УДК 517.953

Задача коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе

Рахимов К. У.
Университет точных и социальных наук, Узбекистан
kamoliddin.ru1@gmail.com
Норкулова Р. Б.
Институт математики АНУз, Узбекистан
rushananorqulova1988@gmail.com
Мансурова Г. А.
Национальный университет Узбекистана, Узбекистан
mansurova.guzal1995@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются задача Коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе. Показывается существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: задача Коши, звездообразный граф, уравнение типа Эйри с дробной производной, теория потенциалов.

В последнее время значительно возрос интерес к изучению начальных и начально-краевых задач для уравнений дробного порядка. Это объясняется тем, что развитие теории дробного интегро-дифференцирования оказало существенное влияние на исследование диффузионных и дисперсионных явлений в различных научных областях (см. [9], [2], [6], [13], [10]).

Уравнение Эйри изучалось методом унифицированного преобразования Фокаса в работах [15] и [7]. Теория потенциалов для решений указанного уравнения была построена в [24] и [3]. Вопросы, касающиеся линеаризованного уравнения Эйри на метрических графах, исследовались в публикациях [20], [23], [14], [21] и [1]. Кроме того, нелинейное уравнение Кортевега де Фриза анализировалось М.Кавалканте в [4].

А. Псху исследовал свойства уравнения Эйри с дробной производной по времени и нашел его фундаментальное решение, а также исследовал свойства потенциалов (см. [26]). Далее, в [22] было найдено второе фундаментальное решение и исследованы свойства некоторых дополнительных потенциалов. Используя эти результаты, были найдены решения начальных и некоторых начально-краевых задач на бесконечных и конечных интервалах.

В данной работе рассматриваются задача Коши для уравнения Эйри с разными дробными производными по времени. Область исследования уравнения является звездообразный граф с единственным входящим и m исходящими бесконечными ребрами. Доказывается единственность решения от обратного. Чтобы показать существования решения использованы результаты [16]. При этом применяется метод потенциалов, которые были развиты в [17], [18], [22], [26].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой работе исследуем уравнения типа Эйри с дробной производной

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) - u_{xxx}(x,t) = f(x,t), 0 < t \le T. \tag{1}$$

Здесь

$$\partial_{0t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{g'(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

дробная производная Капуто, где $\Gamma(\alpha)$ - Гамма функция Эйлера. Оператор дробного интегрирования определяется формулой

$$D_{0t}^{-\alpha} g(t) \equiv J_{0t}^{\alpha} g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{t} \frac{g(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi. \tag{3}$$

Для уравнения (1) найдено фундаментальное решение в виде [25]

$$G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \begin{cases} \phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; \frac{x}{t^{\alpha/3}}), & x<0, \\ -2\mathrm{Re}[e^{2\pi i/3}\phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; e^{2\pi i/3}\frac{x}{t^{\alpha/3}})], & x>0. \end{cases} \tag{4}$$

Второе элементарное решение найдено в виде [22]

$$V_{\alpha}^{2\alpha/3}(x,t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \mathrm{Im}[e^{2\pi i/3}\phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; e^{2\pi i/3}\frac{x}{t^{\alpha/3}})], x>0. \tag{5}$$

Здесь $\phi(\lambda,\mu;z)-$ функция Райта, определенный соотношением

$$\phi(\lambda,\mu;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)}, \quad \lambda > -1, \mu \in \mathrm{C} \tag{6}$$

(см. [12]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть граф Γ состоит из одного входящего и m исходящих ребер. Входящее ребро изометрически отображаем на интервал с координатами от $-\infty$ до 0, а в исходящие ребра изометрически отображаем на интервалы с координатами от 0 до $+\infty$. Ребра графа обозначены через $B_j, j=\overline{1,m+1}$.

На каждом ребре графа рассматриваем уравнение типа Эйри с дробной производной по времени

$$\partial_{0t}^{\alpha_j} u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = f_j(x,t), 0<t\le T \tag{7}$$

с начальными условиями

$$u_j(x,0) = u_{0,j}(x), x\in \overline{B_j}, \quad j=\overline{1,m+1}. \tag{8}$$

Здесь все $\alpha_j \in (0;1)$ $\alpha_1 \ge \alpha_i$, $i=\overline{2,m+1}$. На вершине графа требуем выполнения следующих условий склеивания

$$u_1(0,t) = a_2 u_2(0,t) = ... = a_{m+1} u_{m+1}(0,t), \tag{9}$$

$$u_{1,x}(0,t) = \frac{1}{b_2} u_{2,x}(0,t) = \frac{1}{b_3} u_{3,x}(0,t) = ... = \frac{1}{b_{m+1}} u_{m+1,x}(0,t) \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t) = \frac{1}{a_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t) + \frac{1}{a_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t) + ... = \frac{1}{a_{m+1}}\frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2}(0,t). \tag{11}$$

Определение 1. *Функция $u(x,t)$, определенная в области $E=\Gamma\times[0,T]$ называется регулярным решением задачи, если она есть решение уравнения (1), непрерывна вместе с его частными производными, входящими в уравнение, удовлетворяет начальному, граничным условиям задачи и функция и ее производные первого и второго порядков стремится к нулю при бесконечности.*

Задача. Найти регулярное решения уравнении (7) в области $E=\Gamma\times[0,T]$, удовлетворяющее условиям (8) - (11). Здесь под регулярным решением понимается решение из класса

$$V = \big\{u=(u_1,u_2,\ldots,u_{m+1}) : u_j \in C^{2,0}(B_j\times(0,T]),\ \partial_{0,t}^{\alpha_j} u_j \in C(B_j\times(0,T])\big\}$$

$$u\in C(\bar{B}_j\times[0,T]),\ u_x, u_{xx} \in C((B_j\cup\{0\})\times[0,T]),\ j=\overline{1,m}+1\}.$$

Отметим, что подобная задача была решена в [18] на графе с k входящими и m исходящими ребрами, но с одинаковыми дробными производными (т.е. $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{m+1}$).

Покажем существование и единственность решения поставленной задачи.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Докажем единственность решения поставленной задачи.

Теорема 1. *Пусть $b_2^2 + b_3^2 + ... + b_{m+1}^2 \leq 1$. Тогда задача (7)—(11) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть задача имеет две $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, ..., u_{m+1}^{(1)})^T$ и $u^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, ..., u_{m+1}^{(1)})^T$ разных решений. Тогда функция $v = u^{(1)} - u^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{0t}^{\alpha_j} v_j(x,t) = v_{j_{xxx}}(x,t),$$

однородную начальную условию $v_j(x,0) = 0$, и условиям (9)—(11) на вершине графа.

Умножая на $v_j(x,t)$ обе части уравнения $\partial_{0t}^{\alpha_j} v_j(x,t) = v_{j_{xxx}}(x,t)$ пользуясь неравенством [1]

$$v\partial_{0t}^{\alpha} v \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha} v^2,$$

и интегрируя выражение по B_j имеем

$$\int\limits_{B_j} \partial_{0t}^{\alpha_j} v_j^2 dx \leq 2\int\limits_{B_j} v_j \partial_{0t}^{\alpha_j} v_j dx = 2\int\limits_{B_j} v_j v_{j\,xxx} dx \leq 2\left(v_j v_{j\,xx}|_{B_j} - \frac{1}{2} v_{j_x}^2|_{B_j} \right).$$

Суммируем все эти соотношения по всем j и получим

$$\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int\limits_{B_j} v_j^2 dx \leq (2v_1 v_{1,xx})\,|_{-\infty}^{0} + 2\sum_{i=2}^{m+1} (v_i v_{i,xx})\,|_0^{+\infty} - v_{1,x}^2(0,t) + \sum_{i=2}^{m+1} v_{i,x}^2(0,t).$$

Из этого неравенства имеем

$$\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2\, dx \leq 2v_1(0,t)v_{1,xx}(0,t) - 2v_1(0,t)\sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{b_j^2} v_{j,xx}(0,t) - v_{1,x}^2(0,t) +$$

$$+ v_{1,x}^2(0,t)\sum_{j=2}^{m+1} b_j^2 = 2v_1(0,t)\left(v_{1,xx}(0,t) - \sum_{j=2}^{m+1}\frac{1}{b_j^2} v_{j,xx}(0,t)\right) + v_{1,x}^2(0,t)\left(1 - \sum_{j=2}^{m+1} b_j^2\right).$$

Учитывая условии теоремы получим

$$\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int\limits_{B_j} v_j^2 dx \leq 0.$$

Интегрируем это неравенство, учитывая равномерную сходимость и начальную условию имеем:

$$\int_0^t \left(\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0\tau}^{\alpha_j} \int\limits_{B_j} v_j^2 dx \right) d\tau = \sum_{j=1}^{m+1} \left(\int_0^t \partial_{0\tau}^{\alpha_j} \int\limits_{B_j} v_j^2 dx d\tau \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} \left(I_{0t}^{1-\alpha_j} \int\limits_{B_j} v_j^2 dx \right) \leq 0.$$

В последнем неравенстве сумма нескольких неотрицательных выражений равна нулю. Отсюда следует, что $v \equiv 0$. Значит, $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$. Теорема доказана.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

В работах [17], [18], [22] была разработана теория потенциалов для решения уравнений типа Эйри с дробными производными. На основе этой теории будем искать решение задачи в следующем виде.

$$u_j(x,t)=\int_0^t G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\lambda_j(\tau)d\tau+\int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\mu_j(\tau)d\tau+F_j(x,t), \tag{12}$$

где

$$F_j(x,t)=\int_0^{+\infty} G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-\xi,t-0)u_{0,j}(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^0 G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-\xi,t-0)f_j(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$j=\overline{1,m+1}$.

Известно, что функция (12) удовлетворяет уравнение (7) и начальным условиям [18]. Здесь функции $\lambda_j(t)$ и $\mu_j(t)$ являются неизвестными и следует их определить. Для этого воспользуемся условиями (9)—(11). Заметим, что по определению $V_\alpha^{2\alpha/3}$ следует $\mu_1(t)=0$.

Рассмотрим (9).

$$a_j\left(\int_0^t G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\lambda_j(\tau)d\tau+\int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\mu_j(\tau)d\tau\right)=$$
$$\left(\int_0^t G_{\alpha_1}^{2\alpha_1/3}(x-0,t-\tau)\lambda_1(\tau)d\tau+\int_0^t V_{\alpha_1}^{2\alpha_1/3}(x-0,t-\tau)\mu_1(\tau)d\tau\right)+$$
$$+F_1(x,t)-a_jF_j(x,t),\quad j=\overline{2,m+1}.$$

Подставляя значения $G(0,t)$ и $V(0,t)$ имеем:

$$\frac{a_j}{3\Gamma\left(\frac{2\alpha_j}{3}\right)}\int_0^t\frac{\lambda_j(\tau)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(\tau)}{(t-\tau)^{1-2\alpha_j/3}}d\tau=\frac{1}{3\Gamma\left(\frac{2\alpha_1}{3}\right)}\int_0^t\frac{\lambda_1(\tau)}{(t-\tau)^{1-2\alpha_1/3}}d\tau+F_1(0,t)-F_j(0,t)$$

здесь $j=\overline{2,m+1}$. Пользуясь определием дробного интеграла получим:

$$a_j\left(\lambda_j(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t)\right)=D_{0t}^{\frac{2(\alpha_j-\alpha_1)}{3}}\lambda_1(\tau)+3\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}}\left(F_1(0,t)-a_jF_j(0,t)\right),\quad j=\overline{2,m+1}.$$

Из этого следует

$$\lambda_j(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t)=\frac{1}{a_j}D_{0t}^{\frac{2(\alpha_j-\alpha_1)}{3}}\lambda_1(\tau)+\frac{3}{a_j}\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}}\left(F_1(0,t)-a_jF_j(0,t)\right),\quad j=\overline{2,m+1}. \tag{13}$$

Далее находим производное функции

$$u_{j,x}(x,t)=\int_0^t G_{\alpha_j}^{\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\lambda_j(\tau)d\tau+\int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x-0,t-\tau)\mu_j(\tau)d\tau+F_{j,x}(x,t)$$

и его значение в точке $x=0$:

$$u_{j,x}(0,t)=\frac{1}{3\Gamma\left(\frac{\alpha_j}{3}\right)}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha_j/3}}\lambda_j(\tau)d\tau-\frac{\sqrt{3}}{6\Gamma\left(\frac{\alpha_j}{3}\right)}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha_j/3}}\mu_j(\tau)d\tau+F_{j,x}(0,t).$$

Подставляя найденное на (10) имеем:

$$\frac{1}{3}D_{0t}^{-\alpha_j/3}\lambda_j(t)-\frac{\sqrt{3}}{6}D_{0t}^{-\alpha_j/3}\mu_j(t)+F_{j,x}(0,t)=\frac{b_j}{3}D_{0t}^{-\alpha_1/3}\lambda_1(t)+b_jF_{1,x}(0,t).$$

Отсюда получим:

$$\lambda_j(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t) = b_j D_{0t}^{-\frac{\alpha_1-\alpha_j}{3}}\lambda_1(t) + 3\partial_{0t}^{\alpha_j/3}\left(b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)\right), \; j=\overline{2,m+1}. \tag{14}$$

И используем условие (11). Для этого находим значения вторых производных в точке $x=0$ используя леммы [18].

$$\lim_{x\to -0} u_{1,xx}(x,t) = \frac{1}{3}\lambda_1(t) + F_{1,xx}(0,t),$$

и

$$\lim_{x\to +0} u_{j,xx}(x,t) = -\frac{2}{3}\lambda_j(t) + F_{j,xx}(0,t), \; \left(j=\overline{2,m+1}\right).$$

Подставляя найденные на (11) получим:

$$\lambda_1(t) + \frac{2}{a_2}\lambda_2(t) + ... + \frac{2}{a_n}\lambda_n(t) = -3F_{1,xx}(0,t) + \frac{3}{a_2}F_{2,xx}(0,t) + ... + \frac{3}{a_n}F_{n,xx}(0,t). \tag{15}$$

Составляя систему из соотношений (13) и (14) выразим $\lambda_j(t)$ и $\mu_j(t)$ ($j=\overline{2,m+1}$) через $\lambda_1(t)$. Тогда имеем

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{2a_j}D_{0t}^{-\frac{2(\alpha_1-\alpha_j)}{3}}\lambda_1(t) + \frac{b_j}{2}D_{0t}^{-\frac{\alpha_1-\alpha_j}{3}}\lambda_1(t) +$$
$$+\frac{3}{2a_j}\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}}\left(F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)\right) + \frac{3}{2}\partial_{0t}^{\alpha_j/3}\left(b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)\right), \tag{16}$$

и

$$\mu_j(t) = \frac{1}{\sqrt{3}a_j}D_{0t}^{-\frac{2(\alpha_1-\alpha_j)}{3}}\lambda_1(t) - \frac{b_j}{\sqrt{3}}D_{0t}^{-\frac{\alpha_1-\alpha_j}{3}}\lambda_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{a_j}\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}}\left(F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)\right) -$$
$$-\sqrt{3}\partial_{0t}^{\alpha_j/3}\left(b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)\right). \tag{17}$$

Найденные выражения подставим на (15) и имеем

$$\lambda_1(t) + \sum_{j=2}^{m+1}\left(\frac{1}{a_j^2}D_{0t}^{-2\beta_j}\lambda_1(t) + \frac{b_j}{a_j}D_{0t}^{-\beta_j}\lambda_1(t)\right) = g(t), \tag{18}$$

здесь $\beta_j = \frac{\alpha_1-\alpha_j}{3}$ и

$$g(t) = -3F_{1,xx}(0,t) + 3\sum_{j=2}^{m+1}\Big(\frac{1}{a_j}F_{j,xx}(0,t) - \frac{1}{a_j^2}\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}}\left(F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)\right) +$$
$$+\frac{1}{a_j}\partial_{0t}^{\alpha_j/3}\left(b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)\right)\Big).$$

Уравнение (18) является обобщенным интегральным уравнением Абеля. Его решение было построено А.В.Псху [16].

Перепишем уравнение (18) в следующем виде

$$\sum_{i=0}^{n} A_i D_{0t}^{-\rho_i}\lambda_1(t) = g(t), \tag{19}$$

где $A_0 = 1$, $\rho_0 = 0$, для всех $i=\overline{1,m}$ находим $A_i = \frac{1}{a_{j-1}^2}$, $\rho_i = 2\beta_{j-1}$ и для всех $i=\overline{m+1,2m}$ находим $A_i = \frac{b_{j-1}}{a_{j-1}}$, $\rho_i = \beta_{j-1}$. Вводим функцию

$$S_n^{\mu}(t; z_1,...,z_n; \gamma_1,...,\gamma_n) = (h_1 * h_2 * ... * h_n)(t), \tag{20}$$

здесь $(h_i * h_j)(t) = \int\limits_0^t h_i(t-\tau)h_j(\tau)d\tau$ и $h(t) = h_i(t) = t^{\mu_i - 1}\phi(\gamma_i, \mu_i; z_i t^{\gamma_i})$. Для параметров и аргументов функции (20) выполняются условии

$$t > 0, \;\; z_i \in \mathbf{R}, \;\; \gamma_\mathbf{i} > \mathbf{0}, \;\; \mu_\mathbf{i} > \mathbf{0}, \;\; \mu = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mu_\mathbf{i}.$$

С помощью функции (20) составим функцию

$$G_n^\mu(t; \gamma_1, ..., \gamma_n; \gamma_1, ..., \gamma_n) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} S_n^\mu(\tau; \gamma_1\tau, ..., \gamma_n\tau; \gamma_1, ..., \gamma_n) = (h_1 * h_2 * ... * h_n)(t)dt.$$

Доказано, что этот интеграл является сходящимся. Здесь стоит не перепутать эту функцию с функцией (4).

Теорема 2. [16] *Пусть $g(t) \in L(0,T)$. Тогда уравнение (19) имеет единственное интегрируемое решение $\lambda_1(t)$, которое для каждого $\mu > \rho_0$ представляется в виде*

$$\lambda_1(t) = D_{0t}^\mu \left(g * \omega_\mu\right)(t), \tag{21}$$

где $\omega_\mu = \omega_\mu(t)$ представляется как

$$\omega_\mu(t) = G_n^\mu \left(t; -A_1; ..., -A_m; \alpha_1, ..., \alpha_n\right).$$

Таким образом, мы можем найти функций $\lambda_j(t), \;\; \mu_j(t), \;\; (j = \overline{2, m+1})$ с помощью формулами (16) и (17), т.к. функция $\lambda_1(t)$ является решением уравнения (18) и представляется как (21). Таким образом, показано существования решения задачи. Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть имеет место неравенство $b_2^2 + b_3^2 + ... + b_{m+1}^2 \le 1$, функции $f(x,t) \in C^{0,1}(B_j \times [0,T])$ и $u_{j_0}(x) \in C(\overline{B_j})$. Тогда задача (7)—(11) имеет единственное решение.*

Таким образом, поставленная задача полностью решена. В этой работе уравнение типа Эйри рассмотрено на графе-звезде с одного входящего и m исходящих ребер. В качестве задачи на перспективу можно посмотреть подобную задачу на графе-звезде с k входящих и m исходящих ребер.

ЛИТЕРАТУРА

[1.] Alikhanov A. A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations. Differential equations, Vol. 46. Issue 5. 658-664(2010).

[2.] Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CIAM Cources and Lectures. Vol. 376, Wien: Springer (1997).

[3.] Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. 13. Issue 3. 163-203 (1959).

[4.] Cavalcante M. The Korteweg-de Vries equation on a metric star graph. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. 69:124 (2018).

[5.] Gnutzmann S. and Smilansky U., Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics. Advances in Physics. Vol. 55, Issue 5-6, 527-625 (2006).

[6.] Hilfer R. (Ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: WSPC (2000).

[7.] Himonas, D. Mantzavinos, and F. Yan. The Korteweg-de Vries equation on an interval. Journal of Mathematical Physics, 60(5), pp. 25, (2019).

[8.] Khudayberganov G., Sobirov Z., Eshimbetov M. Unified transform method for the Schrodinger equation on a simple metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. Volume 12, Issue 4. p. 412-420 (2019)

[9.] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Amsterdam, etc.: Elsevier (2006).

[10.] Kivshar Y.S. and Agarwal G.P., Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic, San Diego (2003).

[11.] Kottos T. and Smilansky U. Periodic Orbit Theory and Spectral Statistics for Quantum Graphs. Annals of Physics. Vol. 274, Issue 1, 76-124 (1999).

[12.] Mainardi F., Mura A. and Pagnini G. The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey. International Journal of Differential Equations. Vol. 3. (2010).

[13.] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys. Reports. Vol. 339, 1-77 (2000).

[14.] Mugnolo D., Noja D. and Seifert Ch. Airy-type evolution equations on star graphs. Analysis and PDE. Vol. 11, Issue 7 (2018).

[15.] Pelloni B. Well-posed boundary value problems for linear evolution equations on a finite interval. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 136, p. 361-382 (2004).

[16.] Pskhu A.V. On Solution Representation of Generalized Abel Integral Equation, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics Volume 2013, Article ID 106251, 5 pages.

[17.] Rakhimov K.U. The method of potentials for the Airy equation of fractional order. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. volume 3, Issue 2. p 222-235 (2020).

[18.] Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M. The time-fractional Airy equation on the metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2021, 14 (3), 376—388.

[19.] Seifert Ch. The linearized Korteweg-de-Vries equation on general metric graphs. The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. 449-458 (2018).

[20.] Sobirov Z.A., Uecker H., Akhmedov M.I. Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uzbek Mathematical Journal, Vol.3, 143-154 (2015).

[21.] Sobirov Z.A., Akhmedov M.I., Uecker H. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Vol. 6. Issue 2, 198—204 (2015).

[22.] Sobirov Z.A., Rakhimov K.U. Cauchy problem for the Airy equation with fractional time-fractional on a star-shaped graph. Institute of Mathematics Bulletin, Uzbekistan. vol. 5. 40-49 (2019).

[23.] Sobirov Z.A., Akhmedov M. I., Karpova O.V., Jabbarova B. Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Vol. 6, Issue 6. 757-761(2015).

[24.] Джураев Т. Краевые задачи для составного и смешанно-составного типов. стр. 240., Ташкент (1979).

[25.] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка, стр. 200. Москва (2005).

[26.] Псху А.В. Фундаментальное решение уравнения третьего порядка с дробной производной. Узбекский математический журнал. No. 4. 119-127 (2017).

REZYUME

Bu maqolada yulduzsimon grafda berilgan, har xil hosilalarga ega bo'lgan Eyri tipidagi tenglamalar uchun Koshi masalasi tadqiq qilingan. Qo'yilgan masalaning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, yulduzsimon graf, kasr hosilali Eyri tipidagi tenglama, potentsiallar nazariyasi.

RESUME

In this paper was studied the Cauchy problem for an Airy-type equation with different fractional derivatives on the star-shaped graph. It was proved the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: Cauchy problem, star-type graph, Airy-type equation with fractional derivative, potential theory.