УДК 539.3

ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИН В НАПРЯЖЕНИЯХ

Ахмедов А. Б.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
Ahmedov-1956@mail.ru
Ибрагимова Н.И.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

РЕЗЮМЕ

В данной работе предлагается новая теория пластин в напряжениях. Получены разрешающие уравнения в терминах продольных усилий, перерезывающих сил и внутренних моментов. Сформулированы граничные условия для пластин в напряжениях. Полученные решения в напряжениях одновременно удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности напряжений Бельтрами-Митчелла. Сформулирована краевая задача для пластины под действием самоуравновешенных нагрузок. Решены некоторые прикладные задачи.

Ключевые слова: Теория упругости, задача в напряжениях, параллелепипед, потенциал напряжений, взаимно уравновешенные нагрузки, пластина, Бельтрами-Митчелл.

Введение

Как известно, в инженерных приложениях для расчета прочности и жесткости элементов конструкций, оперируют компонентами тензора напряжений, возникающие, при этом, перемещения представляют собой чисто академический интерес. Вместе с тем, корректная постановка задачи теории упругости сформулирована в перемещениях, следовательно, непосредственное вычисление компонентов тензора напряжений в пространственных задачах не представляется возможным. Классическая постановка задачи теории упругости в напряжениях заключается в решении трех уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x \in V, \tag{1}$$

при выполнении трех статических граничных условий:

$$\sigma_{ij} n_j\big|_G = S_i, \quad x \in G, \tag{2}$$

где $\sigma_{ij,j}$ - компоненты симметричного тензора напряжений X_i и S_i - соответственно компоненты массовых и поверхностных сил. n_j - компоненты вектора внешней нормали. При этом на лицо некорректность постановки пространственных задач в напряжениях.

В плоских задачах теории упругости, с использованием функции напряжений Эри, достигается точное удовлетворение уравнениям равновесия. Для определения неизвестного потенциала напряжений используется уравнение совместности деформаций. Следовательно, в плоских задачах теории упругости имеется возможность непосредственного исследования напряженно-деформированного состояния различных тел.

Первые попытки постановки пространственных задач теории упругости в напряжениях предприняты в работах Коновалова А.Н. [1], в которых пространственные уравнения равновесия с применением, так называемой операции деформирования, приведены к шести уравнениям в напряжениях, вместе с тем имеется в наличии только три статические граничные условия (1.2) в напряжениях.

В фундаментальной работе Победри Б.Е. [2] с требованием выполнения уравнения равновесия на границе рассматриваемого трехмерного тела, достигается замкнутая задача пространственной теории упругости в относительно шести компонент симметричного тензора напряжений.

В работе [4] предложен вариационно-разностный метод решения задачи в напряжениях. В работе [5] данным методом решены задачи о квазистатическом равновесии вязкоупругого параллелепипеда в напряжениях под действием самоуравновешенных нагрузок, в том числе и сосредоточенных сил.

В работе [6] введением трех потенциалов напряжений, пользуясь постановкой задачи в напряжениях Победри, решены задачи о равновесии параллелепипеда под воздействием различных самоуравновешенных поверхностных и объёмных нагрузок. Здесь, показано, что для пластины, как предельный случай параллелепипеда, полученные решения точно удовлетворяют уравнениям равновесия.

В теории пластин, обычно введением продольных усилий, перерезывающих сил и внутренних моментов редуцируются к двумерным задачам. В работах [7-10] предложена неклассическая теория пластин без упрощающих предположений и гипотез в перемещениях.

В данной работе предлагается новая теория пластин в напряжениях.

Основная часть

С целью упрощения выкладок для рассматриваемой задачи предположим, что на пластину с толщиной - h, действуют только поверхностные нагрузки ($X_i = 0$) и прямоугольная декартовая система координат расположена в геометрическом центре рассматриваемой пластины. Нормальную, к серединной плоскости пластины координату, обозначая через $-\ z$, будем иметь координатную систему- Ox_1x_2z, тогда в индексах тензора напряжений следует ввести замену $3- > z$, следовательно, уравнения равновесия (1):

$$\begin{cases}\sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0 \\ \sigma_{zj,j} + \sigma_{zz,z} = 0\end{cases} \tag{3}$$

и Бельтрами-Митчелла примут вид:

$$\begin{cases}\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij,zz} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{kk} + \sigma_{zz}\right)_{,ij} = 0 \\ \Delta\sigma_{iz} + \sigma_{iz,zz} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{kk} + \sigma_{zz}\right)_{,iz} = 0 \\ \Delta\sigma_{zz} + \frac{2+\nu}{1+\nu}\sigma_{zz,zz} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,zz} = 0\end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что на противоположных плоскостях пластины, по нормальной координате -z действует нормальные $-q_z^{\pm}(x_1, x_2)$, и касательные нагрузки - $-q_i^{\pm}(x_1, x_2)$ остальные грани свободны от нагрузок.

Тогда соответствующие граничные условия на произвольных гранях параллелепипеда можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases}\sigma_{zi} = q_i^{\pm}(x_1, x_2), \\ \sigma_{zz} = q_z^{\pm}(x_1, x_2), \quad \text{при } z = \pm\dfrac{h}{2}, \\ \sigma_{iz,z} = -\sigma_{ij,j}, \\ \sigma_{zz,z} = -q_{i,i}^{\pm}(x_1, x_2).\end{cases}, \tag{5}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{1z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0,\end{cases} \quad \text{при } x_1 = -\frac{l_1}{2},\ \frac{l_1}{2}, \tag{6}$$

$$\begin{cases}\sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{2z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0,\end{cases} \quad \text{при } x_2 = -\frac{l_2}{2},\ \frac{l_2}{2}, \tag{7}$$

Для пластин искомое решение в напряжениях представим в виде полинома по нормальной координате z [6]:

$$\begin{cases}\sigma_{zz} = \dfrac{1}{h}N_z + \dfrac{12}{h^3}M_z z - \Phi_2(z)C - \Phi_3(z)D \\ \sigma_{iz} = \dfrac{N_i}{h} + \dfrac{12}{h^3}M_i z - \Phi_2(z)C_i - \Phi_3(z)D_i \\ \sigma_{ij} = \dfrac{N_{ij}}{h} + \dfrac{12}{h^3}M_{ij} z - \Phi_2(z)C_{ij} - \Phi_3(z)D_{ij}\end{cases} \tag{8}$$

где,

$$\begin{pmatrix} N_z \\ N_i \\ N_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{iz} \\ \sigma_{ij} \end{pmatrix} dz, \begin{pmatrix} M_z \\ M_i \\ M_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{iz} \\ \sigma_{ij} \end{pmatrix} z\, dz,$$
$$\Phi_2(z) = \frac{h^2}{12}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2}\right), \Phi_3(z) = \frac{3h^2}{20}\left(1 - \frac{20}{3}\frac{z^2}{h^2}\right) z$$

При этом, имеет место $\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r(z)\, dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r(z) z\, dz = 0, \quad r = 2, 3.$

После удовлетворения граничных условий (5), для нормальных σ_{zz} и касательных σ_{iz} напряжений будем иметь следующие выражения:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \left[\frac{3}{2h}\left(m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i}\right) + 3\frac{z}{h}\left(q_z + \frac{1}{6} m_{i,i}\right)\right]\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right) \\ \quad - \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} + 6\frac{z}{h} - 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_z^+ \\ \quad - \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} - 6\frac{z}{h} + 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_z^-, \\ \sigma_{iz} = \left[\frac{3}{2}\frac{N_i}{h} + \frac{5}{2}\left(\frac{h^3}{30} \mathcal{C}_{ij,j} + q_i\right)\frac{z}{h}\right]\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right) \\ \quad - \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} + 6\frac{z}{h} - 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_i^+ \\ \quad - \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} - 6\frac{z}{h} + 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_i^- \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} M_i = \frac{h^5}{360} C_{ij,j} + \frac{h^2}{12} q_{i'} D_{ij,j} = 0, \\ M_z = \frac{h^2}{10} q_z + \frac{h^2}{60} m_{i,i}, \\ N_z = m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i}, \\ q_z = q_z^+ - q_z^-, \quad m_z = \frac{q_z^+ + q_z^-}{2} h, \\ q_i = q_i^+ - q_i^-, \quad m_i = \frac{q_i^+ + q_i^-}{2} h \end{cases} \tag{10}$$

После подстановки (10) в (9) получим окончательную формулу для σ_{zz}

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = &\left[\frac{3}{2h}\left(m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i}\right) + 3\left(q_z + \frac{1}{6} m_{i,i}\right)\frac{z}{h}\right]\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right) \\ &- \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} + 6\frac{z}{h} - 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_z^+ \\ &- \frac{1}{4}\left(1 - 12\frac{z^2}{h^2} - 6\frac{z}{h} + 40\frac{z^3}{h^3}\right) q_z^-, \end{aligned} \tag{11}$$

В частности, из полученного выражения для σ_{zz} и (10) следует что, при $q_z^+ = -q_z^- = q_z$, $q_i^+ = q_i^- = 0$, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&N_z = 0,\\
&M_z = \frac{h^2}{5}\,q_z,\\
&\sigma_{iz} = \left(\frac{3N_i}{2h} + \frac{30}{h^3}M_i z\right)\left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right),\\
&\sigma_{zz} = \left(3\frac{z}{h} - 4\frac{z^3}{h^3}\right)q_z.
\end{aligned}
$$

а для случая $q_z^+ = q_z$, $q_z^- = 0$, $q_i^+ = q_i^- = 0$, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&N_z = \frac{h}{2}\,q_z,\\
&M_z = \frac{h^2}{10}\,q_z,\\
&\sigma_{zz} = q_z\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{z}{h} - 2\frac{z^3}{h^3}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь, выражение нормального напряжения- σ_{zz}, соответствует предложенной формуле Рейснера [10]. Компоненты тензора напряжений σ_{zz} и σ_{iz} вопреки известным классическим и уточненным теориям пластин [11] нетривиальны и точно удовлетворяют заданным граничным условиям, что свидетельствует о преимуществе предложенной теории. Неизвестные функции продольных и поперечных координат, участвующие в выражениях (8)-(11) подлежат к определению. С целью их определения в уравнениях равновесия (3) и Бельтрами-Митчелла (4) произведем стандартную процедуру интегрирования по толщине рассматриваемой пластины:

$$
\begin{cases}
N_{ij,j} + q_i = 0\\
N_{i,i} + q_z = 0\\
M_{ij,j} - N_i + m_i = 0\\
M_{i,i} - N_z + m_z = 0
\end{cases}
\tag{12}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta N_{ij} + \sigma_{ij,z}\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\left(N_{kk} + N_z\right)_{,ij} = 0\\
\Delta N_i + \sigma_{iz,z}\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{kk} + \sigma_{zz}\right)_{,i}\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0\\
\Delta N_z + \dfrac{2+\nu}{1+\nu}\sigma_{zz,z}\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,z}\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0
\end{cases}
\tag{13}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta M_{ij} + \left(z\sigma_{ij,z}\right)\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \sigma_{ij}\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\left(M_{kk} + M_z\right)_{,ij} = 0\\
\Delta M_i + \left(z\sigma_{iz,z}\right)\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \sigma_{iz}\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\left[\left(z(\sigma_{kk} + \sigma_{zz})_{,i}\right)\big|_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \left(N_{kk} + N_z\right)_{,i}\right] = 0\\
\Delta M_z + \dfrac{2+\nu}{1+\nu}\left(z\sigma_{zz,z} - \sigma_{zz}\right)\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \dfrac{1}{1+\nu}\left(z\sigma_{kk,z} - \sigma_{kk}\right)\big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0
\end{cases}
\tag{14}
$$

Принимая во внимание (8) будем иметь:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,z}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{ij,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=2h\mathcal{C}_{ij} \\ \sigma_{ij,j}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{ij,j}\left(-\frac{h}{2}\right)=-\frac{12}{h^2}\left(m_i-N_i\right) \\ \sigma_{zj,j}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{zj,j}\left(-\frac{h}{2}\right)=q_{i,i} \\ \sigma_{zz,i}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{zz,i}\left(-\frac{h}{2}\right)=q_{z,i} \\ \sigma_{kk,z}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{kk,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=2h\mathcal{C}_{kk} \\ \sigma_{kk,i}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{kk,i}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{12}{h^2}M_{kk,i}+\frac{h^3}{10}D_{kk,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij,z}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{ij,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{24}{h^3}M_{ij}+\frac{6h^2}{5}D_{ij}, \\ \sigma_{ij}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{ij}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{24}{h^2}M_{ij}+\frac{h^3}{10}D_{ij}, \\ \sigma_{iz,z}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{iz,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=-\frac{120}{h^3}M_i+\frac{12}{h}q_i, \\ \sigma_{iz}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{iz}\left(-\frac{h}{2}\right)=q_i, \\ \sigma_{kk,i}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{kk,i}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{2}{h}N_{kk,i}+\frac{h^2}{3}\mathcal{C}_{kk,i}, \\ \sigma_{zz,i}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{zz,i}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{2}{h}m_{z,i}, \\ \sigma_{zz,z}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{zz,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=-\frac{120}{h^3}M_z+\frac{12}{h}q_z, \\ \sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right)=q_i, \\ \sigma_{kk,z}\left(\frac{h}{2}\right)+\sigma_{kk,z}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{24}{h^3}M_{kk}+\frac{6h^2}{5}D_{kk}, \\ \sigma_{kk}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{kk}\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{12}{h^2}M_{kk}+\frac{h^3}{10}D_{kk}. \end{cases} \tag{15}$$

и подставляя их в (13) - (14), при этом свертывая первые уравнения этих систем, учитывая граничные условия (5)-(7) и выражения для тензора напряжений (8)-(9), а также выражений (10) после некоторых математических выкладок будем иметь окончательную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta N_{kk}=\left[\nu\Delta\left(m_z+\frac{h^2}{12}q_{k\cdot k}\right)-(1+\nu)q_{k\cdot k}\right] \\ \Delta N_i-\frac{12}{h^2}(N_i-m_i)+\frac{1}{1+\nu}\frac{12}{h^2}M_{kk,i}+\mathcal{Q}_{,i}=0 \\ 2h\mathcal{C}_{kk}=-(1+\nu)\Delta N_z+(2+\nu)q_{k\cdot k} \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \Delta M_{kk}=\nu\Delta\left(\frac{h^2}{10}q_z+\frac{h^2}{60}m_{i,i}\right)-(1+\nu)\left(m_{i,i}+q_z\right) \\ \Delta M_t-\frac{60}{h^2}M_i+5q_i+\mathcal{T}_{,i}=0, \\ \frac{h^3}{2}D_{kk}=-(1+\nu)\Delta M_z+(2+\nu)\left(m_{i,i}+q_z\right) \end{cases} \tag{17}$$

$$\mathcal{Q}=\frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{5}\left((2+\nu)\left(m_{i,i}+q_z\right)-(1+\nu)\Delta\left(\frac{h^2}{10}q_z+\frac{h^2}{60}m_{i,i}\right)\right)+q_z\right],$$
$$\mathcal{J}=\frac{1}{1+\nu}\left[\frac{h^2}{12}\left(-(1+\nu)\Delta\left(m_z+\frac{h^2}{12}q_{k\cdot k}\right)+(2+\nu)q_{k,k}\right)-\frac{h^2}{12}q_{k\cdot k}\right]$$

В полученных уравнениях (16) и (17) вторые уравнения, дифференцируя по x_i и свертывая их получим условия равновесного состояния по внешным нагрузкам q_z и q_i, условия при котором не будет перемещения пластины как жесткое тело:

$$\begin{cases} -\Delta q_z+\dfrac{24}{h^2}\left(m_{i,i}+q_z\right)+\dfrac{6}{5}\dfrac{\nu}{1+\nu}\Delta\left(q_z+\dfrac{1}{6}m_{i,i}\right)+\Delta\mathcal{Q}=0, \\ \dfrac{h^2}{12}\Delta q_{k,k}+\Delta\mathcal{T}=0. \end{cases}, \tag{18}$$

Таким образом, относительно неизвестных M_{ij},N_{ij} ,D_{ij},C_{ij} ,N_i,M_i будем иметь следующие системы 16 взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} N_{ij,j}+q_i=0, \\ C_{ij,j}-\dfrac{360}{h^5}M_i+\dfrac{30}{h^3}q_i=0, \\ \Delta N_{kk}=\left[\nu\Delta\left(m_x+\dfrac{h^2}{12}q_{k,k}\right)-(1+\nu)q_{k,k}\right], \\ C_{kk}=-\dfrac{1+\nu}{2h}\left[\Delta\left(m_z+\dfrac{h^2}{12}q_{k,k}\right)\right]+\dfrac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ \Delta N_i-\dfrac{12}{h^2}(N_i-m_i)+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{12}{h^2}M_{kk,i}+\mathcal{Q}_{,i}=0. \end{cases}, \tag{19}$$

$$\begin{cases} M_{ij,j}-N_i+m_i=0, \\ D_{ij,j}=0, \\ \Delta M_{kk}=\nu\Delta\left(\dfrac{h^2}{10}q_z+\dfrac{h^2}{60}m_{i,i}\right)-(1+\nu)(m_{t,i}+q_z), \\ D_{kk}=\dfrac{2}{h^3}\left[-(1+\nu)\Delta\left(\dfrac{h^2}{10}q_z+\dfrac{h^2}{60}m_{t,i}\right)+(2+\nu)(m_{i,i}+q_z)\right], \\ \Delta M_i-\dfrac{60}{h^2}M_i+5q_i+\mathcal{J}_{,i}=0. \end{cases}, \tag{20}$$

Из граничных условий (6) и (7) на краях пластины будем иметь свободные граничные условия для этих интегральных величин:

$$\begin{cases} N_{11}=0,\quad N_{12}=0,\quad M_{11}=0,\quad M_{12}=0,\quad M_1=0,\quad N_1=0 \\ N_{ij,j}+q_i=0,\quad M_{ij,j}-N_i+m_i=0,\quad C_{11}=0,\quad C_{12}=0 \\ C_{22}=-\dfrac{1+\nu}{2h}\left[\Delta\left(m_z+\dfrac{h^2}{12}q_{k,k}\right)\right]+\dfrac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ D_{11}=0,\quad D_{12}=0, \\ D_{22}=\dfrac{2}{h^3}\left[-(1+\nu)\Delta\left(\dfrac{h^2}{10}q_z+\dfrac{h^2}{60}m_{i,i}\right)+(2+\nu)(m_{i,i}+q_z)\right]. \end{cases} \quad \text{при } x_1=-\frac{l_1}{2},\ \frac{l_1}{2} \tag{21}$$

$$\begin{cases} N_{22}=0,\quad N_{21}=0,\quad M_{22}=0,\quad M_{21}=0,\quad M_2=0,\quad N_2=0 \\ N_{ij,j}+q_i=0,\quad M_{ij,j}-N_i+m_i=0,\quad C_{22}=0,\quad D_{22}=0, \\ C_{11}=-\dfrac{1+\nu}{2h}\left[\Delta\left(m_z+\dfrac{h^2}{12}q_{i,i}\right)\right]+\dfrac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ C_{21}=0,\quad D_{21}=0, \\ D_{11}=\dfrac{2}{h^3}\left[-(1+\nu)\Delta\left(\dfrac{h^2}{10}q_z+\dfrac{h^2}{60}m_{i,i}\right)+(2+\nu)(m_{i,i}+q_z)\right]. \end{cases} \quad \text{при } x_2=-\frac{l_2}{2},\ \frac{l_2}{2} \tag{22}$$

Таким образом, имеем новую постановку задач о равновесии пластин в продольных усилиях, перерезывающих силах и изгибающих моментах, с помощью которых непосредственно вычисляются компоненты симметричного тензора напряжений.

Обсуждение результатов

Краевая задача в потенциалах.

Пусть внешние касательные нагрузки являются потенциальными, т.е. $q_i = q_{,i}$, $m_i = m_{,i}$. Введем в рассмотрении для искомых переменных M_{ij}, N_{ij}, D_{ij}, C_{ij} функцию Эри в следующем виде:

$$\begin{cases} M_{ij} = (\Delta M - hq + Q)\,\delta_{ij} - M_{,ij}, \\ N_{ij} = (\Delta N - q)\,\delta_{ij} - N_{,ij}, \\ C_{ij} = \left(\Delta C + \dfrac{360}{h^5}T - \dfrac{30}{h^3}q\right)\delta_{ij} - C_{,ij}, \\ D_{ij} = \Delta D\,\delta_{ij} - D_{,ij} \end{cases}, \tag{23}$$

при этом, как следствие, с учетом выражений для последних уравнений (19)-(20) можно положить $N_i = Q_{,i}$ и $M_i = T_{,i}$, тогда уравнения равновесия в моментах и продольных усилиях, а также вторые уравнения относительно C_{ij} и D_{ij} в (19)-(20) становятся тождествами. Тогда, вместо системы из восьми уравнений (19)-(20) будем иметь следующую систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \Delta\Delta N = \nu\Delta\left(m_z + \dfrac{h^2}{12}\Delta q\right) - (1+\nu)\Delta q \\ \Delta C + \dfrac{720}{h^5}T = \dfrac{1}{2h}\left[(2+\nu)\,\Delta q - (1+\nu)\dfrac{h^2}{12}\Delta\Delta q\right] - \dfrac{1+\nu}{2h}\Delta q + \dfrac{60}{h^3}q \\ \Delta Q + \dfrac{1-\nu}{1+\nu}\dfrac{12}{h^2}(Q-m) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{12}{h^2}\Delta M + \mathcal{Q} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} \Delta(\Delta M - 2m + 2Q) = \nu\,\dfrac{h^2}{10}\Delta(q_z + \dfrac{1}{6}\Delta m) - (1+\nu)(\Delta m + q_z) \\ \Delta D = \dfrac{2}{h^3}\left[-(1+\nu)\Delta\left(\dfrac{h^2}{10}q_z + \dfrac{h^2}{60}\Delta m\right) + (2+\nu)\Delta m + q_z)\right] \\ \Delta T - \dfrac{60}{h^2}T + \mathcal{T} + 5q = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Граничные условия (21), (22) на свободных краях пластины в терминах потенциалов продольных усилий- N, перерезывающих усилий-Q и внутренних моментов-M, а также для C, D с учетом тождественного выполнения соответствующих уравнений равновесия на границе, примет следующей вид:

$$\begin{cases} N = 0, \quad N_{,i} = 0, \quad M = 0, \quad M_{,i} = 0, \\ C = 0, \quad D = 0, \quad \mathcal{Q}_{,i} = 0, \quad \mathcal{T}_{,i} = 0, \end{cases} \text{при } x_i = \pm\tfrac{l_1}{2}\ , \tag{26}$$

Для простаты рассмотрим случай взаимно уравновешенных внешних нагрузок

$$q_z^+ = -q_z^- = q_z, \quad q^+ = -q^- = q, \quad m_z = 0, \quad m = 0.$$

Для этих нагрузок систему уравнений (24) и (25), можно записать в более компактной форме

$$\begin{cases} \Delta\Delta N = \nu\frac{h^2}{12}\Delta\Delta q + \Delta q(1-\nu) \\ \Delta C + \frac{720}{h^5}T = \frac{1}{2h}\left[(2+\nu)\,\Delta q - (1+\nu)\frac{h^2}{12}\Delta\Delta q\right] - \frac{1+\nu}{2h}\Delta q + \frac{60}{h^3}q \\ \Delta T - \frac{60}{h^2}T + 5q + \frac{h^2}{12}\left(\Delta q - \frac{h^2}{12}\Delta\Delta q\right) \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \Delta(\Delta M + 2Q) - \nu \frac{h^2}{10}\Delta q_z + (1+\nu) q_z = 0 \\ \Delta D = \frac{2}{h^3}\left(-(1+\nu)\frac{h^2}{10}\Delta q_z + (2+\nu) q_z\right) \\ \Delta Q + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{12}{h^2}Q + \frac{1}{1+\nu}\frac{h^2}{12}\Delta M + \frac{7+\nu}{5(1+\nu)}q_z - \frac{h^2}{50}\Delta q_z = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Из (27) следует, что при $q = 0$ немедленно следует, что $N = T = C = 0$.

Действие поперечной и касательной нагрузки на пластину.

Пусть на пластину действуют произвольные самоуравновешенные нагрузки:

$$q_z = q_z(x_1, x_2), \quad q = q(x_1, x_2)$$

Для рассматриваемой краевой задачи как следует из граничных условий (26), для потенциалов решение можно представить в виде бесконечных тригонометрических рядов следующего вида:

$$\begin{pmatrix} N(x_1,x_2) \\ M(x_1,x_2) \\ Q(x_1,x_2) \\ T(x_1,x_2) \\ C(x_1,x_2) \\ D(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} N_{nm} \\ M_{nm} \\ Q_{nm} \\ T_{nm} \\ C_{nm} \\ D_{nm} \end{pmatrix} \varphi_{nm}(x_1,x_2), \tag{29}$$

где

$$\varphi_{nm}(x_1,x_2) = \left[\sin\frac{2n\pi}{l_1}x_1 - \frac{1}{3}\sin\frac{6n\pi}{l_1}x_1\right]\left[\sin\frac{2m\pi}{l_2}x_2 - \frac{1}{3}\sin\frac{6m\pi}{l_2}x_2\right]$$

базисные функции точно удовлетворяют граничным условиям. При этом эти базисные функции в виде бинома являются ортонормированными, тем самым обеспечивая полноту решений (29), в виде бесконечного тригонометрического ряда. Откуда следует, внешние нагрузки $q_z(x_1, x_2)$ и $q\,(x_1, x_2)$ также должны разложены в бесконечный тригонометрический ряд по этим базисным функциям. Тогда вместо системы дифференциальных уравнений получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} N_{nm} = -\frac{q_{znm}}{\gamma_{nm}^2}\left(1 + \nu\frac{h^2\gamma_{nm}^2}{12}\right), \\ M_{nm} = -\frac{1}{\gamma_{nm}^4}\left[1 + \nu + \nu\frac{h^2\gamma_{nm}^2}{60}\right] q_{nm} + 2\frac{Q_{nm}}{\gamma_{nm}^2}, \\ Q_{nm} = \frac{1}{12h(1+\nu)}\left[\frac{1}{2h^2\gamma_{nm}^2}\left(1 + \nu\frac{h^2\gamma_{nm}^2}{12}\right) q_{nm} - h^2\gamma_{nm}^2 q_{znm}\right], \\ T_{nm} = \frac{1}{60}\frac{1}{1+\frac{h^2\gamma_{nm}^2}{60}}\left[5 - \frac{(2+\nu)h^2\gamma_{nm}^2}{12(1+\nu)}\frac{h^4\gamma_{nm}^4}{144}\right] q_{nm}, \\ h^2 C_{nm} = \frac{1+\nu}{4}\left(1 - \frac{h^2\gamma_{nm}^2}{12}\right) q_{nm} + \frac{1440}{h^3\gamma_{nm}^2}T_{nm}, \\ h^3 D_{nm} = -\frac{1}{\gamma_{nm}^2}\left(1 - \frac{(1+\nu)h^2\gamma_{nm}^2}{10(2+\nu)}\right) q_{znm} - \frac{480}{h^2\gamma_{nm}^2}Q_{nm} \end{cases}, \tag{30}$$

где

$$Y_{nm}^2 = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{2n\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{2m\pi}{l_2}\right)^2\right], \begin{Bmatrix} q_{zmn} \\ q_{nm} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\int_{-\frac{\bar{l}_2}{2}}^{\frac{\bar{l}_2}{2}} \begin{Bmatrix} q_z(x_1,x_2) \\ q(x_1,x_2) \end{Bmatrix} \varphi_{nm}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

В качестве внешней нормальной нагрузки рассмотрим воздействие поперечной, приложенной в точке $M(X_10, X_20)$, самоуравновешенной сосредоточенной силы, при $z = \pm h/2$, на свободную пластину

$$q_Z(x_1,x_2) = P\,\delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20}), \tag{31}$$

где δ(x) - функция Дирака

А для потенциала касательной нагрузки введем следующую функцию:

$$q(x_1, x_2) = \frac{q_0}{4}\Big[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1)\Big]\Big[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2)\Big], \tag{32}$$

откуда, для касательных нагрузок будем иметь

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2) = \dfrac{q_0}{2}\,\delta(x_1 - x_{10})\Big[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2)\Big], \\ q_2(x_1, x_2) = \dfrac{q_0}{2}\Big[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1)\Big]\delta(x_2 - x_{20}). \end{cases}, \tag{33}$$

Тогда для коэффициентов внешних нагрузок будем иметь :

$$\begin{Bmatrix} q_{zmm} \\ q_{nm} \end{Bmatrix} =$$

$$\int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\int_{-\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2}} \begin{Bmatrix} P\,\delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20}) \\ \dfrac{q_0}{4}\Big[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1)\Big]\Big[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2)\Big] \end{Bmatrix} \varphi_{mm}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 =$$

$$\begin{Bmatrix} = P\left[\sin\dfrac{2n\pi}{l_1}x_{10} - \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{6n\pi}{l_1}x_{10}\right]\left[\sin\dfrac{2m\pi}{l_2}x_{20} - \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{6m\pi}{l_2}x_{20}\right], \\ \dfrac{q_0}{16m^2n^2}\left[\cos\dfrac{2n\pi}{l_1}x_{10} - \cos\dfrac{6n\pi}{l_1}x_{10}\right]\left[\cos\dfrac{2m\pi}{l_2}x_{20} - \cos\dfrac{6m\pi}{l_2}x_{20}\right] \end{Bmatrix}$$

Таким образом, что при $x_{10} = 0, x_{10} = 0$ рассматриваемая задача по всем осям становится абсолютно симметричной, для которой в точке приложения самоуравновешенной сосредоточенной силы значение σ_{zz} бесконечно. Все остальные компоненты напряжений для рассматриваемой задачи тривиальны.

Основная выводы

1. Впервые предложена неклассическая теория пластин в напряжениях, на основе трехмерной теории упругости.

2. В отличие от известных подходов, полученные разрешающие уравнения и граничные условия в напряжениях являются корректными и замкнутыми.

3. В предложенной теории достигнуто одновременное выполнение уравнений равновесия и совместности напряжений Бельтрами - Митчелла.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Конавалов А.Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости, Сиб. Математический журнал, 1997, т. 38, No 3, с. 551-568

2. Победря Б.Е. К проблеме статики в напряжениях // Вестник МГУ.сер. Матем., мех., 2003, No 3, с. 61-67

3. Тимошенко С.П., Гудер Д.Ж. Теория упругости. М.: Наука, 1975, 576.

4. Холматов Т.О методах решения задачи в напряжениях, ДАН СССР, 1980, т. 1, с. 252 No 2, стр. 315-317

5. Ахмедов А.Б. Численное решение пространственных задач теории вязкоупругости в напряжениях. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1984. 12 с.

6. Ахмедов А.Б., Шешенин С.В. Нелинейные уравнения движения ортотропных плит. Вестник МГУ Механика математика, 2012, 66-68 стр. (https://doi.org/10.3103/S002713301203003X)

7. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Eds). Shell like Structures: Nonclassical Theories and Applications. Advanced Structured Materials. Volume 15, (https://doi.org/10.10079783642218552) Springer, Berlin et al. 2011, 761 p.

8. Akhmedov A.B, Grigorev P.S, Ibodulloev Sh.R, Kuldibaeva L.A Imitating Simulation of Thermomechanical Processing of Metals // J:Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2021Vol.12 No.4, 31-36 (https://doi.org/10.17762/turcomat/v12i462)

9. Reissner E. On the bending of elastic plates//Quart. Appl. Math. - 1947.-V. 5, No 1. P 11-22

10. Ахмедов А.Б. Качественный анализ теории пластин из композиционных материалов //ДАН РУз. 2011. No1. C. 81 -84.

11. Tyukalov Yu.Ya. Equilibrium finite elements for plane problems of the elasticity theory. Magazine of Civil Engineering. 2019. 91(7). Pp. 80-97. DOI: 10.18720/MCE.91.8

REZYUME

Mazkur maqolada plastinalar nazariyasining kuchlanishlardagi yangicha talqini taklif etilgan. Bo'ylama kuch, qirquvchi kuch va ichki momentlar terminida yechimga ega bo'lgan tenglamalar olingan. Plastinalar uchun kuchlanishlardagi chegaraviy shartlar shakllantirilgan. Kuchlanishlarda olingan yechimlar bir vaqtning o'zida ham muvozanat tenglamalarini, ham kuchlanishlarning birgalikdagi tenglamasi bo'lgan Beltrami-Mitchell tenglamalarini qanoatlantiradi. O'zaro muvozanatlashgan yuklanishlar ta'siri ostida bo'lgan plastina uchun chegaraviy masala shakllantirilgan. Ba'zi amaliy masalalarga yechim topilgan.

Kalit so'zlar: Elastiklik nazariyasi, kuchlanishlardagi masala, parallelepiped, kuchlanish potensiali, o'zaro muvozanatlashgan yuklanish, plastina, Beltrami-Mitchell

RESUME

In this work, a new theory of plates in terms of stresses is proposed. Governing equations are derived in terms of axial forces, shear forces, and internal moments. Boundary conditions for stress-based plate theory are formulated. The obtained stress solutions simultaneously satisfy the equilibrium equations and the Beltrami–Mitchell stress compatibility conditions. A boundary value problem is formulated for a plate subjected to self-equilibrated loads. Some applied problems are solved.

Key words: Theory of elasticity, stress-based formulation, parallelepiped, stress potential, self-equilibrated loads, plate, Beltrami-Mitchell