УДК 517.55+517.51

ОЦЕНКА ГЕССИАНОВ ОГРАНИЧЕННЫХ m-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Садуллаев А.
Национальный университет Узбекистана, Ташкент
sadullaev@mail.ru
Шарипов Р.
Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент
sharipovr80@mail.ru

РЕЗЮМЕ

С уважением посвящается 80-летнему юбилею Шавката Арифжановича Алимова и 70-летнему юбилею Равшана Раджабовича Ашурова в знак признания их выдающегося вклада в науку и образование.

Математиками Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Хорезмского отделения Института Математики имени В.И.Романовского, Академии Наук Республики Узбекистан был разработан новый подход к изучению m-выпуклых $(m-cv)$ функций, основанный на связях $m-cv$ функций с m-субгармоническими (sh_m) функциями. Установленная связь позволила определить Гессианы $H^k(u), k=1,2,...,n-m+1$, как борелевские меры в классе ограниченных $m-cv$ функций. Были доказаны также ряд простых свойств этих мер. В этой работе мы предлагаем дальнейшие, более тонкие свойства этих мер, в частности, установим оценку в среднем Гессианов $H^k(u), k=1,2,...,n-m+1$, в классе ограниченных $m-cv$ функций.

Ключевые слова: m-субгармонические функции, m-выпуклые функции, Борелевские меры, Гессианы.

Введение. Если класс m-субгармонических функций основывается на дифференциальных формах и потоках $(dd^cu)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0$, $k=1,2,...,n-m+1$, где $\beta = dd^c|z|^2-$ стандартная форма объема в $\mathbb{C}^n$, то класс m-выпуклых $(m-cv)$ функций связан с операторами совершенной иной природы, а именно с гессианами $H^k(u) = \sum\limits_{1\leq j_1<...<j_k\leq n} \lambda_{j_1}...\lambda_{j_k}$, $k=1,2,...,n-m+1$, собственных векторов $\lambda=\lambda(u)\in\mathbb{R}^n$ симметричной матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j}\right)$. Теория sh_m- функций хорошо развита, в данное время является предметом изучения многих математиков (см. З. Блоцкий [6], С.Динев и С.Колодзей [14-15], С. Ли [17], Х.Ч.Лу [18-19] и др). Достаточно полный обзор по этой теории имеется в статье А.Садуллаева и Б. Абдуллаева [11] в Трудах МИРАН.

Напомним, дважды гладкая функция $u(z)\in C^2(G)$, $G\subset\mathbb{C}^n$, называется m-субгармонической, $u\in sh_m(G)$, если в каждой точке области D имеет место

$$(dd^cu)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \;\; k=1,2,...,n-m+1. \tag{1}$$

Операторы $(dd^cu)^k \wedge \beta^{n-k}$ тесно связаны с гессианами: если $\lambda_1,...,\lambda_n-$ собственные значения эрмитовой квадратичной дифференциальной формы $dd^cu = \frac{i}{2}\sum\limits_{j,k}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ (в фиксированной точке $z^0\in D$), которые являются вещественными, т.е. $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, то

$$(dd^cu)^k \wedge \beta^{n-k} = k!\,(n-k)!H^k(u)\,\beta^n. \tag{2}$$

Следовательно, дважды гладкая функция $u(z)\in C^2(G)$, $G\subset\mathbb{C}^n$, является m-субгармонической, если в каждой точке $z^0\in G$ имеют места неравенства

$$H^k(u) = H^k_{z^0}(u) \geq 0, \;\; k=1,2,...,n-m+1. \tag{3}$$

Отметим, что понятие m-субгармонической функции в обобщенном смысле, определено и в общем случае, для полунепрерывных сверху функций.

Определение 1. *Функция $u(z)$, заданная в области $G \subset \mathbb{C}^n$ называется sh_m, если она полунепрерывная сверху и для любых дважды гладких sh_m функций $v_1, ..., v_{n-m} \in C^2(G) \cap sh_m(G)$ поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$, определяемый как*

$$\left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}\right](\omega) =$$

$$= \int u\, dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0}, \tag{4}$$

положителен, т.е. для $\forall \omega \in F^{0,0}$, $\omega \geq 0$ выполняется неравенство

$$\int u\, dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0.$$

Здесь $F^{0,0}(D)-$ семейство бесконечно гладких, финитных функций в G.

1. Связь $m-cv$ функций с sh_m- функциями. Теория $m-cv$ функций является малоизученным и новым направлением теории вещественной геометрии: дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n_x$, называется $m-cv$ функций если, гессианы собственных векторов $\lambda = \lambda(u) \in \mathbb{R}^n$ матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j}\right)$ удовлетворяют условиями $H^k(u) \geq 0$, $k = 1, 2, ..., n-m+1$.

При $m = n$ класс $n - cv \cap C^2(D) = \left\{H^1(\lambda) \geq 0\right\} = \{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \geq 0\}$ совпадает с классом субгармонических функций, а при $m = 1$ этот класс $1 - cv \bigcap C^2(D) = \left\{H^1(\lambda) \geq 0, ..., H^n(\lambda) \geq 0\right\} = \left\{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0\right\}$ совпадает с классом выпуклых функций в $\mathbb{R}^n$. Теория субгармонических функций является основным направлением Математической физики и Теории функций. Теория выпуклых функций хорошо изучена и отражена в работах А.Александрова, И.Бакельмана, Г.Буземан, А.Поздняк и др. (см. [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10]). При $m > 1$ этот класс изучен в серии работ Н.Ивочкиной, Н.Трудингера, Х.Вонга и др. (см. [12], [13], [16], [20-22]).

В совместной работе Н.Трудингера и Х.Вонга [21] $m - cv$ функции введены в классе полунепрерывных сверху функций $u(x)$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, используя, так называемое, вязкое определение: что $H^k(q) \geq 0$, $k = 1, 2, ..., n-m+1$, для любого квадратичного полинома $q(x)$: разность $u(x) - q(x)$ имеет только лишь конечное число локальных максимумов в области D.

В предлагаемой работе мы предлагаем другой подход к исследованию $m-cv$ функций, основанный на связях $m - cv$ функций с sh_m- функциями (Предложение 1), с использованием богатых и хорошо изученных свойств sh_m- функций. Для этого вложим вещественное пространство $\mathbb{R}^n_x$ в комплексное пространство $\mathbb{C}^n_z$, $\mathbb{R}^n_x \subset \mathbb{C}^n_z = \mathbb{R}^n_x + i\mathbb{R}^n_y\,(z = x + iy)$, как вещественное $n-$мерное подпространство. Затем, функцию $u(x)$, заданную в области $D \subset \mathbb{R}^n_x$ поднимаем в область $D \times i\mathbb{R}^n_y \subset \mathbb{C}^n_z$, полагая константой на параллельных плоскостях $\Pi_{x^0} = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \ x = x^0, \ y \in \mathbb{R}^n_y\right\}$, $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$.

Предложение 1. *Дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n_x$, является $m-cv$ в D тогда и только тогда, когда функция $u^c(z) = u^c(x+iy) = u(x)$, которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}^n_y$, является sh_m в области $D \times i\mathbb{R}^n_y$.*

Предложение 1 позволяет нам определить m-выпуклых функций в классе полунепрерывных сверху функций

Определение 2. *Полунепрерывная сверху в области $D \subset \mathbb{R}^n_x$ функция $u(x)$ называется m-выпуклой в D, если функция $u^c(z)$ является m-субгармонической, $u^c(z) \in sh_m\left(D \times i\mathbb{R}^n_y\right)$.*

Для исследования m-выпуклой функции $u(x)$, сначала мы ее продолжим в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ как sh_m- функция $u^c(z)$, а затем известные свойства $u^c(z) \in sh_m$ применяем к $u(x)$, чтобы получить аналогичные свойства m-выпуклой функции.

В результате мы существенно дополняем имеющихся прежде свойств в теории $m-cv$ функций и, кроме того получаем ряд новых утверждений. В частности, имеют место следующие простые свойства, нужные нам ниже

1) класс $1-cv$ функций совпадает с классом выпуклых функций, причем $1 - cv \subset ... \subset m - cv \subset ... \subset n - cv = sh$;

2)(аппроксимация). Берем стандартное ядро $K_\delta(x)=\frac{1}{\delta^n}K\left(\frac{x}{\delta}\right)$, $\delta>0$, где
$-K(x)=K(|x|)$;
$-K(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
$-$ носитель $\text{supp}K=B(0,1)$;
$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x)\,dx=\int\limits_{B(0,1)}K(x)\,dx=1.$

Тогда свертка

$$u_\delta(y)=\int\limits_D u(x)K_\delta(x-y)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(x+y)K_\delta(x)dx \tag{5}$$

обладает тем свойством, что $u_\delta(x)\in m-cv(D_\delta)\cap C^\infty(D_\delta)$, где $D_\delta=\{x\in D:\text{dist}(x,\partial D)>\delta\}$, причем при $\delta\downarrow 0$ функция $u_\delta(x)$ убывая, поточечно сходится к функции $u(x)\in m-cv(D)$.

3) максимум конечного числа $m-cv$ функций является $m-cv$ функцией; для произвольного локально равномерно ограниченного семейства $\{u_\theta\}\subset m-cv$ регуляризация $u^*(x)$ супремума $u(x)=\left\{\sup\limits_\theta u_\theta(x)\right\}$ тоже будет $m-cv$ функцией. Так как $m-cv\subset sh$, то множество $\{u(x)<u^*(x)\}-$ полярно в $\mathbb{C}^n\approx\mathbb{R}^{2n}$. В частности оно имеет лебегова меру нуль.

Точно также, для локально равномерно ограниченной последовательности $\{u_j\}\subset m-cv$ регуляризация $u^*(x)$ предела $u(x)=\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\,u_j(x)$ тоже будет $m-cv$ функцией, причем множество $\{u(x)<u^*(x)\}-$ полярное.

4) если $u(x)\in m-cv(D)$, то для любой гиперплоскости $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ сужение $u|_\Pi\in m-cv\,(D\cap\Pi)$.

В самом деле, считая, без нарушения общности $\Pi_x=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \ x_n=0\}$ напишем сужение как $u|_\Pi=u\,('x,0)$, где как обычно $'x=(x_1,...,x_{n-1})$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n_z=\mathbb{R}^n_x\times i\mathbb{R}^n_y$ комплексную гиперплоскость $\Pi_z=\{z\in\mathbb{C}^n:\ z_n=0\}$. Поднимая функцию $u(x)\in m-cv\,(D)$ в $D\times i\mathbb{R}^n_y$ получим $u^c(z)\in sh_m\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)$. Согласно свойству 8) [11] сужение $u^c\,(z)\,|_{\Pi_z}=u\,('z,0)$ является sh_m- функцией в $\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)\cap\Pi_z$, $u^c\,(z,0)\in sh_m\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)\cap\Pi_z$. Так как $u^c\,('z,0)=u\,('x,0)$, то $u\,('x,0)$ является m-выпуклой функцией в $D\cap\Pi_x$.

Следствие. *Если* $u(x)\in m-cv(D)$, *то для любой плоскости* $\Pi\subset\mathbb{R}^n$, $\dim\Pi=m$, *сужение* $u|_\Pi\in sh\,(D\cap\Pi)$.

2. Гессианы $H^k(u)$ как борелевские меры. В классе ограниченных sh_m- функций определены операторы $\left(dd^cu\right)^k\wedge\beta^{n-k}\geq 0,\ \ k=1,2,...,n-m+1$ как борелевские меры в области G (см. [6], [11]). Используя связь $m-cv$ функций с sh_m- функциями в этом пункте мы даем определения гессианов $H^k(u),\ \ k=1,...,n-m+1$ для m-выпуклых функций, как борелевские меры.

Пусть $u(x)-$ локально ограниченная $m-cv$ функция в области $D\subset\mathbb{R}^n$. Тогда согласно предложению 1 $u^c(z)=u^c\,(x+iy)=u(x)$, которая не зависит от переменных $y\in\mathbb{R}^n_y$, является sh_m функцией, локально ограниченной в области $D\times i\mathbb{R}^n_y\subset\mathbb{C}^n$, $u^c\,(z)\in sh_m\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)\bigcap L^\infty_{loc}\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)$. Следовательно, определены потоки $\left(dd^cu^c\right)^k\wedge\beta^{n-k},\ k=1,2,...,n-m+1$, которые являются борелевскими мерами в $D\times i\mathbb{R}^n_y\subset\mathbb{C}^n$. Если $u^c_j(z)=u^c\circ K_j(w-z)-$ стандартная аппроксимация, то $u^c_j(z)-$бесконечно гладкая и $u^c_j(z)\downarrow u^c(z)$. Более того имеют места слабая сходимость потоков,

$$\left(dd^cu^c_j\right)^k\wedge\beta^{n-k}\mapsto\left(dd^cu^c\right)^k\wedge\beta^{n-k},\ k=1,2,...,n-m+1. \tag{6}$$

Так как $\left(dd^cu^c_j\right)^k\wedge\beta^{n-k}=k!\,(n-k)!H^k\left(u^c_j\right)\beta^n$, то (6) влечет за собой сходимость гессианов

$$H^k\left(u^c_j\right)\mapsto H^k\left(u^c\right),\ k=1,2,...,n-m+1. \tag{7}$$

(7) определяет для $u^c(z)\in sh_m\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)\cap L^\infty_{loc}\left(D\times i\mathbb{R}^n_y\right)$ гессианы $H^k\left(u^c\right),\ k=1,2,...,n-m+1$, как борелевские меры, $H^k\left(u^c\right)=\mu^k$.

Так как $u^c\in sh_m\left(D\times\mathbb{R}^n_y\right)$ не зависит от $y\in\mathbb{R}^n_y$, то для любых борелевских множеств $E_x\subset D,\ \ E_y\subset\subset\mathbb{R}^n_y$ меры $\frac{4^k}{mesE_y}\mu_k\left(E_x\times E_y\right)$ не зависят от множества $E_y\subset\subset\mathbb{R}^n_y$, т.е. $\frac{4^k}{mesE_y}\mu_k\left(E_x\times E_y\right)=$

$\nu_k\left(E_x\right)$. Борелевские меры

$$\nu_k: \quad \nu_k\left(E_x\right)=\frac{4^k}{mesE_y}\mu_k\left(E_x\times E_y\right), \ \ k=1,2,...,n-m+1, \tag{8}$$

естественно называть гессианами $H^k(u)$, $k=1,2,...,n-m+1$, для ограниченной, m-выпуклой функции $u(x)\in m-cv(D)$ в области $D\subset\mathbb{R}_x^n$, ибо $H^k(u)=4^kH^k(u^c)$ для дважды гладкой функции $u(x)\in m-cv(D)$.

Гессианы $H^k(u)$ иногда обозначаются также как $H_u^k(x)$. Отметим, что если последовательность локально равномерно ограниченных функций $\{u_j(x)\}\subset m-cv(D)$ убывая сходится к $u(x)$, имеет место слабая сходимость мер $H^k\left(u_j\right)\mapsto H^k(u)$, $k=1,2,...,n-k+1$, что легко вытекает из аналогичного факта для класса $sh_m\left(D\times i\mathbb{R}_y^n\right)$.

Основным результатом работы является оценка Гессианов $H^k(u)=H_u^k$ в среднем в классе ограниченных $m-cv$ функций.

Теорема 1. *В классе ограниченных m-выпуклых функций $m-cv\cap L_{loc}^{\infty}(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$, Гессианы $H^k(u)$, $k=1,2,...,n-m+1$, локально ограничены в среднем. Точнее, для любого компакта $K\subset\subset D$ существует константа $C\left(K\right)\geq 0$ такая что, имеют места интегральные оценки*

$$\int\limits_K H^k\left(u\right)\ \leq C\left(K\right)M_u, \ \ k=1,2,...,n-m+1, \tag{9}$$

где $M_u=\max\left\{\left|u\left(x\right)\right|, \ \ x\in K\right\}$.

Доказательство. Теорема локальная. По этому доказательство вытекает из следующих двух Лемм.

Лемма 1. *Имеет место следующая оценка Гессиана H_u^k через H_u^{k-1}: пусть $u(x)\in m-cv(B)\cap L^{\infty}(B)$, где $B=\{x\in\mathbb{R}^n: \ \ |x|<1\}-$ единичный шар. Тогда,*

$$\int\limits_{-1}^{r}dt\int\limits_{|y|^2\leq 1}dV\left(y\right)\int\limits_{|x|^2\ \leq\ 1+t-|y|^2}H_u^k(x)\,dV(x)\leq$$

$$\leq\frac{n-k+1}{k}\left(_1-{}_2\right)\int\limits_{|y|^2\leq 1}dV\left(y\right)\int\limits_{|x|^2\ \leq\ 1+r-|y|^2}H_u^{k-1}(x)\,dV(x), \tag{10}$$

где $r<0$, $1\leq k\leq n-m+1$ и ${}_1=\sup\limits_B u(x)$, ${}_2=\inf\limits_B u(x)$.

Доказательство. Пусть $u(x)-$ локально ограниченная $m-cv$ функция в области $B\subset\mathbb{R}^n$. Нам достаточно рассматривать случай дважды гладких функций $u(x)\in m-cv(B)\cap C^2\left(\bar{B}\right)$. В общем случае $u(x)\in m-cv(B)\cap L^{\infty}(B)$, формулу (9) можно получить аппроксимируя $u(x)$ гладкими функциями, $u_j(x)\in m-cv(B)\cap C^{\infty}(B)$, $u_j(x)\downarrow u(x)$.

Согласно предложению 1 $u^c\left(z\right)=u^c\left(x+iy\right)=u\left(x\right)$, которая не зависит от переменных $y\in\mathbb{R}_y^n$, является sh_m функцией, дважды гладкой в области $D\times i\mathbb{R}_y^n\subset\mathbb{C}^n$, $u^c(z)\in sh_m\left(D\times i\mathbb{R}_y^n\right)\cap C^2\left(D\times i\mathbb{R}_y^n\right)$. Применяя формулу усреднения (см. [11]) к функцию $u^c\left(z\right)=u(x)\in sh_m\left(B\times i\mathbb{R}_y^n\right)\cap C^2\left(\bar{B}\times i\mathbb{R}_y^n\right)$, в шаре $B_z=\left\{z\in\mathbb{C}^n: \ \ |z|^2<r\right\}$, $r<0$, получим

$$\int\limits_{-1}^{r}dt\int\limits_{|z|^2\ \leq\ 1+t}H_{u^c}^k(z)dV\leq\frac{n-k+1}{k}\left(C_1-C_2\right)\int\limits_{|z|^2\leq 1+r}H_{u^c}^{k-1}(z)dV. \tag{11}$$

Так как $H_{u^c}^k(z)=\frac{1}{4^k}H_u^k(x)$, $z=x+iy\in B\times i\mathbb{R}_y^n$, то

$$\int\limits_{-1}^{r}dt\int\limits_{|z|^2\ \leq\ 1+t}H_u^k\left(x\right)\,dV(z)\leq\frac{n-k+1}{k}\left(C_1-C_2\right)\int\limits_{|z|^2\leq 1+r}H_u^{k-1}(x)dV\left(z\right), 1\leq k\leq n-m+1.$$

Переходя здесь от кратных интегралов к повторным имеем

$$\int\limits_{-1}^{r} dt \int\limits_{|y|^2\le 1} dV(y) \int\limits_{|x|^2\ \le\ 1+t-|y|^2} H_u^k(x)dV(x) \le$$

$$\le \frac{n-k+1}{k}\left(C_1 - C_2\right) \int\limits_{|y|^2\le 1} dV\left(y\right) \int\limits_{|x|^2\ \le\ 1+r+|y|^2} H_u^{k-1}(x)\, dV(x).$$

Лемма 2. *В классе локально равномерно ограниченных функций* $L = \{u(x) \in m-cv(D),\ |u(x)| \le 1\}$, *семейство интегралов* $\int\limits_K H_u^k(x)dV(x),\ \ u \in L$, *равномерно ограничены для любого компакта* $K \subset D,\ \ 1 \le k \le n-m+1$,

$$\int\limits_K H_u^k(x)dV(x) \le C\left(K\right),\quad u \in L.$$

В самом деле, достаточно доказать лемме для $L = \left\{u(x) \in m - cv(B) \cap C^2\left(\bar{B}\right), |u(x)| \le M,\ \ \forall x \in B\right\}$, $K \subset\subset B$, где $B = B\left(0,1\right) \subset\subset D-$ шар. Воспользуемся формулой (10). Применяя ее для $k, k-1, ..., 1$ получим

$$\int\limits_{-1}^{0} dt_1 ... \int\limits_{-1}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int\limits_{-1}^{t_{k-1}} dt_k \int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+t_k} H_u^k(x)dV(z) \le \frac{(n-k+1)!}{k!}\left(2M\right)^k Vol\left(B_z\right).1 \le k \le n-m+1.$$

Левую часть формулы можно оценить снизу (для $\sigma < 0$)

$$\int\limits_{-1}^{0} dt_1 ... \int\limits_{-1}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int\limits_{-1}^{t_{k-1}} dt_k \int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+t_k} H_u^k(x)dV(z) \ge \int\limits_{\sigma}^{0} dt_1 ... \int\limits_{\sigma}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int\limits_{\sigma}^{t_{k-1}} dt_k \int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+\sigma} H_u^k\left(x\right)\ dV\left(z\right) \ge$$

$$\ge \int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+\sigma} H_u^k(x)\, dV(z) \int\limits_{\sigma}^{0} dt_1 ... \int\limits_{\sigma}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int\limits_{\sigma}^{t_{k-1}} dt_k = \frac{|\sigma|^k}{k!} \int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+\sigma} H_u^k\left(x\right)\ dV\left(z\right).$$

Отсюда,

$$\int\limits_{|z|^2\ \le\ 1+\sigma} H_u^k(x)\, dV(z) \le \frac{(n-k+1)!}{|\sigma|^k}\left(2M\right)^k Vol\left(B_z\right),$$

а это означает, что семейство интегралов $\int\limits_{|x|^2\le r} H_u^k(x)dV(x),\ \ u \in L,\ \ r < 1$, равномерно ограничено. *Лемма доказана.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Aleksandrov A.D., Intrinsic geometry of convex surfaces. OGIZ, Moscow, 1948; German transl., Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

2. Aleksandrov A.D., Konvexe Polyeder. Akademie-Verlag, Berlin 1958.

3. Bakelman I.J., Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.

4. Bakelman I.J., Variational problems and elliptic Monge-Ampere equations. J. Differential Geometry, № 18, 1983, P. 669–999.

5. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.. Введение в дифференциальную геометрию "В целом"М.: Наука, 1973.

6. Blocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation. Ann.Inst. Fourier, Grenoble, V.5, 2005, P. 1735–1756.

7. Брело М., Основы классической теории потенциала. М., ИЛ, 1964.

8. Буземан Г., Выпуклые поверхности, “Наука”, 1964.

9. Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, М., 1969.

10. Позняк Э.Г., Примеры регулярных метрик на сфере и в круге, ненереализуемых в классе дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей, Вестник МГУ, сер. матем., 2, 1960, С. 3-5.

11. Садуллаев А., Абдуллаев Б., Теория потенциалов в классе субгармонических функций. Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, N 279, 2012, С. 166-192.

12. Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J., Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta Math. 155, 1985, C.261-301.

13. Chou K.S., Wang X.J., Variational theoryfor Hessian equations. Comm. Pure Appl. Math., 54, 2001, P. 1029-1064.

14. Dinew S., Kolodziej S., A priori estimates for the complex Hessian equation. Anal. PDE, V.7, 2014, P. 227-244.

15. Dinew S., Kolodziej S., Non standard properties of m-subahrmonic functions. Dolom. Res. Not. Approx. 11, 2018, P. 35-50.

16. Ivochkina N.M., Trudinger N.S., Wang X.J., The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations. Comm. Partial Difi. Eqns 29, 2004, P. 219-235.

17. Li S.Y., On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian. Asian J.Math., V.8, 2004, P. 87-106.

18. Lu C.H. A variational approach to complex Hessian equations in . Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 431:1, 2015, P. 228-259.

19. Lu H.Ch. Solutions to degenerate Hessian equations. Jurnal de Mathematique Pures et Appliques. V. 100:6, 2013, P. 785-805.

20. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures I. Topol. Methods Non linear Anal. V.19. 1997, P. 225-239.

21. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures II. Ann. Math. V.150 ,1999, P. 1-23.

22. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures III. Ann. Math. V.150, 2002, P. 579-604.

REZYUME

Shavkat Arifjanovich Alimov tavalludining 80 yilligi va Ravshan Radjabovich Ashurovning 70 yillik yubileyiga, ularning fan va ta'limga qo‘shgan ulkan xizmatlari e'tirofiga bag‘ishlanadi.

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti va O‘zbekiston Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm bo‘limi matematiklari tomonidan m-qavariq $(m-cv)$ funksiyalarni o‘rganish uchun yangicha yondashuv ishlab chiqildi. Bu tadqiqot usullari m-qavariq funksiyalarning m-subgarmonik (sh_m) funksiyalar bilan bog‘liqligiga asoslanadi. O‘rnatilgan bu bog‘lanish orqali $H^k(u)$, $k=1,2,...,n-m+1$, Gessianlar chegaralangan $m-cv$

funksiyalar sinfida Borel o‘lchovlari sifatida aniqlanishi mumkinligi ko‘rsatildi. Shuningdek, bu o‘lchovlarning bir qator sodda xossalari isbotlandi.

Ushbu ishda bunday o‘lchovlarning yanada muhim xossalari isbotlanadi va shu jumladan chegaralangan $m-cv$ funksiyalar sinfida $H^k(u), k=1,2,...,n-m+1$, Gessianlarning integral o‘rtacha qiymatlari uchun tekis baholashlar olingan.

Kalit so‘zlar: m-subgarmonik funksiya, m-qavariq funksiya, Borel o‘lchovi, Gessian.

RESUME

Respectfully dedicated to the 80th anniversary of Shavkat Arifzhanovich Alimov and the 70th anniversary of Ravshan Radzhabovich Ashurov in recognition of their outstanding contributions to science and education.

A novel approach to studying m-convex $(m-cv)$ functions has been developed by mathematicians from the Khorezm branch of the V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan and the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. This research method is based on the connection between m-convex functions and m-subharmonic (sh_m) functions. Through this established connection, it was shown that $H^k(u), \quad k=1,2,\ldots,n-m+1$, can be defined as Borel measures within the class of bounded $m-cv$ functions. Several basic properties of these measures were also proven.

In the present work, more significant properties of such measures are established, including uniform estimates for the integral mean values of the Hessians $H^k(u), \quad k=1,2,\ldots,n-m+1$, within the class of bounded $m-cv$ functions.

Key words: m-subharmonic functions, m-convex functions, Borel measures, Hessians.