = \delta_{ij}(l_1 + l_2\cos(hq_i)), \quad i,j=1,2,3;$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_h(\mathbf{0})}{\partial k_i\partial k_j} = (l_1+l_2)\delta_{ij}, \quad i,j=1,2,3$$

имеем, что

$$\frac{\partial^2\Delta_h(k\,; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i^2}\Big|_{k=\mathbf{0}} = l_1 + l_2 + \frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}_h^3}\Big(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{3}(1-\cos(ht_j))\Big)\frac{(1+\cos(ht_i))v_h^2(t)}{\varepsilon_h^3(t)}dt;$$

$$\frac{\partial^2\Delta_h(k\,; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i\partial k_j}\Big|_{k=\mathbf{0}} = -\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}_h^3}\frac{\sin(ht_i)\sin(ht_j)v_h^2(t)}{\varepsilon_h^3(t)}dt, \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,3.$$

Из последних двух равенств и из четности функции $|v_h(\cdot)|$ по каждой переменной в отдельности вытекает, что

$$\frac{\partial^2\Delta_h(k\,; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i^2}\Big|_{k=\mathbf{0}} > 0, \quad \frac{\partial^2\Delta_h(k\,; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i\partial k_j}\Big|_{k=\mathbf{0}} = 0, \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,3.$$

Тогда получим, что матрица состоящая из частных производных второго порядка функции $\Delta_h(\cdot\,; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ положительно определена в точке $k=\mathbf{0}$. Следовательно, функция $\Delta_h(\cdot\,; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ имеет невырожденный минимум в точке $k=\mathbf{0}$. Отсюда и из условие $\Delta_h(\mathbf{0}\,;0)=0$ следует, что существуют числа $C_1(h), C_2(h), C_3(h) > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются неравенства а) и б) теоремы 4.

Заключение. В настоящем исследовании рассматривается обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$ при $h>0$ и $k\in(-\pi/h;\pi/h]^3$, соответствующая гамильтониану квантовой системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z=0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией. В случае наличия нулевого собственного значения или резонанса с нулевой энергией для оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ доказана положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ при всех $k\in\mathbb{T}_h^3$, где $\varepsilon_h(\cdot)$ - специально выбранная дисперсионная функция, а $l_1>0$. Кроме того, получены двусторонние оценки для определителя Фредгольма, а в случае резонанса с нулевой энергией получено асимптотическое разложение для определителя Фредгольма. Представленные в статье результаты имеют важное значение в спектральной теории операторных матриц третьего порядка и используются для определения условий конечности или бесконечности дискретного спектра таких операторов.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору Т.Х. Расулову за помощь в постановке задачи и обсуждении основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O. Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators. Math. Ann., **115**:1 (1938), pp. 249–272.

2. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. Труды семинара им. И. Г. Петровского, **11**, 1986, стр. 210–223.

3. Angelescu N., Minlos R.A., Zagrebnov V.A. Lower Spectral Branches of a Particle Coupled to a Bose Field. Rev. Math. Phys., **17**:10 (2005), pp. 1111–1142.

4. Болдригини К., Минлос Р.А., Пеллегринотти А. Случайные блуждения в случайной (флуктуирующей) среде. УМН, **62**:4(376) (2007), стр. 27–76.

5. Лакштанов Е.Л., Минлос Р.А. Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (поля на двумерной решетки: прилегающие уровни). Функц. анализ и его прил., **38**:3 (2004), стр. 52–69.

6. Акчурин Э.Р. О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса. Теоретическая и математическая физика. **163**:1, 2010, стр. 17–33.

7. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys., **127**:2, (2007), pp. 191–220.

8. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Func. Anal. Topol., **13**:1, (2007), pp. 1–16.

9. Неъматова Ш.Б. Пороговые явления для обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленной решетке. Вестник института. Бухоро-Панчакент. 2025, стр. 198–203.

REZYUME

Mazkur maqolada butun sonli boʻlmagan panjaradagi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltonianiga mos $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h;\pi/h]^3$ umumlashgan Fridrixs modeli qaralgan. $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator uchun $z = 0$ soni xos qiymat yoki $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga ega boʻlishining zaruriy va yetarlilik shartlari keltirilgan, bu yerda $\mathbf{0} := (0,0,0)$. Agar $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga yoki nolga teng xos qiymatga ega boʻlsa, u holda istalgan $k \in \mathbb{T}_h^3$ uchun $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ operatorning musbatligi koʻrsatilgan va Fredgolm determinanti uchun ikki yoqlama baholash olingan, bu yerda $\varepsilon_h(\cdot)$ maxsus koʻrinishga ega dispersiya funksiyasi va $l_1 > 0$. $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga ega boʻlgan holda Fredgolm determinanti uchun yoyilma topilgan.

Kalit soʻzlar: umumlashgan Fridrixs modeli, dispersiya funksiyasi, butun sonli boʻlmagan panjara, nol energiyali rezonans, Fredgolm determinanti, musbat operator.

RESUME

In this paper we consider the generalized Friedrichs model $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h;\pi/h]^3$, corresponding to the Hamiltonian of a system of non-conserved and at most two particles on the non-integer lattice. The necessary and sufficient conditions for either $z = 0$ to be an eigenvalue of $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ or operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ to have zero energy resonance are given, where $\mathbf{0} := (0,0,0)$. If the operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ have a zero energy resonance or zero eigenvalue, then for any $k \in \mathbb{T}_h^3$ the positivity of the operator $\mathcal{A}_h(-k)+l_1\varepsilon_h(k)I$ is established and the two-sided estimates for the Fredholm determinant is given, where $\varepsilon_h(\cdot)$ is a dispersion function of special form and $l_1 > 0$. In the case when the operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ have a zero energy resonance the expansion for the Fredholm determinant is obtained.

Key words: generalized Friedrichs model, dispersion function, non-integer lattice, zero-energy resonance, the Fredholm determinant, positive operator.