

УДК 517.977

**УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА****МАМАДАЛИЕВ Н. А.**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ.
В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН, ТАШКЕНТ

m_numana59@mail.ru

ВАСИЕВА Х. Г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ

vasiyeva98@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования описываемая системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Изучена задача о переводе пучка траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ на терминальное множество M при геометрических ограничениях на управления игроков. С помощью модификации первого метода задачи преследования получены новые достаточные условия для разрешимости игровые задачи управления пучками траекторий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, терминальное множество, преследователь, убегающий, управление.

Введение

Во второй половине двадцатого века одним из интенсивно развивающихся разделов современной математики стала теория управляемых процессов. Конфликтно управляемые процессы, описываемые дифференциальными уравнениями, называются дифференциальными играми. Настоящий термин был введен американским математиком Р. Айзексом - одним из основоположников теории дифференциальных игр. Исследования Айзекса по проекту кооперации RAND (США), выполненные в начале второй половины 20-го века, были опубликованы в 1965 году в виде монографии, "Дифференциальные игры"[1], в которой предложен оригинальный метод решения дифференциальных игр и достаточно глубоко выяснены все основные принципиальные трудности проблемы. При этом заслуживает внимание то, что стратегия противоборствующих сторон конструируется в виде синтезирующих функций, зависящих только от состояния игры. Р.Айзекс с помощью своего метода решил большое количество интересных прикладных задач и получил оригинальные результаты.

Становление и систематическое развитие теории дифференциальных игр началось в конце 50-х и начале 60-х годов XX столетия. Оно стимулировалось потребностями практики, большими успехами математической теории управления, теории игр и исследования операций. Прогресс теории дифференциальных игр связан прежде всего с именами советских и зарубежных математиков Л.С.Понтрягина, Н.Н. Красовского, Е.Ф. Мищенко, Р.Айзекса, У.Флеминга. Крупный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли Ю.С.Осипов, Р.В. Гамкрелидзе, А.И. Субботин, А.Б. Куржанский, А.В.Кряжковский, Ф.Л.Черноусько, В.Н.Ушаков, Н.Ю.Лукоянов, Б.Н.Пшеничный, Н.Ю.Сатимов, А.А.Азамов, А.Г.Ченцов, В.Е.Третьяков, Л.А.Петросян, М.С.Никольский, В.И.Максимов, Н.Н.Субботина, П.Б.Гусятников, Н.Л.Григоренко, В.И.Ухоботов, А.А. Чикрий и многие другие математики.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Л.С.Понтрягина и Н.Н.Красовского. Н.Н.Красовским и представителями его научной школы [2-3] был предложен и развит позиционный подход к дифференциальным играм. Этот подход, основанный

на конструктивных законах управления с обратной связью, позволил изучить структуру дифференциальных игр и выдвинул фундаментальный принцип построения разрешающих управлений-принцип экстремального прицеливания и сформулировать и доказать центральный результат теории позиционных дифференциальных игр - теорему об альтернативе. Затем была развита более общая концепция позиционной дифференциальной игры, доказаны теоремы существования цены игры и седловой точки, предложены конструктивные методы формирования оптимальных стратегий. Итоги подведены в совместной с А.И. Субботиным монографии "Позиционные дифференциальные игры"[2]. Обоснованы методы детерминированных и стохастических программных конструкций. Решение игровой задачи сводится к последовательному выбору экстремальных управлений, сохраняющих траекторию конфликтно управляемого процесса на стабильном мосту и приводящих траекторию по нему на терминальное множество.

Фундаментальные результаты по решению дифференциальных игр преследования и убегания получили Л.С.Понтрягин и Е.Ф.Мищенко. В работе [4] сформулированы достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх. В ней использован формализм принципа максимума - одного из центральных методов теории управления. Основным результатом заключается в описании множества начальных позиций, из которых гарантируется возможность завершения преследования, а также в вычислении времени преследования, и способ формирования управления преследователя, реализующего процесс преследования. Результаты, полученные Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко привело к созданию Л. С. Понтрягиным первого и второго прямых методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных игр [5]. Наиболее простым и достаточно эффективным для решения конкретных задач преследования является первый метод Л.С.Понтрягина. Первый метод Л.С.Понтрягина послужил основой для многих обобщений, в частности, [6-8], а также этот метод имеет тесную связь с методом разрешающих функций [7]. В работе [8] разработан третий промежуточный прямой метод для линейных дифференциальных игр. А.Азамовым [10] обнаружена двойственность альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина.

Во всех упомянутых выше работах изучались дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что более реалистичная модель игры должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Простейший тип зависимости от прошлого в дифференциальных играх осуществляется через фазовые переменные. Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы А.В.Кряжмского, Ю.С. Осипова [11], А.Б.Куржанского [12], М.С.Никольского [13-14], А.А.Чикрий, Г.Ц.Чикрия [15]. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе, изучаются дифференциально-разностные игры преследования и убегания при геометрических и интегральных ограничениях на управления игроков, исследована структура дифференциальных игр.

I. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени [24, с. 198],[21]

$$\sum_{i=1}^m [A_i \dot{z}(t - h_i) + B_i z(t - h_i)] = f(u(t), v(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A_i, B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ - постоянные $(n \times n), (n \times n)$ матрицы; функция $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ - непрерывна по совокупности переменных - блок управления. $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m = h$ - фиксированные положительные числа; $u(t), v(t)$ - называются *управлениями* преследующего и убегającego игроков, соответственно, они выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot), v = v(\cdot)$, определенных на отрезке $[0, +\infty)$. Кроме того, они удовлетворяют ограничениям вида

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q непустые компактные подмножества пространств \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q , соответственно.

Измеримые функции $u(t), v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегającego игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве \mathbb{R}^n выделено терминальное множество M имеющий цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства \mathbb{R}^n , M_1 – компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в \mathbb{R}^n (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из \mathbb{R}^n на L : $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [4, с.411],[5],[6].

В пространстве \mathbb{R}^n , кроме терминального множества M выделено множество $N(X(\cdot))$, из точек которого исходят траектории игры (1), называется начальным множеством. В качестве начального множества $N(X(\cdot))$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения $X(t)$, $-h \leq t \leq 0$:

$$N(X(\cdot)) = \{\varphi(t) : z(t) = \varphi(t), \varphi(t) \in X, -h \leq t \leq 0\}.$$

Пусть $u = u(t), 0 \leq t < +\infty$, и $v = v(t), 0 \leq t < +\infty$, – произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Через $z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$, обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек множества $N(X(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ на терминальное множество M .

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t), 0 \leq t < +\infty$, пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T , т.е. для каждой траектории $z(t), t \in [0, +\infty)$, пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода*. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T .

Пусть $\tau > 0$, и $t \in [0, \tau]$. Через

$$X *_Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y),$$

– обозначим геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ [см.[6, с.459]].

Через $K(t), -\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами [23, с.199],[24]: а) $K(t) = \bar{0}, t < 0, \bar{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E, E$ – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t), 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0; \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^m [A_i \dot{K}(t - h_i) + B_i K(t - h_i)] = 0, \tag{3}$$

при $t > 0, t \notin S^0$, где $S^0 = S \cup (-h, +\infty), S = \{t : t = \sum_{i=0}^{\infty} j_i h_i\}, j_i$ – целые числа.

Матричная функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0, t \notin S^0$ но, в общем случае, имеет разрывы первого рода в точках множества S^0 .

Пусть $u = u(s), v = v(s)$ – допустимые управления определены на отрезке $[0, t], t > 0$, тогда для решения системы (1), при начальном условии $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot)), (z(s) = \varphi(s), -h_m \leq s \leq 0)$, в силу формулы Коши имеет место представление [23, с.193]

$$z(t) = - \sum_{i=1}^m K(t - s - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(t - s - h_i) [A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s)] ds - \int_0^t K(t - s) f(u(s), v(s)) ds.$$

Рассмотрим следующие множества [4]

$$F(t, v) = \pi K(t) f(P, v),$$

$$\widehat{W}(t) = \bigcap_{v \in Q} F(t, v), \quad W(\tau) = \int_0^\tau \widehat{W}(t) dt, \tag{4}$$

где $\pi K(t)f(P, v) = \{\pi K(t)f(u, v) : u \in P\}$.

Предположение 1. Для всех $t \geq 0$ отображение $\widehat{W}(t)$ не пусто.

Из предположения (1) следует, что $dom \widehat{W}(t) = [0, \infty)$. Тогда поскольку многозначное отображение $F(t, v)$ непрерывно на множестве $[0, \infty) \times Q$, то в силу утверждения 1.3.1 [6] отображение $\widehat{W}(t)$ полунепрерывно сверху, а значит, борелевское. Следовательно, согласно лемме 1.3.6 [6] и в соответствии с определением интеграла $W(\tau_1)$ существует хотя бы один борелевский суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, такая, что имеет место равенство $w = \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t) dt$. Зафиксируем ее.

Через $\Sigma = \{\tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t), t \geq 0\}$ обозначим совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $\widehat{W}(t)$. Далее, через $W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]$ обозначим следующее множество [16],[17]

$$W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau] = [M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))]] + \int_0^\tau \widehat{W}(t) dt, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} H[\tau, N(X(\cdot))] &= - \sum_{i=1}^m K(\tau - t - h_i) A_i X(0) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [A_i \dot{X}(t) + B_i X(t)] ds = \left\{ \sum_{i=1}^m K(\tau - t - h_i) A_i \varphi(0) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt : \varphi(t) \in X(t), -h_m \leq t \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и предположим, что при некотором $\tau = \tau_1 > 0$ имеет место включение

$$0 \in W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]. \tag{6}$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за конечное время $T(N(X(\cdot))) = \tau_1$.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы (см.(6)), т.е. имеем

$$0 \in W_1[M_1 \ast H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + W(\tau_1). \tag{7}$$

Тогда (см.(7),(5)) найдутся вектор $d \in [M_1 \ast H[\tau_1, N(X(\cdot))]]$ и суммируемая функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$ такие, что

$$\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t), \quad \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t) dt = 0$$

В соответствии с (4) для произвольного фиксированного значения пары $(t, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ уравнения

$$\pi K(\tau_1 - t)f(u, v) = \tilde{w}(\tau_1 - t), \tag{8}$$

Относительно $u \in P$ имеет решение. Пусть для $(t, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ вектор $u(t, v)$ - наименьшее в лексикографическом смысле решения уравнения (8). Можно показать, что функция $u(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_1, v \in Q$, является лебеговски измеримой по t и борелевски измеримой по v [28, с. 179]. Поэтому для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, функция $u[t] = u(t, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_1$, будет лебеговски измеримой функцией [28, с.179]. Следовательно, в силу теоремы Филиппова-Кастена [28, с.179], уравнение (8) разрешима в классе измеримых функций.

Покажем, что при таком способе управления параметром u все траектории пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попадают на терминальное множество M за время, не превосходящее $T(N(X(\cdot))) = \tau_1$.

Подставив в уравнение (1) вместо $u(t)$ и $v(t)$, функции $u[t], v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, соответственно, из формулы Коши для решения $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, после его проектирования на L , получаем

$$\pi z(\tau_1) = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) f(u[t], v(t)) dt = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \\
 & + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt - \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t) dt = \\
 & = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt + d, \tag{9}
 \end{aligned}$$

так как $d + w = 0$. Далее, имеем (см.(9))

$$\begin{aligned}
 \pi z(\tau_1) & = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt + d \in \\
 & \in [M_1 \ast H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + H[\tau_1, N(X(\cdot))] \subset M_1,
 \end{aligned}$$

в соответствии с определением геометрической разности \ast . Таким образом, для любого начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$ имеет место включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$ что эквивалентно включению $z(\tau_1) \in M_1$. Это означает, что задача управления пучками траекторий решена, а временем перевода является τ_1 . Теорема 1 доказана.

II. Пусть по-прежнему $\tau > 0$ и $t \in [0, \tau]$. Пусть d – произвольная точка множества $M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))]$, $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, – произвольная суммируемая функция $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = -d - f(\tau),$$

где $f(\tau) \in W(\tau)$. Далее, в соответствии с определением интеграла $W(\tau)$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что выполнено равенство $f(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(t) dt$. Зафиксируем его. Тогда вектор функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = -d - \int_0^\tau \tilde{w}(t) dt.$$

Для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ [8]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \pi K(t) f(P, v) - \tilde{w}(\tau - t) \right\}, & \text{если } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0, \\ \tau^{-1}, & \text{если } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|}, \quad \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0.$$

Введем обозначение $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \inf \{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q \}$.

Предположение 2. Существуют число $\tau = \tau_2 > 0$, вектор $d \in M_1 \ast H[\tau_2, N(X(\cdot))]$ и суммируемая функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $d + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(t) dt \neq 0$, такие, что: а) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))$, функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_2, v \in Q$, при произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, являются суммируемыми; б) справедливо неравенство [25]

$$|\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt \leq 0. \tag{10}$$

Теорема 2. Если выполнено сформулированное выше предположение 2, то в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$ выполнены условия предположения 2. Для произвольной измеримой функции $v = v(r)$, $0 \leq t < +\infty, v(r) \in Q$, рассмотрим контрольную функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t), 0 \leq t \leq \tau$, определенную следующим образом:

$$0 < \rho(\tau; v(t), 0 \leq t \leq \tau) = |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^\tau \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t)) dt.$$

В силу п.б) предположения 2 существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_2]$ такой, что $\rho(t^*; v(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Пусть $\xi[t^*, \varphi(\cdot)] \neq 0$, и $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в противном случае

$$0 < \rho(\tau_2; v(t), 0 \leq t \leq \tau_2) = |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t)) dt \leq \\ \leq |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt,$$

что противоречит неравенству (10). Таким образом, пусть $\rho(t^*; v(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Учитывая этот факт рекомендуется значение $u[t]$ параметра u выбирать как первый компонент решения уравнений

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t)) = \tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)], \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad (11)$$

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \tilde{w}(\tau_2 - t), \quad t^* < t \leq \tau_2, \quad (12)$$

относительно $u \in P$. Используя лемму Филиппова–Кастена [28, с.179] можно показать существование измеримых решений уравнений (11),(12). Как обычно, за решение $u[t]$ уравнений (11),(12) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений уравнений (11),(12). При таком способе управления параметром $u[t]$ убедимся, что пучок траекторий $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$, попадает на множество M за время, не превосходящее $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$. Действительно, (см. (11),(12)) имеем соотношение

$$d = -\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt = -\xi[t^*, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} [\pi K(t^* - t)f(u[t], v(t)) - \\ - \lambda(z_0(\cdot), t^*, \tau_2, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]]dt - \int_{t^*}^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \\ = -\xi[t^*, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(z_0(\cdot), t^*, \tau_2, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]dt - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \\ = - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt, \quad (13)$$

ибо, из установленного выше равенства $\rho(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$ имеем (см.(13))

$$- \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = d \in [M_1 \ast H[\tau_2, N(X(\cdot))]].$$

Из определения геометрической разности множеств следует, что

$$H[\tau_2, N(X(\cdot))] - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt \subset M_1.$$

Таким образом, учитывая произвольность начального положение $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$, пучок траекторий, из начального множества $N(X(\cdot))$ переведен на терминальное множество M за конечное время $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Мир, М. 1967.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Наука, М. 1974
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Наука, М. 1985
4. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Линейные дифференциальные игры. // Докл.АН СССР 1967. 174. С. 27–29
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования.// Мат. сб.1980. 112(154). С. 307–330

6. Понтрягин Л.С. Избранные труды.1988. Наука М. Т. 2.
7. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*, (Изд.МГУ, М.,1990).
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Наука думка. Киев. 1992
9. Сатимов Н.Ю. *К задаче преследования в линейных дифференциальных играх*, Дифференц. уравнения.9(11),2000-2009(1973).
10. Азамов А. *Математические труды*, (Ташкент:"Университет 2017).
11. Кряжковский А.В.,Осипов Ю.С.*Дифференциально - разностная игра сближения с функциональным целовым множеством*, Прикладная математика и механика,Т.37,1,3-13(1973).
12. Куржанский А.Б. *Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием*, Дифференциальные уравнения,7(8), 1398 - 1409(1971).
13. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Докл.АН СССР 1971. 197. С.1018-1021
14. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Дифференц. уравнения 1972. С. 260-267
15. Чикрий А.А.,Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх.// Дифференц. уравнения. 1984. №20. С. 802-810
16. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий.// Докл.АН СССР. 1990. 314. С. 132-134
17. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий.// Дифференц. уравнения. 1991. вып. 27. С. 219-228
18. Мамадалиев Н. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания. // Международный научно-технический журнал Кибернетика и системный анализ. 2012. №5. вып. 1 С. 154-164
19. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков. // Изв.вузов.Матем. 2020. №3. С. 12-28
20. Мамадалиев Н.А. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков.// Сибирский математический журнал. 2015. т.56. №1. С. 129-148
21. Мамадалиев Н.А.,Мустапокулов Х.Я., Абдуманнопов М.М. Дифференциальные игры преследования нейтрального типа с интегральными ограничениями на управления игроков// Математическая теория игр и её приложения. 2024. Т.16. в.4. С.45-68.
22. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками траекторий. Л. 1981
23. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Мир. М. 1984
24. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные игры. М.: Мир. 1967. 548 с.
25. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий// Дифференциальные уравнения. Минск.1991. Т.27. №2. С. 219– 228.
26. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука. Том 2. 576 с.
27. Абдуалимова Г.М. Об одной игровой задаче управления пучками траекторий при наличии запаздывания// Бюллетень Института математики. Ташкент. 2023. 6, №2. С. 80-91.

28. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

REZYUME

Mazkur ishda o'yinchilarning boshqaruvlariga geometrik chegara qo'yilgan differensial-ayirmali neytral tipdagi differensial o'yinda trayektoriyalarni boshqarishning o'yin masalasi qaraladi. O'yinchilarning boshqaruvlariga geometrik chegara qo'yilgan holda $N(X(\cdot))$ boshlang'ich to'plamdan M terminal to'plamga trayektoriyalar dastasini o'tkazish haqidagi masala o'rganilgan. Quvish masalasining birinchi usulining modifikatsiyasi yordamida traektoriyalar dastasining boshqarish masalasini hal etish uchun yangi yetarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: differensial o'yin, quvish masalasi, neytral tipdagi differensial-ayirmali tenglama, terminal to'plam, quvlovchi, qochuvchi, boshqaruvlar.

RESUME

In this paper, we consider a quasilinear differential pursuit game described by a system of differential-difference equations of neutral type. We study the problem of transferring a bundle of trajectories from the initial set $N(X(\cdot))$ to the terminal set M under geometric constraints on the players' controls. Using a modification of the first method of the pursuit problem, we obtain new sufficient conditions for the solvability of game problems of controlling bundles of trajectories.

Key words: differential games, the pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, terminal set, pursuer, evader, controls.