

UDC 004.942

EPIDEMIK KASALLIK TARQALISH MODELIDAGI “ASOSIY REPRODUKTIV SON” NING AHAMIYATI VA UNI TOPISH USULLARI**JABBOROV N. M.**TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI, TOSHKENT
jabborov61@mail.ru**ESHDAVLATOVA S. E.**TOSHKENT SHAHRIDAGI BELARUS-O'ZBEKISTON QO'SHMA TARMOQLARARO AMALIY
TEXNIK KVALIFIKATSIYALAR INSTITUTI, TOSHKENT
sevaraeshdavlatova@gmail.com**TUYCHIEV S. G'.**TOSHKENT XALQARO MOLIVAVIY BOSHQARUV VA TEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI,
TOSHKENT
stuychev@gmail.com**REZYUME**

Ushbu maqolada kasallik tarqalishining epidemik SIR (Susceptible-Infected-Recovered) modelining izohi va uning korrupsiya dinamikasida qo'llanilishi va modelning "asosiy reproduktiv son" (R_0) ning mavjudligi, uni topish usullari hamda qaysi usul samaradorligi haqida fikrlar misollar bilan keltirilgan.

Kalit so'zlar: epidemik model, asosiy reproduktiv son.

“Koronavirus pandemiyasi butun dunyo qatori xalqimiz, ayniqsa O'zbekiston tibbiyoti uchun ham jiddiy sinov bo'lganini barchamiz yaxshi bilamiz. El boshiga ish tushgan ana shunday og'ir va murakkab paytda birinchi bo'lib yordamga shoshilgan, virus o'choqlarida o'z hayotini xatarga qo'yib, bu xavfli kasallikka qarshi mardona kurashgan sog'liqni saqlash xodimlariga ushbu quvonchli ayyomda yana bir bor minnatdorlik bildiramiz”, — dedi Shavkat Mirziyoyev [1].

Epidemik kasallik tarqalishi matematik modelining 1927-yilda birinchi marta Kermak va MakKendrik [2] (Kermack, McKendrick, 1927) ning asarlarida tatqiqot jarayonlari ko'rsatilgan. Kermak va MakKendrik modeli differensial tenglamalar sistemalari yordamida kasallikka moyil (sezgir), kasallangan (infektsiyalangan) va kasallikdan tuzalgan shaxslar guruhlarining dinamikasi tasvirlangan SIR modellarining (“Susceptible – Infected – Recovered”) keng qo'llanilishiga olib keldi.

SIR modeli (Susceptible-Infected-Recovered) – bu epidemiyalar (yoki boshqa tarqaluvchi jarayonlar, masalan, korrupsiya) dinamikasini o'rganish uchun eng oddiy va keng qo'llaniladigan matematik modeldir. U shaxslarni uchta asosiy guruhga bo'lib tahlil qiladi va ularning o'zaro o'tishini hisoblaydi. S (Susceptible) – yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar soni. I (Infected) – hozirgi vaqtda yuqtirgan va boshqalarga yuqtirish xususiyatiga ega shaxslar soni. R (Recovered) – tuzalgan yoki immunitet hosil qilgan shaxslar soni. Bu guruhdagi shaxslar qayta yuqtirmaydi.

SIR modeli uchta differensial tenglama bilan tavsiflanadi:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

bu yerda:

1. S — sog'lom odamlar soni,
2. I — yuqumli odamlar soni,
3. R — sog'ayganlar soni,
4. β — kasallik yuqish darajasi,
5. γ — tuzalish darajasi.

Yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar sonining o'zgarishi:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

bu yerda β — yuqtirish koeffitsienti. Ushbu tenglama S shaxslarning I bilan kontaktga kirishishi orqali kamayishini ifodalaydi.

Yuqtirgan shaxslar sonining o'zgarishi:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

bu yerda γ — tuzalish koeffitsienti. Yuqtirgan shaxslar soni βSI tufayli ortadi va γI tufayli kamayadi.

Tuzalgan shaxslar sonining o'zgarishi:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

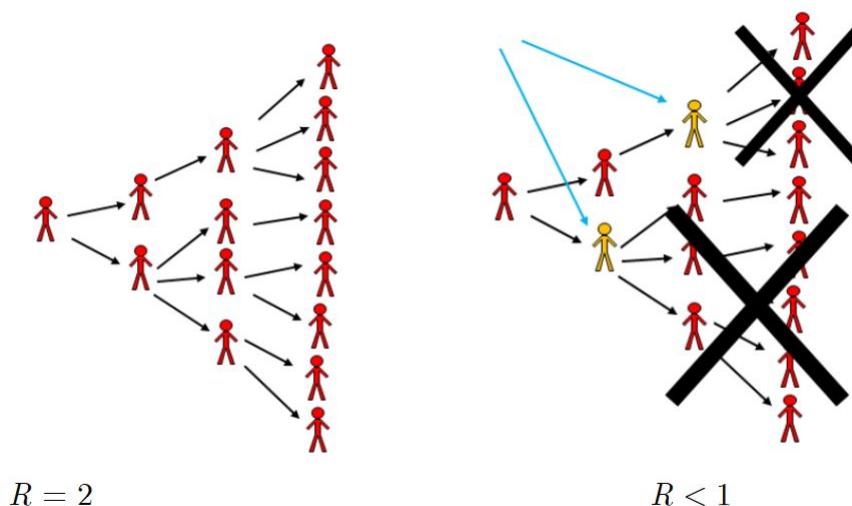
Ushbu tenglama yuqtirgan shaxslarning sog'ayish tezligini tavsiflaydi [3-7].

SIR modelining quyidagi asosiy xususiyatlari mavjud: guruhlardagi shaxslar soni: $S(t) + I(t) + R(t) = N$, bu yerda $N(t)$ — populyatsiyaning umumiy soni. Boshlang'ich vaqtda yuqtirganlar soni $I(0)$, yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar soni $S(0)$ va sog'ayganlar soni $R(0)$ aniq beriladi. Odatda $R(0) = 0$ va $I(0) \geq 0$ deb olinadi.

SIR modeli vaqt o'tishi bilan uch guruhning sonidagi o'zgarishlarni quyidagicha tasvirlaydi: $S(t)$ — dastlab yuqori bo'ladi va vaqt o'tishi bilan kamayadi. $I(t)$ — boshlang'ich

holatda kasallanganlar soni kichik bo'ladi, lekin epidemiyaning avj olishida maksimal qiymatga yetib, keyin kamayadi. $R(t)$ – vaqt o'tishi bilan ortib boradi va sog'ayganlar sonini ifodalaydi. Bu matematik model muhim amaliy ahamiyatga ega bo'lib, SIR modeli yordamida kasallik tarqalishini oldindan bashorat qilish va kasallikning oldini olish chora-tadbirlari rejasini ishlab chiqish mumkin. R_0 (asosiy reproduktiv son) orqali kasallikning tarqalish darajasini baholash mumkin. R_0 populyatsiyaning qancha qismini emlash kerakligini aniqlashda qo'llaniladi [8].

R_0 ga izoh beramiz. SIR modelining asosiy xossasi bu “kasallik tarqalishi” nomli ko'rsatkichning mavjudligi bo'lib, unga ko'ra, model R_0 ko'rsatkichdan kelib chiqib, turlicha holatlarni izohlab beradi, R_0 - infeksiyani yuqtirib olgan va bu haqida hali o'zi behabar bo'lgan bir nafar kasallik tashuvchi odamning o'zida infeksiya borligini bilguniga qadar muddatda o'rtacha necha nafar kishiga infeksiya yuqtirishi sonidir.



Agar $R_0 < 1$ bo'lsa, infeksiya tarqalishi kamaya boshlaydi; agar $R_0 > 1$ bo'lsa, epidemiya kuchaya boshlaydi va aholining katta qismini qamrab oladi. Aynan qancha qismini epidemiya qamrab olishi esa R_0 ning aniq qiymatidan kelib chiqadi [9]. Lekin bu qiymatning arziyasi o'zgarishi ham umumiy aholi sonining o'nlab foizlarini epidemiya qamrab olishini belgilashi mumkin. Masalan, $R_0 = 2$ bo'lsa, epidemiya tufayli aholining 80 foizgacha bo'lgan qismi kasallikka yo'liqishi mumkin deyiladi.

Aholining katta qismi mazkur kasallikka qarshi emlangan bo'lsa, epidemik o'tish R_0 bo'yicha kichikroq sonni ko'rsatadi va emlanganlar soni yuqori bo'lsa, epidemiya tezlik bilan to'xtaydi. Bu hodisa fanda “guruhli immunitet” deyiladi va u aholini ommaviy emlash tadbirlarining asosini tashkil qiladi.

SIR modeli yuqumli kasalliklarning tarqalish dinamikasi borasida asosiy sifat ko'rsatkichini taqdim qila oladi; biroq miqdor dinamikasini modellash uchun muayyan aniq bir olingan kasallikning klinik xususiyatlaridan kelib chiquvchi turli boshqa parametrlarni ham inobatga olish talab etiladi. Ko'plab yuqumli kasalliklarning o'ziga xosligi, uning qo'zg'atuvchisining inkubatsion davri qancha ekani bilan bog'liq bo'ladi.

Bu davr shunday davrki, u paytda odam o'zi allaqachon kasallikni yuqtirib olgan bo'lsa-da, bundan hali o'zi bexabar bo'ladi va unda kasallik alomatlari hali yuzaga chiqmaydi. Shunga qaramay, u atrofdagilarga kasallik yuqtirib yurgan bo'ladi. Muayyan yuqumli kasallik uchun

ushbu o'ziga xoslikni, I guruhini yana kichikroq tarkibiy guruhlarga bo'lish orqali e'tiborga olish mumkin bo'ladi.

R_0 asosan chegaraviy parametr sifatida ishlatiladi: agar $R_0 < 1$ bo'lsa, kasallik aholida yo'qolib ketadi; agar $R_0 > 1$ bo'lsa, kasallik saqlanib qoladi va aholiga xos bo'lgan endemik holatga aylanadi. Bundan tashqari, R_0 kattaligi qancha katta bo'lsa, kasallik shuncha tez tarqaladi va uni nazorat qilish qiyinlashadi.

R_0 biologiya sohasidagi muhim tushunchalardan biri bo'lib, uni 1952 yilda birinchi bo'lib Jorj MakDonald qo'llaganidan beri keng foydalanilmoqda [8]. Biroq, R_0 ning matematik ta'rifi muammoli va ayrim hollarda noaniqlikka olib kelishi mumkin.

R_0 ni hisoblash usullari

R_0 ni hisoblashning bir nechta usullari mavjud. Eng keng tarqalgan usullar quyidagilarni o'z ichiga oladi:

1. Keyingi avlod matrisi usuli,
2. Endemik muvozanatning mavjudligi,
3. Xarakteristik polinomning doimiy hadlari va boshqalar [10].

Shuni ta'kidlash kerakki, ushbu usullarning har biri bir xil model uchun turli R_0 qiymatlarini berishi mumkin, shuningdek, qaysi usulni modelga mos deb hisoblasa, shunga bog'liq holda turli qiymatlar olinishi mumkin. Har bir usul R_0 ning chegaraviy xususiyatiga asoslangan shartlardan kelib chiqadi, lekin ko'p hollarda biologik ta'rifga mos kelmaydigan qiymatlar hosil qiladi.

Tasodifiy bir usulni tanlab foydalanish birinchi zararlangan shaxsdan kelib chiqadigan ikkilamchi infeksiyalar sonini aniq ifodalaydi, deb kafolat bermaydi. Hatto bir xil sistema uchun turli usullar R_0 ning turli qiymatlarini berishi mumkin.

Qanday qilib ikki xil qiymat bir vaqtda bitta zararlangan shaxsdan kelib chiqadigan ikkilamchi infeksiyalar sonini ifodalashi mumkin? Agar R_0 ning faqat chegaraviy qiymat xususiyatidan tashqari holatlar ham muhim bo'lsa, R_0 ni hisoblash uchun usul tanlashda ehtiyotkorlik bilan yondashish kerak.

Keyingi Avlod Usuli (Next generation matrix). R_0 ni hisoblashning eng keng qo'llaniladigan usullaridan biri – keyingi avlod matritsasi usuli. Ushbu yondashuv infeksiyalangan sinfning tenglamalaridan tegishli hadlarni ikkita vektor: F va V ga joylashtirish orqali amalga oshiriladi:

1. F : Yangi infeksiyalar paydo bo'lishini tavsiflovchi hadlarni o'z ichiga oladi.
2. V : Mavjud infeksiyalarning boshqa holatlarga o'tishini ifodalovchi hadlarni o'z ichiga oladi (bu hadlar manfiy ishora bilan olinadi).

Keyin, F va V vektorlarining mos keluvchi o'zgaruvchilarga nisbatan Yakobian matritsalarini olinadi va ular kasallik yuqtirilmagan muvozanat holatida (Disease-Free Equilibrium, DFE) baholanadi. Natijada ikkita matritsa hosil bo'ladi:

Keyingi avlod matritsasi FV^{-1} orqali aniqlanadi. Shu holda: $R_0 = \rho(FV^{-1})$ bu yerda ρ -spektral radius operatori, ya'ni matritsaning eng katta absolyut qiymatga ega bo'lgan xos soni.

Biologik ma'nosi:

1. FV^{-1} - ning (i, j) -elementi — x_j -holatidan kelib chiqqan x_i -holatidagi yangi infeksiyalar sonining kutilgan qiymatini ifodalaydi.
2. Ushbu usul biologik R_0 ta'rifiga juda mos keladi va ko'plab tizimlarda ishlaydi, lekin hamma hollarda emas.

Afzalliklari va Kamchiliklari. Ushbu usul aniq matematik asosga ega, shuning uchun R_0 -ning ma'nosini foydalanuvchi aniq bilib olishi mumkin. Biroq, ayrim hollarda bu usul murakkab bo'lishi yoki R_0 ning biologik ma'nosini to'liq ifodalay olmasligi mumkin. Shunga qaramay, u R_0 -ni hisoblashda eng keng tarqalgan va moslashuvchan usul hisoblanadi [11].

SIR-modelining asosiy tenglamalari uchun keltirilgan usullar yordamida topamiz va natijalarni solishtiramiz:

Keyingi avlod matrisi usuli

Bu usul infeksiyaning keyingi avlodini oldingi avloddan qanday hosil bo'lishini tahlil qiladi.

F va V matritsalarini aniqlash

F — yangi infeksiyalarni ifodalaydi: $F = \beta S$

V — infeksiyadan chiqish (tuzalish yoki o'lim): $V = \gamma$

Keyingi avlod matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$\rho = FV^{-1} = \frac{\beta S}{\gamma}$$

SIR-modeli uchun keyingi avlodning asosiy formulasi:

$$R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

bu yerda S_0 boshlang'ich sog'lom odamlar soni. Boshlang'ich sharoitda $S_0 \approx N$ (populyatsiyaning to'liq soni) deb hisoblasak:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ (agar $S_0 = 1$ deb olinadigan bo'lsa).

Endemik muvozanatning mavjudligi

Endemik muvozanatda infeksiya darajasi vaqt o'tishi bilan o'zgarmas holatda qoladi.

1. Muvozanat sharoitida $\frac{dI}{dt} = 0$ bo'lganda: $\beta SI - \gamma I = 0$
2. $I \neq 0$ bo'lganda: $\beta SI = \gamma I$
3. Shundan: $R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$

Boshlang'ich sharoitda $S = S_0 \approx 1$ deb olsak: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

Xarakteristik polinomning doimiy hadlari

Bu usul chiziqlashtirilgan differentsial tenglamalar sistemasidan xarakteristik polinomni topishga asoslanadi.

1. SIR-modeli uchun infektsiyalanganlar tenglamasini chiziqlashtiramiz: $\frac{dI}{dt} = (\beta S_0 - \gamma) I$
2. Xarakteristik polinom: $\lambda = \beta S_0 - \gamma$

Yuqumli o'sish bo'lishi uchun $\lambda > 0$ bo'lishi kerak: $\beta S_0 - \gamma > 0$

1. Shundan: $R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$, $R_0 \approx \frac{\beta}{\gamma}$ (agar $S_0 = 1$ deb olinadigan bo'lsa $R_0 \approx \frac{\beta}{\gamma}$).

Natijalar shuni ko'rsatadiki, har bir usul SIR-modeli uchun bir xil natija beryabdi: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

SIR modeli asosida korrupsiya dinamikasini o'rganish mumkin. SIR modeli faqat epidemiyalarni emas, balki ijtimoiy tizimlarda korrupsiya kabi "yuqumli" hodisalarni ham tahlil qilish uchun moslash mumkin. Bu holda: S – korrupsiyaga aralashmagan va undan ehtiyot bo'lgan shaxslar. I – korrupsiyaga aralashgan shaxslar (yuqtirgan). R – korrupsiyadan xalos bo'lgan shaxslar (tuzalgan). Bu borada [12-16] da to'liq talqini asosida tatqiqot ishlari olib borilgan. R_0 epidemiologiyada hal qiluvchi parametr bo'lib, kasallikning tarqalish tezligini tushunish, oldini olish strategiyalarini ishlab chiqish va sog'liqni saqlash tizimini samarali boshqarish uchun muhimdir. Shu sababli R_0 ni to'g'ri aniqlash va uning dinamikasini kuzatib borish har qanday pandemiya yoki epidemiyaga qarshi kurashda asosiy vositalardan biridir.

ADABIYOTLAR

1. “Asosiy vazifamiz – tibbiyot sohasini xalqchil tizimga aylantirish” Prezident SH.M.Mirziyoyevning soha xodimlariga yo'llagan tabrigi. 13-noyabr, 2021-yil.
2. W.O.Kermack, A.G.McKendrick, “Proceedings of the Royal Society of London” // Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Vol. 115, No. 772. (Aug. 1, 1927), pp. 700-721.
3. S.M.Blower and H.Dowlatabadi. “Sensitivity and uncertainty analysis of complex models of disease transmission: an hiv model, as an example,” // International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, vol. 62, pp. 229–243, 1994.
4. M.A.Mikucki “Sensitivity analysis of the basic reproduction number and other quantities for infectious disease models” // Thesis Colorado State University Fort Collins, Colorado Spring 2012. 109 pages.
5. H.S.Rodrigues, T.T.Monteiro and F.M.Torres “Sensitivity Analysis in a Dengue Epidemiological Model” // Hindawi Publishing Corporation Conference Papers in Mathematics Volume 2013, Article ID 721406, 7 pages
6. V.P.Driessche, J.Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibrium for compartmental models of disease transmission. Math Bioscience. (2002) 180:29–48. doi: 10.1016/S0025-556400108-6
7. O.Diekmann, J.Heesterbeek. Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Integration. New York, NY: Wiley (2000).

8. M.Osman, I.Adu, A.K.Isaac. Simple mathematical model for malaria transmission. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science (2017) 25:1–24. doi: 10.9734/JAMCS/2017/ 37843
9. N.K.Goswami, S.Olaniyi, S.F.Abimbade, F.M.Chuma. A mathematical model for investigating the effect of media awareness programs on the spread of COVID19 with optimal control. Healthc Analys. (2024) 5:100300. doi: 10.1016/j.health.2024. 100300
10. S.Lenhart, J.T.Workman. Optimal Control Applied to Biological Models, 1st Edn. Chapman and Hall/CRC (2007). p. 274
11. J.H.Jones “Notes On R_0 ” // Department of Anthropological Sciences. Stanford University. May 1, 2007. 19pages
12. S.E.Eshdavlatova “Poraxo’rlikning dinamikasini nazorat choralari orqali matematik modellashtirish” // “Ta’lim transformatsiyasi: Ilm-fan taraqqiyotida xotin-qizlarning roli” mavzusidagi IV xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. Toshkent sh., 2023 yil, 16-fevral, 690-694-betlar.
13. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova “Korrupsiyani matematik modellashtirish va dinamikasini nazorat choralari orqali tahlil qilish” // O’zMU xabarlari. Aniq fanlar. 2023 1/1. 13-20-betlar.
14. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova, S.G.To’ychiyev. “O’zbekistonda sharoitida poraxo’rlikni oldini olishning matematik model asosidagi tahlili” // “Amaliy matematika, matematik modellashtirish va informatikaning dolzarb muammolari” Respublika ilmiy konferensiya ma’ruzalar to’plami. Nukus 2024 yil, 24-25-may. 186-188-betlar.
15. S.E.Eshdavlatova, H.R.Raufov, N.X.Matyoqubova. “Matematik modellashtirish yordamida yoshlar orasida jinoyatchilikning tarqalishini tadqiq qilish” // “Raqamlashtirish sharoitida uzluksiz ta’limni sifat va samaradorligini oshirish: muammo va yechimlari” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiya ma’ruzalar to’plami. Guliston 2024-yil, 7-8-iyun. 63-68-betlar.
16. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova “Функции ляпунова и анализ глобальной стабильности для эпидемической модели” // “Axborot texnologiyalaridan foydalanishni yangi bosqichga ko’tarishning ilmiy asoslari va avtomatlashtirishning zamonaviy muammolari” mavzusidagi III Xalqaro ilmiy anjuman Toshkent sh., 2024 y., 20-noyabr, 687-689 betlar.

РЕЗЮМЕ

В данной статье дано объяснение эпидемической модели распространения заболеваний SIR (Susceptible Infected-Recovered) и ее применение в динамике коррупции и существования «основное репродуктивное число» модели (R_0), методы как его найти, и эффективность какого метода представлены на примерах.

Ключевые слова: эпидемическая модель, основное репродуктивное число.

RESUME

This article explains the epidemic model of disease spread SIR (Susceptible Infected-Recovered) and its application to the dynamics of corruption and the existence of the "basic reproductive number" of the model (R_0), methods for finding it, and the effectiveness of which method are presented with examples..

Key words: epidemic model, basic reproductive number.