УДК 517.55

СВОЙСТВА M-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Мадрахимов Р. М.
Национальный педагогический университет Узбекистана, Ташкент
mruzimbay@mail.ru
Омонов О. И.
Национальный педагогический университет Узбекистана,Ташкент
o.i.omonov@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной статье представлены основные свойства M-субгармонической функции и доказано, что если срез-функция является M-гармонической на единичном шаре (поликруге), то функция является плюригармонической.

Ключевые слова: срез-функция, гармоническая функция, субгармоническая функция, плюригармоническая функция, M-гармоническая функция, M-субгармоническая функция.

Пусть $\mathbb{C}^n$ —комплексное пространство $(n \geq 1)$, $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$—открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат, граница которого является сферой

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}.$$

Когда $n = 1$, единичный поликруг в $\mathbb{C}$ будет обозначаться через U, а для $n > 1$

$$U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, \ j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1}$$

Множество $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$ называется выделенной границей U^n.

Как известно, функция $f(z) \in C^2(D)$ называется плюригармонической в D, если она удовлетворяет следующим n^2-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Действительная функция $f(z)$, $\quad -\infty \leq f(z) < \infty$ определенная в окрестности точки z_0, называется полунепрерывной сверху в этой точке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\varlimsup_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0) \tag{1}$$

Определение 1. Функция $f(z)\colon B \to [-\infty, \infty)$ называется М-гармонической (М-субгармонической) в шаре B, если она удовлетворяет условиям: а) $f(z)$ полунепрерывна сверху в B; б) для каждой точки $z \in B$ имеет место равенство (неравенство)

$$f(a) = \int_S f(\varphi_a(rt)) \, d\sigma(t) (f(a) \leq \int_S f(\varphi_a(rt)) \, d\sigma(t)) \tag{2}$$

для всех $a \in B$ достаточно малого радиуса r сферы σ.

Определение 2. Пусть B-единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Функция $f(z) \in C^2(B)$ называется М-гармонической (М-субгармонической) в B, если $\tilde{\Delta} f(z) = 0$ $(\tilde{\Delta} f(z) \geq 0)$ в B, где

$$\tilde{\Delta} f(z) = \frac{4(1 - |z|^2)}{n + 1} \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - z_i \overline{z_j}) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \, \partial \overline{z_j}} \tag{3}$$

(здесь $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\delta_{ii}=1$) инвариантный лапласиан в B [5].

Определение 3. Пусть U^n-единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$. Функция $f(z)\in C^2(U^n)$ называется М-гармонической (М-субгармонической) в U^n, если $\tilde{\Delta} f(z)=0$ $(\tilde{\Delta} f(z)\geq 0)$ в U^n, где

$$\tilde{\Delta}\, f(z)=2\sum_{j=1}^{n}(1-|z_j|^2)^2\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j\,\partial \overline{z_j}} \tag{4}$$

инвариантный лапласиан в U^n [4].

Изучение теории гармонических функций с учетом инвариантного лапласиана активизировалось в 1960-х годах благодаря работам Фюрстенберга ([8], [9]), где появилось интегральное представление Пуанкаре для ограниченных гармонических функций на симметричных пространствах, а также расширение классической теоремы Фату ([12]) на интегралы Пуанкаре для шара и ограниченных симметричных областей Кораньи ([10]), Штейна и Вайса ([11], [13]). С тех пор проводятся активные исследования инвариантных гармонических функций и, в последнее время, теории инвариантного потенциала в целом.

У. Рудин в работе [3] получил следующий результат: если функция $u(z)$ гармоническая и М-гармоническая в B, является плюригармонической в B.

Р.М. Мадрахимов и М.Д. Ваисова в работе [15] доказали следующую теорему: если функция $u(z)$ гармоническая и М-субгармоническая в B, то является плюригармонической в B.

Основные результаты работы

Цель данной работы - сформулировать свойства М-субгармонических функций на шаре B и доказать следующую теорему о плюригармонических функциях в шаре B (поликруге U^n).

Свойство 1. Любая линейная комбинация с положительными коэффициентами М-субгармонических функций является М-субгармонической функцией.

Доказательство свойства 1. Докажем, что произведение М-субгармонической функции на положительную константу снова является М-субгармонической функцией.

Действительно, при умножении на положительную постоянную полунепрерывность сверху $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\,\mu f(z)\leq \mu f(z_0)$, так и условие $\mu f(z)\leq \int_S \mu f(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)$ сохраняются.

Теперь докажем, что сумма двух М-субгармонических функций есть М-субгармоническая функция.

Пусть $f(z)$ и $h(z)$-М-субгармонические функции. Функции $f(z)$ и $h(z)$ полунепрерывны сверху, т. е. выполняются $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}f(z)\leq f(z_0)$ и $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}h(z)\leq h(z_0)$. Также выполняются $f(z)\leq \int_S\ f(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)$ и $h(z)\leq \int_S\ h(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)$.

Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}f(z)+\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}h(z)=\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}[f(z)+h(z)]\leq f(z_0)+h(z_0)$ и $f(z)+h(z)\leq \int_S\ f(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)+\int_S\ h(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)=\int_S\ [f(\varphi_z(rt))+h(\varphi_z(rt))]\,d\sigma(t)$. Таким образом, $f(z)+h(z)$ является М-субгармонической функцией.

Используя это, мы доказываем свойство 1. Пусть функции $f_j(z)$ $(j=1,...,n)$- М-субгармонические функции, а λ_j $(j=1,...,n)$ - положительные действительные числа. Тогда $\lambda_j\cdot f_j(z)$, $(j=1,\ldots,n)$ является М-субгармонической функцией.

Из этих свойств непосредственно следует доказательство свойства 1.

Свойство 2. Верхняя огибающая конечного числа М-субгармонических функций есть М-субгармоническая функция.

Доказательство свойства 2. В самом деле, пусть

$$F(z)=\max\{f_1(z),f_2(z),\ldots,f_N(z)\} \tag{5}$$

есть верхняя огибающая М-субгармонических функций $f_j(z)$, $(j=1,2,\ldots,N)$. Очевидно, что $F(z)$ полунепрерывна сверху, потому что $f_j(z)$ полунепрерывны сверху. Далее легко проверить выполнение условия (2) для $F(z)$.

Действительно, $f_j(z)\leq F(z)$, где $j=1,...,N$. Следовательно,

$$f_j(z)\leq \int_S f_j(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t)\leq \int_S F(\varphi_z(rt))\,d\sigma(t) \qquad (6).$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $f_j(z)$, то, в частности,

$$F(z) \le \int_S F(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t) \qquad (7),$$

что и требовалось доказать.

В частности, из этого свойства вытекает, что верхняя огибающая конечного числа М-гармонических функций есть М-субгармоническая.

Свойство 3. Равномерно сходящаяся последовательность М-субгармонических функций имеет своим пределом М-субгармоническую функцию.

Доказательство свойства 3. Пусть $\{f_n(z)\}$ - заданная функциональная последовательность, а $f(z)$ равномерно сходящаяся к предельной функции, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

Покажем, что первая является полунепрерывной сверху функцией. $\{f_n(z)\}$ - М-субгармонические функции, значит, они полунепрерывны сверху, т.е., $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}} f_n(z) \le f_n(z_0)$ (для всех $j = 1, 2, \dots$). Отсюда и из $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ следует

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{z\to z_0}} f_n(z) = \overline{\lim_{z\to z_0}} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \overline{\lim_{z\to z_0}} f(z) \le \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) \qquad (8).$$

Следовательно, $f(z)$ - полунепрерывная сверху функция.

Теперь покажем, что условие (2) выполняется для предельной функции.

Поскольку $\{f_n(z)\}$ - М-субгармонические функции, известно, для любой функции последовательности выполняется неравенство

$$f_n(z) \le \int_S f_n(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t) \qquad (9).$$

Поскольку оно сходится равномерно, можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \le \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t) = \int_S \lim_{n\to\infty} f_n(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t) = \int_S f(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t) \qquad (10).$$

Отсюда получаем $f(z) \le \int_S f(\varphi_z(rt))\, d\sigma(t)$. Итак, свойство доказано.

Пусть $f(z)$- дважды дифференцируемая функция (то есть $f(z) \in C^2(B)$). Чтобы изучить поведение этой функции в различных направлениях внутри шара (поликруге), вводится понятие срез-функции.

Срез-функция определяется следующим образом:

$$f_{a,b}(\lambda) = f(a + \lambda b)$$

где $a \in B$ $(a \in U^n)$, $b \in \mathbb{C}^n$. Срез-функция определяется для всех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что точка $l_{a,b} = a + \lambda b \in B$ $(l_{a,b} = a + \lambda b \in U^n)$. Согласно этому определению, функция $f_{a,b}(\lambda)$ становится функцией одной переменной по комплексному параметру λ.

Теорема 1. Функция $f(z) : B \to \mathbb{R}$ является плюригармонической, если каждая функция $f_{a,b}(\lambda)$ является М-гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку у нас $n = 1$, то (3) принимает следующий вид:

$$\tilde{\Delta} f(z) = 2(1 - |z|^2)\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - z\bar{z}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}}\right) = 2(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}}. \qquad (11).$$

Согласно гипотезе теоремы, функция $f_{a,b}$ является М-гармонической. Это означает, что отображение $l_{a,b}(\lambda) = a + \lambda b$ является голоморфным, и функция $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$ получается как суперпозиция функции f и голоморфного отображения $l_{a,b}(\lambda)$. Если применить цепные правила из ([5], ст 9, уравнения (1.1) и (1.2)) дважды для функции $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$, то выражение (3) примет следующий вид:

$$(\tilde{\Delta} f_{a,b})(0) = \tilde{\Delta}(f \circ l_{a,b})(0) = 2(1 - |a|^2)^2 \sum_{i,j=1}^{n} b_j \bar{b}_i \frac{\partial^2 f(a)}{\partial a_i\, \partial \bar{a}_j} = 0. \qquad (12).$$

Обозначим через $H_f(a)$ комплексный гессиан функции f в точке a, то есть матрицу размером $n \times n$, элементы которой имеют вид:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (12) может быть переписана в более компактном виде как:

$$(\tilde{\Delta} f_{a,b})(0) = 2(1-|a|^2)^2 \langle H_f(a)b, b\rangle = 0, \tag{13}$$

где $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$ обозначает эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, а $|z| = \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что $1 - |a|^2 > 0$ для всех $a \in B$. Из этого следует, что все функции $f_{a,b}$ являются M-гармоническими в том и только в том случае, если комплексный гессиан функции f в каждой точке $a \in B$ равен нулю, то есть

$$H_f(a) = 0 \quad \text{для всех } a \in B.$$

А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что все вторые смешанные производные функции f по переменным $a_i \in B$ и сопряжённым переменным $\overline{a_i} \in B$ равны нулю для всех индексов , то есть выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial \bar{a}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Таким образом, можно сделать окончательный вывод: функция f является плюригармонической в B, так как выполнение равенства (14) и обнуление комплексного гессиана означают, что f удовлетворяет определению плюригармонической функции.

Теорема 2. Функция $f(z) : U^n \to \mathbb{R}$ является плюригармонической, если каждая функция $f_{a,b}(\lambda)$ является M-гармонической в пересечении U^n и $l_{a,b}$.

Доказательство теоремы 2. Мы доказываем теорему 2 так же, как и теорему 1, поскольку $\tilde{\Delta}_B = \tilde{\Delta}_U$, при $n = 1$. По условию теоремы, $f_{a,b}$ является M-гармонической функцией. Как и в теореме 1, если мы дважды применим правила цепочки к функции $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$, то (12) вытекает из (4).

Тогда выражение (12) преобразуется в (13). Это означает, что все функции $f_{a,b}$ являются M-гармоническими тогда и только тогда, когда комплексный Гессиан функции f, $H_f(a)$, равен нулю для всех точек $a \in U^n$, то есть, когда выполняется равенство (14).

Таким образом, f является плюригармонической функцией в U^n.

Хотя теоремы 1 и 2 имеют схожую структуру и идеи, мы предпочитаем рассматривать их отдельно, так как шар B и поликруг U^n не являются биголоморфными.

Из этих теорем вытекают следующие следствия:

Следствие 1. Функция $f(z) : B \to \mathbb{R}$ $(f(z) : U^n \to \mathbb{R})$ является гармонической, если каждая функция $f_{a,b}$ является M-гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$ (U^n и $l_{a,b}$).

Следствие 2. Функция $f(z) : B \to \mathbb{R}$ $(f(z) : U^n \to \mathbb{R})$ является M-гармонической, если каждая функция $f_{a,b}$ является M-гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$ (U^n и $l_{a,b}$).

Определим Λ следующим образом:

$$\Lambda f(z) = \sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j}$$

Следствие 3. Пусть функция $f_{a,b}$ удовлетворяет условию $\Lambda f_{a,b} = 0$ в пересечении B и $l_{a,b}$. Тогда функция $f(z)$ является плюригармонической.

Подводя итоги статьи, можно сказать, что изучены свойства M-субгармонических функций, аналогичные свойствам субгармонических функций. В теоремах 1 и 2 даны критерии плюригармоничности функций, определенных на единичном шаре и поликруге соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ronkin L. I. Introduction to the Theory of Entire Functions of Many Variables. - M. Nauka, 1971. - 432.
2. Shabat B.V. "Introduction to complex analysis"Part 2. M. Science. 1976.-321.
3. W. Rudin, Pluriharmonic functions in balls, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), 44-46.
4. Rudin U. Theory of functions in the unit ball from. // M. Mir. 1984.-457.
5. Stoll M., Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.
6. Madrakhimov R.M., Omonov O.I. Pluroharmonicity of M-harmonic functions, // Ilm sarchashmalari - Urganch-2018-12, pp. 12-14.
7. P.R. Ahem and Walter Rudin, "M-harmonic products", Indag. Math. 2 (1991), 141-147.
8. H. Furstenberg, A Poisson formula for semisimple Lie groups, Ann. of Math. 77 (1963), 335-386.
9. H. Furstenberg, Boundaries of Riemannian symmetric spaces; Symmetric Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1972.
10. A. Koranyi, The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. Math. 82 (1965), 332-350.
11. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
12. P. Fatou, Series trigonometriques et series de Taylor, Acta Math. 30 (1906), 335-400.
13. E. M. Stein and N. Weiss, On the convergence of Poisson integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 35-54.
14. Forelli F. pluriharmonicity in terme of harmonic slices//Math.Scand. 1977. V. 41. P. 358-364.
15. Madrakhimov R.M., Vaisova M.D. Criteria of pluriharmonicity of harmonic functions // Dan RUzyu Tashkent, 2008, No. 5. Pp. 19-20.
16. Madrakhimov R.M. Some criteria of pluriharmonicity. Izvestiya AN UzSSR. Ser. Phys. Mat. Nauk No. 3. 1986.

REZYUME

Ushbu maqolada M-subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari va agar birlik sharda (polidoirada) kesim-funksiya M-garmonik bo'lsa, u holda funksiya plyurigarmonik ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: kesim-funksiya, garmonik funksiya, subgarmonik funksiya, plyurigarmonik funksiya, M-garmonik funksiya, M-subgarmonik funksiya.

RESUME

This article presents the basic properties of the M-subharmonic function and proves that if the slice function is M-harmonic on the unit ball (polydisc), then the function is pluriharmonic.

Key words: slice function, harmonic function, subharmonic function, pluriharmonic function, M-harmonic function, M-subharmonic function.