УДК 512.548

О НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ И НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИГРУПП И КВАЗИГРУПП СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО (ВТОРОГО) РОДА

Давлатбеков А. А.
Денауский институт предпринимательства и педагогики, Термез
akimbekd@mail.ru
Собирова М. Р.
Денауский институт предпринимательства и педагогики, Термез
mavjudasobirova79@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Квазигруппы, главным образом изотопные группе, абелевой группе, особую роль играют линейные квазигруппы, алинейные квазигруппы, обобщённые линейные квазигруппы (линейные (слева), справа, алинейные (слева), справа, смешанного типа первого (второго) рода) и Т-квазигруппы. В данной работе даётся характеристика обобщённых линейных квазигрупп, а также линейных квазигрупп с помощью Λ- форм квазигруппы. Следует отметить, что в работах [1-2] некоторые свойства Т-квазигруппы в [3] линейной квазигруппе, в [4] левых (правых) линейных квазигрупп изучались с помощью квазигрупп Λ-формы. Аналогично для квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода эти свойства доказаны с помощью Λ-формы квазигрупп. Кроме того, устанавливается связь между различными видами квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода с Т-квазигруппы.

Ключевые слова: алинейная квазигруппа, линейная квазигруппа, форма квазигруппы, квазигруппа смешанного типа первого рода квазигруппа смешанного второго рода, эндоморфизм, антиавтоморфизм, квазиавтоморфизм, Т-квазигруппа.

В теории линейных квазигрупп важную роль играют группы, изотопные этим квазигруппам. Многие результаты, а также важную информацию о структуре линейной квазигруппы можно получить посредством изотопной группы. Понятие изотопии на квазигруппы следующим образом, что квазигруппа (Q,Ω) моноиду, полугруппе, группе, абелевой группе $(Q,+)$, если для $n-$арной операции $A\in\Omega$ существуют подстановки $\alpha_1^A,\alpha_2^A,\ldots,\alpha_n^A,\beta_n^A$ множества Q такие, что

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\beta_A^{-1}\left(\alpha_1^A x_1,\alpha_2^A x_2,\ldots,\alpha_n^A x_n\right),$$

для всех $x_1,x_2,\ldots,x_n\in Q$. Если $\beta_A=1$ ($1-$ единичное отображения) для всех $A\in\Omega$, то изотопия называется главной.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется «линейной над группой» $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид $x\cdot y=\varphi x+c+\psi y$ где $\varphi,\psi\in Aut(Q,+)$,$c-$ фиксированный элемент множества Q, [5].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется «смешанного типа первого (второго) рода над группой» $(Q,+)$, если $(Q,\cdot)$ имеет вид: $x\cdot y=\varphi x+c+\bar\psi y$ $(x\cdot y=\bar\varphi x+c+\psi y)$, где φ $(\psi)\in Aut(Q,+)$, $\bar\psi$ $(\bar\varphi)\in Aaut(Q,+)$,$c-$ фиксированный элемент множества Q, [6].

Все необходимые сведения о $\Lambda-$ форме квазигруппы можно найти в работах [7-9].

Определение. Пусть$(Q,\cdot)$- квазигруппа смешанного типа первого (второго) рода: $x\cdot y=\varphi x+c+\bar\psi y$ $(x\cdot y=\bar\varphi x+c+\psi y)$, четверка$\left((Q,+),\,\varphi,\,\bar\psi,\,c\right)$ $(((Q,+),\,\bar\varphi,\,\psi,\,c))$ где φ $(\psi)\in Aut(Q,+)$, $\bar\psi$ $(\bar\varphi)\in Aaut(Q,+)$,- $c-$ фиксированный элемент множества Q, это называется нормальной формой квазигруппы $(Q,\cdot)$ и обозначается следующим образом: $\Lambda=\left((Q,+),\,\varphi,\,\bar\psi,\,c\right)$ $(\Lambda=(((Q,\oplus),\,\alpha,\,\psi,\,c)))$. Группа $(Q,+)$ называется Λ - группой квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Доказательство. Из условиях леммы следует, что $x\cdot y=\varphi_1x+c_1+\bar\psi_1y=\varphi_2x\oplus c_2\oplus\bar\psi_2y$, $x\cdot y=R_{c_1}^{+}\varphi_1x+\bar\psi_1y=R_{c_2}^{\oplus}\varphi_2x\oplus\bar\psi_2y$ где $R_{c_1}^{+}\varphi_1x=\varphi_1x+c_1$, $R_{c_2}^{\oplus}\varphi_2x=\varphi_2x\oplus c_2$ то есть группы $(Q,+)$ и $(Q,\oplus)$ изотопны, тогда по теоремм Алберта [8] группы $(Q,+)$ и $(Q,\oplus)$ изоморфны, то есть $(Q,+)\cong(Q,\oplus)$.

Следствие 1. Пусть $(Q,\cdot)$- квазигруппа смешанного типа второго рода, имеющая две смешанного типа второго рода Λ - формы $\Lambda_1 = ((Q,+),\bar{\varphi}_1,\psi_1,c_1)$ и $\Lambda_2 = ((Q,\oplus),\bar{\varphi}_2,\psi_2,c_2)$, где $\psi_1 \in Aut(Q,+)$,$\bar{\varphi}_1 \in Aaut(Q,+)$ и $\psi_2 \in Aut(Q,\oplus)$,$\bar{\varphi}_2 \in Aaut(Q,\oplus)$, $c_1,c_2 \in Q$. Тогда группы $(Q,+)$ и $(Q,\oplus)$ изоморфны, то есть $(Q,+) \cong (Q,\oplus)$.

Лемма 2. Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,*)$ квазигруппа смешанного типа первого рода над одной группой $(Q,+)$:$x\cdot y = \varphi_1 x + \bar{\psi}_1 y$ и $x * y = \varphi_2 x + \bar{\psi}_2 y$ где $c_1,c_2 = 0$ нулевой элемент группы $(Q,+)$.Тогда квазигруппа $(Q,\cdot)$ и $(Q,*)$ изотопны, причем изотопия имеет вид $-(\alpha,\beta,\varepsilon)$, такой, что $\alpha \in Aut(Q,+)$ и $\beta \in Aaut(Q,+)$.

Доказательство. Из условиях леммы имеем $x\cdot y = \varphi_1 x+\bar{\psi}_1 y$ и $x*y = \varphi_2 x+\bar{\psi}_2 y$, тогда если $x+y = \varphi_1^{-1}x\cdot\bar{\psi}_1^{-1}y$ и $x+y = \varphi_2^{-1}x*\bar{\psi}_2^{-1}y$ то $\varphi_1^{-1}x\cdot\bar{\psi}_1^{-1}y = \varphi_2^{-1}x*\bar{\psi}_2^{-1}y$ или $\varphi_1^{-1}x\cdot\bar{\psi}_1^{-1}y = \varphi_2^{-1}\varphi_1 x*\bar{\psi}_2^{-1}\bar{\psi}_1 y = \alpha x*\beta y$, где $\alpha = \varphi_2^{-1}\varphi_1$,$\beta = \bar{\psi}_2^{-1}\bar{\psi}_1$ поэтому $\alpha \in Aut(Q,+)$ и $\beta \in Aaut(Q,+)$.

Следствие 2. Пусть $(Q,\cdot)$ и $(Q,*)$ квазигруппа смешанного типа второго рода над одной группой $(Q,+)$:$x\cdot y = \bar{\varphi}_1 x+\psi_1 y$ и $x*y = \bar{\varphi}_2 x+\psi_2 y$ где $c_1,c_2 = 0$ нулевой элемент группы $(Q,+)$.Тогда квазигруппа $(Q,\cdot)$ и $(Q,*)$ изотопны, причем изотопия имеет вид $-(\alpha,\beta,\varepsilon)$, такой, что $\beta \in Aut(Q,+)$ и $\alpha \in Aaut(Q,+)$.

Теорема 1. Пусть $(Q_1,\cdot)$ линейные квазигруппы $x\cdot y = \varphi\, x + c_1 + \psi\, y$: $\Lambda_1 = ((Q_1,+),\varphi,\psi,c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2,\circ)$ алинейные квазигруппы $x\circ y = \bar{\varphi}\, x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\, y$: $\Lambda_2 = \left((Q_2,\oplus),\bar{\varphi},\bar{\psi},c_2\right)$ их нормальные формы, $\gamma:(Q_1,\cdot)\to(Q_2,\circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1,\cdot)$ в $(Q_2,\circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma\, x * \gamma 0$, $\eta_2 x = *\gamma\, 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$. Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1,+)$ в $(Q_2,\oplus)$ и $\eta_1\varphi = \bar{\varphi}\eta_1$,$\eta_2\psi = \bar{\psi}_1\eta_2$, Кроме того $\eta_1\,(\eta_2)$, –взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\gamma-$ взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть $\gamma:(Q_1,+)\to(Q_2,\oplus)$ гомоморфизм, то есть

$$\gamma\,(x\cdot y) = \gamma\, x\circ\gamma\, y,$$

$$\gamma\,(\varphi\, x + c_1 + \psi\, y) = \bar{\varphi}\gamma\, x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\, y. \tag{4}$$

Положим в () $y = \psi^{-1}(-c_1)$,

$$\gamma\varphi\, x = \bar{\varphi}\gamma\, x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\,\psi^{-1}(-c_1) = \bar{\varphi}\gamma x \oplus c_3, \tag{5}$$

где $c_3 = c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\,\psi^{-1}(-c_1)$.

Аналогично положив () $x = \varphi^{-1}(-c_1)$, получим

$$\gamma\psi\, y = \bar{\varphi}\gamma\,\varphi^{-1}(-c_1)x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\, y = c_4 \oplus \bar{\psi}\gamma y, \tag{6}$$

где $c_4 = \bar{\varphi}\gamma\,\varphi^{-1}(-c_1)x \oplus c_2$.

Теперь, при $x = \varphi^{-1}(-c_1)$, $y = \psi^{-1}(-c_1)$ из () следует

$$\gamma(-c_1) = \bar{\varphi}\gamma\,\varphi^{-1}(-c_1) \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\,\varphi^{-1}(-c_1) = c_4 * c_2 \oplus c_3, \tag{7}$$

Из (),(),(),() следует

$$\gamma\,(x+y) = \gamma\left(\varphi\varphi^{-1}x + c_1 + \psi\,\psi^{-1}\,(-c_1+y)\right) = \bar{\varphi}\gamma\varphi^{-1}y \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\psi^{-1}\,(-c_1+y) =$$

$$= \gamma\varphi_1\,\varphi^{-1}x * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma\psi\,\psi^{-1}\,(-c_1+y) = \gamma\, x * c_3 \oplus c_2 * c_4 + \oplus\gamma\,(-c_1+y) =$$

$$= \gamma\, x * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \gamma\,(-c_1+y) = \gamma x * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-c_1+y)\,,$$

$$\gamma\,(x+y) = \gamma\, x * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-c_1+y)\ . \tag{8}$$

Аналогично

$$\gamma\,(x+y) = \gamma\left(\varphi\,\varphi^{-1}\,(x-c_1) + c_1 + \psi\psi^{-1}y\right) = \bar{\varphi}\gamma\varphi^{-1}\,(x-c_1) \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}\gamma\,\psi^{-1}y =$$

$$= \gamma\varphi\varphi^{-1}\,(x-c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma\beta_1\,\beta_1^{-1}y = \gamma\,(x-c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma y =$$

$$= \gamma\,(x-c_1) * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \gamma y = \gamma\,(x-c_1) * (-c_1) \oplus \gamma y,$$

$$\gamma\,(x+y) = \gamma\, x * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-c_1+y)\ . \tag{9}$$

при $y = -c_1$ получаем

$$\gamma\,(x - c_1) = \gamma\, x * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-2c_1)\ . \tag{10}$$

Положим значение $\gamma\,(x - c_1)$ в (), учитывая ():

$$\gamma\,(x + y) = \gamma\, x * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-2c_1) * \gamma\ (-c_1) \oplus \gamma\, y\,.$$

Положим в (), $x = y = 0$:

$$\gamma 0 = \gamma\, 0 * \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-2c_1) * \gamma\ (-c_1) \oplus \gamma\, 0\,.$$

Тогда

$$\gamma 0 = \gamma\,(-c_1) \oplus \gamma\,(-2c_1) * \gamma\ (-c_1)\ .$$

Следовательно (), имеет вид

$$\gamma\ (x + y) = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma y\,.$$

Определим следующие отображения Q_1 в Q_2.

$$\eta_1 x = \gamma x * \gamma 0\,,\eta_2 x = *\gamma 0 \oplus \gamma y.$$

Легко заметить, что η_1 и η_2 групповые гомоморфизмы. Действительно, $\eta_1\ (x + y) =\ \gamma\,(x + y) * \gamma 0 = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma\, y * \gamma 0\,, \eta_1 x \oplus \eta_1 y = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma\, y * \gamma 0$.Следовательно, $\eta_1\ (x + y) = \eta_1 x \oplus \eta_1 y$.

Второе проверяется аналогично. Далее, учитывая определение $\eta_1 -$и () имеем: $\eta_1 \varphi\, x = \gamma \varphi\, x * \gamma 0 = \bar{\varphi}\, \gamma x \oplus c_3 - \gamma 0$. Пусть в () $x = 0$,тогда получим $\gamma 0\ = \bar{\varphi} \eta 0 x \oplus c_3$, откуда $c_3 * \gamma 0\ = *\bar{\varphi} \eta 0$. Следовательно, $\eta_1 \varphi\, x = \bar{\varphi}\, \gamma x * \bar{\varphi} \gamma 0 = \bar{\varphi}\,(\gamma x * \gamma 0) = \bar{\varphi} \eta_1 x$,то есть $\eta_1 \varphi\ = \bar{\varphi} \eta_1$. Аналогично, $\eta_2 \psi\, x = *\bar{\psi}\, \gamma 0 \oplus \bar{\psi} \gamma x = \bar{\psi}\,(*\gamma 0 \oplus \gamma x) = \bar{\psi} \eta_2 x$, то есть $\eta_2 \psi\ = \bar{\psi} \eta_2$.

Следствие 3. Пусть $(Q_1, \cdot)$ линейные квазигруппы $x \cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \psi_1 y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, +),\ \varphi_1,\ \psi_1,\ c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2, \circ)$ квазигруппы смешного типа первого рода $x \circ y = \varphi_2 x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}_2 y$: $\Lambda_2 = \big((Q_2, \oplus),\ \varphi_2,\ \bar{\psi}_2,\ c_2\big)$ их нормальные формы, $\gamma : (Q_1, \cdot) \to (Q_2, \circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \cdot)$ в $(Q_2, \circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma\, x * \gamma 0$, $\eta_2 x = *\gamma\, 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$ Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1, +)$ в $(Q_2, \oplus)$ и $\eta_1 \varphi_1 = \varphi_2 \eta_1$,$\eta_2 \psi_1 = \bar{\psi}_2 \eta_2$, Кроме того $\eta_1\,(\eta_2)$,$-$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\gamma -$ взаимно однозначно.

Следствие 4. Пусть $(Q_1, \cdot)$ квазигруппы смешанного типа второго рода $x \cdot y = \bar{\varphi}_1 x \oplus c_1 \oplus \psi_1 y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, \oplus),\ \bar{\varphi}_1,\ \psi_1,\ c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2, \circ)$ линейные квазигруппы $x \circ y = \varphi_2 x + c_2 + \psi_2 y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, +),\ \varphi_2,\ \psi_2,\ c_2)$ их нормальные формы, $\gamma : (Q_1, \cdot) \to (Q_2, \circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \cdot)$ в $(Q_2, \circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma\, x * \gamma 0$, $\eta_2 x = *\gamma\, 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$. Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1, +)$ в $(Q_2, \oplus)$ и $\eta_1 \varphi_1 = \bar{\varphi}_2 \eta_1$,$\eta_2 \psi_1 = \psi_2 \eta_2$, Кроме того $\eta_1\,(\eta_2)$,$-$взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\gamma -$ взаимно однозначно.

Ввиду того, что доказательство следствий 3 и 4 почти полностью повторяет доказательство теоремы 1, считаем, что нет необходимости приводить доказательство следствий 3 и 4.

Лемма 3. Пусть $(Q, \cdot)$ линейная слева квазигруппа $x \cdot y = \varphi\, x + c + \beta\, y$ и $(Q, \circ)$ алинейная справа квазигруппа $x \circ y = \alpha\, x \oplus c_1 \oplus \bar{\psi}\, y$. Квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ являются квазируппой смешанного типа первого рода, тогда и только тогда, когда β и α являются квазиавтоморфизмом группой $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$

Доказательство. Пусть

$$x \cdot y = \varphi\, x + c + \beta\, y = \alpha\, x \oplus c_1 \oplus \bar{\psi}\, y\,, \tag{11}$$

где β и α подстановки множества Q , $\varphi\ \in ut\,(Q, +)$, $\bar{\psi}$ $-$антиавтоморфизм группы $(Q, \oplus)$, и $c, c_1 -$ фиксированный элемент множества Q Тогда из равенства () получим

$$x \cdot y = \tilde{L}^{+}_{\varphi x} \tau\, y = \tilde{L}^{\oplus}_{\sigma\, x} \bar{\psi}\, y\,, \tag{12}$$

где $\tau = c + \beta\, y$ и $\sigma = \alpha\, x \oplus c_1$. Из равенства () следует, что группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ главно изотопны, потому по теореме Алберта [7], если две группы изотопны то они изомофны. Более того, из доказательства этой теоремы следует, что существует, такой элемент, как $0 \in Q$,что

$$\tilde{L}_0\,(x + y) = \tilde{L}_0 x \oplus \tilde{L}_0 y\,,$$

где $\tilde{L}_0 x = 0 + x$. Тогда и равенство () получим

$$\tilde{L}_0\left(\tilde{L}^+_{\varphi\, E}\tau\, y\right) = \tilde{L}_0\tilde{L}^+_{\sigma\, x}\tilde{L}_0\bar{\psi}\, y\,,$$

или

$$\varphi x + \tau\,\tilde{L}_0^{-1}y = \sigma\, x + \tilde{L}_0\bar{\psi}\tilde{L}_0^{-1}y\,, \tag{13}$$

Положим в равенстве () $x = 0$, тогда $\varphi 0 + \tau\,\tilde{L}_0^{-1}y = \sigma\, 0 + \tilde{L}_0\bar{\psi}\tilde{L}_0^{-1}y$ или $\tau\,\tilde{L}_0^{-1}y = 2 + \tilde{L}_0\bar{\psi}\tilde{L}_0^{-1}y$, $\tau\,\tilde{L}_0^{-1}y = 2 + \bar{\psi}_1 y$, где $2 = \sigma\, 0$, $\tilde{L}_0\bar{\psi}\,\tilde{L}_0^{-1} = \bar{\psi}_1 -$антиавтоморфизм группы $(Q,+)$. По лемме 2.5 [7]$\tau\,\tilde{L}_0^{-1}$,а следовательно $\tau-$квазиантиавтоморфизмы группы $(Q,+)$. Так как $\tilde{L}_0 = \tilde{L}_0^{-1} -$квазиантиавтоморфизмы этой группы $(Q,+)$. Поэтому $\tau\,\tilde{L}_0^{-1}y = s + \bar{\psi}_2 y$, $s \in Q$, а $x\cdot y = \varphi\, x + c + \bar{\psi}_2 y$,$\bar{\psi}$ $-$антиавтоморфизм группы $(Q,+)$,$\varphi \in ut\,(Q,+)$. То есть $(Q,\cdot) -$ квазируппа смешанного типа первого рода.

Таким образом, верна следующее следствие.

Следствие 5. Пусть $(Q,\cdot)$ линейная справа квазигруппа $x\cdot y = \alpha x + c + \psi\, y$ и $(Q,\circ)$ алинейная слева квазигруппа $x\circ y = \bar{\varphi}\, x \oplus c \oplus \beta\, y$. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ является квазируппой смешанного типа второго рода, тогда и только тогда, когда α и β являются квазиавтоморфизмом группы $(Q,+)$ и $(Q,\oplus)$.

Лемма 4. Пусть $(Q,\cdot)$ квазируппа смешанного типа первого рода $x\cdot y = \varphi\, x + c + \bar{\psi} y$ над некоторой группой $(Q,+)$ и $(Q,\circ)$, а квазируппа смешанного типа второго рода $x\circ y = \bar{\varphi} x \oplus c_1 \oplus \psi\, y$ над некоторой группой $(Q,\oplus)$. Тогда квазигруппы $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ является T-квазигруппой, если $R_k\bar{\varphi}R_k^{-1}$ является антиавтоморфизмом группы $(Q,\ +)$.

Доказательство. Пусть $(Q,\cdot)$ квазируппа смешанного типа первого рода над некоторой группой и $(Q,\circ)$ квазируппа смешанного типа второго рода над некоторой группой

$$x\cdot y = \varphi\, x + c + \bar{\psi} y = \bar{\varphi} x \oplus c_1 \oplus \psi\, y \tag{14}$$

где $\varphi \in Aut\,(Q,\ +)$, $\bar{\psi} \in Aaut\ (Q,\ +)$, $\psi \in Aut\,(Q,\ \oplus)$, $\bar{\varphi} \in Aaut\ (Q,\ \oplus)$.

Тогда

$$x\cdot y = \varphi\, x + \alpha y = \bar{\varphi} x \oplus \beta y, \tag{15}$$

где $\alpha y = c + \bar{\psi}\, y$, $\beta y = \bar{c} \oplus \bar{\psi}\, y$. α, β- подстановка множества Q. Тогда по теореме Альберта (теорема 1.4 [7]) $(Q,\ +) \cong (Q,\ \oplus)$, более того, существует элемент $k \in Q$ такой, что

$$R_k\,(x \oplus y) = R_k x + R_k y, \tag{16}$$

где $R_k x = x + k$. Учитывая, это в (), получаем

$$R_k\left(J\varphi^{-1}x \oplus \alpha y\right) = R_k\bar{\varphi}^{-1}x + R_k\beta y$$

или

$$\varphi x + \alpha y = \bar{\varphi} x + k + \beta y.$$

Положим $y = 0$: $\varphi x + \alpha 0 = \bar{\varphi} x + k + \beta 0$. Тогда $\varphi x + \alpha 0 - \beta 0 - k = \bar{\varphi} x$, $\bar{\varphi} x = \varphi x + p = R_h\varphi x$, где $p = \alpha 0 - \beta 0 - k$.

Подстановка $R_k\bar{\varphi}R_k^{-1}$ является антиавтоморфизмом группы $(Q,\ +)$, действительно,

$$\begin{gathered}R_k\bar{\varphi}R_k^{-1}\,(x+y) = R_k\bar{\varphi}\left(R_k^{-1}x \oplus R_k^{-1}y\right) = \\ = R_k\left(\bar{\varphi}R_k^{-1}y \oplus \bar{\varphi}R_k^{-1}x\right) = R_k\bar{\varphi}R_k^{-1}y + R_k\bar{\varphi}R_k^{-1}x.\end{gathered}$$

Учитывая, что $R_k\bar{\varphi}R_k^{-1} = R_kR_p\varphi R_k^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&R_kR_p\varphi R_k^{-1}\,(x+y) = R_kR_p\varphi R_k^{-1}y + R_kR_p\varphi R_k^{-1}x,\\ &\varphi\,(x+y-k) + p + k = \varphi\,(y-k) + p + k + \varphi\,(x-k) + p + k,\\ &\varphi\,(x+y-k) = \varphi\,(y-k) + p + k + \varphi\,(x-k)\,,\\ &\varphi x + \varphi y - \varphi k = \varphi y - \varphi k + p + k + \varphi x - \varphi k,\\ &\varphi x + \varphi y = \varphi y - \varphi k + p + k + \varphi x\end{aligned}$$

Положим $x = y = 0:\ \ 0 = -\varphi k + p + k$. Тогда $\varphi x + \varphi y = \varphi y + \varphi x$ или $x + y = y + x$, то есть группа $(Q,\ +)$ - абелева. Следовательно, $(Q,\ \cdot)$ T-квазигруппа.

Литература

1. Kepka, T. T-quasigroups I, Acta univ. Carolin. Math. Phys. -1971. - Vol.12. - No1.- Pp.31-39.

2. Kepka, T. T-quasigroups II, Acta univ. Carolin., Math. Phys. – 1971. - Vol.12. - No2. - pp.39-49.

3. Табаров А.Х. Тождества и линейность квазигрупп, Москва 2009. 203 С.

4. Давлатбеков А.А. Автомормизмы, эндоморфизмы и конгруэнция обобщенных линейных квазигрупп. Душанбе 2019. 115 С.

5. Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах, Мат. сборник, 1966, 70: 1. С. 55-97.

6. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп, Дискретная математика, РАН, 1992, том 4, вып.2, С. 142-147.

7. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп, -М.: Наука, 1967.- 222. С.

8. Табаров А.Х. Гомоморфизмы эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп, Дискретная математика, РАН, 2007, том 19, вып.2, С. 67-73.

9. Табаров А.Х. Л-Формы линейных квазигрупп, Доклады. АНРТ, 2005, том. XLVIII, No 11-12, С. 13-21.

REZYUME

Kvaziguruhlar asosan gruppaga izotop bo'lgan kvaziguruhlar, Abel guruhga izotop kvaziguruhlar bilan bog'liq bo'lib, chiziqli kvaziguruhlar, achiziqli kvaziguruhlar, umumlashtirilgan chiziqli kvaziguruhlar (chapdan chiziqli, o'ngdan chiziqli, chapdan achiziqli, o'ngdan achiziqli, aralash turdagi birinchi (ikkinchi) turdagi) hamda T-kvaziguruhlar muhim o'rin tutadi. Ushbu ishda umumlashtirilgan chiziqli kvaziguruhlar hamda chiziqli kvaziguruhlar Λ-shaklli kvaziguruhlar yordamida tavsiflanadi. Ta'kidlash lozimki, manbalarda [1-2] T-kvaziguruhlarning ba'zi xususiyatlari, [3] chiziqli kvaziguruhlarda, [4] chap (o'ng) chiziqli kvaziguruhlarda Λ-shaklli kvaziguruhlar yordamida o'rganilgan. Shuningdek, birinchi (ikkinchi) turdagi aralash turdagi kvaziguruhlar uchun ham bu xususiyatlar Λ-shaklli kvaziguruhlar yordamida isbotlangan. Bundan tashqari, birinchi (ikkinchi) turdagi aralash turdagi kvaziguruhlar bilan T-kvaziguruhlar o'rtasidagi bog'lanish aniqlangan.

Kalit so'zlar: achiziqli kvazigruppa, chiziqli kvazigruppa, kvazigruppa shakli, birinchi turdagi aralash kvazigruppa, ikkinchi turdagi aralash kvazigruppa, endomorfizm, antiavtomorfizm, kvaziavtomorfizm, T-kvazigruppa.

RESUME

Quasigroups, mainly isotopic groups, Abelian groups, a special role is played by linear quasigroups, alinear quasigroups, generalized linear quasigroups (linear (left), right, alinear (left), right, mixed type of the first (second) kind) and T-quasigroups.

This paper provides a description of generalized linear quasigroups, as well as linear quasigroups using the forms of the quasigroup. It should be noted that in [1-2] some properties of the T-quasigroup in [3] linear quasigroups, in [4] left (right) linear quasigroups were studied Λ-form quasigroups. Similarly, for a quasigroup of mixed type of the first (second) kind, these properties are proved using Λ-form of quasigroups. In addition, a connection is established between different types of mixed-type quasigroups of the first (second) kind with T-quasigroups.

Key words: alinear quasigroup, linear quasigroup, Λ-form quasigroup, quasigroup of mixed type of the first kind, quasigroup of mixed type of the second kind, endomorphism, anti-automorphism, quasi-automorphism, T-quasigroup.