УДК 517.968

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕННИ-ЛЮК ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Рахмонов Ф. Д.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
farxod_frd@bk.ru
Холтураев Ф. С.
Ташкентский университет архитектуры и строительства
Fedya-spets@mail.ru

РЕЗЮМЕ.

Представляют большой интерес с точки зрения приложений уравнения типа Бенни-Люка [1-20].

В прямоугольной области рассматривается уравнение в частных производных типа Бенни-Люк четного высокого порядка со смешанными условиями. Изучаются вопросы однозначной разрешимости данной задачи. Решение изучается в классе регулярных функций. Используются метод рядов Фурье разделения переменных. При доказательстве существования и единственности коэффициента Фурье от неизвестной функции применяется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающего отображения.

Ключевые слова: Уравнение типа Бенни-Люка, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, краевая задача, существования и единственности решения.

Постановка задачи. Исследуется классическая разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого четного порядка. В прямоугольной области $\Omega = \{(t,x) \mid 0 < t < T\,,\ 0 < x < l\}$ рассматривается уравнение вида

$$D_{t,\,x}^{2+4\,k}\,U(t,x) = \nu\,\int_0^T K\,(t\,,\,s)\,U\,(s,x)\,d\,s + \alpha\,(t)\,\beta\,(x), \tag{1}$$

где

$$D_{t,\,x}^{2+4\,k} = \frac{\partial^2}{\partial\,t^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,t^2}\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial\,x^{2\,k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial\,x^{4\,k}}\right] - \omega\,(t)\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial\,x^{2\,k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial\,x^{4\,k}}\right],$$

T и l заданные положительные действительные числа, k заданное фиксированное положительное целое число, $\omega\,(t),\ \alpha\,(t\,) \in C\ (\Omega_T)$ – заданные непрерывные функции, $\Omega_T \equiv [0\,;\,T]$, $\Omega_l \equiv [0\,;\,l]$, $\beta\,(x)\ \in C\ (\Omega_l)$ – заданная функция, $0 \neq K\,(t\,,\,s) = \sum_{i=1}^{p} a_i\,(t\,)\,b_i\,(s)\,,\ a_i\,(t\,)\,,\,b_i\,(s) \in C\,[\,0\,;\,T\,]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i\,(t\,)\,,\ \ i = \overline{1\,,\,p}$ и система функций $b_i\,(s)\,,\ \ i = \overline{1\,,\,p}$ являются линейно независимыми. Мы предполагаем, что для заданной функции $\beta\,(x)$ верны следующие граничные условия

$$\beta(0) = \beta(l) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\beta(0) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\beta(l) = ... = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}}\beta(0) = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}}\beta(l).$$

Найдем функцию $U\,(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующим условиям

$$U\,(T,x) = \varphi_1(x), \quad 0 \le x\ \le l\,, \tag{2}$$

$$U_t\,(T,\,x) = \varphi_2\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l \tag{3}$$

и условиям типа Дирихле для $0 \le t \le T$

$$u(t,0) = u(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}u(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}u(t,l) =$$

$$= ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t,0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t,l) = 0, \tag{4}$$

класс функций

$$U(t,x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,4k}_{t,x}(\Omega) \cap C^{2+2k}_{t,x}(\Omega), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x)\,(i = 1,\,2)$ - заданные гладкие функции и имеют место условия периодичности

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i(l) =$$

$$= ... = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi_i(l) = 0, \;\; i = 1, 2.$$

Разложение решения задачи (1)-(5) в ряд Фурье. Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(5) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\vartheta_n(x), \tag{6}$$

где

$$u_n(t) = \int_0^l U(t,\,x)\,\vartheta_n(x)\;dx, \quad \vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\;\sin\frac{\pi n}{l}\,x. \tag{7}$$

Предполагаем, что следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\,\beta_n\,\vartheta_n(x)\,, \tag{8}$$

где

$$\beta_n = \int_0^l \beta(x)\,\vartheta_n(x)\,dx. \tag{9}$$

Подставляя ряды Фурье (6) и (9) в уравнение в частных производных (1), получаем счетную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной t

$$u_n''(t) - \;\lambda_n\omega(t)\,u_n(t) =$$

$$= \frac{1}{1 + \mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}}\left(\nu\int_0^T \sum_{i=1}^{p} a_i(t)\,b_i(s)\;u_n(s)\,ds + \alpha(t)\beta_n\right), \tag{10}$$

где $\lambda_n = \frac{\mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}, \quad \mu_n^{2k} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}.$

Счетная система интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (10) решается обычным методом интегрирования

$$u_n(t) = A_{1,n} + A_{2,n}\,t + \gamma_n(t), \tag{11}$$

где $A_{1,n}$ и $A_{2,n}$– произвольные постоянные,

$$\gamma_n(t) = \delta_n(t) + \sum_{i=1}^{p} h_{1\,i,n}(t)\,\tau_{i,n} + \beta_n\,h_{2,n}(t), \tag{12}$$

$$\delta_n(t) = \lambda_n\int_0^t (t-s)\,\omega(s)\,u_n(s)\,ds,$$

$$\tau_{i,n} = \int_0^T b_i(s)\;u_n(s)\,ds, \tag{13}$$

$$h_{1\,i,n}(t) = \int_0^t \frac{a_i(s)\,(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\,ds, \;\; h_{2,n}(t) = \int_0^t \frac{\alpha(s)\,(t-s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\,ds.$$

С помощью коэффициентов Фурье (7) интегральные условия (2) и (3) записываются в следующем виде

$$u_n(T)=\int_0^l U(T,x)\,\vartheta_n(x)\,dx=\int_0^l \varphi_1(x)\,\vartheta_n(x)\,dx=\varphi_{1,n}\,, \tag{14}$$

$$u'_n(T)=\int_0^l U_t(T,x)\,\vartheta_n(x)\,dx=\int_0^l \varphi_2(x)\,\vartheta_n(x)\,dx=\varphi_{2,n}\,. \tag{15}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов интегрирования $A_{1,n}$ и $A_{2,n}$ в (11), воспользуемся условиями (14) и (15). Тогда с учетом (12) получим

$$u_n(t)=\varphi_{1,n}D_0+\varphi_{2,n}D_1(t)+\sum_{i=1}^{p}D_{2i,n}(t)\,\tau_{in}+$$

$$+\beta_n D_{3,n}(t)+\int_0^T H_n(t,s)\,u_n(s)\,ds, \tag{16}$$

где коэффициенты Фурье β_n определяются с помощью формулы (),

$$D_0=\frac{1}{1+T},\quad D_1(t)=\frac{t}{1+T}-\frac{2+T}{2\,(1+T)^2},$$

$$D_{2i,n}(t)=h_{1i,n}(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_{1i,n}(t)\,dt+h_{1i,n}(T)\right]-$$

$$-\left(\frac{2+T}{2\,(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\left[\int_0^T h'_{1i,n}(t)\,t\,dt+h'_{1i,n}(T)\right],$$

$$D_{3,n}(t)=h_{2,n}(t)-\frac{1}{1+T}\left[\int_0^T h_{2,n}(t)\,dt+h_{2,n}(T)\right]-$$

$$-\left(\frac{2+T}{2\,(1+T)^2}+\frac{t}{1+T}\right)\left[\int_0^T h'_{2,n}(t)\,t\,dt+h'_{2,n}(T)\right],$$

$$H_n(t,s)=\begin{cases} H_{1,n}(s), & t\le s\le T,\\ H_{2,n}(t,s), & 0\le s<t,\end{cases}$$

$$H_{1,n}(s)=-\frac{\lambda_n}{1+T}\left[\frac{2\,(T-s)+(T-s)^2}{2}+\left(\frac{2+T}{2\,(1+T)}+s\right)(T-s+1)\right]\omega(s),$$

$$H_{2,n}(t,s)=H_{1,n}(s)+\lambda_n(t-s)\,\omega(s).$$

Подставляя представление (16) в обозначение (13), получаем систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$\tau_{i,n}-\nu\sum_{j=1}^{p}\tau_{j,n}\,\Phi_{i,j,n}=\varphi_{1,n}\,\Psi_{1i,n}+\varphi_{2,n}\,\Psi_{2i,n}+\beta_n\Psi_{3i,n}+\Psi_{4i,n}(u),\quad i=\overline{1,p}, \tag{17}$$

где

$$\Phi_{ij,n}=\int_0^T b_i(s)\,D_{2j,n}(s)\,ds\,,\quad \Psi_{1i}=D_0\int_0^T b_i(s)\,ds,$$

$$\Psi_{2i}=\int_0^T b_i(s)\,D_1(s)\,ds,\quad \Psi_{3i,n}=\int_0^T b_i(s)\,D_{3,n}(s)\,ds,\Psi_{4i,n}(u)=$$

$$\int_0^T b_i(s)\int_0^T H_n(s,\theta)\,u_n(\theta)\,d\theta\,ds.$$

Отметим, что из линейной независимости системы функций $a_i(t)$, $i=\overline{1,p}$ и системы функций $b_i(s)$, $i=\overline{1,p}$ следует, что $\Phi_{ij,n}\neq 0$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$Z_{1,n}(\nu)=\begin{pmatrix} 1-\nu\Phi_{11} & \nu\Phi_{12} & \ldots & \nu\Phi_{1p}\\ \nu\Phi_{21} & 1-\nu\Phi_{22} & \ldots & \nu\Phi_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu\Phi_{p1} & \nu\Phi_{p2} & \ldots & 1-\Phi_{pp}\end{pmatrix},$$

$$Z_{ri,n}(\nu)=\begin{pmatrix} 1-\nu\Phi_{11} & \ldots & \nu\Phi_{1(i-1)} & \Psi_{r1} & \nu\Phi_{1(i+1)} & \ldots & \nu\Phi_{1p}\\ \nu\Phi_{21} & \ldots & \nu\Phi_{2(i-1)} & \Psi_{r2} & \nu\Phi_{2(i+1)} & \ldots & \nu\Phi_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu\Phi_{p1} & \ldots & \nu\Phi_{p(i-1)} & \Psi_{rp} & \nu\Phi_{p(i+1)} & \ldots & 1-\nu\Phi_{pp}\end{pmatrix},$$

где $\Phi_{ij}=\Phi_{ij,n}$, $i=\overline{1,p}$, $r=1,2,3,4$.

СССАУ (17) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется следующее условие не вырожденности для определителя Фредгольма

$$\Delta_{1,n}(\nu)=\det\, Z_{1,n}(\nu)\neq 0. \tag{18}$$

Определитель $\Delta_{1,n}(\nu)$ в (18) есть многочлен относительно ν степени не выше p. Уравнение $\Delta_{1,n}(\nu)=0$ имеет не более p различных корней. Их обозначим через ν_q ($l=\overline{1,\ell}$, $1\le\ell\le p$). Эти значения называются характеристическими числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Примем следующее обозначение

$\aleph_1=\{\nu:\ \nu\neq\nu_q,\ |\Delta_{1,n}(\nu)|>0\}$. На спектральном множестве $\aleph_1$ решения СССАУ (17) записываются в виде

$$\tau_{i,n}=\varphi_{1,n}\frac{\Delta_{1i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}+\varphi_{2,n}\frac{\Delta_{2i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}+\beta_n\frac{\Delta_{3i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}+\frac{\Delta_{4i,n}(\nu,u)}{\Delta_{1,n}(\nu)},\quad \nu\in\aleph_1, \tag{19}$$

где $\Delta_{ri,n}(\nu)=\det\ Z_{ri,n}(\nu)$, $i=\overline{1,p}$, $r=1,2,3,4$.

Подставляя решение (19) в представление (16), получаем

$$u_n(t)=I\ (t;u_n)\equiv\varphi_{1,n}E_{1,n}(t)+\varphi_{2,n}E_{2,n}(t)+\beta_n E_{3,n}(t)+$$

$$+E_{4,n}(t,u)+\int_0^T H_n(t,s)\,u_n(s)\,ds,\quad \nu\in\aleph_1, \tag{20}$$

$$E_{1,n}(t)=D_0+\sum_{i=1}^{p}\frac{\Delta_{1i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}D_{2,n}(t),E_{2,n}(t)=D_1(t)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\Delta_{2i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}D_{2,n}(t),$$

$$E_{3,n}(t)=D_{3,n}(t)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\Delta_{3i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)}D_{2,n}(t),E_{4,n}(t,u)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\Delta_{4i,n}(\nu,u)}{\Delta_{1,n}(\nu)}D_{2,n}(t).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (20) неизвестной функции в ряд Фурье (6), получаем

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\ [\varphi_{1,n}E_{1,n}(t)+\varphi_{2,n}E_{2,n}(t)+\beta_n E_{3,n}(t)+$$

$$\left.+E_{4,n}(t,u)+\int_0^T H_n(t,s)\,u_n(s)\,ds\right],\quad \nu\in\aleph_1. \tag{21}$$

Ряд Фурье (21) является формальным решением краевой задачи (1)-(5).

Однозначная разрешимость счетной системы (20). Предполагается, что справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned} !_1&=\max_{t\in\Omega_T}\max_n\{|E_{1,n}(t)|;|E_{2,n}(t)|;|E_{3,n}(t)|\}<\infty,\\ !_2&=\max_{t\in\Omega_T}\max_n\left\{\left|E''_{1,n}(t)\right|;\left|E''_{2,n}(t)\right|;\left|E''_{3,n}(t)\right|\right\}<\infty,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} !_3 &= \max\left\{ \int_0^T \| H(t,s) \|_{B_2(T)} ds\,; \;\; \int_0^T \| H''(t,s) \|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \\ !_4 &= \max\left\{ \int_0^T \left\| \bar{H}(t,s) \right\|_{B_2(T)} ds; \;\; \int_0^T \left\| \bar{H}''(t,s) \right\|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \end{aligned} \tag{23}$$

где $F_{n,m}(t) = \frac{D_{2,n,m}(t)}{\Delta_{1,n,m}(\nu)}$, $\bar{H}_n(t,s) = n^{4k} H_n(t,s)$.

Условия гладкости. Пусть для функций $\varphi_i(x)$, $\beta(x) \in C^{4k}(\Omega_l)$, в области Ω_l существуют кусочно-непрерывные производные порядка $4k+1$.Тогда, интегрируя по частям функций (9), (14) и (15) $4k+1$ раз по каждой переменной E, получаем следующие соотношения

$$|\beta_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \frac{\left|\beta_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}, \quad |\varphi_{i,n}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \frac{\left|\varphi_{i,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}, \; i = 1,2, \tag{24}$$

где

$$\beta_n^{(4k+1)} = \int_0^l \frac{\partial^{4k+1}\beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \vartheta_n(x)\, dx, \quad \varphi_{i,n}^{(4k+1)} = \int_0^l \frac{\partial^{4k+1}\varphi_i(x)}{\partial x^{4k+1}} \vartheta_n(x)\, dx, \;\; i = 1,2.$$

Здесь справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\beta_n^{(4k+1)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+1}\beta(x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx, \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{i,n}^{(4k+1)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+1}\varphi_i(x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx, \;\; i = 1,2. \tag{26}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости и (22), (23). Если

$$\rho = C_1 C_3 \sum_{i=1}^{p} \left\| \bar{\Delta}_{4i}(\nu) \right\|_{\ell_2} \int_0^T |b_i(s)| \; ds + C_3 < 1,$$

то для регулярных значений параметра $\nu \in \aleph_1$ ССФИУ (20) однозначно разрешима в пространстве $B_2(T)$, где $\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu,u) = \det\; \bar{Z}_{4i,n}(\nu,u)$, $i = \overline{1,\,p}$,

$$\bar{Z}_{4i,n}(\nu) = \begin{pmatrix} 1-\nu\Phi_{11} & \dots & \nu\Phi_{1(i-1)} & 1 & \nu\Phi_{1(i+1)} & \dots & \nu\Phi_{1p} \\ \nu\Phi_{21} & \dots & \nu\Phi_{2(i-1)} & 1 & \nu\Phi_{2(i+1)} & \dots & \nu\Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu\Phi_{p1} & \dots & \nu\Phi_{p(i-1)} & 1 & \nu\Phi_{p(i+1)} & \dots & 1-\nu\Phi_{pp} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,n}.$$

Искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = \varphi_{1,n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \beta_n E_{3,n}(t), \\ u_n^{r+1}(t) = I_2\;(t;\, u_n^r), \;\; r = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Доказательство. Мы используем метод сжимающих отображений в пространстве $B_2(T)$. С учетом оценок (22), (23) и формул (24), применяем неравенство Коши-Буняковского и затем применяем неравенства Бесселя (25) и (26). Тогда получаем из заданного итерационного процесса, что справедлива следующая оценка для нулевого приближения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in\Omega_T} \left| u_n^0(t) \right| \le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\varphi_{1,n}| + |\varphi_{2,n}| + |\beta_n| \right] \le$$

$$\le C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\varphi_{1,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\varphi_{2,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\beta_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}} \right] \le$$

$$\leq C_1\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4\,k+1}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4\,k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4\,k+1}}}\left[\left\|\frac{\partial^{4\,k+1}\varphi_1(x)}{\partial\,x^{4\,k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^{4\,k+1}\varphi_2(x)}{\partial\,x^{4\,k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}+\left\|\frac{\partial^{4\,k+1}\beta(x)}{\partial\,x^{4\,k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}\right]<\infty. \tag{27}$$

Так как

$$E_{4,n}(t,u)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\Delta_{4\,i,n}(\nu,u)}{\Delta_{1,n}(\nu)}\,D_{2,n}(t)=\sum_{i=1}^{p}\Delta_{4\,i,n}(\nu,u)\,F_n(t), \tag{28}$$

где $F_n(t)=\frac{D_{2,n}(t)}{\Delta_{1,n}(\nu)}$, то сначала нам надо получить оценку для $\Delta_{4\,i,n}\,(\nu,u^r)-\Delta_{4\,i,n}\,\left(\nu,u^{r-1}\right)$:

$$\left|\,\Delta_{4\,i,n}\,(\nu,u^r)-\Delta_{4\,i,n}\,\left(\nu,u^{r-1}\right)\right|\leq\left|\,\Psi_{4\,i\,,n}(u^r)-\Psi_{4\,i\,,n}(u^{r-1})\,\right|\cdot\left|\,\bar{\Delta}_{4\,i,n}(\nu)\,\right|\leq$$

$$\leq\left|\,\bar{\Delta}_{4\,i,n}(\nu)\,\right|\int_0^T|\,b_i\,(s)\,|\int_0^T|\,H_n(s,\theta)\,|\cdot\left|\,u_n^r(\theta)-u_n^{r-1}(\theta)\,\right|\,d\,\theta\,d\,s, \tag{29}$$

где $\bar{\Delta}_{4\,i,n}(\nu,u)=\det\ \bar{Z}_{4\,i,n}(\nu,u)\,,\ i=\overline{1\,,\,p}\,,$

$$\bar{Z}_{4\,i,n}(\nu)=\begin{pmatrix}1-\nu\,\Phi_{1\,1} & \ldots & \nu\,\Phi_{1\,(i-1)} & 1 & \nu\,\Phi_{1\,(i+1)} & \ldots & \nu\,\Phi_{1\,p}\\ \nu\,\Phi_{2\,1} & \ldots & \nu\,\Phi_{2\,(i-1)} & 1 & \nu\,\Phi_{2\,(i+1)} & \ldots & \nu\,\Phi_{2\,p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu\,\Phi_{p\,1} & \ldots & \nu\,\Phi_{p\,(i-1)} & 1 & \nu\,\Phi_{p\,(i+1)} & \ldots & 1-\nu\,\Phi_{pp}\end{pmatrix},$$

$\Phi_{i\,j}=\Phi_{i\,j,\,n}$. Учитывая представления (28) и оценку (29), аналогично оценке (27), для произвольной разности приближения получим, что справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|\,u_n^{r+1}(t)\,-u_n^r(t)\,\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left[\left|\,E_{4,n}(t,u^r)-E_{4,n}(t,u^{r-1})\,\right|+\right.$$

$$\left.+\int_0^T|H_n\,(t,s)\,|\cdot\left|\,u_n^r\,(s)-u_n^{r-1}\,(s)\,\right|\,d\,s\right]\leq\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left[|\,F_n(t)\,|\sum_{i=1}^{p}\left|\,\bar{\Delta}_{4\,i,n}(\nu)\,\right|\times\right.$$

$$\times\int_0^T|\,b_i\,(s)\,|\int_0^T|\,H_n\,(s,\theta)\,|\cdot\left|\,u_n^r\,(\theta)-u_n^{r-1}\,(\theta)\,\right|\,d\,\theta\,d\,s+$$

$$\left.+\int_0^T|H_n\,(t,s)\,|\cdot\left|\,u_n^r\,(s)-u_n^{r-1}\,(s)\,\right|\,d\,s\right]\leq\|\,F(t)\,\|_{B_2\,(T)}\sum_{i=1}^{p}\left\|\,\bar{\Delta}_{4\,i}(\nu)\,\right\|_{\ell_2}\times$$

$$\times\int_0^T|\,b_i\,(s)\,|\ \,d\,s\int_0^T\|\,H\,(t,s)\,\|_{B_2(T)}\,\left\|\,u^r\,(s)-u^{r-1}\,(s)\,\right\|_{B_2(T)}\,d\,s+$$

$$+\int_0^T\|\,H\,(t,s)\,\|_{B_2(T)}\,\left\|\,u^r\,(s)-u^{r-1}\,(s)\,\right\|_{B_2(T)}\,d\,s\leq\rho\cdot\left\|\,u^r\,(t)-u^{r-1}\,(t)\,\right\|_{B_2(T)}, \tag{30}$$

где

$$\rho=C_3\,\|\,F(t)\,\|_{B_2\,(T)}\sum_{i=1}^{p}\left\|\,\bar{\Delta}_{4\,i}(\nu)\,\right\|_{\ell_2}\int_0^T|\,b_i\,(s)\,|\ \,d\,s+C_3.$$

Согласно условию теоремы 1, $\rho<1$. Следовательно, из оценки (30) следует, что оператор в правой части ССФИУ (20) сжимающий. Из оценок (27) и (30) следует, что существует единственная неподвижная точка $u(t)\in B_2(T)$, которая является решением ССФИУ (20) в пространстве $B_2(T)$ для регулярных значений параметра $\nu\in\aleph_1$. Теорема 1 доказана.

Основная неизвестная функция

Теорема 2. Неизвестная функция $U\,(t,x)$ определяется с помощью ряда (21). При этом данная функция непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u\,(t)\in B_{2}\,(T)$, формул (22)-(26) и оценок (27), (30), получаем для функции (21) оценку

$$|\,U\,(t,\,x)\,|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\,\vartheta_{\,n}(x)\,|\cdot|\,\varphi_{1n}\,E_{1,n}(t)+\varphi_{2,\,n}\,E_{2,n}(t)+$$

$$+\beta_{\,n}E_{\,3,n}(t)+E_{\,4,n}(t,u)+\int_{0}^{T}H_{n}\,(t,s)\,u_{n}\,(s)\,d\,s\,\Bigg|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{C_{1}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4\,k+1}\left(\frac{2}{l}\right)^{4\,k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4\,k+1}}}\left[\left\|\frac{\partial^{4\,k+1}\,\varphi_{1}(x)}{\partial\,x^{4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}+\left\|\frac{\partial^{\,4\,k+1}\,\varphi_{2}(x)}{\partial\,x^{\,4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{\partial^{\,4\,k+1}\,\beta(x)}{\partial\,x^{\,4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}\right]+\|\,F(t)\,\|_{\,B_{\,2}\,(T)}\sum_{i=1}^{p}\|\,\Delta_{4\,i}(\nu,u)\,\|_{\,\ell_{\,2}}+C_{3}\,\|\,u\,(t)\,\|_{B_{2}(T)}\right\}<\infty. \tag{31}$$

Из (31) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (21). Теперь функцию (21) дифференцируем нужное число раз

$$U_{\,t\,t}\,(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{\,n}\,(x)\,\left[\varphi_{1,n}\,E''_{1,n}(t)+\varphi_{\,2,\,n}\,E''_{2,n}(t)+\right.$$

$$\left.+\beta_{\,n}\,E''_{3,n}(t)+E''_{4,n}(t,u)+\int_{0}^{T}H''_{n}\,(t,s)\,u_{n}\,(s)\,d\,s\right], \tag{32}$$

$$\frac{\partial^{\,4\,k}}{\partial\,x^{4\,k}}U(t,\,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi\,n}{l}\right)^{4\,k}\vartheta_{n}(x)\,[\varphi_{1n}\,E_{1,n}(t)+\varphi_{2,n}\,E_{2,n}(t)+$$

$$\left.+\beta_{\,n}\,E_{\,3,n}(t)+E_{\,4,n}(t,u)+\int_{0}^{T}H_{n}\,(t,s)\,u_{n}\,(s)\,d\,s\right], \tag{33}$$

Аналогично () и (), мы определим следующую функцию в виде разложения в ряды Фурье

$$\frac{\partial^{\,2\,k+2}U\,(t,x\,)}{\partial\,t^{\,2}\,\partial\,x^{\,2\,k}}.$$

Доказательство сходимости ряда Фурье (32) сходится с доказательством сходимости ряда (21). Мы покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (33). С этой целью мы используем формулы (22)-(26). Применяем неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя. Тогда получаем

$$\left|\,\frac{\partial^{\,4\,k}}{\partial\,x^{\,4\,k}}U(t,\,x)\right|\le\frac{\pi^{\,4\,k}}{l^{\,4\,k}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\,4\,k}\,\,|\,u_{n}(t\,)\,|\cdot|\,\vartheta_{\,n}(x)\,|\,\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{C_{1}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4\,k+1}\left(\frac{2}{l}\right)^{4\,k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}}\left[\left\|\frac{\partial^{4\,k+1}\,\varphi_{1}(x)}{\partial\,x^{4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}+\left\|\frac{\partial^{\,4\,k+1}\,\varphi_{2}(x)}{\partial\,x^{\,4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{\partial^{\,4\,k+1}\,\beta(x)}{\partial\,x^{\,4\,k+1}}\right\|_{L_{\,2}(\Omega_{l})}\right]+\|\,F(t)\,\|_{\,B_{\,2}\,(T)}\sum_{i=1}^{p}\|\,\Delta_{4\,i}(\nu,u)\,\|_{\,\ell_{\,2}}+C_{3}\,\|\,u\,(t)\,\|_{B_{2}(T)}\right\}<\infty.$$

Аналогично (34) устанавливаются следующие утверждения

$$\left|\,\frac{\partial^{\,2\,k+2}U\,(t\,,\,x\,)}{\partial\,t^{\,2}\,\partial\,x^{\,2\,k}}\,\right|<\infty,$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J., Luke J.C.: Interactions of permanent waves of finite amplitude. Journal Math. Physics, 43, 1964, pp.309-313.

2. Gordeziani D.G., Avilishbili G.A. Solving the nonlocal problems for one-dimensional medium oscillation, Math. Model., 12 (1), 2000, pp.94-103 (in Russian).

3. Yuldashev T.K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel. Ukrainian Math. J. 68 (8), 2016, pp.1278-1296.

4. Yuldashev T.K. Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type. Differential Equations, 54 (10), 2018, pp.1384-1393.

5. Yuldashev T.K. On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument. Lobachevskii Journal of Math. 41 (1), 2020, pp. 111-123.

6. Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation. Differential Equations, 56 (12), 2020, pp.1550-1563.

7. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial di?erential equations of fourth order. Bulletin of the Karaganda university-Mathematics 97 (1), 2020, pp.6-16.

8. Assanova A. An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order. Turkish Journal of Math. 43 (4), 2019, pp.1967-1978.

9. Denisov, A.M., Efimov, A.A. Iterative method for the numerical solution of an inverse coefficient problem for a system of partial differential equations. Differential Equations, 56 (7), 2000, pp.900-909.

10. Heydarzade N. A. On one nonlocal inverse boundary problem for the second-order elliptic equation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 40 (4), 2020, pp.97-109.

11. Isgenderova G.N., Huseynova A. F. On solvability of an inverse boundary value problem for the pseudo hyperbolic equation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 39 (4), 2019, pp.72-83.

12. Mamedov Kh.R. Uniqueness of the solution to the inverse problem of scattering theory for the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition. Math. Notes 74 (1), 2003, pp.136-140.

13. Romanov V.G. Inverse phaseless problem for the electrodynamic equations in an anisotropic medium. Doklady Math. 100 (2), 2019, pp.495-500.

14. Romanov V.G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 26 (5), 2018, pp.681-688.

15. Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear Benney–Luke type integro-differential equations with degenerate kernel. Russian Mathematics 60 (9), 2016, pp.53-60.

16. Yuldashev T.K. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations. Axioms 9 (2), ID 45, 2020, pp.21.

17. Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a boundary value problem for Benney–Luke type differential equation with nonlinear function of redefinition and integral conditions. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41 (1), 2021, pp.172-183.

18. Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a Benney–Luke type Differential Equation with Nonlinear Boundary Value Conditions. Lobachevski Journal of Math. 2021. 42 (15). 3761-3772.

19. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type di?erential equation. AIP Conference Proceedings. 2021. 2365 (060004). 1-20.

20. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения. Бюллетень Института математики , Vol. 4 (6), 2021, стр.100-112.

21. Рахмонов Ф.Д. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром. Бюллетень Института математики, Vol. 5 (1), 2022, стр.88-101.

22. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D., Ismoilov A.I. Integro-differential equation of Boussinesk with integral conditions and with a small parameter for mixed derivatives. Itogi Nauki. VINITI, Moscow, 2022. 211. P. 114-130. (in Russian).

23. Rakhmonov F. D. Identification of sources in a boundary value problem for Benney-Luke type diferential equation with integral conditions. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and

Natural Sciences. Tashkent. Uzbekistan. 2023. 6 (3). P. 141-155.

24. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка. Журнал "Вестник НУУз". Ташкент. Узбекистан. 2023. No 1/1. P. 69-78.

25. Onur Alp Ilhan, Danyal Soyba, Shakirbay G Kasimov, Farhod D Rakhmanov, Solvability of mixed problems for heat equations with two nonlocal conditions. Journal Mathematica Slovaca. De Gruyter. 2022. 72 (6). P. 1573-1584.

26. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Mixed problem for an integro-di?erential equation with a multidimensional pseudoparabolic operator and nonlinear deviation. Itogi Nauki. VINITI, Moscow, 2021. 201. P. 33-43. (in Russian).

27. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal Inverse Problem for a Pseudoheperbolic-Pseudoelliptic Type Differential Equation. Uzbekistan-Malaysia international online conference "Computational Models and Technologies (CMT2020)", 24-25 August, 2020.

28. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения. Журнал "Вестник НУУз". Ташкент. Узбекистан. 2024. No 2/1. P. 152-168.

RESUME

In a rectangular domain, a partial differential equation of the Benney-Luke type of even high order with mixed conditions is considered. The issues of unique solvability of this problem are studied. The solution is studied in the class of regular functions. The Fourier series method of separation of variables is used. When proving the existence and uniqueness of the Fourier coefficient of an unknown function, the method of successive approximations is used in combination with the method of contraction mapping.

Key words: Benny-Luke type equation; integro-differential equation; degenerate kernel; boundary value problem; existence and uniqueness of a solution.

REZYUME

Bu masalada to‘g‘ri to‘rtburchak sohada yuqori tartibli aralash shartli Benney-Lyuk turidagi xususiy hosilali differentsial tenglama ko‘rib chiqiladi. Ushbu muammoning o‘ziga xos yechilishi masalalari o‘rganiladi. Yechim regulyar funksiyalar sinfida o‘rganiladi. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli ya’ni Fur’e qatori usuli qo‘llaniladi. Noma’lum funksiya Fur’e koeffisentining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda ketma-ket yaqinlashish usuli qisqartirib akslantirish usuli bilan birgalikda qo‘llaniladi.

Kalit so‘z Benney-Lyuk tipidagi tenglama; integro-differensial tenglama; aynigan yadro; chegaraviy masala; yechimning mavjudligi va yagonaligi.