

УДК 517

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Элмурадова Х. Б.

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, БУХАРА

h.b.elmurodova@buxdu.uz

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается линейная обратная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения. Доказаны теоремы существования и единственности решения этой обратной задачи. Рассматриваемая задача состоит в восстановлении интегрального ядра, зависящего от времени t , под знаком интеграла. Она относится к области математической физики и является важным примером обратной задачи для уравнения теплопроводности. В качестве прямой задачи изучается задача Коши для псевдопараболического уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, уравнение Вольтерры, интегро-дифференциальное уравнение, однородное уравнение.

Во многих прикладных задачах возникает необходимость восстановления коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по частичной информации о его решении. Подобные постановки относятся к обратным задачам математической физики, которые в настоящее время представляют собой один из наиболее активно развивающихся разделов прикладной математики [1]. Современное состояние теории обратных задач, методы их решения, а также обширная библиография по данной тематике представлены в ряде фундаментальных монографий, в том числе работах А. Л. Бухгейма [2], С.И.Кабанихина [3], М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, С.П. Шишатский [4], Ю.Я.Белова [7] и Б.С.Аблабекова [10]. Следует отметить, что теория обратных задач для псевдопараболических уравнений развита существенно слабее по сравнению с аналогичной теорией для классических дифференциальных уравнений второго порядка. Это обусловлено тем, что изучение обратных задач невозможно без глубокой проработки соответствующих прямых задач. Однако теория прямых задач для псевдопараболических уравнений пока ещё находится на стадии становления и далека от завершения. Тем не менее, теория обратных задач для псевдопараболических уравнений в настоящее время развита в меньшей степени по сравнению с теорией для классических уравнений второго порядка, широко применяемых в математической физике. Это объясняется, в первую очередь, тем, что успешное решение обратной задачи предполагает глубокое понимание и проработку соответствующей прямой задачи. Однако теория прямых задач для псевдопараболических уравнений пока остаётся на стадии формирования и далека от завершения. Следует подчеркнуть, что псевдопараболические уравнения описывают широкий спектр сложных динамических процессов в различных областях науки и техники. В частности, к таким уравнениям относится, например, уравнение следующего вида [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

описывает процесс капиллярных, где u -влажность в долях единицы, x -глубина, t -время, $D(u)$ -коэффициент диффузивности и A - варьируемый коэффициент. Целью данной работы является доказательство теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения ядра в псевдопараболическом интегро-дифференциальном уравнении третьего порядка с переопределением во внутренней точке. Исследование состоит из двух этапов. На первом этапе обратная задача редуцируется к интегральному уравнению типа Вольтерра на основе предварительно полученных результатов по прямым задачам. На втором этапе формулируется и доказывается теорема о существовании и единственности решения данной обратной задачи. Рассмотрим в области $Q_T := \{(x, t) : x \in R, \quad t \in (0, T]\}$ псевдопараболическое интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)(u_{xxt} + u_{xx})(x, \tau) d\tau. \quad (1)$$

Введем необходимые обозначения и пространства. Обозначим через $C_b(\bar{Q}_T)$ -банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\bar{Q}_T$ функций с нормой $\|v\|_{C_b} = \sup_{(x,t) \in \bar{Q}_T} |v(x,t)|$; $C_b^{(n,m)}$ -пространство функций $v(x,t)$ таких, что $\frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial t^j} \in C_b$ для $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ с нормой:

$$\|v\|_{C_b^{n,m}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\| \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial t^j} \right\|_{C_b}$$

Задача Коши: Найти функцию $u(x,t) \in C_b^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1) и начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Обратная задача. Необходимо определить ядро $k(t)$, $t \in [0, T]$, при условии, что решение задачи Коши, заданной уравнениями (1), (2), известно в фиксированной точке $x_0 \in R$:

$$u(x_0, t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Уравнение (1) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно выражения $u_{xxt} + u_{xx}$. Поэтому мы преобразуем это уравнение так, чтобы под знаком интеграла не содержалось выражение $u_{xxt} + u_{xx}$. Нетрудно проверить прямыми вычислениями, что уравнение (1) эквивалентно следующему виду [11]:

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} = r(0)u - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t-\tau)u(x, \tau) d\tau, \quad (4)$$

где

$$r(t) = k(t) + \int_0^t k(t-\tau)r(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (6)$$

где через $f(x,t)$ обозначена правая часть уравнения (4). Положим $v = u_t + u$. Тогда уравнение (6) имеет вид

$$Lv \equiv -v_{xx} + v = u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \quad (7)$$

Известно, что фундаментальное решение оператора L имеет вид [9]:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\delta(t)}{2} e^{-|x|}.$$

Если существует свертка $\varepsilon * [u + f]$, то решение уравнения (7) задается формулой

$$u_t + u = \int_R \varepsilon(x-\xi)[u(\xi,t) + f(\xi,t)] d\xi. \quad (8)$$

Следовательно, задача (4), (2) сводится к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения (8) с начальным условием (2), причем ее решение эквивалентно решению соответствующего интегрального уравнения

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)] d\xi$$

или

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi,\tau) + r(0)u(\xi,\tau)] d\xi$$

$$-u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi. \quad (9)$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к интегральному уравнению, решение которого естественно рассматривать в классе ограниченных непрерывных функций $u \in C_b(Q_T)$.

Лемма 1. Пусть $r(t) \in C^1[0, T]$, $u_0(x) \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда интегральное уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (2) и принадлежащее пространству $C_b(\overline{Q})$.

Доказательство. Для этого используем метод последовательных приближений, представив $u(x, t)$ в виде следующего ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t), \quad (10)$$

где $u_n(x, t)$. Для $n \geq 1$ используется следующая формула

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(r(0) + 1)u_{n-1}(\xi, \tau) \\ & + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u_{n-1}(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_0(x, t) = e^{-t}u_0(\xi) - \frac{1}{2} \int_0^t r(\tau)d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)}u_0(\xi)d\xi. \quad (12)$$

Обозначим $V_n(t) = \sup_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_n(x, t)|$, $r_0 = \max_{t \in [0, T]} |r(t)|$, $0 \leq t \leq T$. Тогда из (12), имеем

$$V_0(t) = \sup_{x \in R} |u_0(x, t)| \leq M e^{-t} + r_0 M T (1 - e^{-t}), \quad (13)$$

Далее,

$$V_n(t) = \sup_{x \in R} |u_n(x, t)| \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} V_{n-1}(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

где $M = \sup_{x \in R} |u_0(x)|$, $r_{00} := \|r\|_{C^1[0, T]} + T + 1$.

Здесь используется известное равенство: $\frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} d\xi = 1$. Последовательно применяя оценку (14) при $n = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} |V_1(t)| & \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} V_0(\tau) d\tau \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} (M e^{-\tau} + M r_0 (1 - e^{-\tau})) d\tau \\ & = r_{00} M \int_0^t e^{-t} d\tau + r_{00} M r_0 \int_0^t e^{-t} d\tau - M r_0 r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau \\ & = r_{00} M e^{-t} \tau \Big|_0^t + r_{00} M r_0 e^{-t} \tau \Big|_0^t - M r_0 r_{00} e^{\tau-t} \Big|_0^t = r_{00} M e^{-t} t + r_0 r_{00} M t e^{-t} \\ & \quad - M r_0 r_{00} (1 - e^{-t}) = M r_{00} t e^{-t} + N t e^{-t} + N (1 - e^{-t}), \\ |V_2(t)| & \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} V_1(\tau) d\tau \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [M r_{00} \tau e^{-\tau} + N \tau e^{-\tau} \\ & \quad + N (1 - e^{-\tau})] d\tau = r_{00} \left[\int_0^t r_{00} e^{-t} M \tau d\tau + \int_0^t e^{-t} N \tau d\tau - \int_0^t e^{-(t-\tau)} N d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t N e^{-t} d\tau \right] = r_{00} \left[M r_{00} \frac{\tau^2}{2} e^{-t} \Big|_0^t + N \frac{\tau^2}{2} e^{-t} \Big|_0^t + N e^{-t} \tau \Big|_0^t - N e^{\tau-t} \Big|_0^t \right] \\ & = r_{00} \left[M r_{00} \frac{t^2}{2} e^{-t} + N \frac{t^2}{2} e^{-t} + N e^{-t} t + N e^{-t} t - N (1 - e^{-t}) \right] \end{aligned}$$

$$\leq Mr_{00}^2 \frac{t^2}{2} e^{-t} + Nr_{00} \left(t + \frac{t^2}{2!}\right) e^{-t} + Nr_{00} (1 - e^{-t}),$$

$$|V_n(t)| \leq Mr_{00}^n \frac{t^n}{n!} e^{-t} + Nr_{00}^{n-1} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}\right) e^{-t} + Nr_{00}^{n-1}.$$

Тогда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \leq Me^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} r_{00}^n \frac{t^n}{n!} + Ne^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} r_{00}^{n-1} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) + N \right)$$

или

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \leq M + N. \quad (15)$$

Решение единственно, поскольку связанное с уравнением (9) однородное уравнение допускает только тривиальное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\ &\times [(r(0) + 1)u(\xi, \tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha]d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

В самом деле, если $\sup_{x \in R} |u(x, t)| = V(t)$, $0 \leq t \leq T$, то из (16) вытекает

$$V(t) \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Известно, что интегральное неравенство (17) имеет единственное решение: $V(t) \equiv 0$, и следовательно, $u(x, t) \equiv 0$, при $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

Лемма 2. Пусть $u_0 \in C_b^2(R)$, $k \in C^1[0, T]$. Тогда интегральное уравнение (9) имеет решение $C_b(\bar{Q}_T)$, которое является решением задачи (4), (2) и при этом обладает регулярностью $u \in C_b^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$.

Доказательство. Покажем, что классическое решение задачи (4), (2), такое что $u \in C_b(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) \\ &+ \int_0^t r'(t-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\ &- u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-t}u'_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) + u_0(x)r(\tau) \\ &+ \int_0^t r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\ &+ \int_0^t r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\ &- u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) \\ &+ r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-t}u'_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
&+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\
&- u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-t}u''_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\
&+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
&- u_0(x)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) \\
&+ r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
&+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau = e^{-t}u''_0(x) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
&- u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
&\times [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} &= -e^{-t}u''_0(x) - [u(x, t) + r(0)u(x, t) - u_0(x)r(t) \\
&+ \int_0^t r'(t - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
&- u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t)(1 + r(0)) \\
&- u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
&\times [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{21}$$

Существование формально полученных производных обоснуем строго. Для этого докажем, что $u_t, u_{xx}, u_{xxt} \in C_b(Q_T)$. Из соотношения (18) следует представление, позволяющее установить требуемую регулярность:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| &\leq \left| -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) \right. \\
&+ \left. \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \right. \\
&- \left. u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \leq M(2 + r_0) + \|r\|(M + N) + r_{00}.
\end{aligned}$$

Из равенства (19) следует:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| e^{-t} u'_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \leq C_1 + (M+N)||r|| + Mr_0 + r_{00},$$

Из (20) и того, что $u_0 \in C_b^2(R)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &\leq \left| e^{-t} u''_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \\ &\leq C_2 + (M+N)||r|| + Mr_0 + r_{00}, \end{aligned}$$

В соответствии с (21):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right| &\leq \left| -e^{-t} u'''_0(x) - [u(x, t)(1+r(0)) + u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] \right| \\ &+ \left| \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \\ &+ \left| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi \right| \\ &+ \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \leq C_2 + 4(M+N)||r|| + Mr_0 + r_{00}. \end{aligned}$$

где $C_1 = \sup_{x \in R} |u'_0(x)|$, $C_2 = \sup_{x \in R} |u''_0(x)|$.

Теперь покажем, что интегральное уравнение (9), удовлетворяет уравнению (4).

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + e^{-t}u''_0(x) \\ &+ [u(x, t) + r(0)u(x, t) - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] \\ &- \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \\
& - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi \\
& - e^{-t}u_0''(x) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\
& + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\
& - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \\
& = r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t - \tau)u(x, \tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что решение интегрального уравнения (9) удовлетворяет уравнению (4). Кроме того, из (9) следует, что $u(x, 0) = u_0(x)$. Оценка (15) показывает, что ряд (10) сходится равномерно на $\bar{Q}_T$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия $u_0 \in C_b(R)$, $f(t) \in C^2[0, T]$. Тогда обратная задача (4), (2), (3) для $(x, t) \in Q_T$ эквивалентна следующей задаче: требуется найти функции $u(x, t)$, $u_t(x, t)$, $r(t)$, $r'(t)$ удовлетворяющие заданной системе уравнений:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
- \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) = -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) \\
- \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
\times [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
r(t) = \frac{1}{\theta} [-f'(t) - e^{-t}u_0(x_0) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u(\xi, t) \\
- \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
\times [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau],
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
r'(t) = \frac{1}{2\theta} [-f''(t) + e^{-t}u_0(x_0) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u_t(\xi, t) - r'(t)u_0(\xi) \\
- \int_0^t r'(\alpha)u_t(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u(\xi, t) - r(t)u_0(\xi) \\
- \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
- \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau],
\end{aligned} \tag{25}$$

где $\theta = \theta(x_0) = \int_R u_0(\xi) e^{-|x_0-\xi|} d\xi$.

Доказательство. Уравнение (22) совпадает с уравнением (9). Дифференцируя его по переменной t , получаем уравнение (23). Подставляя в (23) $x = x_0$ и используя дополнительное условие (3), дифференцированное по t , $f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t)$, после несложных вычислений приходим к уравнению (24). Дифференцируя уравнение (24) по t , получаем уравнение (25).

Теорема. Пусть выполнены условия лемма 1 и 3, а также выполняется равенство $u_0(x_0) = f(0)$. Тогда при достаточно малом $T > 0$ решение обратной задачи (1)-(3) в классе $k(t) \in C^1[0, T]$ существует и является единственным.

Доказательство. Представим систему (22)-(24) в виде операторного уравнения

$$\psi = A\psi, \quad (26)$$

где ψ вектор-функция с компонентами

$$\psi = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t), \psi_3(x, t), \psi_4(x, t))$$

$$\psi_1(x, t) = u(x, t); \quad \psi_2(x, t) = u_t(x, t) - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} (u(\xi, t) - u_0(\xi) r(t)) d\xi;$$

$$\psi_3(x, t) = \psi_3(t) = r(t) - \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \psi_1(\xi, t) d\xi;$$

$\psi_4(x, t) = \psi_4(t) = r'(t) - \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} (u_t(\xi, t) - u(\xi, t)) d\xi + \theta r(t) \right];$ а оператор $A = [A_i]_{i=1}^4$ действует на вектор-функции с компонентами $\psi_i \in C[Q_T]$, и в соответствии с уравнениями (22)-(24) задаётся равенствами

$$\begin{aligned} A_1\psi &= \psi_{01}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1] d\eta) \psi_1(\eta, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A_2\psi &= -\psi_{01}(x, t) - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\ &\quad \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\quad \times \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1] d\eta) \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\ &\quad \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1) \\ &\quad \times (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) (\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1] d\eta) \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_3\psi &= \psi_{03}(t) - \frac{1}{\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\ &\quad \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1] d\eta) \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
& \times \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) \\
& + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_3(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
A_4\psi &= \psi_{04}(t) - \frac{1}{\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
& \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\
& \times \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta] (\psi_2(\xi, t - \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\xi-\eta|} (\psi_1(\eta, t - \alpha) - u_0(\eta) \\
& \times (\psi_3(t) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, t - \alpha) d\alpha_1)) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
& \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \\
& - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \\
& \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{30}$$

где также введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= (\psi_{01}(x, t), \psi_{02}(x, t), \psi_{03}(t), \psi_{04}(t)), \\
\psi_{01}(x, t) &= e^{-t} u_0(x); \quad \psi_{02}(x, t) = -\psi_{01}(x, t); \\
\psi_{03}(t) &= \frac{1}{\theta} [-f'(t) + e^{-t} u_0(x_0)]; \quad \psi_{04}(t) = \frac{1}{\theta} [-f''(t) + e^{-t} u_0(x_0)].
\end{aligned}$$

Рассмотрим функциональное пространство вектор-функций $\psi \in C(Q_T)$, где $Q_T := \{(x, t) | x \in R, t \in (0, T)\}$. Введем обозначения: $B_d(\psi_0)$ - множество функций, для которых справедливо следующее условие

$$\|\psi - \psi_0\|_{C(\bar{Q}_T)} \leq d.$$

Очевидно, что $\|\psi\| \leq d + \|\psi_0\| = d_0$. Докажем, что оператор A является сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$, если число T достаточно мало. Напомним, что оператор называется сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$, если выполнены следующие два условия:

1) если $\psi \in B_d(\psi_0)$ то $A\psi \in B_d(\psi_0)$, 2) если ψ^1, ψ^2 произвольные элементы $B_d(\psi_0)$, то $\|A\psi^1 - A\psi^2\|_T \leq k\|\psi^1 - \psi^2\|_T$ в котором $k < 1$.

Проверим выполнение первого из этих условий. Пусть $\psi \in B_d(\psi_0)$. Кроме того, для $(x, t) \in Q_T$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\|A_1\psi - \psi_{01}\| &= \|\psi_1 - \psi_{01}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \left\| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) \right. \\
& \left. - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \right] \psi_1(\eta, \tau - \alpha) d\alpha \Big] d\xi \Big\| \\
& = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) \right. \\
& \quad \left. - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \right] \psi_1(\eta, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi \Big| \\
& \leq \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T + \left((1 + \theta) d_0 + \frac{1}{2\theta} \right. \\
& \quad \left. \times \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} = \beta_1(T) \leq d,
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\|A_2 \psi - \psi_{02}\| & = \|\psi_2 - \psi_{02}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \right] \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha \right] d\xi \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \\
& \quad - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \right. \\
& \quad \left. \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) (\psi_3(\alpha) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \right] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \Big] d\xi \Big| \\
& \leq \left(2 + \theta + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T + \frac{d_0^2}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) T \\
& \quad + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} = \beta_2(T) \leq d,
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\|A_3 \psi - \psi_{03}(t)\| & = \|\psi_3 - \psi_{03}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \theta \psi_3(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - u_0(\alpha_1) (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \right] \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha \right] d\xi \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
& \quad \times \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
& + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_2|} \psi_3(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1 d\eta \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha d\xi \Big| \\
& \leq \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 T + \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} \right] = \beta_3(T) \leq d, \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|A_4 \psi - \psi_{04}(t)\| &= \|\psi_4 - \psi_{04}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) \right. \right. \\
& + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \right. \\
& + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1 d\eta] (\psi_2(\xi, t - \alpha) - u_0(\eta) \\
& (\psi_3(t) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, t - \alpha) d\alpha_1) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0 - \xi|} e^{-(t-\tau)} \\
& \quad \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \\
& \quad - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} \right. \\
& \quad \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1 d\eta] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) \right] d\xi d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 T + \left(3 + 2\gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} \right] = \beta_4(T) \leq d. \tag{34}
\end{aligned}$$

Пусть $T_1 = \min_{T>0} \{\beta_1(T), \beta_2(T), \beta_3(T), \beta_4(T)\} \leq d$. Тогда $\forall t \in [0, T], AB_d(\psi_0) \subset B_d(\psi_0)$. Теперь проверим выполнение второго условия. Пусть $\psi^k = (\psi_1^k, \psi_2^k, \psi_3^k, \psi_4^k)$ и $\psi^k \in B_d(\psi_0), k = 1, 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\|A_1 \psi^1 - A_1 \psi^2\| &= \left\| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x - \xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) - u_0(\xi) \right. \\
& ((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) \\
& + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) \\
& + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) - u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \\
& \quad \times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2) d\alpha_1 d\eta] (\psi_1^1(\eta, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\eta, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \Big\| \\
& \leq \|\psi^1 - \psi^2\| \left\| \int_0^t ((1 + 2\gamma_0) + \int_0^\tau (1 + \theta + \frac{1}{\theta} (1 + \gamma_0 + \frac{1}{\theta} 2d_0) d\alpha) d\tau \right\| \leq [(1 + 2\gamma_0)T
\end{aligned}$$

$$+ \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(1 + \gamma_0 + 2d_0)\right) \frac{T^2}{2} \|\psi^1 - \psi^2\| \leq k_1(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \|A_2\psi^1 - A_2\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [(\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha))] \right. \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times (\psi_1^1(\xi, t - \alpha) - \psi_1^2(\xi, t - \alpha)) d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) \\ &- u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) \\ &+ \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \right. \\ &\times [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) - u_0(\alpha_1)(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] (\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \Big\| \\ &\leq \|\psi^1 - \psi^2\| \left[\left(\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(6 + 2\gamma_0)d_0\right) + (1 + 2\gamma_0)d_0 \right) T \right. \\ &\left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(4d_0 + \frac{2d_0}{\theta})\right) \frac{T^2}{2} \right] \leq k_2(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_3\psi^1 - A_3\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \right] \right. \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times (\psi_1^1(\xi, t - \alpha) - \psi_1^2(\xi, t - \alpha)) d\alpha] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) \\ &- u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) \\ &\times \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \right. \\ &\times ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} (\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_3^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_3^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2)] \\ &\left. d\alpha_1) d\eta] (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \right\| \leq \|\psi^1 - \psi^2\| \\ &\times \left| \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} \left(1 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{2\theta}\right)\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} \left(2d_0 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{\theta}\right)\right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\times \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) \frac{T^2}{2} \|\psi^1 - \psi^2\| = k_3(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \|A_4\psi^1 - A_4\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times ((\psi_2^1(\xi, t - \alpha) - \psi_2^2(\xi, t - \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\xi-\eta|} ((\psi_1^1(\eta, t - \alpha) - \psi_1^2(\eta, t - \alpha)) \\ &- u_0(\eta)((\psi_3^1(t) - \psi_3^2(t)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_1|} (\psi_1^1(\alpha_1, t - \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, t - \alpha)) d\alpha_1) d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) - u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) \\ &+ \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta] - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha))] d\xi d\tau \Big\| \leq \|\psi^1 - \psi^2\| \\ &\times \left| \frac{1}{\theta} \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 d_0 \left(2 + \frac{1}{\theta}\right)\right) 1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) T \right| + \|\psi^1 - \psi^2\| \\ &\times \left| \frac{1}{\theta} \left(2d_0 \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) T + \left(2d_0(1 + \theta) + \frac{d_0}{\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right)\right) \frac{T^2}{2} \right) \right| \\ &k_4(T) \|\psi^1 - \psi^2\|. \end{aligned} \quad (38)$$

$\|A\psi^1 - A\psi^2\|_T \leq k \|\psi^1 - \psi^2\|_T$, где $k < 1$, если $T > 0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (1 + 2\gamma_0)T + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} (1 + \gamma_0 + 2d_0)\right) \frac{T^2}{2} &= k_1 < 1, \\ \left(\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} (6 + 2\gamma_0)d_0\right) + (1 + 2\gamma_0)d_0\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} (4d_0 + \frac{2d_0}{\theta})\right) \frac{T^2}{2} &= k_2 < 1, \\ \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} (1 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{2\theta})\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} (2d_0 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{\theta})\right) \right. \\ &\times \left. \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) \frac{T^2}{2} \right] = k_3 < 1, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} (2 + \gamma_0 d_0 (2 + \frac{1}{\theta})) + 1 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta}) \right) T \right. \\ \left. + 2d_0 (1 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta})) T + \left(2d_0(1 + \theta) + \frac{d_0}{\theta} (2 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta}))\right) \frac{T^2}{2} \right] = k_4 < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, если число T достаточно мало, так что выполняется условие (39), то оператор A является сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$. Тогда, согласно принципу сжимающего отображения Банаха, уравнение (26) имеет единственное решение в пространстве $B_d(\psi_0)$.

Заключение. Автор статьи считает, что новизна данной работы заключается в теореме о существовании и единственности решения обратной задачи по определению ядра интегрального члена псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с условием переопределения во внутренней точке отрезка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мегралиев Я.Т., Исмаилов А.И.. Обратная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с неклассическим краевыми условиями. Journal of Contemporary Applied Mathematics, 8 (2), 2018, 83-97.
2. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1988. 183 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., Наука, 1980. 288 с.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / М.: Наука, 1984. 254 с.
6. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Belov Yu.Ya., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Utrecht, VSP, 2002.
8. Лыков А.В., Эффект инерционности в тепломассообменных явлениях. ИФЖ, 9(2), 1965.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.-528 с.
10. Аблабеков Б. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Saarbrucken 2013.
11. Durdiev D.K., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42 (6), pp. 1264-1273.

REZYUME

Ushbu maqolada biz psevdoparabolik integrodifferensial tenglama uchun chiziqli bo'lmagan teskari muammoni ko'rib chiqamiz. Ko'rib chiqilayotgan teskari masalaning yagona yechilishi haqidagi tegishli teoremlar isbotlangan. Psevdoparabolik integro-differensial issiqlik tarqalish tenglamasi integral hadi yadrosini aniqlash masalasi matematik fizikaning teskari masalalar sohasiga tegishli bo'lib, ushbu maqolada integral ostidagi t vaqt o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan yadroni topish masalasi o'rganilgan. To'g'ri masala sifatida issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi qaralgan.

Kalit so'zlar: teskari masala, psevdoparabolik tenglama, Volterra tenglamasi, bir jinsli tenglama, integrodifferensial tenglama.

RESUME

This paper investigates a nonlinear inverse problem for a pseudoparabolic integro-differential equation. Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the considered inverse problem are established. The problem involves determining an integral kernel, depending on time t , under the integral sign. It belongs to the field of inverse problems in mathematical physics and is considered in the context of heat conduction equations. The direct problem is formulated as a Cauchy problem for a pseudoparabolic heat conduction equation.

Key words: inverse problem, pseudoparabolic equation, Volterra equation, homogeneous equation, integro-differential equation.