

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА С МИНИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТЬЮ****Хайиткулов Б. Х.**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, УЗБЕКИСТАН

b.hayitqulov@mail.ru

**РЕЗЮМЕ**

В работе исследуются задача Коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе. Показывается существование и единственность решения задачи.

**Ключевые слова:** задача Коши, звездообразный граф, уравнение типа Эйри с дробной производной, теория потенциалов.

**РЕЗЮМЕ**

Данная работа посвящена численному решению нестационарной задачи оптимального размещения источников тепла минимальной мощности. Постановка задачи требует одновременного выполнения двух условий. Первое условие - обеспечить нахождение температуры в пределах минимальных и максимальных температур за счет оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. Второе условие заключается в том, чтобы суммарная мощность источников тепла, используемых для обогрева, была минимальной. Эта задача изучалась в стационарных условиях в работах других учёных. Однако в нестационарном случае задача не рассматривалась. Поскольку найти непрерывное решение краевой задачи сложно, то ищем численное решение задачи. Трудно найти интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Найдено численное значение функции Грина в виде матрицы. Предложен новый алгоритм численного решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа. Предложена новая методика численного решения. Построена математическая и численная модель процессов, описываемых уравнением конвекции-диффузии, заданным для первой краевой задачи. Краевая задача изучается для двумерного случая. Для численного решения задачи использовалась неявная конечно-разностная схема. По этой схеме была создана система разностных уравнений. Сформированная система разностных уравнений приведена к задаче линейного программирования. Задача линейного программирования решается с помощью М-метода. При каждом значении времени решается задача линейного программирования. Предложен новый подход к численному решению задач. Приведена общая блок-схема алгоритма решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью. Разработан алгоритм и программное обеспечение для численного решения задачи. Приведено краткое описание программного обеспечения. На конкретных примерах показано, что численное решение краевой задачи находится в заданных пределах, сумма оптимально размещённых источников тепла с минимальной мощностью даёт минимум функционалу. Визуализированы результаты вычислительного эксперимента.

**Ключевые слова:** нестационарные задачи, оптимальное размещение, источники тепла, уравнения конвекции-диффузии, М-метод.

**Введение.** Одним из самых распространенных объектов в различных сферах деятельности человека является система источников тепла, тепловой баланс в отапливаемых помещениях. Математическое

моделирование таких систем ставит задачу об оптимальном размещении источников тепла в отапливаемых помещениях, что связано с ресурсосберегающими инженерными технологиями. Задача оптимального размещения источников тепла отапливаемых площадей всегда была актуальной при проектных работах в строительстве, теплицах и других технических и технологических сферах. Задачи этого типа были изучены для стационарного случая. Однако задача оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью для нестационарного случая не изучена.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. В работе [3] рассмотрена задача энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В работе [4] изучена дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принцип максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности. В работе [5] изучена задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением теплопроводности. Управляющий параметр задан в граничном условии и достиг минимума функционала, задаваемого интегральным квадратичным выражением. Показан метод нахождения допустимого управления, дающего минимум функционалу.

В работах [6-8] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой. В работе [9] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [10] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в работах [11-13] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе рассмотрена задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и сведения к задаче линейного программирования. В работе предлагаются метод и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах, путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Для проведения вычислительных экспериментов было разработано программное обеспечение.

**Постановка задачи и ее конечно-разностная аппроксимация.** В области  $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq t \leq T\}$  требуется найти функцию  $f(x, y, t) \geq 0$  такую, что для любого  $t \in [0, T]$  линейный функционал

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x, y) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - v(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \\ a < x < b, \quad c < y < d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \\ u(a, y, t) &= \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, c, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$m(x, y, t) \leq u(x, y, t) \leq M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D, \quad (3)$$

где  $u = u(x, y, t)$  – температура в точке  $(x, y)$  прямоугольника в момент времени  $t$ ;  $\chi(x, y) > 0$  – коэффициент диффузии (температуропроводности);  $v(x, y)$  – скорость конвекции по соответствующим направлениям.

ям;  $u_0(x, y)$ ,  $\mu_1(y, t)$ ,  $\mu_2(y, t)$ ,  $\mu_3(x, t)$ ,  $\mu_4(x, t)$ ,  $m(x, y, t)$ ,  $M(x, y, t)$  – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения  $\mu_1(c, t) = \mu_3(a, t)$ ,  $\mu_1(d, t) = \mu_4(a, t)$ ,  $\mu_2(c, t) = \mu_3(b, t)$ ,  $\mu_2(d, t) = \mu_4(b, t)$ . Функции  $m(x, y, t)$  и  $M(x, y, t)$  – имеют смысл функций минимальной и максимальной температуры в области  $D$  соответственно. Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией  $f(x, y, t)$  в пространстве  $L_2(D)$ .

Пусть  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x, y) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Оператор  $L$ , определенный в  $L_2(D)$ , имеет обратный  $L^{-1}$ . Здесь  $L^{-1}$  – интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)-(3) в следующем виде:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, y, t) \geq 0, \quad m(x, y, t) \leq (L^{-1}f)(x, y, t) \leq M(x, y, t). \quad (4)$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (1)-(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в  $D$  равномерную по трем переменным разностную сетку  $\bar{\omega}_{h_1 h_2}^\tau = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}^\tau = \{(x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau), i = \bar{0}, N_1, j = \bar{0}, N_2, k = \bar{0}, N_3\}$  с шагами  $h_1 = (b - a)/N_1$ ,  $h_2 = (d - c)/N_2$ ,  $\tau = T/N_3$ .

Неявная разностная схема для условия (2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \chi_{ij} \left( \frac{u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) - \\ v_{ij} \left( \frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{2h_2} \right) + f_{ij}^{k+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{N_1 j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}), \quad u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь  $\chi_{ij} = \chi(x_i, y_j)$ ,  $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ ,  $f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1})$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_{ij}}{h_1^2} + \frac{2\chi_{ij}}{h_2^2} \right), \quad X^+ = \left( -\frac{\chi_{ij}}{h_1^2} + \frac{v_{ij}}{2h_1} \right), \quad X^- = \left( -\frac{\chi_{ij}}{h_1^2} - \frac{v_{ij}}{2h_1} \right), \\ Y^+ &= \left( -\frac{\chi_{ij}}{h_2^2} + \frac{v_{ij}}{2h_2} \right), \quad Y^- = \left( -\frac{\chi_{ij}}{h_2^2} - \frac{v_{ij}}{2h_2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} & Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$G = A^{-1}.$$

Аппроксимируем задачу (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область  $D$  по  $x, y, t$  соответственно на  $N_1, N_2, N_3$  равных частей:  $D = \bigcup_{k=1}^{N_3} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} D_{ij}^k$ , где  $D_{ij}^k = \{(x, y, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$ ,  $i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3}$ . В пространстве  $L_2(D)$  функции  $f_{ij}^k = f(x_i, y_j, t_k)$ ,  $(x, y, t) \in D_{ij}^k$  ( $i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1}, k = \overline{1, N_3}$ ) определяются как кусочно-постоянные функции. Отсюда получим  $f(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij}^k$ .

Пусть  $g_{pq} = G$ ,  $m_{ij}^k = m(x_i, y_j, t_k)$ ,  $M_{ij}^k = M(x_i, y_j, t_k)$ ,  $\tilde{f}_q^k = f_{ij}^k$ ,  $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$ , ( $p = q, q = (i - 1)(N_2 - 1) + j$ ),  $p = \overline{1, N}, q = \overline{1, N}, i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3}$ . Подставим выражение  $f(x, y, t)$  в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J_k\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\text{mes} D_{ij}^k) f_{ij}^k \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \\ m_{ij}^k &\leq \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k \leq M_{ij}^k, \quad p = \overline{1, N}, \\ i &= \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3}, \\ \tilde{f}_q^k &\geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, N_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (6) решается М-методом (методом искусственного базиса) [14, 15]. Численное решение задачи (2) находится с помощью  $u_{ij}^k = \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k$ . Найденная  $\tilde{f}_q^k$  является функцией, дающей минимум функционалу (1).

**Результаты вычислительных экспериментов.** Для приближенного решения задачи (1)-(6) разработано программное обеспечение на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули.

**Пример 1.** Требуется найти оптимальное размещение источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. В качестве расчётной области используется квадрат  $x, y \in [0, 1]$  с функциями коэффициентом диффузии  $\chi(x, y) = x^2 y^2$  м<sup>2</sup>/с и компонентами скорости  $v(x, y) = xy$  м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями:  $u_0(x, y) = 2 + x^2 + y^2$  м/с,  $\mu_1(y, t) = 2 + y^2 + t^2$  м/с,  $\mu_2(y, t) = 3 + y^2 + t^2$  м/с,  $\mu_3(x, t) = 2 + x^2 + t^2$  м/с,  $\mu_4(x, t) = 3 + x^2 + t^2$  м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями:  $m(x, y, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$  К,  $M(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$  К, а окончание времени  $T = 1$ . Расчётная сетка с числом источников  $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times N_3 = 9 \times 9 \times 10$ . На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум при численном решении значение функционала равен  $J_{\min} = 29.07$  К·м/с. Представлены результаты с минимальным (границы с синим цветом, ниже), максимальным (границы с красным цветом, выше) и приближенным (зеленым цветом, посередине) значениями температуры. На рис. 2 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью.

**Пример 2.** Требуется найти оптимальное размещение источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. Задача решалась при следующих входных данных (рис. 3-4):  $x, y \in [0, 1]$ ,  $\chi(x, y) = xy$  м<sup>2</sup>/с,  $v(x, y) = x^2 y^2$  м/с,  $u_0(x, y) = 2 + x^2 + y^2$  м/с,  $\mu_1(y, t) = 2 + y^2 + t^2$  м/с,  $\mu_2(y, t) = 3 + y^2 + t^2$  м/с,  $\mu_3(x, t) = 2 + x^2 + t^2$  м/с,  $\mu_4(x, t) = 3 + x^2 + t^2$  м/с,  $m(x, y, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$  К,  $M(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$  К,  $T = 1$ ,  $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times N_3 = 9 \times 9 \times 10$ ,  $J_{\min} = 39.72$  К·м/с.

Как видно из рисунков 1 и 3, решение краевой задачи лежит в пределе минимальных и максимальных температур, т.е. удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение  $u(x, y, t)$  практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал  $J_k\{f\}$  достигает минимума.

На рисунках 2 и 4 разными цветами показаны мощности источников тепла минимальной мощности. Красным цветом показаны источники тепла наивысшей мощности. Источники тепла при каждом фиксированном значении времени накладываются друг на друга.

**Заключение**

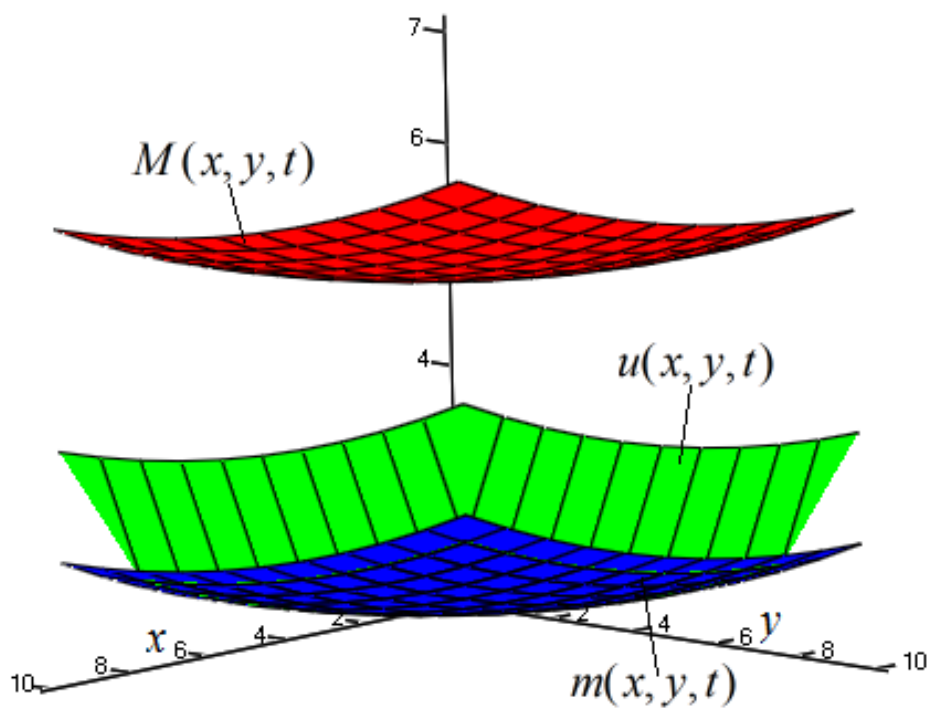


Рис. 1: Графическое отображение решения задачи (6) для примера 1

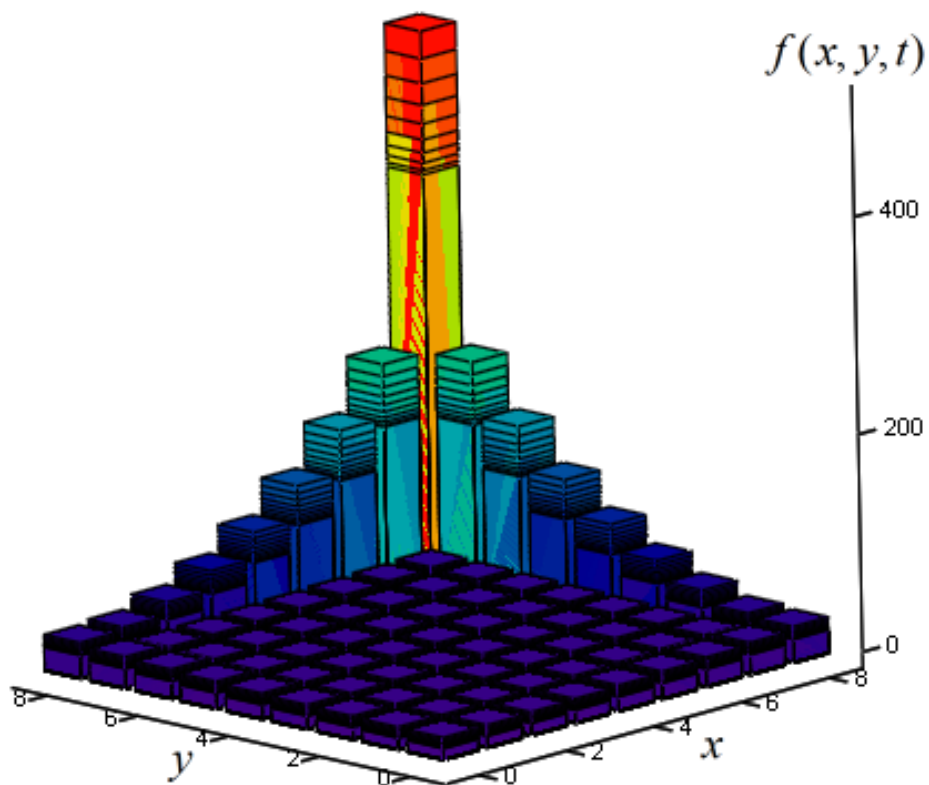


Рис. 2: Оптимальное размещение источников тепла  $f(x, y, t)$

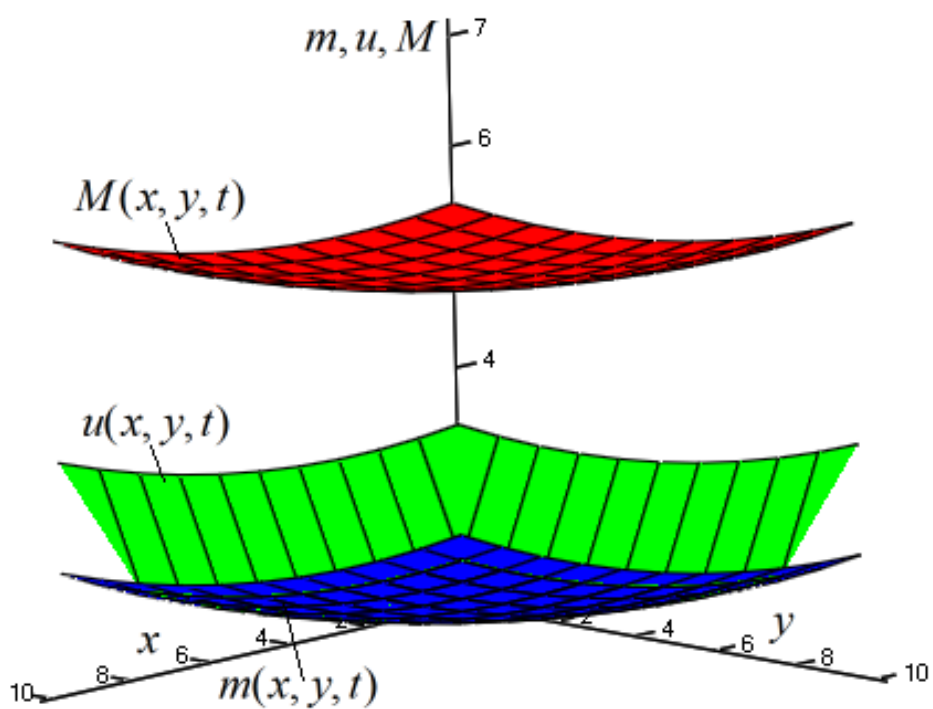


Рис. 3: Графическое отображение решения задачи (6) для примера 2

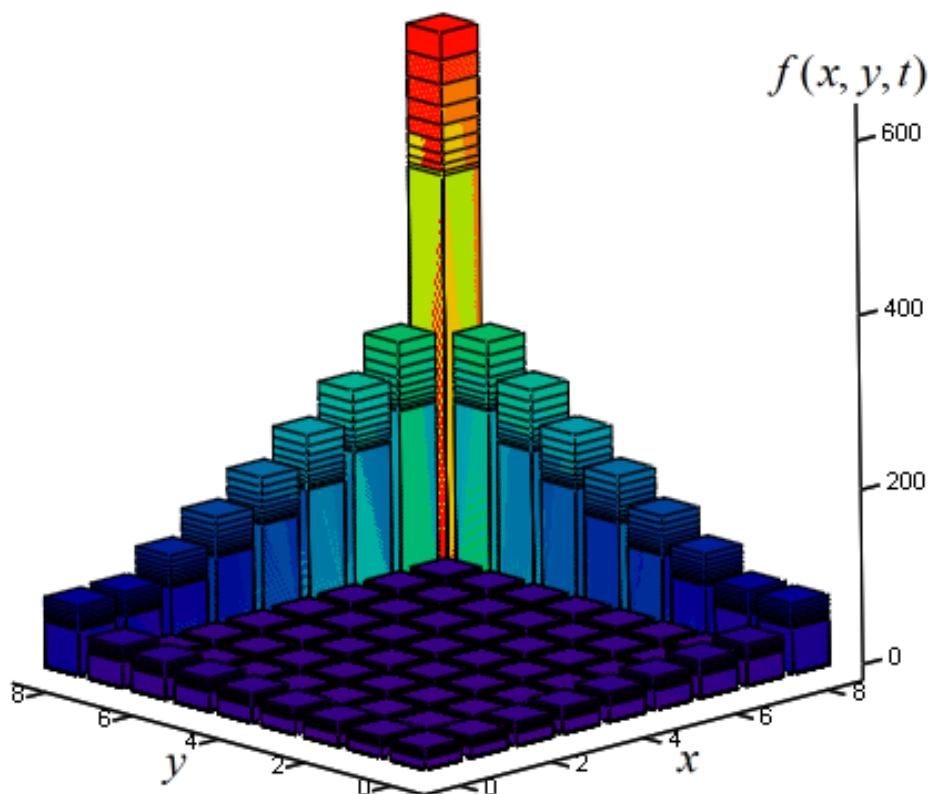


Рис. 4: Оптимальное размещение источников тепла  $f(x, y, t)$

Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного решения задач линейного программирования. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов А. В., Кулибанов В. Н. Задача оптимального выбора координат доразбуривания добывающих скважин на нефтяных месторождениях. Автоматика и телемеханика, 2002, № 11. С. 3–12.
2. Мирская С. Ю., Сидельников В. И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. Техничко-технологические проблемы сервиса, 2014, № 4(30). С. 75–78.
3. Сабденов К. О., Байтасов Т. М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов, 2015, Т. 326, № 8. С. 53–60.
4. Исламов Г.Г., Коган Ю. В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2008, вып. 1. С. 121–126.
5. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управлении процессом теплопроводности квадратичным функционалом качества. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, Т. 57, № 12. С. 2053–2064.
6. Хайиткулов Б. Х. Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2021, № 57. С. 45–52.
7. Khaitkulov B. Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. Solid State Technology, 2020, vol. 63, no 17. P. 583–592.
8. Хайиткулов Б. Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3. С. 85–98.
9. Тухтасинов М. Т., Абдуолимова Г. М., Хайиткулов Б. Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. Бюллетень Института математики, 2019, № 1. С. 1–10.
10. Лебо И. Г., Симаков А. И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. Вестник МГТУ МИРЭА, 2014, № 3(4). С. 195–205.
11. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, Т. 38, № 2. С. 207–219.
12. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва : ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
13. Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции. Сибирский журнал вычислительной математики, 2012, Т. 15, № 4. С. 359–369.
14. Dantzig G. B. Linear programming and extensions. Princeton : Princeton University Press, 2016. 656 p.
15. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 3-е изд. Москва : Финансы и статистика, 2009. 640 с.

## REZYUME

Ushbu ish minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirishning nostatsionar masalasini sonli yechishga bag'ishlangan. Masalaning qo'yilishi bir vaqtning o'zida ikkita shartning bajarilishini talab qiladi. Birinchi shart to'g'ri to'rtburchakka minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirish orqali temperaturani minimal va maksimal temperaturalar oralig'ida bo'lishini ta'minlashdan iborat. Ikkinchi shart isitish uchun sarflangan issiqlik manbalarining umumiy quvvati minimal bo'lishini ta'minlashdan iborat. Statsionar holda ushbu masala boshqa olimlarning ishlarida o'rganilgan. Nostatsionar holda esa qaralmagan. Chegaraviy masala yechimini uzluksiz holda topish qiyin bo'lgani uchun masalaning sonli yechimini qidiramiz. Uzluksiz yadroli (Grin funksiyasi) integral teskari operatorni topish qiyin. Grin funksiyaning sonli qiymatini matritsa ko'rinishida topamiz. Parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanuvchi jarayonlarda minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini sonli yechishning yangi algoritmi taklif qilingan. Boshqacha qilib aytganda yangicha sonli yechish metodikasi taklif qilingan. Birinchi chegaraviy masala uchun berilgan konveksiya-diffuziya tenglamasi orqali tavsiflanuvchi jarayonlarning matematik va sonli modeli qurilgan. Chegaraviy masala ikki o'lchovli hol uchun o'rganilgan. Masalani sonli yechishda oshkormas chekli ayirmali sxemadan foydalanilgan. Ushbu sxema yordamida ayirmali tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Hosil qilingan ayirmali tenglamalar sistemasi chiziqli programmalash masalasiga keltirilgan. Chiziqli programmalash masalasi M-metoddan foydalanib yechilgan. Vaqtning har bir qiymatida chiziqli programmalash masalasi yechiladi. Masalani sonli yechishning yangicha yondashuvi taklif qilingan. Minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini yechish algoritmining umumiy blok-sxemasi keltirilgan. Qo'yilgan masalani sonli yechish uchun algoritm va dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan. Dasturiy ta'minotning qisqacha tavsifi keltirilgan. Chegaraviy masalaning sonli yechimi berilgan oraliqlarda yotishi, optimal joylashtirilgan minimal quvvatli issiqlik manbalarining yig'indisi funksionalga minimum berishi konkret misollarda ko'rsatilgan. Hisoblash eksperimentining natijalari vizuallashtirilgan.

**Kalit so'zlar:** nostatsionar masala, optimal joylashtirish, issiqlik manbalari, konveksiya-diffuziya tenglamalari, M-metod.

## RESUME

This work is devoted to the numerical solution of the non-stationary problem of optimal placement of heat sources of minimum power. The statement of the problem requires the simultaneous fulfillment of two conditions. The first condition is to ensure that the temperature is within the limits of minimum and maximum temperatures due to the optimal placement of heat sources with a minimum power in the rectangle. The second condition is that the total power of the heat sources used for heating is minimal. This problem was studied under stationary conditions in the works of other scientists. However, the problem was not considered in the non-stationary case. Since it is difficult to find a continuous solution to the boundary value problem, we are looking for a numerical solution to the problem. It is difficult to find an integral operator with a continuous kernel (Green's function). The numerical value of the Green's function is found in the form of a matrix. A new algorithm for the numerical solution of a non-stationary optimal control problem for the placement of heat sources with a minimum power in processes described by parabolic partial differential equations is proposed. A new technique for numerical solution is proposed. A mathematical and numerical model of the processes described by the convection-diffusion equation given for the first boundary value problem is constructed. The boundary value problem is studied for the two-dimensional case. An implicit finite difference scheme was used to solve the problem numerically. According to this scheme, a system of difference equations was created. The formed system of difference equations is reduced to a linear programming problem. The problem of linear programming is solved using the M-method. For each time value, a linear programming problem is solved. A new approach to the numerical solution of problems is proposed. A general block diagram of the algorithm for solving the non-stationary problem of optimal control of the placement of heat sources with a minimum power is given. An algorithm and software for the numerical solution of the problem have been developed. A brief description of the software is given. On specific examples, it is shown that the numerical solution of the boundary value problem is within the specified limits, the sum of optimally placed heat

sources with a minimum power gives a minimum to the functional. The results of the computational experiment are visualized.

**Key words:** non-stationary problems, optimal placement, heat sources, convection-diffusion equations, big M-method.