УДК 517.956.6

Об однозначной разрешимости регулярного решения уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями периодического типа

Халхаджаев Б. Б.
Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина в городе Ташкенте, Ташкентский институт менеджмента и экономики, Узбекистан
xalxadjaev@timeedu.uz

РЕЗЮМЕ

В статье исследуется однозначная разрешимость регулярного обобщенного решения нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева. С использованием модифицированного метода Галеркина, априорных оценок и "ε-регуляризации" доказываются существование и единственность регулярного обобщенного решения. Для доказательства корректности задачи сначала рассматривается вспомогательная задача с уравнением пятого порядка с малым параметром, для которой устанавливаются необходимые априорные оценки. Полученные результаты основываются на применении метода интегралов энергии и теоремы о слабой компактности, что позволяет обосновать сходимость решений при переходе к пределу. Работа опирается на результаты исследований В.Н. Врагова, И.Е. Егорова и С.З. Джамалова, посвященных уравнениям смешанного типа второго и высокого порядков с локальными и нелокальными краевыми условиями.

Ключевые слова: Единственность, разрешимость, регулярное обобщенное решение, уравнение смешанного типа четвертого порядка, нелокальная краевая задача периодического типа, пространство Соболева, регулярное решение, уравнение пятого порядка с малым параметром, метод интегралов энергии, метод Фаэдо–Галеркина, метод априорных оценок, метод "ε-регуляризации".

1. Введение и постановки задачи.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго порядка некорректна [2]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа второго порядка были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [13]. Близкая по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка исследованы в ограниченных областях в работах [6-9],[14]. Нелокальные краевые задачи для уравнения в частных производных высокого порядка без вырождения исследованы многими учеными, полная библиография приведена в работах [11,18,19] а для уравнения смешанного типа высокого порядка с локальными краевыми условиями в различных пространствах исследованы в работах [4,5,10,17], с нелокальными краевыми условиями такие задачи очень мало исследовны [10,20,21]. В данной работе с использованием результатов работ [4,5,9] и с применением модифицированного метода Галеркина, априорных оценок, и "ε-регуляризации" изучается однозначная разрешимость регулярного обобщенного решения одной нелакальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t); 0 < x < 1;\ 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t) \tag{1}$$

Здесь

$$Pu = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u, \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}.$$

где $K_4(x,t) = K_4(t)$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$,
Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены следующее условия:

$$K_4(t) \in C^3(0,T) \cap C[0,T];\ K_i(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q}); a, b, c - consts > 0.$$

$K_4(0) = K_4(T) = 0;\ D_t^p K_4|_{t=0} = D_t^p K_4|_{t=T}, (p = 1,2);\ K_i(x,0) = K_i(x,T); i = 0,1,2,3,$ для всех $x \in [0,1]$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [3,9].

Нелокальные краевые условие периодического типа: найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^q\, u|_{t=0} = D_t^q\, u|_{t=T};\ \ q = 0,1,2 \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p\, u|_{x=1};\ \ p = 0,1,2,3 \tag{3}$$

где γ величина отличное от нуля, которое будет уточнено ниже.

В дальнейшем нам необходимы следующее определение и вспомогательные предложения.

Пусть $\overrightarrow{e}(e_t, e_x); (e_t = \cos(\overrightarrow{e}, t), e_x = \cos(\overrightarrow{e}, x))-$единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q. При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ [12],то есть

$$\forall u, \vartheta \geq 0;\ \forall \sigma > 0; \quad 2u \cdot \vartheta \leq \sigma u^2 + \sigma^{-1}\vartheta^2.$$

Определение 1. *Назовем функцию $u(x,t)$ регулярным решением задачи (1) — (3), если $u \in W_2^4(Q)$ удовлетворяет уравнения (1) и краевые условие (2),(3) почти всюду в области Q.*

Теорема 1. *Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x,t)$ – положительная и достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1):*

$-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0,\ 2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0,\ \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0,$

для любых $(x,t) \in \overline{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, для всех $x \in [0,1]$. Тогда для любого $f(x,t) \in L_2(Q)$, если существует регулярное решение $u(x,t)$ задачи (1) — (3) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, то оно единственно и для нее справедлива следующая априорная оценка:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\,\|f\|_0^2 \tag{4}$$

Далее через c обозначим различные положительные постоянные.

Доказательство. Единственность решения задачи (1) — (3) докажем с помощью метода интегралов энергии. Пусть существует регулярное обобщенное решение задачи (1) — (3) $u(x,t)$ из пространства Соболева $W\,_2^4(Q)$. Рассмотрим следующее тождество

$$2\int_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_t\ dxdt = 2\int_Q f \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_t\ dxdt \tag{5}$$

В силу условий теоремы 1 и неравенства Коши с σ [12], и из краевых условий (2),(3) интегрированием тождества (5) легко получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} 2\int_Q e^{-\lambda t} Lu \cdot u_t\, dx\, dt \geq \int_Q e^{-\lambda t}\Big\{ &-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4)\, u_{tt}^2 + \lambda a\, u_{xx}^2 + \lambda b\, u_{xt}^2 + \lambda c\, u_x^2 \\ &+ (2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2) u_t^2 + (\lambda K_0 - K_{0t}) u^2 \Big\} dx\, dt - 2\sigma \|u_{tt}\|_0^2 - 4\lambda^4 K \sigma^{-1} \|u_t\|_0^2 \\ &+ \int_{\partial Q} e^{-\lambda t}\Big\{ 2K_4 u_{ttt} u_t - 2(K_{4t} - \lambda K_4) u_{tt} u_t - K_4 u_{tt}^2 + 2K_3 u_{tt} u_t + 2K_2 u_t^2 - K_0 u^2 \\ &+ a u_{xx}^2 + b u_{xt}^2 + c u_x^2 \Big\} e_t\, ds + \int_{\partial Q} e^{-\lambda t}\Big\{ 2a u_{xxx} u_t - a u_{xx} u_{tx} - 2b u_{xxt} u_t - 2c u_x u_t \Big\} e_x\, ds \end{aligned} \tag{6}$$

где через $K = \max\left\{\|K_4\|^2{}_{C^2(Q)},\ \|K_3\|^2{}_{C^1(Q)}\right\}$.
Условия теоремы 1 обеспечивают не отрицательность интеграла по области Q и обращение нуль граничных интегралов. Отсюда из неравенства (6) получим

$$2\int_Q Lu\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t\,dx\,dt \geq \int_Q e^{-\lambda t}\left\{\delta_3\,u_{tt}^2+\lambda a\,u_{xx}^2+\lambda b\,u_{xt}^2+\delta_2\,u_t^2+\lambda c\,u_x^2+\delta_1\,u^2\right\}dx\,dt \\ -2\sigma\,\|u_{tt}\|_0^2-4\lambda^4\sigma^{-1}K\,\|u_t\|_0^2 \tag{7}$$

Выбираем в неравенстве (7) постоянные числа δ_3 и δ_2 такие, что

$$\delta_3-2\sigma\geq\delta_{03}>0,\qquad \delta_2-4\lambda^4\sigma^{-1}K\geq\delta_{02}>0.$$

Обозначив

$$\delta=\min\left\{\delta_{03},\,\lambda a,\,\lambda b,\,\lambda c,\,\delta_{02},\,\delta_1\right\},$$

получим из неравенства (7) первую априорную оценку для решения задачи (1)–(3):

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)}\leq c\,\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Теперь докажем единственность регулярного решения задачи (1)–(3).

Докажем эту теорему методом от противного: пусть задача (1)–(3) имеет два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда функция разности $\vartheta(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с условиями (2), (3). Для нее справедлива первая априорная оценка $\|\vartheta\|_2^2\leq 0$. Отсюда следует единственность регулярного решения задачи $u_1(x,t)=u_2(x,t)$.

Теперь докажем разрешимость регулярного решения задачи (1)–(3).

2. Уравнение пятого порядка с малым параметром (вспомогательная задача).

Разрешимость задачи (1)–(3) докажем методом "ε-регуляризации" в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок. А именно, в области
$Q=(0,1)\times(0,T)$ рассмотрим семейство уравнений пятого порядка с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=-\varepsilon\frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t}+Lu_\varepsilon=f(x,t), \tag{8}$$

с нелокальными краевыми условиями периодического типа:

$$\gamma D_t^q\,u_\varepsilon|_{t=0}=D_t^q\,u_\varepsilon|_{t=T}\,;\ \ q=0,1,2,3,4 \tag{9}$$

$$D_x^p u_\varepsilon|_{x=0}=D_x^p u_\varepsilon|_{x=1}\,;\ p=0,1,2,3 \tag{10}$$

где $\varepsilon-$ малое положительное число, $D_z^q w=\frac{\partial^q w}{\partial z^q},\ q=1,2,3,4,5;\ D^0_z w=w$;
$\Delta^2 u=(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 u=(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})-$ бигармонический оператор.
Ниже используем уравнение пятого порядка с малым параметром (8) в качестве "ε-регуляризирующего" уравнения для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка (1) [3-9].

Через $V(Q)$ ниже будем обозначать пространсво функций таких, что $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^4(Q)$, $\frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t}\in L_2(Q)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (9),(10).

Определение 2. *Назовем функцию $u_\varepsilon(x,t)$ регулярным решением задачи (8)–(10), если $u_\varepsilon\in V(Q)$ и удовлетворяет уравнению (8) почти всюду в области Q.*

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, $K_3(x,t)$ – положительная достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (8):*

$$-(2K_3+3|K_{4t}|+3\lambda K_4)\geq\delta>0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)\in W_2^1(Q)$, такой что $\gamma f(x,0)=f(x,T)$, существует единственное регулярное решение $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (8)–(10) из пространства $V(Q)$, и для нее справедливы следующие оценки:

I) $\varepsilon \cdot \left(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2 \right) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_1 \|f\|_0^2$.

II) $\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \le c_2 \|f\|_1^2$.

Доказательство. Доказательство неравенства I) проводится так же, как и первой априорной оценки теоремы 1, из которого следует и единственность регулярного решения задачи (8)–(10) (см. [4, 5, 9]).

Приведем доказательство первой априорной оценки.

Пусть $\phi_j(x,t) \in W_2^4(Q)$ – собственные функции следующей задачи:

$$-\Delta^2 \phi_j = -\left(\frac{\partial^4 \phi_j}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^4} \right) = \mu_j^4 \phi_j. \tag{11}$$

$$D_t^p \phi_j|_{t=0} = D_t^p \phi_j|_{t=T}; \quad p = 0,1,2,3 \tag{12}$$

$$D_x^p \varphi_j|_{x=0} = D_x^p \varphi_j|_{x=1}; \; p = 0,1,2,3 \tag{13}$$

Из общей теории [1,12,16] линейных самосопряженных эллиптических операторов известно, что все собственные функции задачи (11)–(13) принадлежат пространству $W_2^4(Q)$ и образуют полную ортонормированную систему в $L_2(Q)$.

Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи:

$$P\omega_j \equiv \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{14}$$

$$\gamma \cdot \omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{15}$$

где $\gamma = \text{const} \ne 0$, причём $|\gamma| > 1$.

Очевидно, что задача (14), (15) однозначно разрешима, и ее решение имеет вид:

$$P^{-1}\phi_j = \omega_j = \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda \tau}{2}\right) \phi_j(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \phi_j(t)\, dt.$$

Функции $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{j=1}^N c_j \omega_j = 0$ для некоторого набора c_j, то, применяя оператор P, получим: $\sum_{j=1}^N c_j P\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j = 0$. Так как $\{\phi_j\}$ образуют полную систему, то $c_j = 0$ для всех $j = \overline{1,N}$.

Из построения функций $\phi_j(x,t)$ следуют условия на $\omega_j(x,t)$:

$$\gamma \cdot D_t^q \omega_j(x,0) = D_t^q \omega_j(x,T); \quad q = 0,1,2,3,4. \tag{16}$$

$$D_x^p \omega_j|_{x=0} = D_x^p \omega_j|_{x=1}; \; p = 0,1,2,3 \tag{17}$$

Теперь приближенное решение задачи (8)–(10) ищем в виде $w(x,t) = u_\varepsilon^N(x,t) = \sum_{j=1}^N c_j \omega_j(x,t)$, где коэффициенты c_jдля любогоj от 1 до N определяются как решение линейной алгебраической системы

$$2\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp(\; -\frac{\lambda\, t}{2})\, \phi_j dx dt \quad = \quad 2\int_Q f \cdot \exp(\; -\frac{\lambda\, t}{2})\; \phi_j dx dt. \tag{18}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (18). Умножая каждое уравнение из (18) на c_jи суммируя по j от 1 до N, учитывая краевые условия (16)–(17) и алгебраическую систему (18), получим тождество

$$2\int_Q L_\varepsilon w \cdot \exp(-\lambda\, t)\, w_t dx dt = 2\int_Q f \cdot \exp(-\lambda\, t)\, w_t dx dt, \tag{19}$$

из которого, в силу условия теоремы 2, интегрированием тождества (19) получим оценку I) для приближенного решения задачи (8)–(10), т.е.

$$\varepsilon \cdot (\left\|u_{\varepsilon ttt}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon ttx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon txx}^N\right\|_0^2) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_2^2 \le c_1 \| f \|_0^2 \tag{20}$$

Отсюда вытекает разрешимость алгебраической системы (18) [9],[12]. Оценка (20) позволяют, в силу теоремы 1 и теоремы о слабой компактности [12,16] выполнить предельный переход по $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\}$ сходится слабо, в силу единственности решения (теорема 1), в пространстве $V(Q)$ к искомому решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (8)–(10), обладающему свойствами, указанными в теореме 2 [9,12,16]. Для $u_\varepsilon(x,t)$, в силу (20) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \cdot (\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_1 \| f \|_0^2 \tag{21}$$

Отсюда получим единственность регулярного обобщенного решения задачи (8)-(10).

Докажем вторую априорную оценку II).

Используя задачу (11)–(15), из тождества (18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2}\int_D L_\varepsilon w \cdot \exp(-\frac{\lambda\, t}{2})\, \Delta^2 P\omega_j\, dxdt \;=\; -\frac{1}{\mu_j^2}\int_D f \cdot \exp(-\frac{\lambda\, t}{2})\, \Delta^2 P\omega_j\, dxdt\,. \tag{22}$$

Умножая каждое уравнение (22) на $2\mu_j^2 c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая условия (16)–(17), из (22) получим следующее тождество:

$$\int_Q (L_\varepsilon w - f)\cdot e^{-\lambda t}\, Pw\, dx\, dt = 0, \tag{23}$$

где

$$Pw \equiv \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w + 3\lambda^2 \frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{\lambda}{2} w_{tt} + \frac{\lambda^2}{16} w_t.$$

Интегрируя (23), с учетом условий теоремы 2 и краевых условий (16), (17), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} c_2\left(\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\right) &\geq \varepsilon \left\|\frac{\partial \Delta^2 w}{\partial t}\right\|_0^2 \\ &+ \int_Q e^{-\lambda t}\Big\{ -(2K_3 + 3K_{4t} + 3\lambda K_4)\, w_{tttt}^2 - (2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4)\, w_{ttxx}^2 \\ &+ 2(2K_3 + 3K_{4t} + 3\lambda K_4)\, w_{tttx}^2 + \lambda a\, w_{xxxx}^2 + \lambda b\, w_{xxtt}^2 + \lambda a\, w_{xxxt}^2 \Big\}\, dx\, dt \\ &+ \rho\|w\|_3^2 - N_1\sigma\left(\|w_{tttt}\|_0^2 + \|w_{ttxx}\|_0^2 + \|w_{tttx}\|_0^2\right) - N_2\sigma\left(\|w_{xxxx}\|_0^2 + \|w_{ttxx}\|_0^2\right. \\ &\left.+ \|w_{txxx}\|_0^2\right) - c(\sigma^{-1},\lambda,K)\|w\|_3^2 + \int_{\partial Q} e^{-\lambda s} B(u(s),K_i(s))\, ds, \quad i=\overline{0,4}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь: ρ – положительная константа, зависящая от нормы функций $K_i(x,t)$ в $C^3(\overline{Q})$; $K = \max\left\{\|K_4(t)\|_{C^3[0,T]},\, \|K_i(x,t)\|_{C^2(\overline{Q})}\right\}$; N_i – натуральные числа, $N = \max\{N_1, N_2\}$; σ, $c(\sigma^{-1})$ – коэффициенты из неравенства Коши; $B(u(s),K_i(s))$ – функции, зависящие от следов функции $u(x,t)$ и коэффициентов $K_i(x,t)$ на границе области Q. Пусть $\delta_0 = \min\{\delta,\, \lambda a,\, \lambda b,\, \lambda c,\, \delta_3,\, \delta_2,\, \delta_1\}$. Учитывая условие теоремы 2, краевые условия (16)–(17) и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$ граничные интегралы в (24) обращаются в нуль. Выбирая σ так, чтобы $\delta_0 - N\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $\quad \rho - c(\sigma^{-1},\lambda,K) \geq \rho_0 > 0$, из неравенства (24) получаем необходимую вторую априорную оценку.

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t}\right\|_0^2 + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_4^2 \quad \leq\; c_2 \cdot \Big(\| f \|_0^2 + \| f_t \|_0^2 \Big) \leq c_2 \|f\|_1^2\,. \tag{25}$$

Постоянная в правой части (24) не зависит от N, следовательно, из (25) вытекает вторая априорная оценка для приближенного решения задачи (8)-(10). Оценка (21) вместе с оценкой (25), а также теорема о слабой компактности позволяют выполнить предельный переход при $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\}$сходится слабо, в силу единственности решения задачи (8)-(10), в

$V(Q)$ вместе с производными четвертого и пятого порядков к искомому решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (8)-(10), обладающему свойствами, указанными в теореме 2 [9,12,16]. По этому для $u_\varepsilon(x,t)$ в силу (25) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \le c_2 \cdot \Big(\| f \|_0^2 + \| f_t \|_0^2 \Big) \le c_2 \| f \|_1^2 . \tag{26}$$

Используя теорему о слабой компактности и вторую априорную оценку, следует существование регулярного обобщенного решения $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (8)-(10) из пространства $V(Q)$. Тем самым доказана теорема 2.

3. Существование решения задачи (1)–(3).

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^4(Q)$ существует и единственно.*

Доказательство. Единственность решения задачи (1)–(3) в пространстве $W_2^4(Q)$ доказана в теореме 1. Докажем теперь существование решения. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (8) и краевые условия (9)–(10) при $\varepsilon > 0$.

Так как выполнены все условия теоремы 2, то существует единственное регулярное решение задачи (8)–(10) при $\varepsilon > 0$ из пространства $V(Q)$, и для него справедливы первая и вторая априорные оценки. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon(x,t)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность в $V(Q)$, такую что

$$\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\} \rightharpoonup u(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon_i \to 0.$$

Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ (уравнение (1)) почти всюду в Q. Действительно, поскольку $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W_2^4(Q)$, а последовательность

$$\left\{ \sqrt{\varepsilon_i} \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}(x,t)}{\partial t} \right\}$$

равномерно ограничена в $L_2(Q)$, и при этом оператор L линейный, то имеем:

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{27}$$

Переходя к пределу в равенстве (27) при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное регулярное решение задачи (1)-(3) [3-5],[9]. Таким образом, Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122, №4, с. 167–170.

3. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

4. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978, с. 5–13.

5. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995, 133 с.

6. Глазатов С.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, №6, с. 162–164.

7. Джамалов С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2017. No 4, с. 17–28.

8. Джамалов С.З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве // Журнал Средневолжского мат. общества. 2019. Т. 21, №1, с. 24–33.

9. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент, 173 с.

10. Джамалов С.З., Пятков С.Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка // Сиб. мат. журнал. 2020. Т. 61, №4, с. 777–795.

11. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. Москва: Наука, 1980.

12. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973, 407 с.

13. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва: Наука, 1973, 711 с.

14. Каратопраклиева М.Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №1, с. 68–79.

15. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.

16. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 494 с.

17. Чуешев А.В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, №2, с. 454–472.

18. Amanov D., Kilichov O. Nonlocal boundary value problem for a fourth order differential equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, V. 43, Issue-2, P. 293–302.

19. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Boundary value problem for fourth order inhomogeneous equation with variable coefficients, Journal of Mathematical Sciences, 2024, V. 284, Issue-2, P. 153–165.

20. Dzhamalov S.Z., Sipatdinova B.K. Semi-nonlocal boundary problem for a three-dimensional second kind mixed equation in a unbounded parallelepiped, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, V. 44, №3, P. 1137–1144.

21. Fayazov K., Khajiev I. A nonlocal boundary-value problem for a fourth-order mixed-type equation. Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 248, Issue-2, P. 166–174.

ANNOTATSIYA

Maqolada Sobolev fazosida aralash tipdagi ikkinchi tur to'rtinchi tartibli tenglama uchun nolokal periodik chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi uchun mavjudlik va yagonalik isbotlangan. Modifikatsiyalangan Galerkin usuli, aprior baholash va "ε-regulyarizatsiya" usullari yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligi ko'rsatiladi. Kichik parametrli beshinchi tartibli yordamchi tenglama ko'rib chiqiladi va ushbu yordamchi masala uchun ham aprior baholar olinadi. Olingan natijalar integral energiya usuli va kuchsiz kompaktlik xossasi asosida yechimlarning chegaralangan holatda yaqinlashishini asoslash imkonini beradi. Tadqiqot ishi V.N.Vragov, I.Ye.Yegorov va S.Z. Djamalovlarning aralash tipdagi tenglamalar va nolokal chegaraviy masalalarga oid tadqiqotlari asosida olib borilgan.

Kalit so'zlar: Yagonalik, mavjudlik, regulyar umumlashtirilgan yechim, integral energiya usuli, aralash tipdagi tenglama, nolokal chegaraviy masala, Faedo-Galerkin usuli, aprior baholash usuli, "ε-regulyarizatsiya" usuli, Sobolev fazosi, regulyar yechim, beshinchi tartibli tenglama.

ABSTRACT

This paper investigates the unique solvability of a regular generalized solution to a periodic-type nonlocal boundary value problem for a fourth order mixed-type equations of the second kind in a Sobolev space. Using the modified Galerkin method, a priori estimates, and the "ε-regularization" method, the existence and uniqueness of the solution are proven. An auxiliary fifth-order equation with a small parameter is considered, for which a priori estimates are also established.

The results are based on the application of the energy integral method and the concept of weak compactness, which provides justification for the convergence of solutions under the limiting transition. The study is grounded in the works of V.N. Vragov, I.E. Egorov, S.Z. Dzhamalov, and other researchers devoted to mixed-type equations and nonlocal boundary problems.

Keywords: Uniqueness, solvability, regular generalized solution, energy integral method, mixed-type equation, nonlocal boundary value problem, Faedo-Galerkin method, a priori estimates, "ε-regularization" method, Sobolev space, regular solution, fifth-order equation.