УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

Рахмонов Ш. М.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
rahmonovshohruh91@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется дифференциально-геометрическая структура многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}(k, n)$, состоящего из всех k-мерных линейных подпространств в n-мерном вещественном векторном пространстве. Основное внимание уделено явному построению атласа гладких карт и анализу свойств функций перехода между ними.

Доказано, что для произвольного набора индексов $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ соответствующее координатное отображение $\phi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ является гомеоморфизмом, где U_I – открытое подмножество в $\mathrm{Gr}(k, n)$. Установлена гладкость (бесконечная дифференцируемость) функций перехода $\psi_{IJ} = \phi_J \circ \phi_I^{-1}$ на пересечениях карт.

На примере многообразия $\mathrm{Gr}(2, 4)$ проведены детальные вычисления, демонстрирующие явный вид функций перехода между различными координатными картами. Показано, что эти функции выражаются в виде рациональных отображений с ненулевыми знаменателями, что гарантирует их корректность и гладкость.

Полученные результаты имеют важное значение для приложений в дифференциальной геометрии, алгебраической топологии и математической физике, где многообразия Грассмана играют ключевую роль.

Ключевые слова: многообразие Грассмана, гладкий атлас, функции перехода, дифференциальная геометрия, координатные карты.

Многообразия Грассмана $Gr(k, n)$, введенные Германом Грассманом в 1844 году, являются фундаментальными объектами в современной математике. Их значение простирается от алгебраической геометрии до теоретической физики:

Многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}(k, n)$, представляющие собой пространства всех k-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве, занимают центральное место в современной дифференциальной геометрии и топологии [1,3]. Их изучение имеет фундаментальное значение как для теоретической математики, так и для приложений в физике, включая теорию струн и квантовую теорию поля.

Анализ топологических свойств многообразий Грассмана был начат в классических работах по алгебраической топологии [1,3]. В монографиях [2,6,8] подробно исследована их риманова геометрическая структура. Современный подход к изучению гладких структур изложен в [4,7], где особое внимание уделено методам дифференциальной топологии.

Однако, как показал наш анализ литературы, существующие исследования содержат несколько существенных пробелов:

- Недостаточно подробно описаны явные конструкции координатных карт для общего случая $\mathrm{Gr}(k, n)$
- Отсутствует систематический анализ гладкости функций перехода между картами
- Недостаточно изучены частные случаи малой размерности (например, $\mathrm{Gr}(2, 4)$)

Основная цель данной работы - восполнить указанные пробелы путем детального исследования гладкой структуры многообразий Грассмана. Конкретные задачи включают:

1. Построение явных координатных карт на $\mathrm{Gr}(k, n)$ с использованием метода проективных координат

2. Доказательство гладкости (бесконечной дифференцируемости) функций перехода
3. Явное вычисление функций перехода для случая $\mathrm{Gr}(2,4)$
4. Исследование особенностей полученных отображений

Основная гипотеза исследования состоит в том, что функции перехода между любыми двумя координатными картами на $\mathrm{Gr}(k,n)$ являются рациональными отображениями с ненулевыми знаменателями, что гарантирует их бесконечную дифференцируемость.

Определение 1. *Многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(k,n)$ есть множество всех k-мерных линейных подпространств n-мерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$:*

$$\mathrm{Gr}(k,n) = \{W \subset V \mid \dim W = k\}$$

Фиксируем стандартный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $V \cong \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.[3] *Размерность $\mathrm{Gr}(k,n)$ равна $k(n-k)$.*

Доказательство. *Каждое k-мерное подпространство может быть задано как линейная оболочка k линейно независимых векторов. В матричной форме это соответствует матрице размера $k \times n$ ранга k. Число свободных параметров после учёта эквивалентности при линейных преобразованиях базиса составляет $k(n-k)$.*

Для каждого упорядоченного набора индексов $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ определим:

$$L_I = \mathrm{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$$

$$U_I = \{W \in \mathrm{Gr}(k,n) \mid W \cap L_I^\perp = \{0\}\}$$

где $L_I^\perp = \mathrm{span}\{e_j \mid j \notin I\}$

Лемма 2. *Семейство $\{U_I\}$ образует открытое покрытие* $\mathrm{Gr}(k,n)$.[7]

Доказательство. *Для любого $W \in \mathrm{Gr}(k,n)$ найдётся такой набор индексов I, что проекция $\pi_I : W \to L_I$ является изоморфизмом. Это эквивалентно условию $W \cap L_I^\perp = \{0\}$, то есть $W \in U_I$.*

Для $W \in U_I$ определим координатное отображение $\phi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ следующим образом:

1. Выберем базис $\{w_1, \dots, w_k\}$ в W такой, что:

$$w_j = e_{i_j} + \sum_{m \notin I} a_{jm} e_m, \quad j = 1, \dots, k$$

2. Положим $\phi_I(W) = (a_{jm}) \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$

Теорема 1. *Для каждого I отображение ϕ_I является гомеоморфизмом.*

Доказательство. 1. **Инъективность**: Разные подпространства имеют разные координаты, так как базисы однозначно определяются проекцией на L_I.

2. **Сюръективность**: Любая матрица (a_{jm}) задаёт подпространство:

$$W = \mathrm{span}\left\{ e_{i_j} + \sum_{m \notin I} a_{jm} e_m \right\}_{j=1}^{k}$$

3. **Непрерывность**: Оба отображения непрерывны, так как коэффициенты a_{jm} непрерывно зависят от подпространства.

Рассмотрим две карты (U_I, ϕ_I) и (U_J, ϕ_J) с $U_I \cap U_J \neq \emptyset$. Пусть $W \in U_I \cap U_J$.

Теорема 2. *Функция перехода $\psi_{IJ} = \phi_J \circ \phi_I^{-1}$ является гладкой (бесконечно дифференцируемой).*

Доказательство. 1. В карте I подпространство W имеет базис:

$$w_p = e_{i_p} + \sum_{s \notin I} a_{ps} e_s, \quad p = 1, \dots, k$$

2. В карте J тот же W имеет базис:

$$w'_q = e_{j_q} + \sum_{t \notin J} b_{qt} e_t, \quad q = 1, \ldots, k$$

3. Выразим базисные векторы e_{i_p} через e_{j_q}:

$$e_{i_p} = \sum_{q=1}^{k} c_{pq} e_{j_q} + \sum_{t \notin J} d_{pt} e_t$$

4. Подставим в первое представление:

$$w_p = \sum_{q=1}^{k} c_{pq} e_{j_q} + \sum_{t \notin J} (d_{pt} + \sum_{q=1}^{k} c_{pq} b_{qt}) e_t + \sum_{s \notin I} a_{ps} e_s$$

5. Приравнивая коэффициенты при e_{j_q}, получаем систему:

$$\sum_{p=1}^{k} c_{pq} = \delta_{qr} \quad \text{(символ Кронекера)}$$

6. Для коэффициентов при e_t $(t \notin J)$:

$$d_{pt} + \sum_{q=1}^{k} c_{pq} b_{qt} = \text{линейная комбинация } a_{ps}$$

7. Решая эту систему методом Крамера, получаем:

$$b_{qt} = \frac{P_{qt}(a_{ps})}{\det(C)}$$

где P_{qt} - многочлены от a_{ps}, а C - матрица коэффициентов.

8. Поскольку $W \in U_I \cap U_J$, определитель $\det(C) \neq 0$, что гарантирует гладкость функции перехода.

Пример. Рассмотрим многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(2,4)$ - множество всех двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Фиксируем стандартный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ пространства $\mathbb{R}^4$.Рассмотрим конкретный случай $I = \{1,2\}$, $J = \{1,3\}$.

1. Выберем опорное подпространство:

$$L_{12} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$$

Определим координатную окрестность O_{12} как множество всех плоскостей $\gamma \in \mathrm{Gr}(2,4)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\gamma = \mathrm{span}\{U_1, U_2\}$$

где

$$\begin{cases} U_1 = e_1 + a_{11} e_3 + a_{12} e_4 \\ U_2 = e_2 + a_{21} e_3 + a_{22} e_4 \end{cases}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Отображение $\phi_{12} : O_{12} \to \mathbb{R}^4$, заданное формулой:

$$\phi_{12}(\gamma) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

является гомеоморфизмом.

2. Выберем другое опорное подпространство:

$$L_{13} = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$$

Определим координатную окрестность O_{13} как множество всех плоскостей $\gamma \in \mathrm{Gr}(2,4)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\gamma = \mathrm{span}\{V_1, V_2\}$$

где

$$\begin{cases} V_1 = e_1 + b_{11}e_2 + b_{12}e_4 \\ V_2 = e_3 + b_{21}e_2 + b_{22}e_4 \end{cases}, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}$$

Аналогично, отображение $\phi_{13} : O_{13} \to \mathbb{R}^4$ задаётся формулой:

$$\phi_{13}(\gamma) = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$$

3. Рассмотрим плоскость $\gamma \in O_{12} \cap O_{13}$. Она имеет два представления:

$$\gamma = \mathrm{span}\{U_1, U_2\} = \mathrm{span}\{V_1, V_2\}$$

Найдём связь между координатами (a_{ij}) и (b_{ij}).

Существует матрица $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ такая, что:

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11}U_1 + \alpha_{12}U_2 \\ V_2 = \alpha_{21}U_1 + \alpha_{22}U_2 \end{cases}$$

Подставляя выражения для U_i и V_j, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} e_1 + b_{11}e_2 + b_{12}e_4 = \alpha_{11}(e_1 + a_{11}e_3 + a_{12}e_4) + \alpha_{12}(e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4) \\ e_3 + b_{21}e_2 + b_{22}e_4 = \alpha_{21}(e_1 + a_{11}e_3 + a_{12}e_4) + \alpha_{22}(e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4) \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных векторах, находим:

$$\begin{aligned} &\text{Для } V_1 : \\ &e_1 : \alpha_{11} = 1 \\ &e_2 : \alpha_{12} = b_{11} \\ &e_3 : \alpha_{11}a_{11} + \alpha_{12}a_{21} = 0 \\ &e_4 : \alpha_{11}a_{12} + \alpha_{12}a_{22} = b_{12} \\ &\text{Для } V_2 : \\ &e_1 : \alpha_{21} = 0 \\ &e_2 : \alpha_{22} = b_{21} \\ &e_3 : \alpha_{21}a_{11} + \alpha_{22}a_{21} = 1 \\ &e_4 : \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} = b_{22} \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = -\frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{21}}$$

4. Функция перехода $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ выражается формулами:

$$\begin{cases} b_{11} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} \\ b_{12} = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ b_{21} = \frac{1}{a_{21}} \\ b_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{pmatrix}$$

Функция перехода $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ является гладкой (C^∞) в своей области определения.
1. Все компоненты являются рациональными функциями от a_{ij}.
2. Знаменатель $a_{21} \neq 0$ в области пересечения $O_{12} \cap O_{13}$.
3. Производные всех порядков существуют и непрерывны при $a_{21} \neq 0$.

Из построенного примера следует:

- Атлас на $\mathrm{Gr}(2,4)$ состоит из карт вида (O_I, ϕ_I), где I - пары индексов
- Все функции перехода являются гладкими
- Размерность $\mathrm{Gr}(2,4)$ равна 4, что согласуется с общей формулой $\dim \mathrm{Gr}(k,n) = k(n-k)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977. 512 с.
2. Бураго Ю.Д., Залгалдин В.А. *Введение в риманову геометрию.* СПб.: Наука, 1994. 318 с.
3. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* М.: Наука, 1977. 488 с.
4. Хирш М. *Дифференциальная топология.* М.: Мир.
5. Gopal A., Cogyan A., Ergen E. *Topological Manifolds.* 2008. 512 p.
6. Шарафутдинов В.А. *Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию.* Новосибирск: Учебное пособие, 2018.
7. Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, 2003.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I-II. Wiley Classics Library, 1996.
9. Быков В.М. *Тензорные поля на многообразиях.* М.: МГУ, 1982. 128 с.

REZYUME

Ushbu ishda Grassmann ko'pxilligi $\mathrm{Gr}(k,n)$ ning differensial-geometrik tuzilmasi o'rganiladi. Bu ko'pxillik $\mathbb{R}^n$ da barcha k-o'lchamli chiziqli qismfazolar majmuasidan iborat. Asosiy e'tibor silliq kartalar atlasini aniq qurishga va ular orasidagi o'tish funksiyalarining xossalarini tahlil qilishga qaratilgan.

Ixtiyoriy indekslar to'plami $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ uchun mos koordinata akslantirishlari $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ gomeomorfizm ekani isbotlangan, bu yerda $U_I \to \mathrm{Gr}(k,n)$ dagi ochiq to'plamdir. Xaritalar kesishmalarida o'tish funksiyasi $\psi_{IJ} = \varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ ning silliqligi (cheksiz differentiallanadiganligi) isbotlangan.

$\mathrm{Gr}(2,4)$ ko'pxilligi misolida turli koordinata akslantirishlari orasidagi o'tish funksiyalarining aniq ko'rinishi hisoblab chiqilgan. Bu funksiyalar noldan farqli maxrajli ratsional akslantirishlar ko'rinishida ifodalanishi ko'rsatilgan, bu esa ularning to'g'riligi va silliqligini kafolatlaydi.

Olingan natijalar differensial geometriya, algebraik topologiya va matematik fizika sohalarida qo'llanilishi uchun muhim ahamiyatga ega bo'lib, Grassmann ko'pxilligi bu sohalarda asosiy rol o'ynaydi.

Kalit so'zlar: Grassmann ko'pxilligi, silliq atlas, o'tish funksiyalari, differensial geometriya, koordinata akslantirishlari.

RESUME

The work investigates the differential-geometric structure of the Grassmannian manifold Gr(k, n), consisting of all k-dimensional linear subspaces in an n-dimensional real vector space. The primary focus is on the explicit construction of a smooth atlas and the analysis of the transition functions between its charts.

It is proven that for an arbitrary set of indices $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, the corresponding coordinate map $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ is a homeomorphism, where U_I is an open subset of Gr(k, n). The smoothness (infinite differentiability) of the transition functions $\psi_{IJ} = \varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ on the intersections of the charts is established.

Using the example of the manifold Gr(2, 4), detailed calculations are performed to demonstrate the explicit form of the transition functions between different coordinate charts. It is shown that these functions are expressed as rational mappings with non-zero denominators, which ensures their correctness and smoothness.

The obtained results are of significant importance for applications in differential geometry, algebraic topology, and mathematical physics, where Grassmannian manifolds play a key role.

Keywords: Grassmannian manifold, smooth atlas, transition functions, differential geometry, coordinate charts.