УДК 517.925

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ ОПИСЫВАЕМОЙ НЕОДНОРОДНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ УПРУГОСТИ

Рахимов А.М.
Каршинский государственный университет, Карши
abrorraximov2094@gmail.com
Имомназаров Б.Х.
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский госуниверситет, Новосибирск, Россия,
buned11998.07@mail.ru
Искандаров И.К.
Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия,
iskandarovilkham@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости описываемое тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении. Получено решение данной задачи Коши на основе метода характеристик в виде формулы Даламбера. Показано влияние пористости на распространение акустических волн.

Ключевые слова: математическая модель, пористая среда, задача Коши, формула Даламбера, прямая задача, медленная волна, пористость.

Введение

В прикладных задачах теории волновых процессов часто приходится иметь дело с пористостью, флюидонасыщенностью среды и гидродинамическим фоном. Аналогичные вопросы возникают в разведочной геофизике при разработке нефтяных скважин и выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью оптимизации добычи. Такие вопросы возникают при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны для прогноза землетрясений [1-3].

В геофизике кинетические параметры горных пород, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, они также содержатсведения о литологии пород и характере их границ, трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений, а также о составе и фазовом состоянии флюидов-заполнителей порового пространства коллекторов. Математические моделирование волновых процессов позволяют определить значения скоростей распространения и коэффициентов поглощения упругих сейсмических волн в зависимости от вещественного состава флюидозаполненного коллектора, его строения и влияния окружающей среды.

Выявленные особенности затухания сейсмических волн в трещиновато-пористых средах с одновременным проявлением множественных электросейсмических эффектов не удается согласовать с простейшими моделями идеальной теории упругости и среды типа Френкеля-Био. Реальные горные породы являются многофазными, электропроводящими, трещиноватыми, пористыми и т. д [4-11].

В работе [9] предложена математическая модель распространения нелинейных волн в насыщенной жидкостью пористой упругодеформируемой среде. Модель основана на трех основных принципах: выполнения законов сохранения, принцип инвариантности группа вращений Галилея, согласованность уравнений движения насыщающей жидкости с условиями термодинамического равновесия:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u}_1 + \rho_l \mathbf{u}_2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}\mathbf{j}\right) = 0, \rho = \rho_l + \rho_s,$$

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l \mathbf{u}_2) = 0,$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj}\partial_i u_{1j} + g_{ij}\partial_k u_{1j} + u_{1j}\partial_j g_{ik} = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \rho_s = const\sqrt{\det(g_{ik})},$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k\left(\rho_s u_{1i}u_{1k} + \rho_s u_{2i}u_{2k} + p\delta_{ik} + h_{ij}g_{jk}\right) = 0,$$

$$Q_k = \left(\hat{\mu} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{TS}{\rho}\right) j_k + \rho_s(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)u_{1k} + u_{1i}h_{km}g_{mi},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2, \nabla)\,\mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}.$$

Здесь u_1- скорость движения упругой пористой среды; u_2- скорость насыщающей жидкости, $\rho = \rho_l + \rho_s$, ρ_s, ρ_l- плотность континуума, парциальная плотность пористого тела, парциальная плотность жидкости соответственно; $g_{ik}-$ метрический тензор упругой деформации; $h_{ik}\breve{}$ тензор напряжений; e, $S\breve{}$ энергия и энтропия единицы объема; $\mu\breve{}$ химический потенциал; $T-$ температура; $p-$ давление, j_0- относительный импульс. При этом выполняется первое начало термодинамики для рассматриваемой системы

$$de_0 = TdS + \hat{\mu}d\rho + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, d\mathbf{j}_0) + \frac{1}{2}h_{ik}dg_{ik}.$$

В работе [12] получена формула решения задачи Коши для однородной системы пороупругости. В данной работе получена формула решения задачи Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости, которая описывается тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волн в пористой среде в обратимом приближении с учетом массовых сил F, описываемый одномерной неоднородной системой уравнений [9, 13, 14]

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - a_{11}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = F_1(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - a_{21}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - a_{22}\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = F_2(x,t), \tag{1}$$

где парциальные плотности $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$, ρ_s^f и ρ_l^f- физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно, $d_0\breve{}$ пористость,

$$a_{11} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s} + \left(\rho\alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho^2}\right)\rho_s - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho},$$

$$a_{12} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho^2} - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho_s}\right)\frac{\rho_l}{\rho},$$

$$a_{21} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho},$$

$$a_{22} = \left(\rho^2\alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}\right)\frac{\rho_l}{\rho},$$

α_3, λ, $\mu-$ упругие параметры пористой среды [8, 9].

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений пороупругости (1), (2) со следующими данными Коши [10]:

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x),\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x) \tag{3}$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi_2(x),\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_2(x) \tag{4}$$

Методология исследования

Удобно ввести новые функции $\tilde{u}_1$, $\tilde{F}_1$ и $\tilde{u}_2$, $\tilde{F}_2$ вместо u_1, F_1 и u_2, F_2 по формуле

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} c_{l_1}^2 - a_{22} & c_{l_2}^2 - a_{22} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix},$$

$$c_{l_1}^2 = B_*\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}}\right), c_{l_2}^2 = B_*\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}}\right),$$

$$B_* = \frac{\alpha_3\rho^2}{2} + \frac{\lambda + 2\mu/3}{2\rho}\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}\frac{\rho}{\rho_s} - 1\right),$$

$$b_* = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho}\right)\left[\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}\left(1 - \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\lambda + 2\mu}\right) + \alpha_3\rho^2\right].$$

Тогда система уравнений пороупругости (1), (2) эквивалентна двум неоднородным уравнениям струны

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} - c_{l_1}^2\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} = \tilde{F}_1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial t^2} - c_{l_2}^2\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x^2} = \tilde{F}_2, \tag{6}$$

Рассмотрим неоднородные системы (5), (6) с нулевыми данными Коши:

$$\tilde{u}_1|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t.}\right|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$\tilde{u}_2|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

Функции

$$v_1(t, x, \tau) = \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_{x - c_{l_1}t + c_{l_1}\tau}^{x + c_{l_1}t - c_{l_1}\tau} \tilde{F}_1(\tau, \xi)d\xi,$$

$$v_2(t, x, \tau) = \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_{x - c_{l_2}t + c_{l_2}\tau}^{x + c_{l_2}t - c_{l_2}\tau} \tilde{F}_2(\tau, \xi)d\xi$$

являются решениями однородной системы

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c_{l_1}^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - c_{l_2}^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, \tag{10}$$

с начальными данными Коши

$$v_1|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \tilde{F}_1(\tau, x), \tag{11}$$

$$v_2|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \tilde{F}_2(\tau, x). \tag{12}$$

А функции

$$\tilde{u}_1(t,x) = \int\limits_0^t v_1(t,x,\tau)d\tau, \quad \tilde{u}_2(t,x) = \int\limits_0^t v_2(t,x,\tau)d\tau \tag{13}$$

являются решениями задачи (5) - (8) согласно принципу Дюамеля.

Решение задачи Коши для неоднородной системы пороупругости во всем пространстве в одномерном случае обобщают полученные формулы из [12] для однородной системы и представляется в виде:

$$u_1(t,x) = \frac{c_{l_1}^2 - a_{22}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_1(x+c_{l_1}t) + \varphi_1(x-c_{l_1}t) + \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t}\psi_1(\xi)d\xi\right] -$$

$$\frac{(c_{l_1}^2 - a_{22})(c_{l_2}^2 - a_{22})}{2a_{21}\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_2(x+c_{l_1}t) + \varphi_2(x-c_{l_1}t) - \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t}\psi_2(\xi)d\xi\right] +$$

$$\frac{(c_{l_1}^2 - a_{22})(c_{l_2}^2 - a_{22})}{2a_{21}\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_2(x+c_{l_2}t) + \varphi_2(x-c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t}\psi_2(\xi)d\xi\right] -, \tag{14}$$

$$\frac{c_{l_2}^2 - a_{22}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_1(x+c_{l_2}t) + \varphi_1(x-c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t}\psi_1(\xi)d\xi\right] + \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-c_{l_1}t+c_{l_1}\tau}^{x+c_{l_1}t-c_{l_1}\tau} F_1(\tau,\xi)d\xi$$

$$u_2(t,x) = \frac{a_{21}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_1(x+c_{l_1}t) + \varphi_1(x-c_{l_1}t) + \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t}\psi_1(\xi)d\xi\right] -$$

$$\frac{c_{l_2}^2 - a_{22}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_2(x+c_{l_1}t) + \varphi_2(x-c_{l_1}t) - \frac{1}{c_{l_1}}\int\limits_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t}\psi_2(\xi)d\xi\right] +$$

$$\frac{c_{l_1}^2 - a_{22}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_2(x+c_{l_2}t) + \varphi_2(x-c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t}\psi_2(\xi)d\xi\right] -, \tag{15}$$

$$\frac{a_{21}}{2\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\varphi_1(x+c_{l_2}t) + \varphi_1(x-c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t}\psi_1(\xi)d\xi\right] + \frac{1}{c_{l_2}}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-c_{l_2}t+c_{l_2}\tau}^{x+c_{l_2}t-c_{l_2}\tau} F_2(\tau,\xi)d\xi$$

Классическим решением задачи (1) – (4) называется функции

$$u_1, u_2 \in C^2(R_+ \times R)\bigcap C^1(\bar{R}_+ \times R),$$

где C^k – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций.

Результаты

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(R), \psi_1, \psi_2 \in C^1(R),\ F_1, F_2 \in C^1(\bar{R}_+ \times R)$ тогда существует единственное классическое решение задачи $(1)-(4)$, которое даётся формулой Даламбера, при этом справедлива оценка

$$\|u_1\|_{C([0,T]\times R)} + \|u_2\|_{C([0,T]\times R)} \leq$$

$$C\left(\|\varphi_1\|_{C(R)} + \|\varphi_2\|_{C(R)} + \|\psi_1\|_{C(R)} + \|\psi_2\|_{C(R)} + \|F_1\|_{C([0,T]\times R)} + \|F_2\|_{C([0,T]\times R)}\right)$$

где $0 < C-$ некоторая константа, зависящая только от T.

Легко заметить, что при $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(R)$, $\psi_1, \psi_2 \in C^1(R)$, $F_1, F_2 \in C^1(\bar{R}_+ \times R)$ функции определенные формулами Даламбера (14), (15), дают нам классическое решение задачи (1)-(4).

Единственность классического решения сразу следует из единственности интегралов при получении формулы Даламбера.

Заключение

Таким образом, получена формула решения задачи Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости, которая описывается тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении. Это решение является единственным в классическом смысле и для него можно получить оценку как в доказанной выше теореме. Полученные формулы могут быть использованы для тестирования численных методов решения задач волновой динамики пороупругости.

Литература

1. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб.ЖИМ. 2004. т.7, No. 1. С. 3-8.

2. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. 2001. т.IV, No. 2(8). С.154-165.

3. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.

4. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. 1944. Т. 8, No. 4. С. 133-150.

5. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range // J. Acoustic. Soc. America. 1956. V. 28, No. 2. P. 168-178.

6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. М: Наука. 1987.

7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 2. М: Наука. 1987.

8. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // ФГВ. 1993. No. 1. с.100-111.

9. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science Publishers Inc.,1995. 192p.

10. Имомназаров Х.Х., Янгибоев З.Ш. Прямые и обратные задачи для систем уравнений гиперболического типа, Основные понятия, методы решения, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2022, 169с.

11. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. - М.: Недра, 1970. 339 с.

12. Abror Rakhimov, Kholmatzhon Imomnazarov d'alembert formula for poroelasticity system described by three elastic parameters // Journal of Mathematical Sciences, 2023, Vol. 274, No. 2, pp. 269-274.

13. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000, Т. 373, No.4, с.536-537.

14. Imomnazarov Kh.Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000, v. 13, No. 3, p 33-35.

REZYUME

Qaytariladigan gidrodinamik yaqinlashishda uchta elastiklik parametrlari bilan tavsiflangan bir oʻlchovli bir jinsli boʻlmagan gʻovak elastik muhit tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini koʻrib chiqamiz. Berilgan Koshi masalasining yechimi xarakteristikalar metodi asosida Dalamber formulasi koʻrinishida topilgan. Akustik toʻlqinlarning tarqalishiga gʻovaklikning ta’siri koʻrsatilgan.

Kalit soʻzlar: matematik model, gʻovak muhit, Koshi masalasi, d’Alember formulasi, toʻgʻri masala, sekin toʻlqin, gʻovaklik.

RESUME

We consider the Cauchy problem for a one-dimensional inhomogeneous system of poroelasticity equations described by three elasticity parameters in a reversible hydrodynamic approximation is considered. The solution of the Cauchy problem in the form of the d’Alembert formula is obtained. The effect of porosity on the propagation of acoustic waves has been shown.

Key words: mathematical model, porous medium, Cauchy problem, d’Alembert formula, direct problem, slow wave, porosity.