УДК 517.956

Начально-краевая задача с граничным условием третьего рода для дифференциального уравнения высокого четного порядка вырождающегося на границе

Орипов Д. Д.
Ферганский государственный университет, Узбекистан
dastonbekoripov94@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничным условием третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Применяя метод Фурье, основанный на разделении переменных, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом функции Грина спектральная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. С использованием теоремы Мерсера доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, начально-краевая задача, метод разделения переменных, спектральная задача, метод функции Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье.

I. Введение

В последнее время исследователи все чаще обращаются к вырождающимся дифференциальным уравнениям в частных производных. Это обстоятельство, прежде всего, объясняется внутренней потребностью теории дифференциальных уравнений в частных производных. С другой стороны, большое количество задач газовой динамики, гидродинамики [1,2], теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака [3], теории колебаний [4,5], уравнения математической биологии [6], теории фильтрации, теории пограничного слоя, технической механики и др. приводят к необходимости изучения вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в четырехугольной области для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка по пространственным переменным. Например, в работе [7] исследованы начально-граничные задачи для вырождающегося уравнения

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) + f(x,t), l = \overline{1,2},\ \alpha \in (0,2k), \tag{1}$$

в прямоугольнике, а в работах [8], [9]-для уравнений, обобщающих его.

При рассмотрении начально-краевых задач, на вырождающиеся уравнения типа (1) существенно влияют значения порядка вырождения α [7,8], а иногда четность и нечетность числа k. Кроме того, с ростом порядка уравнения, количество вариантов граничных условий увеличивается. Например, в работах [7,8] при рассмотрении начально-краевых задач для уравнения (1) в прямоугольнике $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ при $0 < \alpha < 1$ заданы граничные условия вида

$$\left(\partial^j/\partial x^j\ \right) u|_{x=0} = 0, j = \overline{0, k-1};\ \ (\partial^q/\partial x^q\ ) u|_{x=1} = 0,\ q = \overline{0, k-1}, \tag{2}$$

при $\alpha \in (1, k)$, некоторые граничные условия на $x = 0$ заменены условием ограниченности, а при $\alpha \in (k, 2k)$ на $x = 0$ никаких граничных условий не задано. В работе [9], рассматривая уравнение (1) при $\alpha \in (0, 1)$, заданы граничные условия вида (2), но здесь $q = \overline{k, 2k-1}$. В работах [10], [11], [12], рассматривается вырождающееся уравнение другого вида с краевыми условиями (2). В работе [13] для одного вырождающегося уравнения поставлена и изучена задача с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции и производных по x на $x = 0$ и $x = 1$. В работе [14] для уравнения (1) при $\alpha = 0$, $l = 2$, а в работе [15] для вырождающегося уравнения четвертого порядка типа (1) как при $x = 0$, так и при $x = 1$, заданы условия типа третьего граничного условия. В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике.

II. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) :\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}\right) = f(x, t), \tag{3}$$

где $u = u(x, t)$ - неизвестная функция, $f(x, t)$ – заданная функция, а α – заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1$, $n \in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу.

Задача U_2. Найти функцию $u(x, t)$, которая:

1) u_t, $\left(\partial^j/\partial x^j\ \right) u$, $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right) u\right] \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)\left[x^\alpha\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right) u\right]$, $u_{tt} \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (3);

3) выполняются следующие начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),\quad x \in [0, 1],\ \ u_t(x, 0) = \varphi_2(x),\quad x \in [0, 1] \tag{4}$$

и граничные условия

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, t) = \dfrac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}} u(0, t), \\
\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t)\right)\Bigg|_{x=0} = \dfrac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t)\right)\Bigg|_{x=0}, \\
\dfrac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} u(1, t) = 0,\ \ \dfrac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^\alpha \dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t)\right)\Bigg|_{x=1} = 0,\ j = \overline{0, n-1},\ \ t \in [0, T],
\end{array}\right\} \tag{5}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$– заданные непрерывные функции.

III. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче U_2 возникает следующая спектральная задача:

$$Mv(x) \equiv \left(x^\alpha v^{(2n)}(x)\right)^{(2n)} = \lambda v(x),\ 0 < x < 1; \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{c}
v^{(j)}(x),\quad \left(x^\alpha v^{(2n)}(x)\right)^{(j)} \in C[0, 1],\ \ j = \overline{0, 2n-1}, \\
v^{(j)}(0) = v^{(2n-1-j)}(0),\ \ \left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\Big|_{x=0} = \left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(2n-1-j)}\Big|_{x=0},\ j = \overline{0, n-1}, \\
v^{(n+j)}(1) = 0,\quad \left[x^\alpha v^{(2n)}(x)\right]^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0,\ j = \overline{0, n-1},
\end{array}\right\} \tag{7}$$

где $M \equiv \partial^{2n}/\partial x^{2n}\ \left[x^{\alpha}\partial^{2n}/\partial x^{2n}\ \right]$.

Нетрудно убедиться, что для любых функций $v\left(x\right)$ и $w\left(x\right)$, удовлетворяющих условиям (7), справедливо равенство $\int\limits_0^1 w\left(x\right)Mv\left(x\right)dx = \int\limits_0^1 v\left(x\right)Mw\left(x\right)dx$, откуда следует, что задача с условиями $Mv\left(x\right) = 0$ и (7) самосопряжена.

Пусть $v(x)$ функция, удовлетворяющая условиям $\{(6), (7)\}$. Тогда, умножая уравнение (6) на функцию $v(x)$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0, 1]$, а затем применяя правило интегрирования по частям и учитывая равенства (7), получим

$$\lambda \int\limits_0^1 v^2\left(x\right)dx = \int\limits_0^1 x^{\alpha}\left[v^{(2n)}\left(x\right)\right]^2 dx. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда из равенства (8) следует, что $v^{(2n)}\left(x\right) = 0$, $0 < x < 1$. Отсюда, в силу условий $v^{(j)}\left(0\right) = v^{(2n-1-j)}\left(0\right)$, $v^{(n+j)}\left(1\right) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, имеем $v\left(x\right) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(6),(7)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предполагая $\lambda > 0$, существование собственных значений задачи $\{(6), (7)\}$ докажем методом функции Грина. Функция Грина $G\left(x, s\right)$ этой задачи должна обладать следующими свойствами:

1) $\left(\partial^j/\partial x^j\right)G\left(x, s\right)$, $j = \overline{0, 2n-1}$ и $\left(\partial^j/\partial x^j\right)\left[x^{\alpha}\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)G\left(x, s\right)\right]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех x, $s \in [0, 1]$;

2) в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная $\left(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1}\right)\left[x^{\alpha}\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)G\left(x, s\right)\right]$, а при $x = s$ имеет скачок:

$$\left(\partial^{2n-1}/\partial x^{2n-1}\right)\left[x^{\alpha}\left(\partial^{2n}/\partial x^{2n}\right)G\left(x, s\right)\right]\Big|_{x=s-0}^{x=s+0} = 1; \tag{9}$$

3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ по аргументу x существует непрерывная производная $MG\left(x, s\right)$ и выполняется равенство $MG\left(x, s\right) = 0$;

4) при $s \in (0, 1)$ по аргументу x удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^j G\left(0, s\right)}{\partial x^j} = \dfrac{\partial^{2n-1-j} G\left(0, s\right)}{\partial x^{2n-1-j}}, \\ \dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^{\alpha}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G\left(x, s\right)\right)\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}}\left(x^{\alpha}\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G\left(x, s\right)\right)\Big|_{x=0}, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^{n+j} G\left(1, s\right)}{\partial x^{n+j}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}}\left(x^{\alpha}\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G\left(x, s\right)\right)\Big|_{x=1} = 0, \ \ j = \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x, s) = 0$ в промежутках $(0, s)$ и $(s, 1)$, функцию $G\left(x, s\right)$ ищем в виде

$$G\left(x, s\right) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2n} \dfrac{a_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum\limits_{j=2n+1}^{4n} \dfrac{a_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & 0 \leq x \leq s, \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \dfrac{b_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum\limits_{j=2n+1}^{4n} \dfrac{b_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{12}$$

где a_j и b_j, $j = \overline{1, 4n}$ - неизвестные функции переменной s, а $(z)_n = z(z+1)(z+2)...(z+n-1)$ - символ Похгаммера [18].

Удовлетворяя функцию (12) свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно $b_j - a_j$, $j = \overline{1, 4n}$:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{m_1} \dfrac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!}(b_j - a_j) = 0, \quad m_1 = \overline{2, 2n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} \dfrac{s^{2n-\alpha+m_2-j}(b_j - a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}} + \sum\limits_{j=1}^{m_2} \dfrac{s^{m_2-j}(b_{2n+j} - a_{2n+j})}{(m_2-j)!} = 0, \ \ m_2 = \overline{1, 2n}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение [8]:

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \ b_{2n+j} - a_{2n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, 2n}. \tag{13}$$

Сначала подчиним (12) условиям (10) и (11). Из первой и второй частей условия (10) соответственно получаем соотношения:

$$a_{2n+j} = a_{4n+1-j}, \quad j = \overline{1, n} \tag{14}$$

и

$$a_j = a_{2n+1-j}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Из первой части условия (11) выводим систему уравнений:

$$\begin{gathered} b_{2n+1} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!\,(n+1-\alpha-j)}, \\ b_{2n+1+m} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \ m = \overline{1, n-1}, \end{gathered} \tag{16}$$

а из второй части - результаты:

$$b_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Учитывая результаты (17), для случая $j = \overline{1, n}$ в первом соотношении (13), находим неизвестные $a_j, \ \ j = \overline{1, n}$ в виде:

$$a_j = \frac{(-1)^j s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Если учесть (18) в ранее установленных соотношениях (15), неизвестные $a_{n+j}, \qquad j = \overline{1, n}$ определяются, как:

$$a_{n+j} = \frac{(-1)^{n+1-j} s^{n-j}}{(n-j)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Используя (19) для случая $j = \overline{n+1, 2n}$ в первом соотношении (13), находим неизвестные b_{n+j}, $j = \overline{1, n}$:

$$b_{n+j} = \frac{(-1)^{n+1-j} s^{n-j}}{(n-j)!} + \frac{(-1)^{n-1+j} s^{n-1+j}}{(n-1+j)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{20}$$

Используя приведённые алгебраические операции, определим неизвестные $a_j, b_j, \ \ j = \overline{1, 2n}$, зависящие от переменной s. Теперь найдём неизвестные $a_{2n+j}, b_{2n+j}, \qquad j = \overline{1, 2n}$.

Сначала, учитывая (20) в системе уравнений (16), определим неизвестные $b_{2n+j}, \qquad j = \overline{1, n}$:

$$\begin{gathered} b_{2n+1} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!\,(n+1-\alpha-j)}, \\ b_{2n+1+m} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \ m = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{21}$$

Подставляя полученные выражения (21) во вторую часть соотношений (13), находим:

$$\begin{gathered} a_{2n+1} = -\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!\,(n+1-\alpha-j)}, \\ a_{2n+1+m} = \frac{(-1)^{m+1} s^{2n+m-\alpha}}{m!(m+1-\alpha)_{2n}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \\ -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \ \ m=\overline{1,n-1}. \end{gathered} \tag{22}$$

Неизвестные $a_{3n+j},\ j=\overline{1,n}$ определяются из соотношений (14) с учётом (22):

$$\begin{gathered} a_{3n+m} = \frac{(-1)^{n+1-m} s^{3n-\alpha-m}}{(n-m)!(n+1-\alpha-m)_{2n}} - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{b_{2n+i}}{(n+1-m-i)!} - \\ -\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{n+1-m}}, \ \ m=\overline{1,n-1}, \\ a_{4n} = -\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!\,(n+1-\alpha-j)}. \end{gathered} \tag{23}$$

Наконец, для случая $j=\overline{n+1,2n}$ во второй части соотношений (13), с учётом (23), неизвестные $b_{3n+j},\ j=\overline{1,n}$ определяются, как:

$$\begin{gathered} b_{3n+m} = \frac{(-1)^{n+1-m} s^{3n-\alpha-m}}{(n-m)!(n+1-\alpha-m)_{2n}} + \frac{(-1)^{n+m-1} s^{3n-1-\alpha+m}}{(n-1+m)!(n-\alpha+m)_{2n}} - \\ -\sum_{i=1}^{n-m} \frac{b_{2n+i}}{(n+1-m-i)!} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{n+1-m}}, \ \ m=\overline{1,n-1}, \\ b_{4n} = -\frac{s^{4n-1-\alpha}}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}} - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{n+j}}{(n-j)!\,(n+1-\alpha-j)}. \end{gathered} \tag{24}$$

Следовательно, функция Грина, удовлетворяющая условиям 1)-4) существует, единственна и она имеет вид (12), причем коэффициенты a_j и b_j, $j=\overline{1,4n}$ определяются равенствами (17)-(24).

Симметричность функции Грина относительно её аргументов доказана в работах [19] и [20].

В частном случае, при $n=1$ функция Грина $G(x,s)$ имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{s}{1-\alpha} - \dfrac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2}\right)(x+1), & 0 \le x \le s, \\ -\dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \dfrac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{x}{1-\alpha} - \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2}\right)(s+1), & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Теперь, методом, примененным в [16], нетрудно убедиться, что задача $\{(6),\,(7)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s)\, v(s)\, ds. \tag{25}$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно ($\lambda>0$), то интегральное уравнение (25), следовательно, задача $\{(6),\,(7)\}$ имеет счетное число собственных значений $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le \ldots \le \lambda_k < \ldots,\ \ \lambda_k \to +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \ldots, v_k(x)\ldots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$[17].

Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система функций $x^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(x)/\sqrt{\lambda}_k$, $k=1,2,...$ также составляет ортонормальную систему на отрезке $[0,1]$.

Лемма 1. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $Mg(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи {(6), (7)}.*

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x,s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x,s)\,Mg(s)\,ds=\int_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha g^{(2n)}(s)\right]^{(2n)}ds=g(x).$$

Так как $Mg(x)\in L_2(0,1)$, то из последнего равенства следует, что $g(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$. Кроме того, функция $G(x,s)$, т.е. ядро уравнения (25) непрерывно в $\overline{\Omega}$. Тогда, на основании теоремы 2 стр. 153, книги [17], справедливо утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[v_k^{(j)}(x)\right]^2/\lambda_k\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right]^{(j)}\right)^2/\lambda_k^2\,,\ j=\overline{0,2n-1}. \tag{26}$$

Доказательство. Учитывая равенство (6) и свойства функции $G(x,s)$, из (25) при $v(x)\equiv v_k(x)$ получим

$$v_k^{(j)}(x)=\lambda_k\int_0^1\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)\,v_k(s)\,ds=\int_0^1\left[s^\alpha v_k^{(2n)}(s)\right]^{(2n)}\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)\,ds,\quad j=\overline{0,2n-1}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (7), имеем

$$v_k^{(j)}(x)=\int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s)\,\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\,ds,\ \ j=\overline{0,2n-1},$$

откуда, в силу $\lambda_k>0$, следует равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda}_k}=\int_0^1\left(s^{\alpha/2}\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\right)\left(\frac{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda}_k}\right)ds,\ \ j=\overline{0,2n-1}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что $v_k^{(j)}(x)/\sqrt{\lambda}_k$ - есть коэффициент Фурье функции по ортонормальной системе $\left\{s^{\alpha/2}v_k^{(2n)}(s)/\sqrt{\lambda}_k\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [17], имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[v_k^{(j)}(x)\right]^2/\lambda_k\ \le\int_0^1 s^\alpha\left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\right]^2ds,\ \ j=\overline{0,2n-1}. \tag{28}$$

Интеграл в правой части можно переписать в виде

$$\int_0^1 s^\alpha\left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j\partial s^{2n}}G(x,s)\right]^2ds=\int_0^1 s^{-\alpha}\left[\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(s^\alpha\frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}}G(x,s)\right)\right]^2ds,\ \ j=\overline{0,2n-1}.$$

Так как $s^\alpha\frac{\partial^{2n}G(x,s)}{\partial s^{2n}},\ \ \frac{\partial^j G(x,s)}{\partial x^j}\in C\left(\overline{\Omega}\right),\ \ j=\overline{0,2n-1}$, то функция в квадратной скобке непрерывна на $\overline{\Omega}$. Тогда, в силу $0<\alpha<1$, интеграл в правой части, следовательно, интеграл в (28) равномерно ограничен при $j=\overline{0,2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (26) сходятся равномерно.

Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если выполнены условия* $g^{(j)}(x) \in C[0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$, $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$; $g^{(j)}(0) = g^{(2n-1-j)}(0)$, $g^{(n+j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \le \int_0^1 x^\alpha \left[g^{(2n)}(x)\right]^2 dx, \tag{29}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, \quad k \in N.$

Доказательство. В силу уравнения (6), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) \left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right]^{(2n)} dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 \left\{x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)\right\} \left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x)\right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе $\left\{x^{\alpha/2} v^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k}\,\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя[17], справедливо неравенство (29). Лемма 3 доказана.

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 4. *Если функция* $g(x)$ *удовлетворяет условиям (7) и* $Mg(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \le \int_0^1 [Mg(x)]^2 dx, \tag{30}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, \quad k \in N.$

Лемма 5. *Если функция* $g(x)$ *удовлетворяет условиям (7) и* $[Mg(x)]^{(j)} \in C[0,1]$, $j = \overline{0, 2n-1}$; $x^{\alpha/2} [Mg(x)]^{(2n)} \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$; $[Mg(x)]^{(j)}\Big|_{x=0} = [Mg(x)]^{(2n-1-j)}\Big|_{x=0}$, $[Mg(x)]^{(n+j)}\Big|_{x=1} = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \le \int_0^1 x^\alpha \left\{[Mg(x)]^{(2n)}\right\}^2 dx, \tag{31}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, \quad k \in N.$

IV. Существование, единственность и устойчивость решения задачи U_2

Решение задачи U_2 ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \tag{32}$$

где $v_k(x)$, $k \in N$ - собственные функции задачи $\{(6), (7)\}$, а $u_k(t)$, $k \in N$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (32) в уравнение (3) и в начальные условия (4), относительно $u_k(t)$, $k \in N$ получим следующую задачу

$$u''_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \ t \in (0, T), \ k \in N,$$

$$u_k(0) = \varphi_{1k}, \quad u'_k(0) = \varphi_{2k},$$

где

$$\varphi_{jk} = \int\limits_0^1 \varphi_j(x) v_k(x)\, dx, \ j = \overline{1,2}; \ f_k(t) = \int\limits_0^1 f(x,t) v_k(x)\, dx, \ k \in N. \tag{33}$$

Известно, что решение последней задачи существует, единственно и определяется следующей формулой:

$$u_k(t) = \varphi_{1k} \cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) + \varphi_{2k}\lambda_k^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) + \lambda_k^{-1/2} \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k}\right] d\tau, \ 0 \le t \le T. \tag{34}$$

Отсюда, легко следует следующая оценка

$$|u_k(t)| \le |\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\int\limits_0^T f_k^2(\tau) d\tau}, \ 0 \le t \le T. \tag{35}$$

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t. Тогда ряд (32), коэффициенты которого определены равенствами (34), определяет решение задачи U_2.*

Доказательство. Для этого надо доказать равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ ряда (32) и следующих рядов, формально полученных из (32):

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(t) v_k(x), \ \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k^{(j)}(x), \ j = \overline{1, 2n-1},$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial^{2n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right)^{(j)}, \ j = \overline{0, 2n-1},$$

и равномерную сходимость в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$ рядов

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial^{2n}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x)\right)^{(2n)},$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u''_k(t) v_k(x).$$

Рассмотрим ряд (32). В силу (35) из (32), при любых $(x,t) \in \overline{\Omega}$ имеем

$$|u(x,t)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)|\, |v_k(x)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\sqrt{\lambda_k}\, |\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + \sqrt{\int\limits_0^T f_k^2(\tau) d\tau}\right).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2} + \sqrt{\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} [f_k(\tau)]^2 d\tau} \right). \tag{36}$$

Ряды, стоящие в правых частях этого неравенства, в силу условия теоремы 1, согласно леммам 2 и 3, равномерно сходятся. Поэтому, ряд, стоящий в левой части, т.е ряд (32) сходится равномерно в $\overline{\Omega}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача U_2 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существует два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи U_2. Их разность обозначим через $u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3) при $f(x,t) \equiv 0$, а условиям (4) и (5)-при $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$.

Пусть $\forall T_0 \in (0,T]$, $\Omega_0 = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\overline{\Omega}_0 \subset \overline{\Omega}$. Введем следующую функцию:

$$\omega(x,t) = -\int_t^{T_0} u(x,\xi)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_0 .$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1) $\omega_t, \ \omega_{tt}, \ \frac{\partial^j \omega}{\partial x^j}, \ \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}\omega}{\partial x^{2n}}\right) \in C\left(\overline{\Omega}_0\right), \ j = \overline{0, 2n-1}$;

2) удовлетворяет условиям (5) при $t \in [0, T_0]$.

Рассмотрим уравнение (3) при $f(x,t) \equiv 0$ и умножим его на функцию $\omega(x,t)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0 :

$$\int_{\Omega_0} \omega(x,t) \left\{ u_{tt}(x,t) + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} \right] \right\} dt dx = 0.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $u = \frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n+1}\omega}{\partial x^{2n}\partial t}$, имеем

$$\int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}\partial t} dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]^2, \ \frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\right]^2,$$

и применяя правило интегрирования по частям к интегралам по t, с учетом $\omega(x,T_0) = 0$, $u(x,0) = 0$, получим

$$\int_0^1 u^2(x,T_0)\, dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n}\omega(x,t)}{\partial x^{2n}}\right]^2_{t=0} dx = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,T_0) \equiv 0$, $x \in [0,1]$. Так как $\forall T_0 \in [0,T]$, то $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи U_2 справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \le K_0\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{37}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le K_1\left[\left\|\varphi_1^{(2n)}(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|_{L_2(\Omega)}\right], \tag{38}$$

где $\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int\limits_0^1 x^\alpha[\varphi_1(x)]^2 dx\right]^{1/2}$ *и* $r = r(x) = x^\alpha$, *а* K_0 *и* K_1*—некоторые действительные положительные числа.*

Доказательство. Здесь, учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и неравенство (35), из (32) получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{+\infty}\left[|\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}|\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}\right]^2 \le 3\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\varphi_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_k}\varphi_{2k}^2 + \frac{1}{\lambda_k}\|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right] \le$$

$$\le 3\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\varphi_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_1}\varphi_{2k}^2 + \frac{1}{\lambda_1}\|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right].$$

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)} \le K_0\left(\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right), \tag{39}$$

где $K_0 = 3C$, $C = \max(1,\ 1/\lambda_1)$.

Принимая во внимание легко проверяемое равенство

$$\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\|f_k(t)\|^2_{L_2(0,T)},$$

из (39) получим неравенство (37).

Далее, согласно утверждениям лемм 2 и 3, из (36) следует

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}}|u(x,t)| \le$$

$$\le K_1\left\{\sqrt{\int\limits_0^1 x^\alpha\left[\varphi_1^{(2n)}(x)\right]^2 dx} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_{2k}^2} + \sqrt{\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{+\infty}[f_k(\tau)]^2 d\tau}\right\},$$

где $K_1 = \sup\limits_{[0,1]}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k^2(x)/\lambda_k}$.

Отсюда, в силу введенных обозначений, следует неравенство (38). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. – 711 с.

2. Франкль Ф. И. О баковом водозаборе из быстрых мелких рек// Труды Киргизского государственного университета. 1953, Т. 2, С. 33-45.

3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

4. Маховер Е. В. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1957, №17, Вып. 2, С. 28-39.

5. Маховер Е. В. О спектре собственных частот пластинки с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1958, №197, С. 113-118.

6. Нахушев А. М. Уравнения математический биологии. М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

7. Байкузиев К. Б., Каланов Б. С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// В сборнике: Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1972, №2, С. 40-54; 1973, №3, С. 65-73.

8. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// Дифференциальные уравнения, 1984, Том 20, №1, С. 7-14.

9. Urinov A. K. and Azizov M. S. On the Solvability of an Initial–Boundary Value Problem for a High Even Order Partial Differential Equation Degenerating on the Domain Boundary// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 414-426.

10. Irgashev B. Yu. Mixed problem for higher-order equations with fractional derivative and degeneration in both variables// Ukrainian Mathematical Journal, 2023, Vol.74, No.10, March, pp. 1328-1338.

11. Irgashev B. Yu. Boundary value problem for a degenerate equation with a Riemann-Liouville operator// Наносистемы: физика, химия, математика, 2023, Т. 14, Вып. 5, pp. 511-517.

12. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023, Т. 33, Вып. 2, С. 312-1328.

13. Уринов А. К., Орипов Д. Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023, №4, С. 621-644.

14. Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике, Научный вестник НамГУ, 2022, №10, С. 3-11.

15. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2023, Т. 33, Вып 2, С. 312-328.

16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

17. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. 232 с.

18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 294 с.

19. Орипов Д. Д. О корректности одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// NamDU Ilmiy axborotnomasi, 2024, №10, -С. 88-96.

20. Орипов Д. Д. Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// Bulletin of the Institute of Mathematics, 2024, Vol. 7, №5, pp. 105-116.

REZYUME

Ushbu maqolada to‘rtburchak sohada yuqori juft tartibli xususiy hosilali buziladigan bir differensial tenglama uchun uchinchi turdagi chegaraviy shartlar bilan boshlang‘ich-chegaraviy masala keltirilgan va tadqiq qilingan. O‘zgaruvchilarni ajratishga asoslangan Furye usuli yordamida oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Grin funksiyasi usuli yordamida bu masala simmetrik yadroli ikkinchi turdagi Fredgolm integral tenglamasiga ekvivalent ravishda keltirilgan, natijada spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalar sistemasi mavjudligi isbotlangan. Topilgan integral tenglama va Merser teoremasi yordamida xos funksiyalarga bog'liq bo'lgan ayrim bichiziqli qatorlarning tekis yaqinlashuvchanligi isbotlangan. Furye koeffitsiyentlarining tartibi aniqlangan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masala xos funksiyalari sistemasiga nisbatan Furye qatori ko'rinishida ifodalangan. Energiya integrallari usuli yordamida masala yechimining yagonaligi isbotlangan. Yechim uchun baho olingan bo'lib, undan berilgan funksiyalarga uzluksiz bog'liqlik kelib chiqadi.

Kalit so'zlar: buziladigan tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, spektral masala, Grin funksiyasi usuli, integral tenglama, Furye qatori.

RESUME

In this work, we formulate and investigate an initial-boundary value problem with third-type boundary conditions for a degenerate partial differential equation of high even order in a rectangular domain. Using the Fourier method based on the separation of variables, we derive a spectral problem for an ordinary differential equation. By applying the Green's function method, this problem is equivalently reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with a symmetric kernel, from which the existence of eigenvalues and a system of eigenfunctions for the spectral problem follows. Using the obtained integral equation and Mercer's theorem, we prove the uniform convergence of certain bilinear series depending on the found eigenfunctions. The order of the Fourier coefficients is established. The solution to the studied problem is expressed as a Fourier series in terms of the eigenfunctions of the spectral problem. The uniqueness of the solution is proved using the energy integrals method. An estimate for the solution is obtained, implying its continuous dependence on the given functions.

Key words: degenerate equation, initial-boundary value problem, separation of variables method, spectral problem, Green's function method, integral equation, Fourier series.