UDC 519.214

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ (Ц.П.Т) ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зупаров Т.М.
Чирчикский государственный педагогический университет
Жовлиев А.И.
Денауский институт предпринимательства и педагогики, Термез

РЕЗЮМЕ.

В работе рассматривается фиксированный линейный процесс $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ где $k \in \mathbb{Z}$ и для него доказывается центральная предельная теорема и указывается оценка скорости сходимости к нулю распределения X_{kn} с некоторой нормировкой к $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}-$ распределению стандартной нормальной величины $N(0,\ 1)$.

Ключевые слова. Линейный процесс, центральная предельная теорема, неравномерная оценка в центральной предельной теореме.

Введение и вспомогательные утверждения

Пусть $\{\xi_{in}, i \in Z\}-$ последовательность случайных величин (с.в.) заданных на вероятностном пространстве (Ω, A, P) и $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, .., \ n \geq 1\}-$ числовая последовательность.

Определение 1. Если ряд

$$X_{kn} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{in}\xi_{k-i,n}$$

сходится с вероятность 1, то последовательность случайных величин $\{X_{kn},\ k \in \mathbb{Z}\}$ называется линейным процессом с коэффициентами $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, ..., \ n \geq 1\}$ и порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{in}, i \in Z\}$.

Замечание 1. Если линейный процесс $\{X_{kn}\}$ порожден инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in Z,\ n \geq 1\}-$ независимых случайных величин и выполнены условия $E\xi_{jn} = 0, E\xi_{jn}^2 = \sigma_{jn}^2 < \infty$ и $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2\sigma_{k-j}^2 < \infty$, то согласно теореме Хинчина-Колмогорова ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_{in}\xi_{k-i,n}$ сходится с вероятностью 1 и в этом случае линейный процесс определен вполне корректно.

Сравнивая результаты, полученные для обычных и взвешенных сумм можно заключить, что на случай взвешенных сумм переноситься далеко не все факты, доказанные для обычных сумм. В частном случае взвешенных сумм $S(v) := \sum_{j=0}^{\infty} v^j\xi_j$, где $0 < v < 1$ – для схем суммирования независимых с.в. по Абелю в этом вопросе удается продвинутся значительно дальше см([1],[7]).

Аналог известной теоремы Берри-Эссена для $S(v)$ получен в работе [4]. Дальнейшие исследования по предельным теоремам для схеме суммирования независимый с.в. по Абелю, когда каждая ξ_j имеет различные распределения проводились С.Х.Сираждиновым и М.У.Гафуровым [7], Т.А.Азларовым и Б. Мередовым [1]. Эти работы посвящены доказательству ц.п.т. и неравномерной оценки остаточного члена в ц.п.т. для Абелевой суммы $S(v)$. В последние годы возрос интерес к изучению асимптотики Абелевой суммы $S(v)$ с неслучайными коэффициентами при $v \to 1-$ в связи с тем, что, к этой схеме суммирования приводят многие прикладные задачи.

Легко заметить, что Абелевые суммы являются линейными процессами имеющий вид $X_0 = \sum\limits_{j=0}^{\infty} v^j\zeta_{-j}, \quad \zeta_{-j} = \xi_j, \quad j = 0, 1, 2, ...$ и поэтому возникает естественный вопрос остаются ли справедливыми результаты, полученные для Абелевых сумм и для общих линейных процессов. Ответ на поставленный вопрос положителен по крайней мере в случае центральной предельной теореме.

В данной работе рассматривается фиксированный линейный процесс $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ где $k \in \mathbb{Z}$ и для него доказывается центральная предельная теорема и указывается неравномерная оценка скорости сходимости к нулю распределения X_{kn} с некоторой нормировкой к $\Phi(x)-$ распределению стандартной нормальной случайной величины $N(0,\ 1)$.

В следующем разделе мы используем известное моментное неравенство Розенталя для сумм независимых с.в.

Лемма 1. (см. [5]) Пусть $\eta_{1n}, \eta_{2n}, ..., \eta_{nn}$ набор независимых с.в. с $E\eta_{jn} = 0, E\left|\eta_{jn}\right|^t < \infty,\ j = 1, 2, ..., n,\ t \geq 2$. Тогда

$$E\left|\sum_{j=1}^{n}\eta_{jn}\right|^t \leq c(t)\max\left\{\sum_{j=1}^{n}E\left|\eta_{jn}\right|^t,\ \left(\sum_{j=1}^{n}E\eta_{jn}^2\right)^{t/2}\right\},$$

где $c(t)-$ постоянная, зависящая только от t.

Для установления ц.п.т. для X_{kn} мы используем следующую ц.п.т. Линдеберга, доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [3], стр. 187, теорема 5 и теорема 7А.

Теорема 1. Пусть $\eta_{n1}, \eta_{n2}, ..., \eta_{nn}, \quad n \geq 1-$ ссерии случайных величин с $E\eta_{kn} = 0,\ E\eta_{kn}^2 = \sigma_{kn}^2 < \infty$.

1) Если выполнено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_n) \quad \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\eta_{kn}^2 I\left\{|\eta_{kn}| \geq \varepsilon B_n\right\} \to 0,\ n \to \infty.$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^{n}\sigma_{kn}^2$. Тогда $P\left(\frac{\zeta_n}{B_n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$ равномерно по x.

2) Если $E\eta_{jn}^3 < \infty,\ j = 1, 2, ..., n$, то справедлива оценка

$$\Delta_n = \sup_x\left|P\left(\frac{\zeta_n}{B_n} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq CL_{3n}^{1/4},$$

где C абсолютная постоянная и $L_{3n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}E|\eta_{jn}|^3}{B_n^3}$.

При получении оценок остаточного члена в ц.п.т. для линейного процесса $\{X_k\}$ потребуется следующая несколько видоизменённая оценка А.Бикялиса [2] в ц.п.т. для независимых с.в.

Лемма 2. (см. [2]) Пусть $\eta_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n+1}-$ независимые случайные величины, $M\eta_j = 0$ и для некоторого положительного $s;\ 2 < s \leq 3$,

$\beta_{j,s} = |\eta_j|^s < \infty$ $(j = 0, 1, 2, ..., n+1)$. Введем следующие обозначения:

$$\sigma_j^2 = M\eta_j^2,\ B_n^2 = \sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2,\ L_s = \frac{\sum_{j=0}^{n+1}|\eta_j|^s}{B_n^s}, \Delta_n(x) = \left|P\left(B_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j \leq x\right) - \Phi(x)\right|.$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\Delta_n(x) \leq \frac{C(s)}{(1+|x|)^s}L_s, \tag{1}$$

где $C(s)$ положительное постоянное, зависящее только от s.

При получении оценки остаточного члена в ц.п.т. мы используем следующий общеизвестный утверждения (см, например [5]).

Лемма 3. Пусть X и Y с.в., $F(x)$ функция распределения и $\varepsilon-$ произвольное положительное число. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_x|P(X+Y \leq x) - F(x)| \leq \sup_x|P(X \leq x) - F(x)| +$$
$$\sup_x|F(x+\varepsilon) - F(x)| + P\left(|Y| > \varepsilon\right).$$

Основные результаты

Лемма 4. Если линейный процесс $\{X_{kn}, k \in \mathbb{Z}\}$ порожден инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in Z,\ n \geq 1\}$ – независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$E\xi_{jn} = 0, E\left|\xi_{jn}\right|^t = \beta_{jn,t} < \infty;\ t \geq 2,$$

имеет коэффициенты $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, ...,\ n \geq 1\}$, то для любого $l = 0, 1, 2, ...$ справедливо неравенство

$$E\left|\sum_{j=l}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^t \leq c(t)\left(\sum_{j=l}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^t\beta_{k-j,n,t} + \left(\sum_{j=l}^{\infty} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{t/2}\right),$$

где $c(t)$– постоянная, зависящая только от t.

Доказательство леммы следует из неравенства Розенталя (лемма 1.1): пусть l произвольное целое неотрицательное число. Тогда, используя неравенство Розенталя для любого заданного $m \geq l$, справедливо неравенство

$$E\left|\sum_{j=l}^{m} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^t \leq c(t)\left(\sum_{j=l}^{m}\left|a_{jn}\right|^t\beta_{k-j,n,t} + \left(\sum_{j=l}^{m} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{t/2}\right). \tag{2}$$

Теперь используя теорему о монотонной сходимости, мы из неравенства (2) при $m \to \infty$ получим доказательство леммы.

Теорема 2. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}$– линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn} = 0,\ \sigma_{jn}^2 = E\xi_{jn}^2 < \infty$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn},\ j = 0, 1, 2, ...,\ n \geq 1\}$ и выполнено условие $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2 < \infty$. Кроме того, если при $n \to \infty$

$$\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2}{\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2} \to 0 \tag{3}$$

и выполнено следующее условие Линдеберга: для любого положительного ε при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\Lambda_n = \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2 E\xi_{k-j,n}^2 I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}| > \varepsilon B_n\} \to 0, \tag{4}$$

где $B_n^2 = \sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2$. Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,\ 1).$$

где “$\xrightarrow{D}$” означает сходимость по распределению.

Доказательство. Рассмотрим следующее разложение линейного процесса X_{kn} в виде суммы

$$X_{kn} = \sum_{j=0}^{n} a_{jn}\xi_{k-j,n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n} = X_{kn}^{(1)} + X_{kn}^{(2)},$$

где

$$X_{kn}^{(1)} = \sum_{j=0}^{n} a_{jn}\xi_{k-j,n},\ X_{kn}^{(2)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}.$$

Отсюда

$$\frac{X_{kn}}{B_n} = \frac{X_{kn}^{(1)}}{B_n} + \frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n}. \tag{5}$$

Согласна ц.п.т. Линдеберга (теорема 1), для первого члена в правой части разложения (5) справедливо следующее соотношение

$\frac{X_{kn}^{(1)}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,\ 1)$ при $n \to \infty$.

Теперь для доказательства теоремы 2 достаточно показать сходимость к нулю по вероятности, второго члена разложения (5) т.е. нужно доказать, что

$$\frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{6}$$

Для доказательства соотношения (6), используем известное неравенство Чебышева и независимость с.в. $\{\xi_{jn},\ j \in \mathbb{Z}\}$. Имеем

$$P\left(\left|\frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right| > \varepsilon B_n\right) \leq \frac{E\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right)^2}{\varepsilon^2 B_n^2} =$$

$$= \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2}{\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2} \to 0,\ n \to \infty,$$

в силу условий (3) теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что в случае расходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2$ при отсутствие других условий линейный процесс X_{kn} не существует. Следовательно, сходимость этого ряда в теореме 2 является необходимым условием.

Из теоремы 2 непосредственно следует справедливость следующего следствия.

Следствие 1. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$ независимых, одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с $E\xi_{0n} = 0,\ \sigma_{0n}^2 = E\xi_{0n}^2 < \infty$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn},\ j = 0, 1, 2, ...,\ n \geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 < \infty$ и $\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2}{\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2} \to 0,\ n \to \infty$. Если выполнено условие Линдеберга (4) с $B_n^2 = \sigma_{0n}^2 \sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2$, тогда $\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,\ 1)$ при $n \to \infty$.

Из теоремы 2 также следует справедливость аналога теоремы Ляпунова для линейных процессов.

Следствие 2. Пусть $X_{kn}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn} = 0,\ \sigma_{jn}^2 = E\xi_{jn}^2 < \infty,\ E\left|\xi_{jn}\right|^{2+\delta} < \infty$, где $\delta > 0$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn},\ j = 0, 1, 2, ...,\ n \geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 < \infty$ и (3) Кроме того, выполнено следующее условие Ляпунова: при $n \to \infty$справедливо соотношение

$$L_{n\delta} := \frac{\sum_{j=0}^{n} E\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Тогда линейный процесс X_{kn} удовлетворяет центральной предельной теореме:
$\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0,\ 1)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$E\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^{2+\delta} \geq E\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^{2+\delta} I\left\{\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}\right| \geq \varepsilon B_n\right\} \geq$$
$$\geq \varepsilon^{\delta} B_n^{\delta} E a_{jn}^2 \xi_{k-j,n}^2 I\left\{\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}^2\right| \geq \varepsilon B_n\right\}$$

и, значит,

$$\Lambda_n = \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2 E\xi_{k-j,n}^2 I\{\left|a_{jn}\xi_{k-j,n}\right| > \varepsilon B_n\} \leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta}} \frac{\sum_{j=0}^{n} E\left|a_j\xi_{k-j}\right|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}}.$$

Следовательно, из условия Ляпунова (7) следует условие Линдеберга (4). Отсюда следует доказательство следствия 2.

Если инновационный последовательность $\{\xi_{jn},\ j \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$ в следствие 2 состоит из независимых и одинаково распределенных в каждой серии с.в., то дробь Ляпунова имеет вид

$$L_{n\delta} = \frac{\beta_{2+\delta,n}}{\sigma_{0n}^{2+\delta}} \frac{\sum_{j=0}^{n} \left|a_{jn}\right|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}} = \rho_{2+\delta,n} \frac{\sum_{j=0}^{n} \left|a_{jn}\right|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^{n} a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}},$$

где $\beta_{2+\delta,n} = E\left|\xi_{0n}\right|^{2+\delta}$ и $\rho_{2+\delta,n} = \frac{\beta_{2+\delta,n}}{\sigma_{0n}^{2+\delta}}$. В силу этого, из следствия 2.2 мы получим.

Следствие 3. Пусть $X_{kn}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j\in\mathbb{Z},\ n\geq 1\}$ независимых, одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с $E\xi_{0n}=0,\ \sigma_{0n}^2=E\xi_{0n}^2<\infty, \beta_{2+\delta,n}=E\left|\xi_{0n}\right|^{2+\delta}<\infty$, где $\delta>0$, коэффициенты $\{a_{jn},\ j=0,1,2,...,\ n\geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty}a_{jn}^2<\infty$ и
$\frac{\sum_{j=0}^{n}|a_{jn}|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}}\to 0$ при $n\to\infty$.

Тогда линейный процесс X_{kn} удовлетворяет центральной предельной теореме:
$\frac{X_{kn}}{B_n}\xrightarrow{D}N(0,\ 1)$ при $n\to\infty$.

В следующей теореме получена оценка остаточного члена в ц.п.т. для линейного процесса X_k.

Введем обозначения:

$$\bar{\Delta}_n(x)=\left|P\left(B^{-1}X_k\leq x\right)-\Phi(x)\right|,$$

$$B^2=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2\sigma_{j-k}^2,\ L_{ns}=\frac{\sum_{j=0}^{n}E\left|a_j\xi_{k-j}\right|^s}{B^s},\ B_n^2=\sum_{j=0}^{n}a_j^2\sigma_{j-k}^2.$$

При этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $X_k=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi_{k-j}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ независимых случайных величин с $E\xi_j=0,\ \sigma_j^2=E\xi_j^2<\infty,\ \beta_{js}=E\left|\xi_j\right|^s<\infty$, где $s>2$, имеющий коэффициенты $\{a_j,\ j=0,1,2,...\}$ удовлетворяющие условию $\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2\sigma_{j-k}^2<\infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\bar{\Delta}_n(x)\leq C(s)\left\{L_{ns}+B^{-s}\sum_{j=n+1}^{\eta}\left|a_j\right|^s\beta_{j-k,s}+\left(B^{-2}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2\sigma_{j-k}^2\right)^{s/2}\right\},$$

где $C(s)-$ постоянная, зависящая только от s.

Доказательство. В лемме 2 положим $\eta_j=a_j\xi_{k-j}\ j=0,1,2,...,n$ и $\eta_{n+1}=\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j\xi_{k-j}$.

Тогда $\Delta_n(E)=\bar{\Delta}_n(E)$ и так как, $\eta_j,\ j=0,1,2,...,n+1$ очевидно являются независимыми, то неравенства (1) в данном случае имеет вид

$$\bar{\Delta}_n(x)\leq\frac{C(s)}{(1+|x|)^s}\frac{\sum_{j=0}^{n}E\left|\eta_j\right|^s+E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j\xi_{k-j}\right|^s}{B^s}. \tag{8}$$

Применяя лемму 1 при $l=n+1$ и используя независимость с.в. $\{\xi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$, получим

$$E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j\xi_{k-j}\right|^s\leq C(s)\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_j\right|^s\beta_{k-j,s}+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2\sigma_{k-j}^2\right)^{s/2}\right\}. \tag{9}$$

Из (8), в силу последнего неравенства следует справедливость следующего неравенства

$$\bar{\Delta}_n(x)\leq\frac{C(s)}{(1+|x|)^s}\frac{\sum_{j=0}^{n}E\left|a_j\xi_{k-j}\right|^s+E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j\xi_{k-j}\right|^s}{B^s}\leq$$

$$\leq\frac{C(s)}{(1+|x|)^s}B^{-s}\left\{\sum_{j=0}^{n}\left|a_j\right|^s\beta_{k-j,s}+C(s)\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_j\right|^s\beta_{k-j,s}+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2\sigma_{k-j}^2\right)^{s/2}\right]\right\}.$$

Отсюда следует доказательство теоремы 2.

Из теоремы 2 непосредственно следует справедливость следующего следствия.

Следствие 4. Пусть X_k-линейный процесс, порожденный последовательностью $\{\xi_j,\ j\in\mathbb{Z}\}$ независимых, одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_0=0,\ \sigma^2=E\xi_0^2<\infty,\ \beta_s=E\left|\xi_0\right|^s<\infty$, где $s>2$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2<\infty$. Тогда

$$\bar{\Delta}_n(x)\le C(s)\frac{\rho_s}{(1+|x|)^s}b^{-s}\left[\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^s+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2\right)^{s/2}\right],$$

где $b^2=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2$.

Для иллюстрации полученных результатов о ц.п.т. и оценки остаточного члена в ц.п.т. для линейных процессов, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $a_0=1\ a_j=\frac{1}{j^{\alpha}},\ \alpha>1/2$ и инновационная последовательность $\{\xi_j\}$ состоит из независимых, одинаково распределенных с.в. с $E\xi_0=0,\ E\xi_j^2=\sigma^2$. Тогда $\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j^{2\alpha}}<\infty$, но ц.п.т. не имеет место. Однако, если инновационная последовательность задана в схеме серий с дисперсией равной $\sigma_{n0}^2\to 0,\ n\to\infty,\ a_{0n}=1\ a_{jn}=\frac{1}{j^{\alpha}},\ \alpha>1/2$ при $j=0,1,...,n$ и $a_{jm}=\frac{n^{\beta}}{j^{\alpha}},\ \beta+1-2\alpha<0$ при $j\ge n+1$, то в этом случае л.п. подчиняется ц.п.т. Действительно, в этом случае

$$\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{2\alpha}}>1+\int_1^{n+1}x^{-2\alpha}dx>\frac{2\alpha}{2\alpha-1}$$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{n^{\beta}}{j^{2\alpha}}<n^{\beta}\int_n^{\infty}x^{-2\alpha}dx=\frac{n^{\beta+1-2\alpha}}{2\alpha-1}$$

и, значить $\frac{\sum_{j=0}^{n}|a_{jn}|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}}\to 0$ при $n\to\infty$.

Кроме того, при $n\to\infty$

$$\Lambda_n=\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2E\xi_{k-j,n}^2I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}|>\varepsilon B_n\}\le\sigma_{0m}^2\frac{\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2}{B_n^2}=\sigma_{0n}^2\to 0.$$

Таким образом выполнены все условия следствия 1, и поэтому из этого следствия следует справедливость ц.п.т.

Если неравенство $\beta+1-2\alpha<0$ не выполняется, то хотя справедливо условие Линдеберга, однако ц.п.т. может не имеет место.

Отметим, что такие примеры можно построить и для иллюстрации других результатов, полученных в данной работе.

Пример 2. В следствие 4 положим $a_j=v^j$, где v постоянное число удовлетворяющие условию $0<v<1$. Тогда справедливы равенства:

$$b^2=\sum_{j=0}^{\infty}v^{2j}=\frac{1}{1-v^2},\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^s=\sum_{j=0}^{\infty}v^{js}=\frac{1}{1-v^s}$$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty}a_j^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}v^{2j}=\frac{v^{2(n+1)}}{1-v^2}$$

Теперь, выбирая $n=n(v,\ s)$ достаточно большим, мы из следствия 2.4 получим следующую оценку остаточного члена в ц.п.т. для Абелевой суммы $S(v)$.

$$\bar{\Delta}_v(x)\le C(s)\frac{\rho_s}{(1+|x|)^s}(1-v^2)^{(s-2)/2}.$$

Эта оценка значительно лучше, чем оценка Гербера, полученная в статье [4].

В следующей теореме получена оценка остатка в ц.п.т для X_{kn}.

Теорема 3. Пусть $X_{kn}=\sum_{j=0}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j\in\mathbb{Z},\ n\geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn}=0,\ \sigma_{jn}^2=E\xi_{jn}^2<\infty,\ \beta_{jB}^s=E\left|\xi_{jB}\right|^s<\infty,\ s\geq 3$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn},\ j=0,1,2,...,\ n\geq 1\}$ и $B_n^2=\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2\sigma_{j-k,n}^2$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_n\leq CL_{3n}^{1/4}+\frac{C(s)}{B_n^{s/(s+1)}}\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^s\beta_{k-j,n}^s+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{s/2}\right\}^{1/(s+1)}, \tag{10}$$

где $\Delta_n=\sup\limits_x\Delta_n(x)$.

Доказательство. Положим $X=B_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}\eta_{jn}$ и $Y=B_n^{-1}\eta_{n+1,n}$, где $\eta_{jn}=a_{jn}\xi_{k-j,n}$ $j=0,1,2,...,n$ и $\eta_{n+1,n}=\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}$. Тогда из леммы 1.3 при $F(x)=\Phi(x)$, получим

$$\Delta_n\leq\sup_x\Delta_n(x)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}+P\left(\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|\geq\varepsilon B_n\right) \tag{11}$$

Применяя оценку в ц.п.т. сформулированную в теореме 1.1, имеем

$$\sup_x\Delta_n(x)\leq\leq CL_{3n}^{1/4}, \tag{12}$$

где $L_{sn}=\frac{\sum_{j=0}^{n}|a_j|^3\beta_{k-j,n}^3}{B_n^3}$. Чтобы оценить последнее слагаемое в правой части неравенства (), мы используем сначало неравенство Чебышева, а затем Розенталя и получим, что

$$P\left(\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|\geq\varepsilon B_n\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^sB_n^s}E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}\right|^s\leq$$

$$\leq\frac{C(s)}{\varepsilon^sB_n^s}\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^s\beta_{k-j,n}^s+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{s/2}\right\}. \tag{13}$$

Из неравенства (11), в силу оценок (12) и (13), получим

$$\Delta_n\leq CL_{3n}^{1/4}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}+\frac{C(s)}{\varepsilon^sB_n^s}\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^s\beta_{k-j,n}^s+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{s/2}\right\}.$$

Отсюда, выбирая

$$\varepsilon=\frac{1}{B_n^{s/(s+1)}}\left\{\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^s\beta_{k-j,n}^s+\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2\sigma_{k-j,n}^2\right)^{s/2}\right\}^{1/(s+1)},$$

мы придем к неравенству (10). Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $X_{kn}=\sum_{j=0}^{\infty}a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn},\ j\in\mathbb{Z},\ n\geq 1\}$ независимых и в каждой серии одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_{0n}=0,\ \sigma_{0n}^2=E\xi_{0n}^2<\infty,\ \beta_{0n}^s=E\left|\xi_{0n}\right|^s<\infty,\ s\geq 3$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn},\ j=0,1,2,...,\ n\geq 1\}$ и $B_n^2=\sigma_{0n}^2\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_n\leq C\rho_{3n}^{1/4}\left[\frac{\sum_{j=0}^{n}\left|a_{jn}\right|^3}{\left(\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2\right)^{3/2}}\right]^{1/4}+C(s)\left\{\rho_{sn}^{1/(s+1)}\frac{\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|a_{jn}\right|^s\right)^{1/(s+1)}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{jn}^2\right)^{s/2(s+1)}}+\left(\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{jn}^2}{\sum_{j=0}^{n}a_{jn}^2}\right)^{s/2(s+1)}\right\},$$

где $\rho_{sn}=\frac{\beta_{0n}^s}{\sigma_{0n}^s}$.

Литература

1. Т.А.Азларов, Б.Мередов, Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю, Изв. АН УзССР, сер. физ. – мат. наук, No5, 1977, 7 – 15.

2. Бикялис А. Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме, Литовский матем. сб., (1966), 6, No3, стр. 323 – 346.

3. Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва "Наука", 1986, 432 стр.

4. Gerber, H.U. The discounted central limit theorem and its Berry-Essen analogue, Ann. Math. Statist. 42, 1, 1971, 389 – 392.

5. Зупаров Т.М. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин, Теория вероятн. и ее прим., 1991, т.36, No4.

6. Rozenthal, H.P. On the subspace of м spanned by sequences of independent random variables, Israel Journal of Mathematics, 8, 1970, 273–303.

7. С.Х.Сираждинов, М.У.Гафуров, Замечание к одной предельной теореме, В сб. "Случайные процессы и статистические выводы", вып.3 Изд-во. "Фан" УзССР, 1973, 170 – 172.

RESUME

The paper considers a fixed linear process: $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ where $k \in \mathbb{Z}$. For this process, the Central Limit Theorem is proved. Additionally, an estimate of the rate of convergence to zero of the distribution of X_{kn} with some normalization, to the standard normal distribution: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} -$ of the standard normal random variable $N(0,\ 1)$, is provided.

Key words: Linear process, Central Limit Theorem, non-uniform estimate in the Central Limit Theorem.

REZYUME

Ushbu ishda quyidagi ko'rinishdagi fiksirlangan chiziqli jaroyonlar ko'rib chiqiladi: $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}-$ bu yerda $k \in \mathbb{Z}$. Ushbu jaroyon uchun markaziy limit teoremasi isbotlanadi.Bunda X_{kn} taqsimotining ma'lum normallashtirish ostida, standar normal taqsimotga yaqinlashish tezligi uchun baho ham keltirilgan: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} -$ bu yerda $\Phi(x) - N(0,\ 1)$ standart normal tasodifiy o'zgaruvchining taqsimot funksiyasi.

Kalit so'z Chiziqli jarayon, markaziy limit teorema, markaziy limit teoremadagi notekis baho.