O‘zMU XABARLARI
ВЕСТНИК НУУз
ACTA NUUz

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

JURNAL 1997 YILDAN CHIQA BOSHLAGAN

2025

2/1

Aniq fanlar

TOSHKENT — 2025

◇ MUNDARIJA ◇ CONTENTS ◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇

UDC 517.55

LIE ALGEBRA OF DIVERGENCE-FREE VECTOR FIELDS AND SOLENOIDALITY OF KILLING VECTOR FIELDS

ASLONOV J. O.
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT
jasurbek05@gmail.com

RESUME

The article investigates solenoidal vector fields and demonstrates that they form a Lie algebra with respect to their Lie bracket, while also proving that Killing vector fields are solenoidal. These fields are pivotal in the Helmholtz decomposition theorem and have diverse applications, such as in the design of solenoid valves and electromagnets. Furthermore, the proven theorems confirm that the space of solenoidal vector fields constitutes a Lie algebra, with the Lie bracket acting as the multiplication operation.

Key words: Vector field, Killing vector fields, Solenoidality, Lie bracket, Lie Algebra.

Vector fields whose divergence is calculated in different physical applications have very different physical meanings. However, everywhere the divergence of the vector field is directly related to flows through closed surfaces S.

The very concept of flow originally arose in hydrodynamics, when describing the motion of an incompressible fluid, the bulk density of which is the same at all points in space: $\rho = const$. Since the concept of hydrodynamic flow is closest to life, therefore its discussion makes sense.

In addition to the gradient and divergence discussed above, in applications one more 1st order differential operation, called a rotor, is often encountered, which maps a vector field into a vector field.

Divergence and curl are defined invariantly. If the system of Cartesian coordinates $Oxyz$ is introduced in the three-dimensional Euclidean space R^3, and the vector field $\vec{X}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{j} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ is given, then they can be calculated by the following formulas

$$div\vec{X}(M_0) = \frac{\partial P(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial R(M_0)}{\partial z},$$
$$rot\vec{X}(M_0) = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}.$$

Now, using the properties of differential operations, we will prove several propositions that can be used in problems in the theory of vector analysis.

Consider the scalar field $u = xyz$. Let us prove that any integral curve of the potential vector field $X = gradu$ is the intersection of two surfaces of the second order. That is, we prove the following

Proposition 1. Any integral curve of a potential vector field $X = gradu$ is an intersection of two second-order surfaces.

Proof. For a vector field $X(x, y, z) = gradu(x, y, z) = yz\partial_1 + xz\partial_2 + xy\partial_3$,
where $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ are basic vector fields, the system defining integral curves has the form

$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = xz, \\ \dot{z} = xy. \end{cases}$$

Where

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C_1, \tag{1}$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = C_2. \tag{2}$$

Equations (1) and (2) define two families of hyperbolic cylinders whose generators are parallel to the axes Oz and Ox, respectively, as well as two pairs of planes, $x = \pm y$ and $y = \pm z$, at $C_1 = C_2 = 0$.

Any integral curve of a vector field X, is a line of intersection of two surfaces, which are obtained at fixed values of constants C_1 and C_2, from families (1) and (2).

If $C_1 = C_2 = 0$, then the line of intersection of the planes $x = y$ and $y = z$ is a straight line passing through the origin. Its canonical equation has the form

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \tag{3}$$

And the vector field $X(x, y, z)$ at the points of the straight line (3) has the form

$$X(x, y, z) = x^2\partial_1 + x^2\partial_2 + x^2\partial_3.$$

Definition 1. A scalar field that depends only on the distance of a point to the origin is called spherical.

Proposition 2. The gradient vector field of a spherical scalar field is a potential vector field.

Proof. Let a scalar field $u = f(r)$ be given, where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. The scalar field $u = f(r)$ depends only on the distance of the point (x, y, z) to the origin, therefore it is spherical. Find the gradient field of $u = f(r)$:

$$gradu = gradf(r) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(r), \frac{\partial}{\partial y} f(r), \frac{\partial}{\partial z} f(r) \right\} =$$

$$= \left\{ f'(r)\frac{x}{r}, f'(r)\frac{y}{r}, f'(r)\frac{z}{r} \right\} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}.$$

It follows from the relation $X = f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = gradf(r)$ that the vector field $X = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ is potential, and the function $f(r)$ is its potential.

Corollary 1. The Coulomb field $X = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}(C = const)$ is a potential field.

Indeed, the Coulomb field $X = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ is a special case of the potential field $f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ considered in Proposition 2 and having the potential $f(r)$. Therefore, sloping $f'(r) = \frac{C}{|\vec{r}|^2}$, we find $f(r) = -\frac{C}{r} + C_1$, where C_1 is an arbitrary constant. This means that the Coulomb field is potentially and can be represented as $X = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = gradf(r)$, where $f(r) = C_1 - \frac{C}{r}$ is its potential.

It should be noted that the potential of any vector potential field is determined up to a constant term. This term does not affect the coordinates of the vector field, which is obtained by differentiating the potential.

Let the vector field $X = f(r)\vec{r}$.

Proposition 3. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is solenoidal in any region that does not contain the origin.

Proof. A vector field X is called solenoidal if it is a vortex of some field Y, i.e. $X = rotY$. In this case, the vector field Y is called the vector potential of the field X. A necessary condition for such a ratio is the equality $divX = divrotY = 0$. Therefore, the flow of the solenodial field through a closed surface is zero. If the vector field is the velocity field of a continuous medium or liquid, then the flow of this field through a closed surface characterizes the total power of sources or sinks.

Divergence is a point characteristic of the distribution of sources and sinks. In the case of a Solenodial field, there are no sources and sinks. An example of such a field is the field of magnetic intensity. This component of the electromagnetic field is different in that it is not generated by static elements such as static electric charge. The absence of magnetic charges in nature from a mathematical point of view is a property of the solenoidal nature of the magnetic field.

Consider the vector field X of a spherical scalar field $X = f(r)\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = |\vec{r}|$ and determine the form of the function $f(r)$ for which the field X is solenoidal. By definition of divergence, we find

$$divX = \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) = f'(r)\frac{x^2}{r} +$$
$$+f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r} + f(r) = f'(r)r + 3f(r).$$

It follows from the solenoidality condition $divX = 0$ that $f'(r)r + 3f(r) = 0$. Next, we find a solution to the equation $f'(r)r + 3f(r) = 0$:

$$\frac{df(r)}{f(r)} = -3\frac{dr}{r}, \ \ln|f(r)| = -3\ln r + \ln C,$$

where $f(r) = \frac{C}{r^3}$, where C is an arbitrary constant.

Hence, the divergence of the spherical vector field $X = f(r)\vec{r}$ is equal to zero only when $f(r) = \frac{C}{r^3}$, i.e. only in the case of a Coulomb field $X = \frac{C}{r^3}\vec{r}$. This field is solenoidal in any region that does not contain the origin.

Proposition 4. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is irrotational.

Proof. The vector field X, whose rotor is equal to zero, is called irrotational. In this case, if $X = X^1\partial_1 + X^2\partial_2 + X^3\partial_3$ (here $\partial_1 = \{1,0,0\}, \partial_2 = \{0,1,0\}, \partial_3 = \{0,0,1\}$ are basic vector fields) then

$$\begin{cases} rot_x X = \frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} = 0, \\ rot_y X = \frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x} = 0, \\ rot_z X = \frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Note that conditions (4) coincide with the conditions for the potentiality of the field X. This means that there is a scalar field $u(x,y,z)$ whose gradient is $X : X = gradu$.

Thus, the equation $rotX = 0$ expresses the condition of the potentiality of the field X.

Consider a spherical vector field $X = f(r)\vec{r}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, r = |\vec{r}|$. By definition of a curl, we find

$$rotX = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} =$$

$$(\frac{\partial}{\partial y} f(r)z - \frac{\partial}{\partial z} f(r)y)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f(r)x - \frac{\partial}{\partial x} f(r)z\right)\vec{j} + + \left(\frac{\partial}{\partial x} f(r)y - \frac{\partial}{\partial y} f(r)x\right)\vec{k} =$$

$$f'(r)\left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}\right)\vec{i} + f'(r)\left(\frac{xz}{r} - \frac{zx}{r}\right)\vec{j} + f'(r)\left(\frac{yx}{r} - \frac{xy}{r}\right)\vec{k} = 0.$$

It follows from this that the curl of any spherical vector field is equal to zero, i.e. the spherical vector field is vortex-free field.

Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n, and let a smooth vector field X be given on the manifold M.

Definition 2. A vector field X on M is called a Killing vector field if the one-parameter group of local transformations generated by the field X consists of isometries [6].

Example 2. In three-dimensional Euclidean space $M = R^3(x,y,z)$ there are six linearly independent Killing fields over the field of real numbers: $X_1 = \partial_1, X_2 = \partial_2, X_3 = \partial_3$, $X_4 = z\partial_2 - y\partial_3, X_4 = -z\partial_1 + x\partial_3$, $X_6 = y\partial_1 - x\partial_2$.

The transformation groups generated by the vector fields X_1, X_2, X_3 are the groups of parallel translations in the direction of the axes Ox, Oy and Oz respectively, and the last three are the groups of rotations around the axes Ox, Oy and Oz respectively.

The last three fields are also Killing fields on the two-dimensional sphere S^2.

The Killing vector field has the following properties [12]:

1. The Lie bracket of two Killing fields again gives a Killing field.

2. A linear combination of Killing fields over the field of real numbers is also a Killing field. Therefore, the set of all Killing vector fields on the manifold M, denoted by $K(M)$, forms a Lie algebra over the field of real numbers.

Theorem 1. [12] The Lie algebra $K(M)$ of the Killing vector fields of a connected Riemannian manifold M has dimension at most $\frac{1}{2}n(n+1)$, where $n = dimM$. If $dimK(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, then M is a manifold of constant curvature.

Proposition 5. The Killing vector field in three-dimensional Euclidean space is a solenoidal vector field.

Proof. As shown in the proof of Proposition 3, in order for a vector field to be potential or irrotational, it is sufficient that condition $divX = 0$ be satisfied. It is known that in three-dimensional Euclidean space any Killing field can be represented as a linear combination of the following basis Killing vector fields:

$$X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = \partial_3,\ X_4 = z\partial_2 - y\partial_3,\ X_4 = -z\partial_1 + x\partial_3,\ X_6 = y\partial_1 - x\partial_2.$$

It is easy to see that the divergence $divX = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z}$ of the basis vector fields is equal to zero, i.e. they are solenoidal.

The Killing vector field in three-dimensional Euclidean space can be written as

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 + \lambda_6 X_6,$$

where $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6$ are real numbers. Using the divergence property

$$div(\lambda X + \mu Y) = \lambda divX + \mu divY,$$

we can state that $divX = 0$.

Theorem 2. The Lie bracket of two solenoidal vector fields in three-dimensional Euclidean space is a solenoidal vector field.

Proof. Let $X = X^i\partial_i$ and $Y = Y^i\partial_i$ be given in R^3 - solenoidal vector fields. Consider the Lie bracket of these vector fields, which is defined in local coordinates as follows $[X, Y] = (X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i})\partial_j$, where ∂_j are basic vector fields. Since the considered vector fields X and Y are solenoidal, it can be argued that $X = rot\bar{X}, Y = rot\bar{Y}$. Then, we prove that if $Z = [X, Y]$ then $Z = rot\bar{Z}$. It is known that if $Z = rot\bar{Z}$, then $divZ = 0$.

Let's check the divergence of the vector field, which was obtained using the Lie bracket of two solenoidal vector fields:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial [X,Y]^j}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{3}\left(X^k\frac{\partial Y^j}{\partial x_k} - Y^k\frac{\partial X^j}{\partial x_k}\right)\right) = \frac{\partial X^1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial Y^1}{\partial x_1} + X^1\frac{\partial^2 Y^1}{\partial x_1^2} -$$

$$-\frac{\partial Y^1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X^1}{\partial x_1} - Y^1\frac{\partial^2 X^1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X^2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial Y^1}{\partial x_2} + X^2\frac{\partial^2 Y^1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial Y^2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X^1}{\partial x_2} - Y^2\frac{\partial^2 X^1}{\partial x_1\partial x_2} +$$

$$+\frac{\partial X^3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial Y^1}{\partial x_3} + X^3\frac{\partial^2 Y^1}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial Y^3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial X^1}{\partial x_3} - Y^3\frac{\partial^2 X^1}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial X^1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Y^2}{\partial x_1} + X^1\frac{\partial^2 Y^1}{\partial x_1\partial x_2} -$$

$$-\frac{\partial Y^1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial x_1} - Y^1\frac{\partial^2 x^2}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial x^2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Y^2}{\partial x_2} + x^2\frac{\partial^2 Y^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial Y^2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial x_2} - Y^2\frac{\partial^2 x^2}{\partial x_2^2} +$$

$$+\frac{\partial x^3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Y^2}{\partial x_3} + x^3\frac{\partial^2 Y^2}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial Y^3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x^2}{\partial x_3} - Y^3\frac{\partial^2 x^2}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial x^1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial Y^3}{\partial x_1} + x^1\frac{\partial^2 Y^1}{\partial x_1\partial x_2} -$$

$$-\frac{\partial Y^1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial x_1} - Y^1\frac{\partial^2 x^3}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial x^2}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial Y^3}{\partial x_2} + x^2\frac{\partial^2 Y^3}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial Y^2}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial x_2} - Y^2\frac{\partial^2 x^3}{\partial x_2\partial x_3} +$$

$$+\frac{\partial x^3}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial Y^3}{\partial x_3}+x^3\frac{\partial^2 Y^3}{\partial x_3^2}-\frac{\partial Y^3}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial x^3}{\partial x_3}-Y^3\frac{\partial^2 x^3}{\partial x_3^2}.$$

If we take into account that the considered vector fields X and Y are solenoidal, then from the relations

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x^j}{\partial x_j}=0, \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial Y^j}{\partial x_j}=0,$$

it follows that

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial [X,Y]^j}{\partial x_j}=0,$$

which was required to prove.

Solenoidal vector fields, with zero divergence, are crucial in fluid dynamics for describing incompressible flows and in electromagnetism for adhering to Gauss's law, which indicates the absence of "magnetic charges."These fields are essential in the Helmholtz decomposition theorem and are used in various applications, including the design of solenoid valves and electromagnets. Additionally, Theorem 2 establishes that the space of solenoidal vector fields forms a Lie algebra, with their Lie bracket functioning as the multiplication operation.

REFERENCES

1. Kochin N.E. Vector calculus and the beginnings of tensor calculus (in russian). 9th ed. M., 1965.

2. Butuzov V.F. Mathematical analysis in questions and tasks (in russian). Ed.5, M.: Fizmatlit, 2001. 480 p.

3. Kompaneets A.S. Theoretical physics. 2nd ed. M., 1957.

4. Gavrilov V.G. Multiple and curvilinear integrals. Elements of field theory: textbook. for universities / V. G. Gavrilov, E. E. Ivanova, V. D. Morozova; ed. V. S. Zarubina, A. P. Krishchenko. 2nd ed., stereotype. M.: Publishing house of MSTU im. N. E. Bauman, 2003. 496 p.

5. Barbarosie, Cristian(2011). Representation of divergence-free vector fields. Quart. Appl. Math. 69, no. 2, 309–316.

6. R. Kotiuga (1991). Clebsch Potentials and the Visualization of Three-Dimensional Solenoidal Vector Fields. IEEE Transactions on Magnetics 27, no. 5, 3986–3989.

7. Babin, A., Figotin, A. (2016). The Helmholtz Decomposition. In: Neoclassical Theory of Electromagnetic Interactions. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-7284-0-44

8. Aslonov J., Bayturayev A. Lorentz Transformations Preserving Second-Order Curves (2024) AIP Conference Proceedings, 3244 (1), DOI: 10.1063/5.0242265.

9. Ahmad Shahid Khan, Saurabh Kumar Mukerji. "Electromagnetic Fields: Theory And Applications", 2020, CRC. Press, https://doi.org/10.1201/9781003046134

10. Andrei D. Polyanin, Alexei Chernoutsan. A Concise Handbook of Mathematics, Physics, and Engineering Sciences, Chapman & Hall/CRC Press, 2010, 1125 pages, https://doi.org/10.1201/b10276

11. Aslonov J.O. Abstracts of the reports of the international scientific conference "Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics http://conf-matem2022.samdu.uz , Samarkand, Uzbekistan, September 23-24, 2022.

12. Aslonov J.O. Geometry of some vector fields. Abstracts of the international scientific conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021 15-17 November, 2021, Fergana, Uzbekistan.

13. Bourne D.E. Kendall P.C. "Vector Analysis and Cartesian Tensors Routledge, 2017, CRC. Press, https://doi.org/10.1201/9780203734414.

14. Gerardo F. Torres del Castillo. Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach. Birkhauser Cham, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45193-6.

15. Satya Narayanan, Swapan K. Saha. Waves and oscillations in nature: An Introduction, Chapman & Hall/CRC Press, 2015, https://doi.org/10.1201/b18492.

16. Narmanov, A. Y. and Aslonov, J. O., “On the geometry of the orbits of Killing vector fields”, arXiv e-prints, Art. no. arXiv:1203.3690, 2012. doi:10.48550/arXiv.1203.3690.

REZYUME

Maqolada solenoidal vektor maydonlarini o'rganilgan va ularning Lie algebrasi tashkil etishi ko'rsatilgan, shuningdek, Killing vektor maydonlari solenoidal ekanligini isbotlangan.

Kalit so'zlar: Vektor maydon, Killing vektor maydonlari, Solenoidallik, Lie qavsi.

РЕЗЮМЕ

В статье изучены соленоидальные векторные поля и показано, что они образуют алгебру Ли относительно их скобок Ли, а также доказано, что векторные поля Киллинга являются соленоидальными.

Ключевые слова: Векторные поля, Векторные поля Киллинга, Соленоидальность, Скобка Ли.

UDC 517.956.6

ON SMOOTHNESS OF THE SOLUTION TO A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF PERIODIC TYPE FOR A FOURTH-ORDER MIXED-TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND

Dzhamalov S. Z.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent
siroj63@mail.ru
Khalkhadzhaev B. B.
Tashkent Institute of Management and Economics, Tashkent
xalxadjaev@yandex.ru
Yusupov Sh. B.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent
sherzod.yusupov2020@inbox.ru

RESUME

In this paper, using the modified Galerkin method and the methods of a priori estimates, "ε-regularization", we study the unique solvability and smoothness of a regular generalized solution of a nonlocal boundary value problem of periodic type for a mixed type equation of the second kind of the fourth order in Sobolev spaces.

Key words: equations of mixed type, nonlocal boundary value problem, ε-regularization, Faedo-Galerkin, Sobolev spaces.

As is known, A.V. Bitsadze in his research has shown that the Dirichlet problem for a second-order mixed-type equation is ill-posed [2]. The question naturally arises: is it possible to replace the conditions of the Dirichlet problem with other conditions that cover the entire boundary and ensure the well-posedness of the problem ? For the first time, such boundary value problems (nonlocal boundary value problems) for a second-order mixed-type equation were proposed and studied by F.I. Frankl [13]. Problems for second-order mixed-type equations of the second kind, close in formulation to the ones under consideration, were studied in bounded domains in [6]-[9], [14], [16], [20]. Nonlocal boundary value problems for a high-order partial differential equation without degeneracy were studied by many researchers; a complete bibliography of these studies is given in books [11], [19] for a high-order mixed-type equation with local boundary conditions in various spaces, they were discussed in [4], [5], [18] and with nonlocal boundary conditions such problems were studied insufficiently [10].

In this paper, applying the results obtained in [4], [5], [8], [9] and the modified Galerkin method, methods of a priori estimates and "ε-regularization", we study the unique solvability of a regular generalized solution to one nonlocal boundary value problem of periodic type for the fourth-order mixed-type equation of the second kind in Sobolev space.

In domain $Q = (0,1) \times (0,T) = \{(x,t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$ we consider the fourth-order mixed-type equation of the second kind:

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x,t), \tag{1}$$

where $P_u = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u$, $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$, $K_4(x,t) = K_4(t)$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$.

Let the following conditions be satisfied for the coefficients of equation (1):

$$K_4(t) \in C^3(0,T) \cap C[0,T];\ K_i(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q});\ a, b, c - \text{const s} > 0,$$

$$K_4(0) = K_4(T) = 0;\ K_{4t}(0) = K_{4t}(T);\ K_i(x,0) = K_i(x,T);\ i = 0,1,2,3, \text{ for all } x \in [0,1].$$

Equation (1) refers to equations of mixed type of the second kind since no restrictions are imposed on the sign of function $K_4(t)$ with respect to variable t inside segment $[0,T]$ [3], [8], [9].

1. Nonlocal boundary value problem of periodic type: Find solution $u(x,t)$ to equation (1) from Sobolev space $W_2^4(Q)$, that satisfies the following boundary conditions:

$$\gamma D_t^q\, u\big|_{t=0} = D_t^q\, u\big|_{t=T};\ q = 0,1,2, \tag{2}$$

$$D_x^p u\big|_{x=0} = D_x^p u\big|_{x=1};\ p = 0,1,2,3, \tag{3}$$

where γ is a non-zero value, which will be specified below.

In what follows, we need to determine the following definitions and auxiliary propositions.

Let $\overrightarrow{e}(e_t, e_x); (e_t = \cos(\overrightarrow{e}, t), e_x = \cos(\overrightarrow{e}, x))$ be the unit vector of the internal normal to boundary ∂Q. When obtaining various a priori estimates, we often use Cauchy's inequality with σ [12], that is

$$\forall u, \vartheta \geq 0;\ \forall \sigma > 0;\ 2u \cdot \vartheta \leq \sigma u^2 + \sigma^{-1} \vartheta^2.$$

The class of smooth functions from space $W_2^4(Q)$, satisfying conditions (2)–(3) we denote by C_L.

Definition 1. *We call function $u(x,t)$ a regular solution to problem (1)–(3) if $u \in C_L$ and it satisfies equation (1) almost everywhere in domain Q.*

Theorem 1. *Let the above conditions be satisfied for the coefficients of equation (1); $K_1(x,t) > 0$ is a sufficiently large function and, in addition, let the following inequalities be satisfied for the coefficients of equation (1): $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, for any $(x,t) \in \overline{Q}$, where $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$. Then if for any $f(x,t) \in L_2(Q)$, there is a regular solution $u(x,t)$ to problem (1)–(3) from Sobolev space $W_2^4(Q)$, then it is unique and the following estimate holds for it:*

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\, \|f\|_0^2. \tag{4}$$

Proof. We will prove the uniqueness of the solution to problem (1)–(3) using the method of energy integrals. Let there exist a regular generalized solution to problem (1)–(3) $u(x,t)$ from Sobolev space $W_2^4(Q)$. Consider the following identity:

$$2\int_Q Lu\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t\,dxdt = 2\int_Q f\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t\,dxdt. \tag{5}$$

Due to the conditions of Theorem 1 and Cauchy's inequality with σ [12], and based on the boundary conditions (2), (3), by integrating identity (5), we easily obtain the following inequality:

$$\begin{aligned}\left|2\int_Q e^{-\lambda t}Lu\cdot u_t\,dxdt\right| \geq \int_Q e^{-\lambda t}\Big\{&-(2K_3-3K_{4t}+3\lambda K_4)u_{tt}^2+\lambda a u_{xx}^2+\lambda b u_{xt}^2+\lambda c u_x^2\\
&+(2K_1-K_{2t}+\lambda K_2)u_t^2+(\lambda K_0-K_{0t})u^2\Big\}\,dxdt-2\sigma\|u_{tt}\|_0^2\\
&-5\lambda^4K\sigma^{-1}\|u_t\|_0^2+\int_{\partial Q}e^{-\lambda t}\Big(-2K_4u_{ttt}u_t+2(K_{4t}-\lambda K_4)u_{tt}u_t\\
&+K_4u_{tt}^2-2K_3u_{tt}u_t-2K_2u_t^2-K_0u^2+au_{xx}^2+bu_{xt}^2+cu_x^2\Big)e_t\,ds\\
&+\int_{\partial Q}e^{-\lambda t}\Big\{2au_{xxx}u_t\big(au_{xx}u_{tx}-2bu_{xxt}u_t-2cu_xu_t\big)\Big\}e_x\,ds.\end{aligned} \tag{6}$$

where $K=\max\left\{\|K_4\|^2_{C^2[0,T]},\|K_3\|^2_{C^1(Q)}\right\}$. The conditions of Theorem 1 ensure that the integral over domain Q is non-negative and that the boundary integrals vanish. Then from inequality (6), we obtain:

$$\begin{aligned}&\left|-2\int_Q Lu\cdot e^{-\lambda t}\cdot u_t\,dxdt\right|\geq\int_Q e^{-\lambda t}\ \{\delta_3\cdot u_{tt}^2+\lambda a u_{xx}^2+\lambda b u_{xt}^2+\delta_2 u_t^2+\\
&+\lambda c u_x^2+\delta_1\cdot u^2\}\ dxdt-2\sigma\cdot\|u_{tt}\|_0^2-5\lambda^4\sigma^{-1}K\cdot\|u_t\|_0^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Now, applying the Cauchy's inequality with σ at the left side of (7) above and choosing in inequality (7) constant numbers δ_3 and δ_2 such that $\delta_3-3\sigma\geq\delta_{03}>0$, $\delta_2-5\lambda^4\sigma^{-1}K\geq\delta_{02}>0$, then denoting $\delta=\min\{\delta_{03},\lambda a,\lambda b,\lambda c,\delta_{02},\delta_1\}$, from inequality (7), we obtain the first a priori estimate for solving problem (1)–(3):

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)}\leq c_1\,\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

In what follows, we denote various positive constants by A_i.

Now we will prove the uniqueness of a regular solution to problem (1)–(3).

We prove the theorem by contradiction. Let problem (1)–(3) have two solutions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$. Then new function $\vartheta(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ satisfies the homogeneous equation (1) with conditions (2)–(3) and the first inequality $\|\vartheta\|_2^2\leq 0$ holds for it. This implies the uniqueness of a regular solution to problem $u_1(x,t)=u_2(x,t)$.

Now we will prove the solvability of a regular solution to problem (1)–(3).

2. Fifth-order equation with a small parameter (auxiliary problem).

We prove the solvability of problem (1)–(3) using the "ε-regularization" method combined with the modified Galerkin method and a priori estimates. Namely, in the domain $Q=(0,1)\times(0,T)$, we consider a family of fifth-order equations with a small parameter.

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t} + L u_\varepsilon = f(x,t), \tag{8}$$

with nonlocal boundary conditions of periodic type:

$$\gamma D_t^q\, u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q\, u_\varepsilon|_{t=T}\,;\ q=0,1,2,3,4, \tag{9}$$

$$D_x^p u_\varepsilon|_{x=0} = D_x^p u_\varepsilon|_{x=1}\,;\ p=0,1,2,3, \tag{10}$$

where ε is a small positive number, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q=0,1,2,3,4$; $D_z^0 w = w$;

$\Delta^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u = \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)$ is the biharmonic operator.

Below we use a fifth-order equation with a small parameter (8) as a "ε-regulating" equation for a fourth-order mixed-type equation of the second kind (1) [3]-[9].

We will denote the class of functions such that $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^4(Q)$, $\frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon}{\partial t}\in L_2(Q)$, satisfying corresponding conditions (9)–(10) by $V(Q)$.

Definition 2. *We call function $u_\varepsilon(x,t)$ a regular solution to problem (8), (9)–(10), if $u_\varepsilon \in V(Q)$ and it satisfies equation (8) almost everywhere in domain Q.*

Theorem 2. *Let all the conditions of Theorem 1 be satisfied and, in addition, let the following conditions be satisfied for the coefficients of equation (8):*

$$-(2K_3 + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta > 0,\ j=0,1,2.$$

Then for any function $f(x,t)\in W_2^1(Q)$, such that $\gamma f(x,0)=f(x,T)$, there is a unique regular solution $u_\varepsilon(x,t)$ to problem (8), (9)–(10), from space $V(Q)$ and the following estimates are valid for it:

I) $\varepsilon\cdot(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_1\|f\|_0^2$,

II) $\varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u_\varepsilon\right\| + \|u_\varepsilon\|_4^2 \leq c_2\|f\|_1^2$.

Proof. The proof of inequality I) is done in the same way as the proof of the first estimate of Theorem 1, from which it follows that there is a unique regular solution to problem (8), (9)–(10) [3]-[9].

Let us give the proof of the first a priori estimate I).

Let $\phi_j(x,t)\in W_2^4(Q)$ be the eigenfunctions of the following problem:

$$-\Delta^2\phi_j = -\left(\frac{\partial^4\phi_j}{\partial t^4} + \frac{\partial^4\phi_j}{\partial x^4}\right) = \mu_j^2\phi_j, \tag{11}$$

$$D_t^q\phi_j|_{t=0} = D_t^q\phi_j|_{t=T},\quad q=0,1,2,3, \tag{12}$$

$$D_x^q\phi_j|_{x=0} = D_x^q\phi_j|_{x=1} = 0,\quad q=0,1,2,3. \tag{13}$$

From the general theory [1], [12], [17] of linear self-adjoint elliptic operators, it is known that all eigenfunctions of problem (11)–(13) belong to $W_2^4(Q)$ and form a complete orthonormal system in $L_2(Q)$. Using these sequences of functions, we construct a solution to the auxiliary problem:

$$P\omega_j \equiv \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{14}$$

$$\gamma \cdot \omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{15}$$

where γ is a constant $\neq 0$, and $|\gamma| > 1$. Obviously, problem (14), (15) is uniquely solvable and its solution has the following form:

$$P^{-1}\phi_j = \omega_j = \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right)\phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma-1}\cdot\int_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dt.$$

It is clear that functions $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$ are linearly independent. Indeed, if $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$ for some set of sequences of functions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, then acting on this sum with operator P, we obtain $\sum_{j=1}^N c_j P\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j\phi_j = 0$, and it follows that for all $j = \overline{1,N}$ coefficients are $c_j = 0$. Note that the following conditions for function $\omega_j(x,t) \in W_2^5(Q)$ follow from the construction of function $\phi_j(x,t)$:

$$\gamma \cdot D_t^q\, \omega_j\big|_{t=0} = D_t^q\, \omega_j\big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2,3,4, \tag{16}$$

$$D_x^p\omega_j\big|_{x=0} = D_x^p\omega_j\big|_{x=1}, \quad p = 0,1,2,3. \tag{17}$$

Now, an approximate solution to problem (8)–(10) is sought in the form $u_\varepsilon^N(x,t) = \sum_{j=1}^N c_j\omega_j(x,t)$, where coefficients c_j for any j from 1 to N are defined as a solution to the linear algebraic system:

$$2\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dxdt = 2\int_Q f\cdot\exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\phi_j dxdt. \tag{18}$$

Let us prove the unique solvability of algebraic system (18). Multiplying each equation from (18) by c_j and summing over j from 1 to N, considering boundary conditions (16)–(17) and algebraic system (18), we obtain the following identity:

$$2\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp(-\lambda t) u_{\varepsilon t}^N dxdt = 2\int_Q f\cdot\exp(-\lambda t)u_{\varepsilon t}^N dxdt, \tag{19}$$

from which, due to the conditions of Theorem 2, by integrating identity (19) we obtain estimate I) for the approximate solution of problem (8)–(10), i.e.

$$\varepsilon\cdot(\left\|u_{\varepsilon ttt}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon ttx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon txx}^N\right\|_0^2) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_2^2 \le c_1\left\|f\right\|_0^2. \tag{20}$$

This implies the solvability of algebraic system (18) [9], [12]. By the weak compactness theorem [12], [17], estimate (20) allows us to pass to the limit at $N\to\infty$ and conclude that a certain subsequence $\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\}$ weakly converges, due to the uniqueness of the solution (Theorem 1), in space $V(Q)$ to the sought-for solution to problem (8)–(10), which has the properties specified in Theorem 2 [12], [17]. For $u_\varepsilon(x,t)$, under (20), the following inequality holds:

$$\varepsilon\cdot(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \le c_1\|f\|_0^2. \tag{21}$$

Now, passing to the limit at $N \to \infty$ in (18), we obtain the only weak generalized solution to problem (8)–(10).

Let us prove the second a priori estimate II).

Using problem (11)–(15), from identity (18), we obtain:

$$-\frac{1}{\mu_j^2}\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta^2 P\omega_j\,dxdt = -\frac{1}{\mu_j^2}\int_Q f\cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)\Delta^2 P\omega_j\,dxdt. \tag{22}$$

Multiplying each equation (22) by $2\cdot\mu_j^2 c_j$, summing over j from 1 to N and considering conditions (16)–(17), from (22), we obtain the following identity:

$$-2\int_Q (L_\varepsilon u_\varepsilon^N - f)\cdot e^{-\lambda t} P u_\varepsilon^N\,dxdt = 0, \tag{23}$$

where $Pu_\varepsilon^N \equiv \frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t} - 2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u_\varepsilon^N + 3\lambda^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon^N - \frac{\lambda}{2}u_{\varepsilon tt}^N + \frac{\lambda^2}{16}u_{\varepsilon t}^N$.

Integrating (23), under conditions of Theorem 2 and boundary conditions (16), (17), we obtain the following inequality:

$$\begin{aligned}
&c_2\|f\|_1^2 \ge \varepsilon\left\|\tfrac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t}\right\|_0^2 + \textstyle\int_Q e^{-\lambda t}\Big\{ -(2K_3 + K_{4t} + 3\lambda K_4)u_{\varepsilon tttt}^{2N}\\
&-(2K_3 - K_{4t} + 3\lambda K_4)u_{\varepsilon xxtt}^{2N} - (2K_3 + K_{4t} + 3\lambda K_4)u_{\varepsilon tttx}^{2N}\\
&+\lambda a u_{\varepsilon xxxx}^{2N} + \lambda b u_{\varepsilon xxtt}^{2N} + \lambda a u_{\varepsilon xxxt}^{2N}\Big\}dxdt\\
&+\rho\left\|u_\varepsilon^N\right\|_3^2 - N_1\sigma\left(\left\|u_{\varepsilon tttt}^{2N}\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon ttxx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon tttx}^N\right\|_0^2\right)\\
&-N_2\sigma\left(\left\|u_{\varepsilon xxxx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon ttxx}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon txxx}^N\right\|_0^2\right) - c(\sigma^{-1},\lambda,K)\left\|u_\varepsilon^N\right\|_3^2\\
&+\textstyle\int_{\partial Q} e^{-\lambda t}B(u_\varepsilon^N(s), K_i(s))\,ds, \quad i=\overline{0,4}
\end{aligned} \tag{24}$$

where ρ, N_i $(i=1,2)$ are the positive numbers, depending on the norm of function $K_i(x,t)$, $i=\overline{0,3}$, in space $C^3(\overline{Q})$, $K=\max\{\|K_4(t)\|_{C^3[0,T]}, \|K_i(x,t)\|_{C^2(\overline{Q})}\}$, σ, $c(\sigma^{-1})$ are the coefficients of Cauchy's inequality σ [12], $B(u_\varepsilon^N(s), K_i(s))$ are functions, depending on traces of function $u_\varepsilon^N(x,t)$, $K_i(x,t)$ on the boundary of domain Q. Let $\delta_0=\min\{\delta_3, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_2, \delta_1\}$. We introduce the notation by $N=\max\{N_1,N_2\}$. Under conditions of Theorem 2 and boundary conditions (16), (17) and $\gamma^2=e^{\lambda T}$, we obtain that in (24) the boundary integrals vanish. Now, choosing σ in such a way that $\delta_0 - N\sigma \ge \sigma_0 > 0$, $\rho - c(\sigma^{-1},\lambda,K)\ge\rho_0>0$, from inequality (24) we obtain the necessary second estimate:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial\Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t}\right\|_0^2 + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_4^2 \le c_2\cdot(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2) \le c_2\|f\|_1^2. \tag{25}$$

The constant on the right side of (25) does not depend on N, therefore, from (25) the second estimate for the approximate solution of problem (8)–(10) follows. Estimate (21) together with estimate (25) allow us to pass to the limit at $N\to\infty$ and conclude that a certain subsequence $\{u_\varepsilon^{N_k}(x,t)\}$ converges weakly, due to the uniqueness of the solution to problem (8)–(10) in $V(Q)$, together with derivatives of the fourth and fifth orders, to the sought-for solution $u_\varepsilon(x,t)$ to problem (8)–(10), which has the properties specified in Theorem 2 [12], [17]. Therefore, under (25), the following inequality is true:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \cdot (\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2) \leq c_2 \|f\|_1^2 . \tag{26}$$

This implies the existence of a regular generalized solution $u_\varepsilon(x,t)$ to problem (8)–(10) from space $V(Q)$. This proves Theorem 2.

3. Existence of a solution to problem (1)–(3).

Let us proceed to proving the solvability of problem (1)–(3).

Theorem 3. *Let all the conditions of Theorem 2 be satisfied. Then the solution to problem (1)–(3) from $W_2^4(Q)$ exists and it is unique.*

Proof. The uniqueness of the solution to problem (1)–(3) in the space $W_2^4(Q)$ is proven in Theorem 1. Now, we will prove the existence of a solution to problem (1)–(3) in the space $W_2^4(Q)$. To do so, we consider equation (8) and boundary conditions (9) and (10) for $\varepsilon > 0$ in the domain Q. Since all conditions of Theorem 2 are satisfied, there exists a unique regular solution to problem (8)–(10) for $\varepsilon > 0$ in $V(Q)$, and the first and second estimates hold for it. It follows that, from the set of functions $\{u_\varepsilon(x,t)\}$, $\varepsilon > 0$, a weakly convergent subsequence can be extracted in $V(Q)$, such that $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\} \to u(x,t)$ as $\varepsilon_i \to 0$. We show that the limit function $u(x,t)$ satisfies the equation $Lu = f$ (equation (1)) almost everywhere in the domain Q. Indeed, since the subsequence $\{u_{\varepsilon_i}(x,t)\}$ converges weakly in $W_2^4(Q)$, the subsequence $\{\sqrt{\varepsilon_i}\frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}(x,t)}{\partial t}\}$ is uniformly bounded in $L_2(Q)$, and the operator L is linear, we have

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{27}$$

From equality (27), passing to the limit at $\varepsilon_i \to 0$, we obtain a unique solution to problem (1)–(3) [3]-[5], [9]. Thus, Theorem 3 is proven.

4. Smoothness of the solution to problem (1)–(3).

Now let us study the smoothness of the solution to problem (1)–(3) in Sobolev spaces $W_2^{m+4}(Q)$, when $0 \leq m$ is the finite integer. Below, for simplicity, we assume that the coefficients of equation (1) are sufficiently differentiable functions in closed domain $\overline{Q}$.

Theorem 4. *Let the conditions of Theorem 3 be satisfied. In addition, let $p = 0,1,2,3,\ldots,m$, $q = 0,1,2,3,\ldots,m$, with $-2(K_3 + mK_{4t}) - (2j-3)K_{4t} + \lambda K_4 \geq \delta > 0$, $j = 0,1,2$, for all $(x,t) \in \overline{Q}$, and let $D_t^{p+1} K_4|_{t=0} = D_t^{p+1} K_4|_{t=T}$, $D_t^q K_i|_{t=0} = D_t^q K_i|_{t=T}$ for $i = 0,1,2,3$. Then, for any function $f(x,t) \in W_2^{m+1}(Q)$ such that $\gamma D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ for all $x \in [0,1]$, there exists a unique solution to problem (1)–(3) in the Sobolev space $W_2^{m+4}(Q)$, where $m = 0,1,2,3,\ldots$ is a finite integer.*

Proof. Taking into account the conditions of Theorems 2 and 3 for $\varepsilon > 0$ and nonlocal conditions at $t = 0$, $t = T$, from the following equality

$$(e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot L_\varepsilon u_\varepsilon)\Big|_{t=0}^{t=T} = \left(-\varepsilon \cdot e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u_\varepsilon + e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot Lu_\varepsilon\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = (e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot f(x,t))\Big|_{t=0}^{t=T}$$

we obtain $\gamma \cdot D_t^5 u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^5 u_\varepsilon|_{t=T}$.

It follows that function $\vartheta_\varepsilon(x,t) = u_{\varepsilon t}(x,t)$ belongs to class $V(Q)$ and satisfies the following equation:

$$T_\varepsilon \vartheta_\varepsilon \equiv L_\varepsilon \vartheta_\varepsilon + K_{4t}\vartheta_{\varepsilon ttt} = f_t - \sum_{i=0}^{3} K_{it} D_t^i u_\varepsilon \equiv F_\varepsilon. \tag{28}$$

From Theorem 3, it follows that the family of functions $\{F_\varepsilon\}$ is uniformly bounded in space $L_2(Q)$,

$$\|F_\varepsilon\|_0^2 \le c_1 \cdot \|f\|_1^2 .$$

Then under conditions of Theorem 3, it is easy to obtain that the coefficients of operator $T_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ satisfy the conditions of Theorem 4; hence, based on estimates I), II) and Theorem 3 for function $\{\vartheta_\varepsilon(x,t)\}$, we obtain similar estimates:

$$\varepsilon \cdot \left(\|\vartheta_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|\vartheta_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|\vartheta_{\varepsilon txx}\|_0^2\right) + \|\vartheta_\varepsilon\|_2^2 \le c_1 \|f\|_0^2 , \tag{29}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 \vartheta_\varepsilon \right\|_0^2 + \|\vartheta_\varepsilon\|_4^2 \le c_2 \|f\|_1^2 . \tag{30}$$

Then, functions $\{u_\varepsilon\}$ satisfy the following parabolic equation:

$$\Pi u_\varepsilon \equiv u_{\varepsilon t} - u_{\varepsilon xx} = f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{4} K_i D_t^i u_\varepsilon - M u_\varepsilon + u_{\varepsilon t} - u_{\varepsilon xx} \equiv \Phi_\varepsilon, \tag{31}$$

with conditions:

$$\gamma\, u_\varepsilon|_{t=0} = u_\varepsilon|_{t=T} , \tag{32}$$

$$D_x^p u_\varepsilon|_{x=0} = D_x^p u_\varepsilon|_{x=1} , \quad p = 0, 1, \tag{33}$$

and $\Phi_\varepsilon \in W_2^1(Q)$; by virtue of what was proven above, the family of functions $\{\Phi_\varepsilon\}$ is uniformly bounded in space $W_2^1(Q)$, i.e.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_1^2 \le c_2 \cdot \left(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\right) \le c_2 \|f\|_2^2 < c_4 \|f\|_4^2 . \tag{34}$$

Hence, based on a priori estimates for parabolic equations [3],[9],[12] and inequality (34), we obtain:

$$\|u_\varepsilon\|_5^2 \le c_4 \|f\|_4^2 . \tag{35}$$

Repeating similar reasoning, we prove the following inequalities:

$$\|u_\varepsilon\|_{m+1}^2 \le c_{m+2} \|f\|_m^2 , \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{36}$$

REFERENCES

1. Berezinsky Yu. M. Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators. Kyiv: Naukova Dumka, (1965).

2. Bitsadze A. V. Ill-posedness of the Dirichlet problem for equations of mixed type // DAN USSR. V.122, No. 4, 167–170 (1953).

3. Vragov V. N. Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics. Novosibirsk: NSU, (1983).

4. Vragov V. N. On the formulation and solvability of boundary value problems for equations of mixed-composite type // Mathematical analysis and related issues of mathematics. Novosibirsk: IM SO AN USSR, 5–13 (1978).

5. Egorov I. E., Fedorov V. E. Nonclassical equations of high order mathematical physics. Novosibirsk, 133 p. (1995).

6. Glazatov S. N. Nonlocal boundary value problems for equations of mixed type in a rectangle // Sibirsk. Math. J., V. 26, No. 6, 162–164 (1985).

7. Dzhamalov S. Z. On the well-posedness of a nonlocal boundary value problem with constant coefficients for a mixed type equation of the second kind of second order in space // Math. NEFU notes, No. 4, 17–28 (2017).

8. Dzhamalov S. Z. On the smoothness of a nonlocal boundary value problem for a multidimensional equation of mixed type of the second kind in space // Journal of the Middle Volga Math Society, V. 21, No. 1, 24–33 (2019).

9. Dzhamalov S. Z. Nonlocal boundary value and inverse problems for equations of mixed type. Monograph. Tashkent. 173 p.

10. Dzhamalov S. Z., Pyatkov S. G. On some classes of boundary value problems for multidimensional equations of mixed type of high order // Siberian Mathematical Journal, V. 61, No. 4, 777–795 (2020).

11. Dezin A. A. General questions of the theory of boundary value problems. - M: Nauka, (1980).

12. Ladyzhenskaya O. A. Boundary value problems of mathematical physics. M. 407 p. (1973).

13. Frankl F. I. Selected works on gas dynamics: Moscow. 711 p. (1973) [in Russian].

14. Karatopraklieva M. G. On a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type // Differential equations, V. 27, No. 1, 68–79 (1991).

15. Kozhanov A. I. Boundary value problems for equations of mathematical physics of odd order // Novosibirsk: NSU, (1990).

16. Terekhov A. N. Nonlocal boundary value problems for equations of variable type. Nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk: IM SO AN USSR, 148–158 (1985).

17. Trenogin V. A. Functional analysis. Moscow. Nauka, 494 p. [in Russian].

18. Chueshev A. V. On one linear equation of mixed type of high order // Sibirsk. Math. J., V. 43, No. 2, 454–472 (2002).

19. Djuraev T. D., Sopuev A. K teorii differensial'nyx uravneniy v chastnyx proizvodnyx chetvertogo poryadka. - Tashkent: Fan. - 144 s. (2000).

20. Sabitov K. B. Zadacha Dirixle dlya uravneniy smeshannogo tipa v pryamougol'noy oblasti // Dokl. RAN. T.413. No. 1, 23–26 (2007).

REZYUME

Ushbu maqolada biz modifitsirlangan Galerkin usuli, aprior baholash va "ε-regulyarizatsiya" usullari yordamida Sobolev fazolarida to'rtinchi tartibli ikkinchi tur aralash tipdagi tenglama uchun davriy nolokal chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligini hamda silliqligini o'rganamiz.

Kalit so'zlar: aralash tipdagi tenglama, nolokal chegaraviy masala, "ε-regulyarizatsiya" usuli, Faedo-Galerkin usuli, Sobolev fazolari.

РЕЗЮМЕ

В данной работе с использованием модифицированного метода Галеркина, методов априорных оценок и "ε-регуляризации" исследуется однозначная разрешимость и гладкость регулярного обобщенного решения нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, нелокальная краевая задача, метод "ε-регуляризации", метод Фаэдо-Галеркина, пространства Соболева.

UDC 517.55

BIRINCHI TIP MATRITSAVIY SHAR AVTOMORFIZMLARINING XOSSALARI VA ULARNING BA’ZI TATBIQLARI

Erkinboyev Q. S.
O‘zbekiston Milliy universiteti
qerkinboyev@gmail.com

REZYUME

Bu maqolada Rudin [2] kitobidagi Teorema 2.2.5 ning $\mathbb{C}^n\,[m,m]$ sohadagi birinchi tip matritsaviy shar uchun analogi keltirilgan. Birinchi tip matritsaviy shar avtomorfizmlari xossalarining ba’zi tatbiqlari keltirilgan. Jumladan, birinchi tip matritsaviy sharga bigolomorf ekvivalent bo‘lgan sohalarning avtomorfizmlarining ba’zi xossalari isbotlangan.

Kalit so‘zlar: Blok matritsa, bigolomorf akslantirish, ermit matritsa, klassik soha, avtomorfizm.

Ma’lumki bir jinsli, simmetrik, qavariq va chegaralangan kompleks sohalar turli nuqtai nazardan katta qiziqish uyg‘otadi. Buning sababi shundaki, ular yordamida $\mathbb{C}^n$ sohalari uchun bir qator muhim, asosan ko‘p o‘lchovli natijalar olingan ([1], [2], [3] va boshqalar).

Bir jinsli sohalarda integral formulalar qurishda avtomorfizmlar gruppasidan foydalaniladi. Bunda avtomorfizmlar gruppalari([4], [5]) keng bo‘lgan elementi matritsalardan iborat sohalar ([1], [6]) qaraladi. Matritsaviy sohalar birinchi bo‘lib E.Kartan va K.Zigel tomonidan chuqur o‘rganilgan. Jumladan, ular to‘rtta klassik sohalar avtomorfizmlarining umumiy ko‘rinishlarini tasvirlashgan. Xua Lo-Ken esa klassik sohalar uchun ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida garmonik analizni qurgan (1944-1957yillarda) va ular bo‘yicha natijalar Xua Lo-Kenning 1958-yilda xitoy tilida chop etilgan (1959-yilda rus tilida chop etilgan [1]) monografiyasida keltirilgan.

$\mathbb{C}^{mn}$ fazoni qaraylik. Bu fazodagi $z \in \mathbb{C}^{mn}$ nuqtalarni quyidagicha yozamiz: $z = (z_{11}, z_{12}, ..., z_{1n}; ...; z_{m1}, z_{m2}, ..., z_{mn})$, bu yerda, $z_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} + iy_{\mu\nu},\ \ \mu = 1, 2, ..., m;\ \ \nu = 1, 2, ..., n.$ Ba’zi amaliy masalalarda $\mathbb{C}^{mn}$ fazoning nuqtalarini $[m\times n]$ matritsa sifatida yozish qulay bo‘ladi:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} ... z_{1n} \\ . & . \ \ ... \ . \\ . & . \ \ ... \ . \\ z_{m1} & z_{m2} ... z_{mn} \end{pmatrix}.$$

U holda ushbu $\mathbb{C}^{mn} \simeq \mathbb{C}[m \times n]$ izomorfizm bo‘ladi.

Ba’zi hollarda $\mathbb{C}[m \times m]$ fazo bilan birgalikda n ta $\mathbb{C}[m \times m]$ fazoning dekart ko‘paytmalaridan tashkil topgan $\mathbb{C}^n[m \times m]$ fazo ham keltiriladi:

$$\mathbb{C}^n[m \times m] = \underbrace{\mathbb{C}[m \times m] \times ... \times \mathbb{C}[m \times m]}_{n-ta}.$$

Ushbu

$$B_{m,n} = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \; I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle > 0\}$$

to‘plam matritsaviy shar deyiladi, bunda, $\langle Z, Z\rangle = Z_1 {Z_1}^* + Z_2 {Z_2}^* + ... + Z_n {Z_n}^*$– "matritsaviy skalyar"ko‘paytma, $I^{(m)}$ – birlik $[m\times m]$-matritsa, ${Z_\nu}^* = \overline{Z}_\nu^{\,\prime}$ – matritsa esa, Z_ν, $(\nu = 1, 2, ..., n)$– ga nisbatan qo‘shma va transponirlangan matritsa. $I - \langle Z, Z\rangle > 0$ tengsizlik esa $I - \langle Z, Z\rangle$ – ermit matritsaning musbat aniqlanganligini, ya’ni barcha xos sonlari musbatligini bildiradi.

Aytaylik,

$$H = \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & -I^{(m)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -I^{(m)} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & ... & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & ... & A_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n0} & A_{n1} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

matritsalar ushbu

$$AHA^* = H \tag{1}$$

shartni qanoatlantiruvchi $n+1$-tartibli blok kvadrat matritsalar bo‘lsin, bu yerda, A_{ij}-$[m, m]$ tartibli kvadrat matritsa. (1) munosabatdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$A_{00}A_{00}^* - \sum_{s=1}^{n} A_{0s}A_{0s}^* = I^{(m)},$$

$$A_{j0}A_{k0}^* = \sum_{s=1}^{n} A_{js}A_{ks}^*, \;\; j \neq k, \tag{2}$$

$$A_{j0}A_{j0}^* - \sum_{s=1}^{n} A_{js}A_{js}^* = -I^{(m)}, \;\; j \geq 1.$$

Endi ushbu $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_n)$ matritsaviy vektorni qaraylik, bu yerda ζ_j – $[m\times m]$ –tartibli kvadrat matritsalar bo‘lib, barcha $j = 0, ..., n$ sonlar uchun quyidagi

$$\zeta H \zeta^* > 0, \tag{3}$$

munosabatni qanoatlantiradi ([7], [8]). Oxirgi (3) munosabatdan

$$\zeta_0\zeta_0^* > \zeta_1\zeta_1^* + ... + \zeta_n\zeta_n^*$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. A matritsa qatnashgan

$$\omega = \zeta A, \tag{4}$$

chiziqli akslantirishni qaraylik. Bu akslantirish (1) munosabat yordamida berilgan matritsalar to‘plamini o‘ziga akslantiradi, ya’ni

$$\omega H \omega^* = \zeta AHA^* \zeta^* = \zeta H \zeta^*.$$

Endi (4) tenglikni

$$\omega_0 = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j A_{j0},$$

$$\omega_k = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j A_{jk} \ , k = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

ko‘rinishda yozib olamiz va

$$\{Z = (Z_1, ..., Z_n), Z_k = \zeta_0^{-1}\zeta_k \ , (k = 1, 2, ...n)\}$$

vektorlar to‘plamini qaraymiz.

Ushbu bir-biriga ekvivalent

$$\zeta H \zeta^* > 0$$

yoki

$$\zeta_0\zeta_0^* > \zeta_1\zeta_1^* + \zeta_n\zeta_n^*$$

tengsizliklardan quyidagi munosabatlarga ega bo‘lamiz:

$$\zeta_1\zeta_1^* + \zeta_n\zeta_n^* < \zeta_0\zeta_0^* \Leftrightarrow \zeta_0{}^{-1}\zeta_1\zeta_1^*\zeta_0^{*-1} + ... + \zeta_0{}^{-1}\zeta_n\zeta_n^*\zeta_0^{*-1} < I^{(m)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z_1 Z_1^* + ... + Z_n Z_n^* < I^{(m)} \Leftrightarrow \langle Z, Z\rangle < I^{(m)}.$$

Demak, ushbu

$$\left\{Z = (Z_1, ..., Z_n) : \langle Z, Z\rangle < I^{(m)}\right\}$$

matritsalar to‘plami $\mathbb{C}^n[m \times m]$ fazodagi matritsaviy sharni hosil qiladi. U holda (5) tenglikka asosan quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz:

$$W_k = \omega_0^{-1}\omega_k = \left(A_{00} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{j0}\right)^{-1}\left(A_{0k} + \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{jk}\right), \ k = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Bundan esa [9], (6) akslantirishning $B_{m,n}$ matritsaviy sharning avtomorfizmi bo‘lishi uchun, $A_{i\,j}, \ \ i,j = 0, 1, ..., n$, koeffitsientlar (2) shartlarni qanoatlantirishi kerakligini ko‘rish mumkin. Matritsaviy sharning (6) ko‘rinishdagi avtomorfizmini

$$P = (P_1, ..., P_n)$$

nuqtani O nuqtaga akslantiruvchi quyidagi ko‘rinishda ham yozib olishimiz mumkin:

$$W_k = R^{-1}(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle)^{-1}\sum_{s=1}^{n}(Z_s - P_s)Q_{sk} \quad (k = 1, ..., n). \tag{7}$$

U holda (2) munosabatlardan, m-tartibli

$$R\, va\, Q_{sk}\,(s, k = 1, ..., n),$$

matritsalarning ushbu

$$R^*(I^{(m)} - \langle P, P\rangle)R = I^{(m)}$$
$$Q^*(I^{(mn)} - P^*P)Q = I^{(mn)}. \tag{8}$$

shartlarni qanoatlantirishi zarurligi kelib chiqadi. Bu yerda Q va P matritsalar blok matritsa bo‘lib,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11}\, Q_{12} \ldots Q_{1n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ Q_{n1}\, Q_{n2} \ldots Q_{nn} \end{pmatrix}$$

,

$$P^*P = \begin{pmatrix} P_1^*P_1 & P_1^*P_2 & \ldots & P_1^*P_n \\ P_2^*P_1 & P_2^*P_2 & \ldots & P_2^*P_n \\ . & . & \ldots & . \\ P_n^*P_1 & P_n^*P_2 & \ldots & P_n^*P_n \end{pmatrix}.$$

ko‘rinishda aniqlangan. Aytaylik, $W = \varphi_P(Z) - B_{m,n}$ matritsaviy sharning $P \in B_{m,n}$ nuqtasini O nuqtaga o‘tkazuvchi avtomorfizmi bo‘lsin. U holda quyidagi tasdiq o‘rinli ([10]):

Tasdiq. Barcha $Z, W \in B_{m,n}$ nuqtalar uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle\big)^{-1} \big(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle\big) \big(I^{(m)} - \langle P, W \rangle\big)^{-1} R^{*-1}.$$

Teorema 1. $\varphi_P(Z)$ avtomorfizm uchun ushbu

$$RP_i + P_iQ_{ii} = \mathrm{O}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{9}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda quyidagi xossalar o‘rinli.

1^0. $\varphi_P(P) = \mathrm{O},\ \varphi_P(\mathrm{O}) = P$;

2^0. $\frac{\partial W_k(P)}{\partial Z_i} = -R^*Q_{ik},\ \frac{\partial W_k(\mathrm{O})}{\partial Z_i} = R^{-1}(P_i^*RP_k - Q_{ik})$;

3^0. Ixtiyoriy $Z, W \in B_{m,n}^{(1)}$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\det\big(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W) \rangle\big) = \frac{\det\big(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\big) \cdot \det\big(I^{(m)} - \langle Z, W \rangle\big)}{\det(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I^{(m)} - \langle P, W \rangle)}; \tag{10}$$

4^0. Ixtiyoriy $Z \in B_{m,n}^{(1)}$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\det\big(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z) \rangle\big) = \frac{\det\big(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\big) \cdot \det\big(I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle\big)}{\det(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I^{(m)} - \langle P, Z \rangle)};$$

5^0. $\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$ (involyutsiya bo‘lish xossasi);

6^0. $\varphi_P(Z)$ gomeomorfizm bo‘ladi.

Isbot. 1^0. $W_k = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P \rangle\big)^{-1} \sum\limits_{s=1}^{n} (Z_s - P_s)Q_{sk}$ $k = 1, ..., n$ avtomorfizmning P nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz

$$W_K(P) = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\big)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (P_s - P_s)\, Q_{sk} = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle P, P \rangle\big)^{-1} \cdot \mathrm{O} = \mathrm{O}.$$

Endi (7) avtomorfizmning nol nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz.

$$W_K(\mathrm{O}) = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle \mathrm{O}, P \rangle\big)^{-1} \sum_{s=1}^{n} (\mathrm{O} - P_s)\, Q_{sk} = R^{-1}(-P_sQ_{sk})$$

(9) tengliklarni inobatga olsak

$$W_k\left(\mathrm{O}\right) = P_k\left(k = 1, 2, ..., n\right)$$

munosabatlarning o‘rinli ekani kelib chiqadi.

2^0. (7) avtomorfizm differensialini hisoblaymiz.

$$d\left(W_k\right) = d\left(R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk}\right) =$$

$$= R^{-1}d\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk} + R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}d\left(\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk}\right) =$$

$$= R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}d\left\langle Z, P\right\rangle\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk} +$$

$$+ R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}d\left(\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk}\right) =$$

$$= R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\big)^{-1}\left(d\left\langle Z, P\right\rangle\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)^{-1}\cdot\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk} + d\left(\sum_{s=1}^{n}\left(Z_s - P_s\right)Q_{sk}\right)\right).$$

(7) avtomorfizmning ixtiyoriy Z_k elementi bo‘yicha xususiy hosilasining Pva O nuqtalardagi qiymatini hisoblaymiz.

$$\frac{\partial W_k\left(P\right)}{\partial Z_i} = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\big)^{-1}\left(P_i^*\big(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\big)^{-1}\cdot\sum_{s=1}^{n}\left(P_s - P_s\right)Q_{sk} + \left(-Q_{ik}\right)\right)$$

(8) munosabatlarga ko‘ra

$$R^*\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right)R = I^{(m)},\ R^* = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\big)^{-1}$$

tenglik o‘rinli. Bundan

$$\frac{\partial W_k\left(P\right)}{\partial Z_i} = -R^*Q_{ik}$$

munosabatning o‘rinli ekani kelib chiqadi.

$$\frac{\partial W_k\left(\mathrm{O}\right)}{\partial Z_i} = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle \mathrm{O}, P\rangle\big)^{-1}\left(P_i^*\big(I^{(m)} - \langle \mathrm{O}, P\rangle\big)^{-1}\cdot\sum_{s=1}^{n}\left(\mathrm{O} - P_s\right)Q_{sk} + \left(-Q_{ik}\right)\right) =$$

$$= R^{-1}\left(P_i^*\cdot\sum_{s=1}^{n}\left(-P_sQ_{sk}\right) + \left(-Q_{ik}\right)\right) = R^{-1}\left(P_i^*RP_k - Q_{ik}\right)$$

3^0. Tasdiqga ko‘ra

$$\det\left(I^{(m)} - \left\langle\varphi_P\left(Z\right), \varphi_P\left(W\right)\right\rangle\right) = \frac{\det\left(R^{-1}\right)\cdot\det\big(I^{(m)} - \langle Z, W\rangle\big)\det\left(R^*\right)^{-1}}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right)\cdot\det\left(I^{(m)} - \langle P, W\rangle\right)}$$

tenglik o‘rinli. (8) munosabatga ko‘ra

$$\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) = \det\left(R^*\right)^{-1} \cdot \det\left(R^{-1}\right)$$

tenglik o‘rinli. Bundan

$$\det\left(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W)\rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle Z, W\rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle P, W\rangle\right)}$$

munosabatning o‘rinli ekani kelib chiqadi.

4^0. (10) tenglikda $W = Z$ almashtirish bajarsak ushbu

$$\det\left(I^{(m)} - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(Z)\rangle\right) = \frac{\det\left(I^{(m)} - \langle P, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle\right)}{\det\left(I^{(m)} - \langle Z, P\rangle\right) \cdot \det\left(I^{(m)} - \langle P, Z\rangle\right)}$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

5^0. $F = \varphi_P \circ \varphi_P$ akslantirishni qaraylik. $F(Z)$ akslantirish uchun quyidagilar o‘rinli

a) $F(Z) \in Aut\left(B_{m,n}^{(1)}\right)$

b) $F(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$

c) $F(P) = P$

yuqoridagi a) va b) xossalarga ko‘ra

$$F(Z) : W_k = \sum_{j=1}^{n} Z_j A_{jk}\left(k = \overline{1, n}\right)$$

munosabatlar o‘rinli.

$F(P) = P$ ekanini inobatga olsak ushbu

$$\left\{\begin{array}{c} P_1A_{11} + P_2A_{21} + P_3A_{31} + ... + P_nA_{n1} = P_1 \\ P_1A_{12} + P_2A_{22} + P_3A_{32} + ... + P_nA_{n2} = P_2 \\ ... \\ ... \\ P_1A_{1n} + P_2A_{2n} + P_3A_{3n} + ... + P_nA_{nn} = P_n \end{array}\right. \tag{11}$$

matritsaviy chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. (11) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega va quyidagicha aniqlanadi:

$$A_{ij} = \left\{\begin{array}{c} I^{(m)},\ \text{agar } i = j \\ \mathrm{O},\ \text{agar } i \neq j \end{array}\right.$$

Demak, $F(Z) : W_k = Z_k \ \left(k = \overline{1, n}\right)$ ya’ni $\varphi_P \circ \varphi_p = Z$ munosabat o‘rinli.

6^0. $\varphi_P(Z) \in Aut\left(B_{m,n}^{(1)}\right)$ demak $\varphi_P(Z)$ gomeomorfizm bo‘ladi.

Izoh. Yuqorida keltirilgan teorema U. Rudin [2] kitobidagi 2.2.2 teoremaning anoligi.

1-teoremada keltirilgan xossalarni qanoatlantiruvchi avtomorfizmlar gruppasini $\Gamma_0(\Gamma_0 \subset Aut\left(B_{m,n}^{(1)}\right))$ orqali belgilaymiz.

Lemma. Γ_0 avtomorfizmlar gruppasi $B^{(1)}_{m,n}$ sohada tranzitiv.

Isbot. Ixtiyoriy $Z^{(1)}$, $Z^{(2)} \in B^{(1)}_{m,n}$ elementlar berilgan bo‘lsin. U holda

$$\psi = \varphi_{Z^{(2)}} \circ \varphi_{Z^{(1)}}$$

avtomorfizm $Z^{(1)} \in B^{(1)}_{m,n}$ nuqtani $Z^{(2)} \in B^{(1)}_{m,n}$ nuqtaga akslantiradi.

Yuqorida keltirilgan 1-teorema $\varphi_P(Z)$ akslantirish uchun o‘rinli bo‘ladi. Keyingi keltiriladigan teorema birinchi tip matritsaviy shar $B^{(1)}_{m,n}$ ning ixtiyoriy golomorf avtomorfizmi uchun o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 2. Ushbu $F(P) = \mathrm{O}$ munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $F \in Aut\left(B^{(1)}_{m,n}\right)$ golomorf avtomorfizm berilgan bo‘lsin. U holda shunday yagona U unitar matritsa topiladiki quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

1. $F = U \circ \varphi_P$;

2. Ixtiyoriy $Z^{(1)}$, $Z^{(2)} \in B^{(1)}_{m,n}$ lar uchun

$$\det\left(I - \left\langle F\left(Z^{(1)}\right), F\left(Z^{(2)}\right)\right\rangle\right) = \frac{\det\left(I - \langle P, P\rangle\right) \cdot \det\left(I - \left\langle Z^{(1)}, Z^{(2)}\right\rangle\right)}{\det\left(I - \langle Z^{(1)}, P\rangle\right) \cdot \det\left(I - \langle P, Z^{(2)}\rangle\right)}.$$

Isbot. Ushbu $F \circ \varphi_P$ akslantirish birinchi tip matritsaviy shar $B^{(1)}_{m,n}$ ning avtomorfizmi nol nuqtani saqlaydi ya’ni $(F \circ \varphi_P)(0) = 0$.

U holda A.Kartanning yagonalik teoremasiga ([2] 2.1.3-teorema) ko‘ra $F \circ \varphi_P$ akslantirish chiziqli. Ma’lumki ixtiyoriy chiziqli akslantirishni shunday yagona U unitar matritsa orqali ifodalash mumkin [9].

Demak, ushbu

$$F \circ \varphi_P = U$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. 1-teoremaning 5°-xossasiga ko‘ra

$$\varphi_P(\varphi_P(Z)) = Z$$

involyutsiya xossasi o‘rinli. Bundan

$$F \circ \varphi_P \circ \varphi_P = U \circ \varphi_P$$

ya’ni

$$F = U \circ \varphi_P$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2. Ixtiyoriy $Z, W \in B^{(1)}_{m,n}$ nuqtalar uchun quyidagilar o‘rinli

$$\langle F(Z), F(W)\rangle = \langle U\varphi_P(Z), U\varphi_P(W)\rangle = \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W)\rangle$$

ya’ni

$$\langle F(Z), F(W)\rangle = \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W)\rangle.$$

Bundan

$$\det\left(I - \langle F(Z), F(W)\rangle\right) = \det\left(I - \langle \varphi_P(Z), \varphi_P(W)\rangle\right)$$

tenglik o‘rinli ekani kelib chiqadi. 1-teoremaning 3°- xossasiga ko‘ra

$$\det\left(I-\langle F(Z),F(W)\rangle\right)=\frac{\det\left(I-\langle P,P\rangle\right)\cdot\det\left(I-\langle Z,W\rangle\right)}{\det\left(I-\langle Z,P\rangle\right)\cdot\det\left(I-\langle P,W\rangle\right)}$$

munasabat o‘rinli.

Bizga $f: B_{m,n}^{(1)}\to\Omega$ bigolomorf akslantirish berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 3. Ushbu $\psi_P=f\circ\varphi_P\circ f^{-1}$ akslantirish uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

1^0. $\psi_P\circ\psi_P=Z$(Involyutsiya bo‘lish xossasi);

2^0. $\psi_P\in Aut\left(\Omega\right);$

3^0. ψ_P akslantirish Ω sohada tranzitiv;

4^0. $\forall\psi\in Aut\left(\Omega\right)$ uchun φ_U unitar almashtirish mavjudki ushbu

$$\psi=\varphi_U\circ\psi_P$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. 1^0. Quyidagi

$$F\left(Z\right)=\psi_P\circ\psi_P$$

akslantirish uchun ushbu

$$F\left(Z\right)=\psi_P\circ\psi_P=f\circ\varphi_P\circ f^{-1}\circ f\circ\varphi_P\circ f^{-1}=f\circ\varphi_P\circ\varphi_P\circ f^{-1}$$

munosabat o‘rinli. 1-teoremaning 4^0- xossasiga ko‘ra

$$F\left(Z\right)=f\circ\varphi_P\circ\varphi_P\circ f^{-1}=Z$$

ya’ni

$$\psi_P\circ\psi_P=Z.$$

2^0. $\varphi_P\in Aut\left(B_{m,n}^{(1)}\right)$ va $f: B_{m,n}^{(1)}\to\Omega$ bigolomorf akslantirish ekanligidan $\psi_P\in Aut\left(\Omega\right)$.

3^0. Ushbu $\varphi_P\left(Z\right)$akslantirish $\Re_1\left(m,n\right)$da tranzitiv va $f: B_{m,n}^{(1)}\to\Omega$ akslantirish bigolomorf ekanligidan ψ_P akslantirish Ω sohada tranzitiv bo‘ladi.

4^0. $\forall\psi\in Aut\left(\Omega\right)$ avtomorfizm berilgan bo‘lsin, u holda ushbu

$$\varphi=f^{-1}\circ\psi\circ f$$

akslantirish uchun $\varphi\in Aut\left(B_{m,n}^{(1)}\right)$ munosabat o‘rinli. 2-teoremaning 1^0-xossasiga ko‘ra

$$\varphi=U\circ\varphi_P$$

o‘rinli. Bundan

$$U\circ\varphi_P=f^{-1}\circ\psi\circ f$$

$$\psi=f\circ U\circ\varphi_P\circ f^{-1}=f\circ U\circ f^{-1}\circ f\circ\varphi_P\circ f^{-1}=\varphi_U\circ\psi_P.$$

Ya’ni

$$\psi=\varphi_U\circ\psi_P,$$

bu yerda φ_U ushbu

$$\varphi_U=f\circ U\circ f^{-1}.$$

ko‘rinishdagi unitar akslantirish.

ADABIYOTLAR

1. Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.. – М.: Мир,1984. – 456 с.
3. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables. Cham: Springer, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63231-5
4. Айзенберг Л. А., Формулы Карлемана в комплексном анализе, Наука, Новосибирск, 1990. Aizenberg L. A., Carleman formulas in complex analysis, Science, Novosibirsk, 1990.
5. Айзенберг Л. А, Южаков А. П. Интегральные представления и вы-четы в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979. –366 с.
6. Худайберганов Г., Хидиров Б.Б., Рахмонов У.С. Автоморфизмы матричных шаров // Вестник НУУз. 2010. №3. с-205-210.
7. Зигель К. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных. //М.:ИЛ, 1954. – 168 с.
8. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. //М.: Наука, 1961. – 192 с.
9. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. // Анализ в матричных областях. Красноярск. 2017.-296 с.
10. Косбергенов С. О ядре Бергмана в матричном шаре// Узб. мат. журн. –1998. – №1.– С. 36–44.

РЕЗЮМЕ

В данной статье получен аналог Теоремы 2.2.5 из книги Рудина [2] для матричного шара первого типа в области $\mathbb{C}^n\,[m,m]$. Приведены некоторые применения свойств автоморфизмов матричного шара первого типа. В частности, доказаны некоторые свойства автоморфизмов областей, биголоморфно эквивалентных матричному шару первого типа.

Ключевые слова: Блочная матрица, биголоморфное отображение , эрмитова матрица, классическая область, автоморфизма.

RESUME

In this article, an analogue of Theorem 2.2.5 from Rudin’s book [2] is obtained for the first-type matrix ball in the domain $\mathbb{C}^n\,[m,m]$. Some applications of the properties of the automorphisms of the first-type matrix ball are presented. In particular, certain properties of the automorphisms of domains that are biholomorphically equivalent to the first-type matrix ball are proven.

Key words: Block matrix, biholomorphic mapping, Hermitian matrix, classical domain, automorphism.

UDC 519.496

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONHOMOGENEOUS PARABOLIC TYPE EQUATIONS WITH TWO DEGENERATE LINES

Fayazov K. S.
Turin Polytechnic University in Tashkent
kudratillo52@mail.ru
Khudayberganov Y. K.
National University of Uzbekistan
komilyashin89@mail.ru

RESUME

This work is devoted to the study of the conditional correctness of the nonlocal boundary value problem for a system of nonhomogeneous parabolic type equations with two degeneration lines. In this article, based on the idea of A.N. Tikhonov, the conditional correctness of the problem are proved, namely, the theorems of uniqueness and conditional stability on the set of correctness are proved. For getting a priori estimate of the solution we used the logarithmic convexity method and the results of the spectral problem considered by S.G. Pyatkov.

Key words: Nonlocal boundary value problem, ill-posed problem, a priori estimate, estimate of conditional stability, uniqueness of solution, set of correctness.

Introduction

In this paper, we consider a nonlocal boundary value problem for a system of partial differential equations with changing the direction of time in space. Similar equations were considered by N. Kislov, S.G. Pyatkov, K.S. Fayazov, I.E. Egorov, S. Z. Djamalov, I.O. Khajiev and others. The correctness of nonlocal boundary value problems for some general differential and differential operator equations is studied in various aspects in the works of A.A. Dezin, V.K. Romanko, Y.I. Yurchuk and others.

The existence and uniqueness of solutions nonlocal boundary value problems for nonclassical equations were investigated in works by A. Ashyralyev and O. Yildirim [1], F. Zouyed, F. Rebbani, N. Boussetila [2], A.I. Kozhanov [3], K.B. Sabitov [4], S.Z. Djamalov[5], A.I. Shadrina [6] and others.

The parabolic equation with changing direction of time represents various physical processes. This is caused, in particular, by their applications in hydrodynamics by studying the motion of a fluid with an alternating coefficient of viscosity. Problems arising in gas dynamics lead to equations of this type. This class also includes equations that describe diffusion processes, electron scattering and many other processes in physics [7].

Ill-posed problems in the sense of J. Hadamard were studied in the works of E.M. Landis, S.G. Krein [8], M.M. Lavrent'ev [9], V. A. Morozov, V. Ya Arsenin, V. G Romanov, S. I.

Kabanikhin, B. A. Bubnov, H. A. Levine [10], I.E. Egorov and V.E. Fedorov, A.I. Kozhanov [11], S.G. Pyatkov, A.L. Buchheim [12], K.S. Fayazov [13],[14],[15], V.Isakov, M.Klibanov, A.Loiuse, P.Mass, E.Shock, A.Hasanugly, A.Amirov M.Kh. Alaminov, I.O. Khajiev [16],[17], Y.K. Khudayberganov [18] and others.

Formulation of the problem

Let $\Omega = \Omega_0 \times Q$, $\Omega_0 = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, $\Omega_1 = \{-1 < x < 1\}$, $\Omega_2 = \{-1 < y < 1\}$, $\Omega_3 = \{0 < z < \pi\}$, $Q = (0; T)$.

Consider the system of equations

$$\begin{cases} u_{1t} + \operatorname{sign}(x) u_{1xx} + \operatorname{sign}(y) u_{1yy} + u_{1zz} + a_1 u_1 + b_1 u_2 = f_1, \\ u_{2t} + \operatorname{sign}(x) u_{2xx} + \operatorname{sign}(y) u_{2yy} + u_{2zz} + a_2 u_2 + b_2 u_1 = f_2, \end{cases} \tag{1}$$

in the domain $\Omega \cap \{x, y \neq 0\}$, where a_j, b_j are some constants, $b_2 \neq 0$, $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1 b_2 > 0$ and $j = 1, 2$, $f_j(x, y, z, t)$ are given sufficiently smooth functions.

Problem. Find a solution of the system of equations (1) satisfying the following conditions:
nonlocal

$$u_j(x, y, z, t)\,|_{t=0} + \alpha u_j(x, y, z, t)\,|_{t=T} = \varphi_j(x, y, z),\ (x, y, z) \in \bar{\Omega}_0,\ j = 1, 2, \tag{2}$$

boundary

$$u_j(x, y, z, t)|_{\partial \Omega_0} = 0, \quad t \in [0; T], \tag{3}$$

and gluing

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} &= \left.\frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0}, \ (y, z, t) \in \bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_3 \times \bar{Q}, \\ \left.\frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} &= \left.\frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0}, \ (x, z, t) \in \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_3 \times \bar{Q}, \ i = 0, 1, \end{aligned} \tag{4}$$

conditions, where α is some constant, $\varphi_j(x, y, z)$ given sufficiently smooth functions.

In this paper, we study the correctness of the desired problem depending on the value of the parameter α and obtain a presentation of the solution, as well as an a priori estimate of the solution. In the case of well-posedness, conditional correctness is proved.

Let us introduce the notation

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= \frac{a_1 + \kappa_2}{b_2(\kappa_1 - \kappa_2)} e^{\kappa_1 t} v_1(x, y, z, t) + \frac{a_1 + \kappa_1}{b_2(\kappa_1 - \kappa_2)} e^{\kappa_2 t} v_2(x, y, z, t), \\ u_2(x, y, z, t) &= \frac{1}{(\kappa_1 - \kappa_2)} e^{\kappa_1 t} v_1(x, y, z, t) + \frac{1}{(\kappa_1 - \kappa_2)} e^{\kappa_2 t} v_2(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{5}$$

where $\kappa_1, \kappa_2 -$ roots of a quadratic equation

$$\kappa^2 + (a_1 + a_2)\kappa + a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0,$$

then (1)-(4) is transformed to the following problems.

Problem 1. Find a solution to the equation

$$\frac{\partial v_j}{\partial t}+\operatorname{sign}(x)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}+\operatorname{sign}(y)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2}=\bar{f}_j,\ j=1,2, \tag{6}$$

in the domain Ω, satisfying:
nonlocal

$$v_j(x,y,z,t)\,|_{t=0}+\alpha e^{\kappa_j T}v_j(x,y,z,t)\,|_{t=T}=\bar{\varphi}_j(x,y,z),\ (x,y,z)\in\bar{\Omega}_0,\ j=1,2, \tag{7}$$

boundary

$$v_j(x,y,z,t)|_{\partial\Omega_0}=0,\ \ t\in[0;T], \tag{8}$$

and gluing conditions

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial^i v_j(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^i v_j(x,y,z,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,z,t)\in\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_3\times\bar{Q},\\ &\left.\frac{\partial^i v_j(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^i v_j(x,y,z,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,z,t)\in\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_3\times\bar{Q}\,,\ \ i=0,1.\end{aligned} \tag{9}$$

where

$$\bar{\varphi}_1(x,y,z)=\left((a_1+\kappa_1)\varphi_2(x,y,z)-b_2\varphi_1(x,y,z)\right),$$
$$\bar{f}_1(x,t)=\left(b_2f_1(x,y,z,t)-(a_1+\kappa_1)f_2(x,y,z,t)\right)e^{-\kappa_1 t},$$

$$\bar{\varphi}_2(x,y,z)=\left(b_2\varphi_1(x,y,z)-(a_1+\kappa_2)\varphi_2(x,y,z)\right),$$
$$\bar{f}_2(x,y,z,t)=\left(b_2f_1(x,y,z,t)-(a_1+\kappa_2)f_2(x,y,z,t)\right)e^{-\kappa_2 t}.$$

Spectral problem

Let $\left\{\lambda_{k,l,n}^{(1)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$, $\left\{\lambda_{k,l,n}^{(2)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$, $\left\{\lambda_{k,l,n}^{(3)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$, $\left\{\lambda_{k,l,n}^{(4)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$ eigenvalues and $\left\{\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$, $\left(j=\overline{1,4}\right)$ eigenfunctions of the following spectral problem

$$sign(x)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+sign(y)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}+\lambda\vartheta=0,\ (x,y,z)\in\Omega_0\cap\{x,y\neq 0\}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\vartheta(x,y,z)\,|_{x=\pm1}=0,\ (y,z)\in\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_3,\\ &\vartheta(x,y,z)\,|_{y=\pm1}=0,\ (y,z)\in\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_3,\\ &\vartheta(x,y,z)\Big|_{\substack{z=0\\ z=\pi}}=0,\ (x,y)\in\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2,\\ &\left.\frac{\partial^j\vartheta(x,y,z)}{\partial x^j}\right|_{x=-0}=\left.\frac{\partial^j\vartheta(x,y,z)}{\partial x^j}\right|_{x=+0},\ (y,z)\in\bar{\Omega}_2\times\bar{\Omega}_3,\\ &\left.\frac{\partial^j\vartheta(x,y,z)}{\partial y^j}\right|_{y=-0}=\left.\frac{\partial^j\vartheta(x,y,z)}{\partial y^j}\right|_{y=+0},\ (x,z)\in\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_3\,,\ \ j=0,1.\end{aligned} \tag{11}$$

Let the solution of problem (10),(11) exist, we find presentations of the solution. We apply the method of separation of variables, we have

$$\vartheta(x,y,z)=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z). \tag{12}$$

Conditions (12) imply

$$\begin{aligned}
&X(-1) = X(+1) = 0,\\
&X(-0) = X(+0),\\
&X'(-0) = X'(+0),\\
&Y(-1) = Y(+1) = 0,\\
&Y(-0) = Y(+0),\\
&Y'(-0) = Y'(+0),\\
&\quad Z(0) = Z(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Calculating partial derivatives of function (12), we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z)}{\partial x^2} &= X''{}_1(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z),\\
\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z)}{\partial y^2} &= X(x)\cdot Y''(y)\cdot Z(z),\\
\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z)}{\partial z^2} &= X(x)\cdot Y(y)\cdot Z''(z).
\end{aligned}$$

Substituting expressions (10) into these data and separating the variables, we obtain

$$\frac{sign(x)X''(x)}{X(x)} + \frac{sign(y)Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda.$$

Further, since $\frac{sign(x)X''(x)}{X(x)}$ does not depend on y, z, $\frac{sign(y))Y''(y)}{Y(y)}$ on x, z , etc. $\frac{Z''(z)}{Z(z)}$ on x, y, we have

$$\frac{sign(x)X''(x)}{X(x)} = -\lambda_1, \quad \frac{sign(y)Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda_2, \ \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda_3.$$

For the functions $X(x), Y(y), Z(z)$ we obtain the problems:

$$\left.\begin{aligned}
&sign(x)X''(x) = -\lambda_1 X(x),\\
&X(-1) = X(+1) = 0,\\
&X(-0) = X(+0),\\
&X'(-0) = X'(+0),
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&sign(y)Y''(y) = -\lambda_2 Y(y),\\
&Y(-1) = Y(+1) = 0,\\
&Y(-0) = Y(+0),\\
&Y'(-0) = Y'(+0),
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Z''(z) = -\lambda_3 Z(z),\\
&Z(0) = Z(\pi) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Thus, solutions of a problems (13),(14),(15) will have the form:

at $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,$

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \sin\mu_k(x-1)/\cos\mu_k \quad ,0 \leqslant x \leqslant 1, \\ sh\mu_k(x+1)/ch\mu_k,\ -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \ k \in N,$$

$$Y_l^{(1)}(y) = \begin{cases} \sin\mu_l(y-1)/\cos\mu_l,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ sh\mu_l(y+1)/ch\mu_l\ ,\ -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases} \ l \in N,$$

$$Z_n(z) = \sin nz,\ \ n \in N,$$

and at $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0,$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} sh\mu_k(x-1)/ch\mu_k,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sin\mu_k(x+1)/\cos\mu_k,\ \ -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \ k \in N,$$

$$Y_l^{(2)}(y) = \begin{cases} sh\mu_l(y-1)/ch\mu_l\ ,0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \sin\mu_l(y+1)/\cos\mu_l\ ,\ -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{cases} \ l \in N,$$

where $\lambda_{1k} = \mu_k^2 > 0, \lambda_{1k} = -\mu_k^2 < 0,\ \lambda_{2l} = \mu_l^2 > 0, \lambda_{2l} = -\mu_l^2 < 0.$

μ_k^2 are eigenvalues corresponding to eigenfunctions $X_k^{(j)}(x), Y_l^{(j)}(y), j = 1, 2$, respectively. In both cases μ_k are positive roots of the transcendental equation $tg\alpha = -th\alpha$.

We note that

$$\mu_k^2 + \mu_l^2 + n^2 = \lambda_{k,l,n}^{(1)},\ \ \mu_k^2 - \mu_l^2 + n^2 = \lambda_{k,l,n}^{(2)},$$
$$-\mu_k^2 + \mu_l^2 + n^2 = \lambda_{k,l,n}^{(3)},\ \ -\mu_k^2 - \mu_l^2 + n^2 = \lambda_{k,l,n}^{(4)}$$

and the systems of eigenfunctions corresponding to them can be represented as

$$\vartheta_{k,l,n}^{(1)}(x,y,z) = X_k^{(1)}(x) \cdot Y_l^{(1)}(y) \cdot Z_n(z),$$

$$\vartheta_{k,l,n}^{(2)}(x,y,z) = X_k^{(1)}(x) \cdot Y_l^{(2)}(l) \cdot Z_n(z),$$

$$\vartheta_{k,l,n}^{(3)}(x,y,z) = X_k^{(2)}(x) \cdot Y_l^{(1)}(y) \cdot Z_n(z),$$

$$\vartheta_{k,l,n}^{(4)}(x,y,z) = X_k^{(2)}(x) \cdot Y_l^{(2)}(y) \cdot Z_n(z),$$

where $k, l, n \in N$.

It follows from the results of [20] that problem (10),(11) has a nondecreasing sequence of eigenvalues $\left\{\lambda_{k,l,n}^{(1)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}, \left\{\lambda_{k,l,n}^{(2)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}, \left\{\lambda_{k,l,n}^{(3)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty},\ \left\{\lambda_{k,l,n}^{(4)}\right\}_{k,l,n=1}^{\infty}$ and a system of eigenfunctions corresponding to them $\left\{\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\right\}_{k,l,n=1}^{\infty},\ \left(j = \overline{1,4}\right)$.

Let $\|u\|_0^2 = (u,u)$, where the inner product is $(u,v) = \int\limits_{\Omega_0} uv d\Omega_0$.

Moreover,

$$\left(sign(x)sign(y)\vartheta_{k,l,n}^{(p)}(x,y,z), \vartheta_{k_1,l_1,n_1}^{(q)}(x,y,z\right) = 0, p \neq q,\ (p,q = \overline{1,4}), \forall\, k,l,n,k_1,l_1,n_1 \in N,$$

$$\left(sign(x)sign(y)\vartheta_{k,l,n}^{(m)}(x,y,z),\vartheta_{k_1,l_1,n_1}^{(m)}(x,y,z)\right)=\begin{cases}1, & k=k_1\wedge l=l_1\wedge n=n_1\\ 0, & k\neq k_1\wedge l\neq l_1\wedge n\neq n_1\end{cases},(m=1,4),$$

$$\left(sign(x)sign(y)\vartheta_{k,l,n}^{(m)}(x,y,z),\vartheta_{k_1,l_1,n_1}^{(m)}(x,y,z)\right)=\begin{cases}-1, & k=k_1\wedge l=l_1\wedge n_1=n_1\\ 0, & k\neq k_1\wedge l\neq l_1\wedge n\neq n_1\end{cases},(m=2,3),$$

where $k,l,n,k_1,l_1,n_1\in N$.

The norm

$$\begin{aligned}\|u(x,y,z,t)\|_0^2=\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\Bigg\{\left|\left(sign(x)sign(y)u(x,y,z,t),\vartheta_{k,l,n}^{(1)}(x,y,z)\right)\right|^2+\\ +\left|\left(sign(x)sign(y)u(x,y,z,t),\vartheta_{k,l,n}^{(2)}(x,y,z)\right)\right|^2+\\ +\left|\left(sign(x)sign(y)u(x,y,z,t),\vartheta_{k,l,n}^{(3)}(x,y,z)\right)\right|^2+\\ +\left|\left(sign(x)sign(y)u(x,y,z,t),\vartheta_{k,l,n}^{(4)}(x,y,z)\right)\right|^2\Bigg\},\end{aligned}\tag{16}$$

defined by the following formula is equivalent to the original norm in the space H_0.

According to Theorem 2.1 in [19] and Theorem 4.1. in [20], the eigenfunctions $\left\{\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\right\}$, $\left(j=\overline{1,4}\right)$ of problem [10],[11] normalized in $L_2\left((-1;1)^2\times(0;\pi)\right)$ form the Riesz basiss in $L_2\left((-1;1)^2\times(0;\pi)\right)$.

A prior estimate

Generalized solution of problem (6)-(7) is a function $\upsilon_j(x,y,z,t)\in C\left(L_2((-1;1)^2\times(0;\pi));[0;T]\right)$ which for any arbitrary function $V(x,y,z,t)\in W_2^{2,1}(\Omega)$, $V(x,y,z,T)+\alpha e^{\kappa_j T}V(x,y,z,0)=0$, $V(x,y,z,t)|_{\partial\Omega_0}=0$, $j=1,2$, satisfies the following integral identity

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\upsilon_j\left(\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)V_t-\operatorname{sign}(y)V_{xx}-\operatorname{sign}(x)V_{yy}-\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)V_{zz}\right)d\Omega=\\ -\int\limits_{\Omega}\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)V\bar{f}_j d\Omega-\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)V|_{t=0}\bar{\varphi}_j d\Omega_0.\end{aligned}$$

Let $V(x,y,z,t)=\mu_{k,l,n}(t)\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)$, $\left(j=\overline{1,4}\right)$, and $\mu_{k,l,n}(T)+\alpha e^{\kappa_j T}\mu_{k,l,n}(0)=0$, $\mu_{k,l,n}(t)\in W_2^1(0;T)$. Then

$$\begin{aligned}0=\int\limits_{\Omega}\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\upsilon_i(x,y,z,t)\left({\mu'}_{k,l,n}(t)+\lambda_{k,l,n}^{(j)}\mu_{k,l,n}(t)\right)d\Omega\\ +\mu_{k,l,n}(t)\int\limits_{\Omega}\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\bar{f}_i(x,y,z,t)d\Omega\\ +\mu_{k,l,n}(0)\int\limits_{\Omega_0}\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)\vartheta_{k,l,n}^{(j)}(x,y,z)\bar{\varphi}_i(x,y,z)d\Omega_0\end{aligned}\tag{17}$$

From (17) it follows that

$$\int_0^T v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)\left({\mu'}_{k,l,n}(t)+\lambda^{(j)}_{k,l,n}\mu_{k,l,n}(t)\right)dt=$$
$$-\int_0^T\left(\mu_{k,l,n}(t)\bar f^{(j)}_{i,k,l,n}(t)\right)dt-\mu_{k,l,n}(0)\bar\varphi^{(j)}_{k,l,n},\,k,l,n\in N,$$

where

$$v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)=(sign(x)sign(y)v_i(x,y,z,t),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=1,4)\,,$$
$$v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)=-(sign(x)sign(y)v_i(x,y,z,t),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=2,3)\,,i=1,2,$$

$$\bar\varphi^{(j)}_{i,k,l,n}=(sign(x)sign(y)\bar\varphi_i(x,y,z),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=1,4)\,,$$
$$\bar\varphi^{(j)}_{i,k,l,n}=-(sign(x)sign(y)\bar\varphi_i(x,y,z),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=2,3)\,,$$

$$f\bar{(t)}^{(j)}_{i,k,l,n}=(sign(x)sign(y)\bar f_i(x,y,z,t),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=1,4)\,,$$
$$f\bar{(t)}^{(j)}_{i,k,l,n}=-(sign(x)sign(y)\bar f_i(x,y,z,t),\vartheta^{(j)}_{k,l,n}(x,y,z)),\ (j=2,3)\,,\ i=1,2.$$

Finally we have

$$\begin{aligned}&\left(v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)\right)_t-\lambda^{(j)}_{k,l,n}v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)=\bar f^{(j)}_{i,k,l,n}(t),\\&v^{(j)}_{i,k,l,n}(0)+\alpha e^{\kappa_iT}v^{(j)}_{i,k,l,n}(T)=\bar\varphi^{(j)}_{i,k,l,n},\ i=1,2,\ j=1,2,3,4,\ k,l,n\in N.\end{aligned}\tag{18}$$

From (18) we obtain

$$v^{(j)}_{i,k,l,n}(t)=\frac{\bar\varphi^{(j)}_{i,k,l,n}e^{\lambda^{(j)}_{k,l,n}t}}{1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(j)}_{k,l,n}T}}-\frac{\alpha e^{\lambda^{(j)}_{k,l,n}T+\kappa_iT}}{1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(j)}_{k,l,n}T}}\int_t^T e^{\lambda^{(j)}_{k,l,n}(t-\tau)}\bar f^{(j)}_{i,k,l,n}(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{1}{1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(j)}_{k,l,n}T}}\int_0^t e^{\lambda^{(j)}_{k,l,n}(t-\tau)}\bar f^{(j)}_{i,k,l,n}(\tau)d\tau,$$

where $i=1,2,\ j=1,2,3,4,\ k,l,n\in N$.

Lemma 1. *Let $v\,(x,y,z,t)$ satisfies the equation*

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\mathrm{sign}(x)\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\mathrm{sign}(y)\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}=\bar f,$$

and conditions $v(x,y,z,0)=\bar\varphi(x,y,z)$, (8)-(9), then for $v\,(x,y,z,t)$ at $t\in(0;T)$

$$\|v(x,y,z,t)\|_0\leqslant 2(\|v(x,y,z,0)\|_0+\beta)^{1-\frac{t}{T}}\cdot(\|v(x,y,z,T)\|_0+\beta)^{\frac{t}{T}}+\beta,\tag{19}$$

estimate is valid, where $\beta=\left(\int\limits_0^T\left\|\bar f(x,y,z,t)\right\|_0^2dt\right)^{\frac12}$.

Proof of lemma 1 one can find in [18].

Lemma 2. *Let $\alpha = 0$. Then for any generalized solution to the problem (1)-(4) for $t \in (0,T)$ the following inequalities hold:*

$$\|u_1(x,y,z,t)\|_0 \leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_1 t}\omega(t,\kappa_1,\gamma_1) + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_2 t}\omega(t,\kappa_2,\gamma_2),$$

$$\|u_2(x,y,z,t)\|_0 \leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_1 t}\omega(t,\kappa_1,\gamma_1) + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_2 t}\omega(t,\kappa_2,\gamma_2),$$

where

$$\omega(t,\kappa_i,\gamma_i) = 2(|b_2|\,\|\varphi_1\|_0 + |a_1+\kappa_i|\,\|\varphi_2\|_0 + \gamma_i)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\times\big((|b_2|\,\|u_1(x,y,z,T)\|_0 + |a_1+\kappa_i|\,\|u_2(x,y,z,T)\|_0)\,e^{-\kappa_i T} + \gamma_i\big)^{\frac{t}{T}} + \gamma_i,$$

$$\gamma_i = \left(2\int_0^T \big(|b_2|^2\,\|f_1(x,y,z,t)\|_0^2 + |a_1+\kappa_i|^2\,\|f_2(x,y,z,t)\|_0^2\big)e^{-\kappa_i t}dt\right)^{\frac{1}{2}}, i=1,2.$$

Proof. From (5) we have

$$\begin{aligned} v_1(x,y,z,t) &= ((a_1+\kappa_1)u_2(x,y,z,t) - b_2u_1(x,y,z,t))\,e^{-\kappa_1 t},\\ v_2(x,y,z,t) &= (b_2u_1(x,y,z,t) - (a_1+\kappa_2)u_2(x,y,z,t))\,e^{-\kappa_2 t}. \end{aligned} \tag{20}$$

From inequalities (19) and taking into account [20] we have

$$\begin{aligned} \|v_1(x,y,z,t)\|_0 &\leqslant 2(|b_2|\,\|u_1(x,y,z,0)\|_0 + |a_1+\kappa_1|\,\|u_2(x,y,z,0)\|_0 + \beta_1)^{1-\frac{t}{T}} \times\\ &\times\big((|b_2|\,\|u_1(x,y,z,T)\|_0 + |a_1+\kappa_1|\,\|u_2(x,y,z,T)\|_0)\,e^{-\kappa_1 T} + \beta_1\big)^{\frac{t}{T}} + \beta_1, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \|v_2(x,y,z,t)\|_0 &\leqslant 2(|b_2|\,\|u_1(x,y,z,0)\|_0 + |a_1+\kappa_2|\,\|u_2(x,y,z,0)\|_0 + \beta_2)^{1-\frac{t}{T}} \times\\ &\times\big((|b_2|\,\|u_1(x,y,z,T)\|_0 + |a_1+\kappa_2|\,\|u_2(x,y,z,T)\|_0)\,e^{-\kappa_2 T} + \beta_2\big)^{\frac{t}{T}} + \beta_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Taking the norm from both sides of equalities (5), we obtain the following estimates

$$\begin{aligned} \|u_1(x,y,z,t)\|_0 &\leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0 + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0,\\ \|u_2(x,y,z,t)\|_0 &\leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0 + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0. \end{aligned} \tag{23}$$

Finally, from these estimates and taking into account (21), (22), (23) the required inequalities are derived

$$\|u_1(x,y,z,t)\|_0 \leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_1 t}\omega(t,\kappa_1,\gamma_1) + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_2 t}\omega(t,\kappa_2,\gamma_2),$$

$$\|u_2(x,y,z,t)\|_0 \leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_1 t}\omega(t,\kappa_1,\gamma_1) + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_2 t}\omega(t,\kappa_2,\gamma_2),$$

where

$$\omega(t,\kappa_i,\gamma_i) = 2(|b_2|\,\|\varphi_1\|_0 + |a_1+\kappa_i|\,\|\varphi_2\|_0 + \gamma_i)^{1-\frac{t}{T}}\times$$
$$\times\left((|b_2|\,\|u_1(x,y,z,T)\|_0 + |a_1+\kappa_i|\,\|u_2(x,y,z,T)\|_0)\,e^{-\kappa_i T}+\gamma_i\right)^{\frac{t}{T}}+\gamma_i,$$

$$\beta_i = \left(\int\limits_0^T \left\|\overline{f}_i(x,y,z,t)\right\|_0^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(2\int\limits_0^T \left(|b_2|^2\,\|f_1\|_0^2 + |a_1+\kappa_i|^2\,\|f_2\|_0^2\right)e^{-\kappa_i t}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \gamma_i, i=1,2.$$

The lemma 2 is proved.

Let M denote the correctness set defined as follows

$$M = \left\{u_j(x,y,z,t) : \|u_1(x,y,z,T)\|_0 + \|u_2(x,y,z,T)\|_0 < m,\ m<\infty\right\},\ j=1,2.$$

Lemma 3. *Let $\alpha \neq 0$. Then for any solution to the problem (1)-(4) for $t\in(0,T)$ the following inequalities hold:*

$$\|u_1(x,y,z,t)\|_0^2 \leqslant 2\left(\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right)^2 e^{2\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0^2 + 2\left(\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right)^2 e^{2\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0^2,$$

$$\|u_2(x,y,z,t)\|_0^2 \leqslant \frac{2}{(\kappa_1-\kappa_2)^2}e^{2\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0^2 + \frac{2}{(\kappa_1-\kappa_2)^2}e^{2\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0^2.$$

where

$$\|v_j(x,y,z,t)\|_0^2 \leqslant C\left(1+\alpha^{-2}\right)e^{-2\kappa_i T}\|\bar\varphi_i(x,y,z)\|_0^2$$
$$+C\left(1+\alpha^2\right)(T-t)\,e^{2\kappa_i T}\int_t^T \left\|\bar f_i(x,y,z,t)\right\|_0^2 d\tau$$
$$+C\left(1+\alpha^{-2}\right)te^{-2\kappa_i T}\int_0^t \left\|\bar f_i(x,y,z,t)\right\|_0^2 d\tau, i=1,2,$$

$C-$ some constant depending on α, T.

Proof. If a solution to the problem (1)-(4) exists and belongs to M, then it has the form

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}e^{\kappa_1 t}v_1(x,y,z,t) + \frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}e^{\kappa_2 t}v_2(x,y,z,t),$$
$$u_2(x,y,z,t) = \frac{1}{(\kappa_1-\kappa_2)}e^{\kappa_1 t}v_1(x,y,z,t) + \frac{1}{(\kappa_1-\kappa_2)}e^{\kappa_2 t}v_2(x,y,z,t),$$

where

$$v_i(x,y,z,t) = \sum_{k,l,n=1}^{\infty} v_{i,k,l,n}^{(1)}(t)\vartheta_{k,l,n}^{(1)}(x,y,z) + \sum_{k,l,n=1}^{\infty} v_{i,k,l,n}^{(2)}(t)\vartheta_{k,l,n}^{(2)}(x,y,z)$$
$$+\sum_{k,l,n=1}^{\infty} v_{i,k,l,n}^{(3)}(t)\vartheta_{k,l,n}^{(3)}(x,y,z) \tag{24}$$
$$+\sum_{k,l,n=1}^{\infty} v_{i,k,l,n}^{(4)}(t)\vartheta_{k,l,n}^{(4)}(x,y,z),\ i=1,2.$$

According to (15) we have

$$\|v_i(x,y,z,t)\|_0^2=\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v^{(1)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2+\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v^{(2)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2$$
$$+\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v^{(3)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2+\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v^{(4)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2,\ i=1,2. \tag{25}$$

We estimate the first sum on the right-hand side of equality (25). In this case, we take into account the inequality $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, the Cauchy-Bunkhouses inequality for the integral, and we have

$$\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v^{(1)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2\leqslant\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{\frac{3\left(\bar{\varphi}^{(1)}_{i,k,l,n}\right)^2e^{2\lambda^{(1)}_{k,l,n}t}}{\left(1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}\right)^2}+\right.$$
$$+\frac{3\alpha^2e^{2\kappa_iT+2\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}}{\left(1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}\right)^2}\int\limits_t^T e^{2\lambda^{(1)}_{k,l,n}(t-\tau)}d\tau\int\limits_t^T\left(\bar{f}^{(1)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau+$$
$$\left.+\frac{3}{\left(1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}\right)^2}\int\limits_0^t e^{2\lambda^{(1)}_{k,l,n}(t-\tau)}d\tau\int\limits_0^t\left(\bar{f}^{(1)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\right\}$$

From here, evaluating each participant separately for the amounts, then we can easily get the following

$$\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\frac{3\left(\bar{\varphi}^{(1)}_{i,k,l,n}\right)^2e^{2\lambda^{(1)}_{k,l,n}t}}{\left(1+\alpha e^{\kappa_iT+\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}\right)^2}=\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\frac{3\left(\bar{\varphi}^{(1)}_{i,k,l,n}\right)^2e^{2\lambda^{(1)}_{k,l,n}(t-T)}}{\left(e^{-\lambda^{(1)}_{k,l,n}T}+\alpha e^{\kappa_iT}\right)^2}\leqslant C_{i,1}\alpha^{-2}e^{-2\kappa_iT}\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left(\bar{\varphi}^{(1)}_{i,k,l,n}\right)^2$$

where

$$C_{i,1}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(1)}_{1,1,1}T-\kappa_iT}+1\right)^2,\alpha<-1\\ 3D_{i,1},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,1}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(1)}_{k_0,l_0,n_0}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2},k\geqslant k_0,l\geqslant l_0,n\geqslant n_0,\ \lambda^{(1)}_{k,l,n}>\dfrac{1}{T}\ln\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|,\\ \max\left(\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(1)}_{k,l,n}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(1)}_{k,l,n}<\dfrac{1}{T}\ln\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|,\ i=1,2.\end{cases}$$

Further we have

$$\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\frac{3\alpha^2 e^{2\kappa_i T+2\lambda_{k,l,n}^{(1)}T}}{\left(1+\alpha e^{\kappa_i T+\lambda_{k,l,n}^{(1)}T}\right)^2}\int\limits_t^T e^{2\lambda_{k,l,n}^{(1)}(t-\tau)}d\tau\int\limits_t^T\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau$$
$$\leqslant C_{i,1}(T-t)\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\int\limits_t^T\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau,$$

$$\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\frac{3}{\left(1+\alpha e^{\kappa_i T+\lambda_{k,l,n}^{(1)}T}\right)^2}\int\limits_0^t e^{2\lambda_{k,l,n}^{(1)}(t-\tau)}d\tau\int\limits_0^t\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau$$
$$\leqslant C_{i,1}t\alpha^{-2}e^{-\kappa_i T}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau.$$

Summing up these estimates, we get

$$\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\left\{v_{i,k,l,n}^{(1)}(t)\right\}^2\leqslant C_1\alpha^{-2}e^{-2\kappa_i T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\varphi}_{i,k,l,n}^{(1)}\right)^2+C_{i,1}(T-t)\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\int\limits_t^T\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau$$
$$+C_{i,1}t\alpha^{-2}e^{-2\kappa_i T}\sum_{k,l,n=1}^{\infty}\int\limits_0^t\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(1)}(\tau)\right)^2 d\tau \tag{26}$$

We estimate for the second sum on the right-hand side of inequality (25) for two cases:$\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0$ and $\lambda_{k,l,n}^{(2)}<0$. Let $\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0$, then we get

$$\sum_{\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0}\left\{v_{i,k,l,n}^{(2)}(t)\right\}^2\leqslant C_{i,2}\alpha^{-2}e^{-2\kappa_i T}\sum_{\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0}\left(\bar{\varphi}_{i,k,l,n}^{(2)}\right)^2$$
$$+C_{i,2}(T-t)\sum_{\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0}\int\limits_t^T\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(2)}(\tau)\right)^2 d\tau$$
$$+C_{i,2}t\alpha^{-2}e^{-2\kappa_i T}\sum_{\lambda_{k,l,n}^{(2)}>0}\int\limits_0^t\left(\bar{f}_{i,k,l,n}^{(2)}(\tau)\right)^2 d\tau, \tag{27}$$

where

$$C_{i,2}=\begin{cases}3, \quad \alpha>0\\ 3\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda_{1,1,1}^{(2)}T-\kappa_i T}+1\right)^2, \alpha<-1\\ 3D_{i,2}, \ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,2}=\begin{cases}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(2)}_{k_0,l_0,n_0}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(2)}_{k,l,n}>\frac{1}{T}\ln\left|\frac{1}{\alpha}\right|,\\ \max\left(\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(2)}_{k,l,n}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(2)}_{k,l,n}<\frac{1}{T}\ln\left|\frac{1}{\alpha}\right|,\ i=1,2.\end{cases}$$

Let $\lambda^{(2)}_{k,l,n}<0$. Then

$$\begin{gathered}\sum_{\lambda^{(2)}_{k,l,n}<0}\left\{v^{(2)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2\leqslant C_{i,3}\sum_{\lambda^{(2)}_{k,l,n}<0}\left(\bar{\varphi}^{(2)}_{i,k,l,n}\right)^2+\\ +C_{i,3}\alpha^2e^{2\kappa_iT}(T-t)\sum_{\lambda^{(2)}_{k,l,n}<0}\int\limits_t^T\left(\bar{f}^{(2)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\\ +C_{i,3}t\sum_{\lambda^{(2)}_{k,l,n}<0}\int\limits_0^t\left(\bar{f}^{(2)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau,\end{gathered}\tag{28}$$

where

$$C_{i,3}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\alpha e^{\lambda^{(2)}_{1,1,1}T+\kappa_iT}+1\right)^2, \alpha<-1\\ 3D_{i,3},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,3}=\begin{cases}\left(\alpha e^{\lambda^{(2)}_{k_0,l_0,n_0}T+\kappa_iT}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(2)}_{k,l,n}<\frac{1}{T}\ln|\alpha|,\\ \max\left(\left(\alpha e^{\lambda^{(2)}_{k,l,n}T+\kappa_iT}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(2)}_{k,l,n}>\frac{1}{T}\ln|\alpha|,\ i=1,2.\end{cases}$$

We estimate for the third sum on the right-hand side of inequality (25) for two cases:$\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0$ and $\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0$. Let $\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0$, then we get

$$\begin{gathered}\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0}\left\{v^{(3)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2\leqslant C_{i,4}\alpha^{-2}e^{-2\kappa_iT}\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0}\left(\bar{\varphi}^{(3)}_{i,k,l,n}\right)^2+\\ +C_{i,4}(T-t)\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0}\int\limits_t^T\left(\bar{f}^{(3)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\\ +C_{i,4}t\alpha^{-2}e^{-2\kappa_iT}\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}>0}\int\limits_0^t\left(\bar{f}^{(3)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau,\end{gathered}\tag{29}$$

where

$$C_{i,4}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(3)}_{1,1,1}T-\kappa_iT}+1\right)^2, \alpha<-1\\ 3D_{i,4},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,4}=\begin{cases}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(3)}_{k_0,l_0,n_0}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(3)}_{k,l,n}>\frac{1}{T}\ln\left|\frac{1}{\alpha}\right|,\\ \max\left(\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(3)}_{k,l,n}T-\kappa_iT}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(3)}_{k,l,n}<\frac{1}{T}\ln\left|\frac{1}{\alpha}\right|,\ i=1,2.\end{cases}$$

Let $\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0$. We have

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0}\left\{v^{(3)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2 &\leqslant C_{i,5}\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0}\left(\bar{\varphi}^{(3)}_{i,k,l,n}\right)^2+\\ &+C_{i,5}\alpha^2e^{2\kappa_iT}(T-t)\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0}\int_t^T\left(\bar{f}^{(3)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\\ &+C_{i,5}t\sum_{\lambda^{(3)}_{k,l,n}<0}\int_0^t\left(\bar{f}^{(3)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau,\end{aligned}\tag{30}$$

where

$$C_{i,5}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\alpha e^{\lambda^{(3)}_{1,1,1}T+\kappa_iT}+1\right)^2,\alpha<-1\\ 3D_{i,5},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,5}=\begin{cases}\left(\alpha e^{\lambda^{(3)}_{k_0,l_0,n_0}T+\kappa_iT}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(3)}_{k,l,n}<\frac{1}{T}\ln|\alpha|,\\ \max\left(\left(\alpha e^{\lambda^{(3)}_{k,l,n}T+\kappa_iT}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(3)}_{k,l,n}>\frac{1}{T}\ln|\alpha|,\ i=1,2.\end{cases}$$

We estimate for the fourth sum on the right-hand side of inequality (25) for two cases:$\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0$ and $\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0$. Let $\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0$, then we get

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0}\left\{v^{(4)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2 &\leqslant C_{i,6}\alpha^{-2}e^{-2\kappa_iT}\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0}\left(\bar{\varphi}^{(4)}_{i,k,l,n}\right)^2+\\ &+C_{i,6}(T-t)\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0}\int_t^T\left(\bar{f}^{(4)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\\ &+C_{i,6}t\alpha^{-2}e^{-2\kappa_iT}\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}>0}\int_0^t\left(\bar{f}^{(4)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau,\end{aligned}\tag{31}$$

where

$$C_{i,6}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(4)}_{1,1,3}T-\kappa_iT}+1\right)^2,\alpha<-1\\ 3D_{i,6},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,6}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(4)}_{k_0,l_0,n_0}T-\kappa_i T}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(4)}_{k,l,n}>\dfrac{1}{T}\ln\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|,\\ \max\left(\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\lambda^{(4)}_{k,l,n}T-\kappa_i T}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(4)}_{k,l,n}<\dfrac{1}{T}\ln\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|,\ i=1,2.\end{cases}$$

Let $\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0$. We have

$$\begin{gathered}\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0}\left\{v^{(4)}_{i,k,l,n}(t)\right\}^2\leqslant C_{i,7}\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0}\left(\bar{\varphi}^{(4)}_{i,k,l,n}\right)^2+\\ +C_{i,7}\alpha^2e^{2\kappa_i T}(T-t)\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0}\int\limits_t^T\left(\bar{f}^{(4)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau\\ +C_{i,7}t\sum_{\lambda^{(4)}_{k,l,n}<0}\int\limits_0^t\left(\bar{f}^{(4)}_{i,k,l,n}(\tau)\right)^2d\tau,\end{gathered}\tag{32}$$

where

$$C_{i,7}=\begin{cases}3,\quad \alpha>0\\ 3\left(\alpha e^{\lambda^{(4)}_{1,1,3}T+\kappa_i T}+1\right)^2,\alpha<-1\\ 3D_{i,7},\ -1<\alpha<0,\end{cases}$$

$$D_{i,7}=\begin{cases}\left(\alpha e^{\lambda^{(4)}_{k_0,l_0,n_0}T+\kappa_i T}+1\right)^{-2}, k\geqslant k_0, l\geqslant l_0, n\geqslant n_0,\ \lambda^{(4)}_{k,l,n}<\dfrac{1}{T}\ln|\alpha|,\\ \max\left(\left(\alpha e^{\lambda^{(4)}_{k,l,n}T+\kappa_i T}+1\right)^{-2}\right)\ ,\ \lambda^{(4)}_{k,l,n}>\dfrac{1}{T}\ln|\alpha|,\ i=1,2.\end{cases}$$

Combining the last estimate and (26)-(27), we find that for the expression $\|v_j(x,y,z,t)\|_0^2$ the following inequality holds:

$$\begin{gathered}\|v_j(x,y,z,t)\|_0^2\leqslant C\left(1+\alpha^{-2}\right)e^{-2\kappa_i T}\|\bar{\varphi}_i(x,y,z)\|_0^2+\\ +C\left(1+\alpha^2\right)(T-t)\,e^{2\kappa_i T}\int_t^T\left\|\bar{f}_i(x,y,z,t)\right\|_0^2d\tau\\ +C\left(1+\alpha^{-2}\right)te^{-2\kappa_i T}\int_0^t\left\|\bar{f}_i(x,y,z,t)\right\|_0^2d\tau,\end{gathered}\tag{33}$$

where $C=max(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7)$. Taking the norm from both sides of estimates (23),(33), we obtain the following estimates

$$\|u_1(x,y,z,t)\|_0^2\leqslant 2\left(\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right)^2e^{2\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0^2+2\left(\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right)^2e^{2\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0^2,$$

$$\|u_2(x,y,z,t)\|_0^2\leqslant\frac{2}{(\kappa_1-\kappa_2)^2}e^{2\kappa_1 t}\|v_1(x,y,z,t)\|_0^2+\frac{2}{(\kappa_1-\kappa_2)^2}e^{2\kappa_2 t}\|v_2(x,y,z,t)\|_0^2.$$

The lemma 3 is proved.

Uniqueness and conditional stability

Theorem 1. *Let $\alpha = 0$. If a solution to the problem (1)-(4) exists and $(u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t)) \in M$, then the solution to the problem (1)-(4) unique.*

Proof. Let pairs of functions $(u_{1,1}(x,y,z,t),\ u_{1,2}(x,y,z,t))$, $(u_{2,1}(x,y,z,t), u_{2,2}(x,y,z,t))$, are solutions of the problem (1)-(4). Let us introduce the notation $U_1(x,y,z,t) = u_{1,1}(x,y,z,t) - u_{1,2}(x,y,z,t)$, $U_2(x,y,z,t) = u_{2,1}(x,y,z,t) - u_{2,2}(x,y,z,t)$. Then the pair of functions $(U_1(x,y,z,t),\ U_2(x,y,z,t))$ satisfies the system of equations

$$\begin{cases} U_{1t} + sign(x)U_{1xx} + sign(y)U_{1yy} + U_{1zz} + a_1U_1 + b_1U_2 = 0, \\ U_{2t} + sign(x)U_{2xx} + sign(y)U_{2yy} + U_{2zz} + a_2U_2 + b_2U_1 = 0, \end{cases}$$

with conditions

$$U_i|_{t=0} + \alpha U_i|_{t=T} = 0,\ i = 1,2$$

and (3),(4). According to **lemma 2**, we have

$$\| U_1(x,y,z,t) \|_0 = 0$$

and

$$\| U_2(x,y,z,t) \|_0 = 0.$$

Hence, for any $(x,y,z,t) \in \Omega$, we have $u_{1,1}(x,y,z,t) \equiv u_{1,2}(x,y,z,t)$, $u_{2,1}(x,y,z,t) \equiv u_{2,2}(x,y,z,t)$. The theorem 1 is proved.

Let $U_{i\varepsilon}(x,y,z,t) = u_i(x,y,z,t) - u_{i\varepsilon}(x,y,z,t)$, $i = 1,2$, where the pair of functions $(u_1(x,y,z,t),\ u_2(x,y,z,t))$ is a solution to the problem (1)-(4) with exact data, and the pair of functions $(u_{1\varepsilon}(x,y,z,t), u_{2\varepsilon}(x,y,z,t))$ as a solution to the problem (1)-(4) with approximate data.

Theorem 2. *Let $\alpha = 0, (u_1,u_2) \in M$, $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in M$. Moreover, $\|\varphi_j - \varphi_{j\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$, $\|f_j - f_{j\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$, $j = 1,2$. Then for the functions $U_{1\varepsilon}$, $U_{2\varepsilon}$ for any $t \in (0;T)$ following estimates is valid*

$$\|U_{1\varepsilon}\|_0 \leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_1 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m) + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_2 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

$$\|U_{2\varepsilon}\|_0 \leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_1 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m) + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_2 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

where

$$\omega_{1\varepsilon}(t,\kappa_i,m,\varepsilon,\gamma_{i\varepsilon}) = 2(\varepsilon(|b_2| + |a_1+\kappa_i|) + \gamma_{i\varepsilon})^{1-\frac{t}{T}} \left(2m(|b_2| + |a_1+\kappa_i|)e^{-\kappa_i T} + \gamma_{i\varepsilon}\right)^{\frac{t}{T}} + \gamma_{i\varepsilon},$$

$$\gamma_{i\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon^2\left(|b_2|^2 + |a_1+\kappa_i|^2\right)e^{-2\kappa_i T}}{|\kappa_i|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proof. A pair of functions $(U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon})$ satisfies system

$$\begin{cases} U_{1\varepsilon t} + sign(x)U_{1\varepsilon xx} + sign(y)U_{1\varepsilon yy} + U_{1\varepsilon zz} + a_1U_{1\varepsilon} + b_1U_{2\varepsilon} = f_1 - f_{1\varepsilon}, \\ U_{2\varepsilon t} + sign(x)U_{2\varepsilon xx} + sign(y)U_{2\varepsilon yy} + U_{2\varepsilon zz} + a_2U_{2\varepsilon} + b_2U_{1\varepsilon} = f_2 - f_{2\varepsilon}, \end{cases}$$

with initial conditions

$$U_{i\varepsilon}\big|_{t=0}+\alpha U_{i\varepsilon}\big|_{t=T}=\varphi_i-\varphi_{i\varepsilon},\ i=1,2,$$

and homogeneous boundary conditions (3), as gluing conditions (3). It's easy to see that

$$\begin{gathered}\left\|\bar{\varphi}_{1\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\leqslant|a_1+\kappa_1|\left\|\varphi_2(x,y,z)-\varphi_{2\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\\+|b_2|\left\|\varphi_1(x,y,z)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\leqslant\\\leqslant\varepsilon\left(|a_1+\kappa_1|+|b_2|\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left\|\bar{\varphi}_{2\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\leqslant|b_2|\left\|\varphi_1(x,y,z)-\varphi_{1\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\\+|a_1+\kappa_2|\left\|\varphi_2(x,y,z)-\varphi_{2\varepsilon}(x,y,z)\right\|_0\leqslant\\\leqslant\varepsilon\left(|b_2|+|a_1+\kappa_2|\right).\end{gathered}$$

Now, using the condition $(u_1,u_2)\in M$, $(u_{1\varepsilon},\ u_{2\varepsilon})\in M$, we have

$$\begin{gathered}|b_2|\left\|U_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0+|a_1+\kappa_1|\left\|U_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0=|b_2|\left\|u_1(x,y,z,T)-u_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\\+|a_1+\kappa_1|\left\|u_2(x,y,z,T)-u_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\leqslant|b_2|\left(\left\|u_1(x,y,z,T)\right\|_0+\left\|u_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\right)\\+|a_1+\kappa_1|\left(\left\|u_2(x,y,z,T)\right\|_0+\left\|u_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\right)\leqslant2m\left(|b_2|+|a_1+\kappa_1|\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}|b_2|\left\|U_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0+|a_1+\kappa_2|\left\|U_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0=|b_2|\left\|u_1(x,y,z,T)-u_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\\+|a_1+\kappa_2|\left\|u_2(x,y,z,T)-u_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\leqslant|b_2|\left(\left\|u_1(x,y,z,T)\right\|_0+\left\|u_{1\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\right)\\+|a_1+\kappa_2|\left(\left\|u_2(x,y,z,T)\right\|_0+\left\|u_{2\varepsilon}(x,y,z,T)\right\|_0\right)\leqslant2m\left(|b_2|+|a_1+\kappa_2|\right),\end{gathered}$$

and

$$\left(\int\limits_0^T\left\|\overline{f}_i(x,y,z,t)-\overline{f}_{i\varepsilon}(x,y,z,t)\right\|_0^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\frac{\varepsilon^2\left(|b_2|^2+|a_1+\kappa_i|^2\right)e^{-2\kappa_iT}}{|\kappa_i|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

According to **lemma 2**, we obtain

$$\left\|U_{1\varepsilon}\right\|_0\leqslant\left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2\left(\kappa_1-\kappa_2\right)}\right|e^{\kappa_1t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m)+\left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2\left(\kappa_1-\kappa_2\right)}\right|e^{\kappa_2t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

$$\left\|U_{2\varepsilon}\right\|_0\leqslant\frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|}e^{\kappa_1t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m)+\frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|}e^{\kappa_2t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

where

$$\omega_{1\varepsilon}(t,\kappa_i,m,\varepsilon,\gamma_{i\varepsilon})=2(\varepsilon\left(|b_2|+|a_1+\kappa_i|\right)+\gamma_{i\varepsilon})^{1-\frac{t}{T}}\left(2m\left(|b_2|+|a_1+\kappa_i|\right)e^{-\kappa_iT}+\gamma_{i\varepsilon}\right)^{\frac{t}{T}}+\gamma_{i\varepsilon},$$

$$\gamma_{i\varepsilon}=\left(\frac{\varepsilon^2\left(|b_2|^2+|a_1+\kappa_i|^2\right)e^{-2\kappa_iT}}{|\kappa_i|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

The theorem 2 is proved.

Theorem 3. *Let $\alpha\neq0$. If a solution to the problem (1)-(4) exists and $\left(u_1(x,y,z,t),u_2(x,y,z,t)\right)\in M$, then the solution to the problem (1)-(4) unique.*

Proof. Let pairs of functions $\left(u_{1,1}(x,y,z,t),\ u_{1,2}(x,y,z,t)\right)$, $\left(u_{2,1}(x,y,z,t),u_{2,2}(x,y,z,t)\right)$, are solutions of the problem (1)-(4). Let us introduce the notation $V_1(x,y,z,t) = u_{1,1}(x,y,z,t) - u_{1,2}(x,y,z,t)$, $V_2(x,y,z,t) = u_{2,1}(x,y,z,t) - u_{2,2}(x,y,z,t)$. Then the pair of functions $(V_1(x,y,z,t),\ V_2(x,y,z,t))$ satisfies the system of equations

$$\begin{cases} V_{1t} + sign(x)V_{1xx} + sign(y)V_{1yy} + V_{1zz} + a_1V_1 + b_1V_2 = 0, \\ V_{2t} + sign(x)V_{2xx} + sign(y)V_{2yy} + V_{2zz} + a_2V_2 + b_2V_1 = 0, \end{cases}$$

with conditions

$$V_i|_{t=0} + \alpha V_i|_{t=T} = 0,\ i = 1,2$$

and (3),(4). According to **lemma 3**, we have

$$\| V_i(x,y,z,t) \|_0 = 0, i = 1,2.$$

Hence, for any $(x,y,z,t) \in \Omega$, we have $u_{1,1}(x,y,z,t) \equiv u_{1,2}(x,y,z,t)$, $u_{2,1}(x,y,z,t) \equiv u_{2,2}(x,y,z,t)$. The theorem 3 is proved.

Let $V_{i\varepsilon}(x,y,z,t) = u_i(x,y,z,t) - u_{i\varepsilon}(x,y,z,t)$, $i = 1,2$, where the pair of functions $(u_1(x,y,z,t),\ u_2(x,y,z,t))$ is a solution to the problem (1)-(4) with exact data, and the pair of functions $(u_{1\varepsilon}(x,y,z,t), u_{2\varepsilon}(x,y,z,t))$ as a solution to the problem (1)-(4) with approximate data.

Theorem 4. *Let $\alpha \neq 0, (u_1,u_2) \in M$, $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in M$. Moreover, $\|\varphi_j - \varphi_{j\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$, $\|f_j - f_{j\varepsilon}\|_0 \leq \varepsilon$, $j = 1,2$. Then for the functions $V_{1\varepsilon}$, $V_{2\varepsilon}$ for any $t \in (0;T)$ estimates is valid*

$$\|V_{1\varepsilon}\|_0 \leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_1 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m) + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2(\kappa_1-\kappa_2)}\right| e^{\kappa_2 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

$$\|V_{2\varepsilon}\|_0 \leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_1 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_1,\gamma_{1\varepsilon},\varepsilon,m) + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|} e^{\kappa_2 t}\omega_\varepsilon(t,\kappa_2,\gamma_{2\varepsilon},\varepsilon,m),$$

Proof. A pair of functions $(V_{1\varepsilon}, V_{2\varepsilon})$ satisfies system

$$\begin{cases} V_{1\varepsilon t} + sign(x)V_{1\varepsilon xx} + sign(y)V_{1\varepsilon yy} + V_{1\varepsilon zz} + a_1V_{1\varepsilon} + b_1V_{2\varepsilon} = f_1 - f_{1\varepsilon}, \\ V_{2\varepsilon t} + sign(x)V_{2\varepsilon xx} + sign(y)V_{2\varepsilon yy} + V_{2\varepsilon zz} + a_2V_{2\varepsilon} + b_2V_{1\varepsilon} = f_2 - f_{2\varepsilon}, \end{cases}$$

with initial conditions

$$V_{i\varepsilon}|_{t=0} + \alpha V_{i\varepsilon}|_{t=T} = \varphi_i - \varphi_{i\varepsilon},\ i = 1,2,$$

and homogeneous boundary conditions (3), as gluing conditions (4). It's easy to see that

$$\begin{aligned} & C\left(1+\alpha^{-2}\right) e^{-2\kappa_i T} \|\bar{\varphi}_i(x,y,z) - \bar{\varphi}_{i\varepsilon}(x,y,z)\|_0^2 \\ & + C\left(1+\alpha^2\right)(T-t)\, e^{2\kappa_i T} \int_t^T \left\|\bar{f}_i(x,y,z,t) - \bar{f}_{i\varepsilon}(x,y,z,t)\right\|_0^2 d\tau \\ & + C\left(1+\alpha^{-2}\right) t e^{-2\kappa_i T} \int_0^t \left\|\bar{f}_i(x,y,z,t) - \bar{f}_{i\varepsilon}(x,y,z,t)\right\|_0^2 d\tau \\ & \leqslant C\varepsilon^2\left((a_1+\kappa_i)^2 + (b_2)^2\right) \\ & \times \left(\left(1+\alpha^{-2}\right) e^{-2\kappa_i T} + \frac{\left(1+\alpha^2\right)(T-t) + \left(1+\alpha^{-2}\right) t e^{-2\kappa_i (T+t)}}{|\kappa_i|}\right) = \varpi_\varepsilon(\kappa_i, t) \end{aligned}$$

According to **lemma 3**, we have

$$\|V_{1\varepsilon}\|_0 \leqslant \left|\frac{a_1+\kappa_2}{b_2\left(\kappa_1-\kappa_2\right)}\right| e^{\kappa_1 t}\varpi_\varepsilon(\kappa_i,t) + \left|\frac{a_1+\kappa_1}{b_2\left(\kappa_1-\kappa_2\right)}\right| e^{\kappa_2 t}\varpi_\varepsilon(\kappa_i,t),$$

$$\|V_{2\varepsilon}\|_0 \leqslant \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|}e^{\kappa_1 t}\varpi_\varepsilon(\kappa_i,t) + \frac{1}{|\kappa_1-\kappa_2|}e^{\kappa_2 t}\varpi_\varepsilon(\kappa_i,t).$$

The theorem 4 is proved.

REFERENCES

1. Ashyralyev A, Yildirim O., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations. Taiwanese Journal of Mathematics,2007, 11, Issue 4,P. 1075-1089.

2. Zouyed F., Rebbani F. , Boussetila N., Ona Class of Multitime Evolution Equations with Nonlocal Initial Conditions. Abstract and Applied Analysis, Article ID-16938, 2007,P. 1-26.

3. Kozhanov A.I., On the solvability of some spatial nonlocal boundary value problems for linear parabolic equations., Vestn. Samar. Un. Ser. natural science, 3,2008, Issue 62,P. 165-174.

4. Sabitov K.B., Nonlocal problem for an equation of parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain., Mat. Notes, 2011, 89, Issue 4,P. 596-602.

5. Djamalov S.Z., A nonlocal boundary value problem for a mixed type equation of the second kind in a multidimensional space., Bulletin of the Institute of Mathematics, 2018,No 1 P. 1-8.

6. Shadrina I.A., Nonlocal boundary value problems of Samarskii for parabolic equations with changing direction of time., Mathematical Notes of NEFU, 2012, No19, Issue 2, P. 171-186.

7. Larkin A.N., Novikov V.A., Yanenko N.N, Nonlinear equations of variable type. Novosibirsk, Science 1983.

8. Krein S.G.,Prozorovskaya O.I., Approximate methods of solving ill-posed problems, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 1963. Vol.3 No1, 1963, P. 153-167.

9. Lavrent‘ev M.M.,Saveliev L.Y., Theory of operators and ill-posed problems., Publishing House of the Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.

10. Levine H.A., Logarithmic convexity, first order differential inequalities and some applications, Trans. Amer. Math. Soc., Issue. 152. 1970, P. 299-320.

11. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems., VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999.

12. Bukhgeim A.L., Ill-posed problems, number theory and tomography, Sib. Math. Journal.,Vol 33. Issue. 3. 1992, P. 389-402.

13. Fayazov K.S., Lavrent'ev M.M., Couchy problem for partial differential equations with operator coefficients in space, Journal inverse and ill-posed problems., Vol. 2., 1994, P. 283-296.

14. Fayazov K.S., The Cauchy problem for an elliptic equation with operator coefficients, Siberian Math. Journal, Vol. 36., 1995 P. 404-411.

15. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K., Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics., Vol. 12., 2019, P. 392-401

16. Fayazov K.S.,Khazhiev I.O., Conditional correctness of the initial-boundary value problem for a system of high-order mixed-type equations, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., No22, 202), P. 62-75.

17. Khajiev I.O., Conditional correctness and approximate solution of boundary value problem for the system of second order mixed-type equations, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.,No11, Issue. 2., 2018, P. 231-241.

18. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K., Ill-posed boundary value problem for mixed type system equations with two degenerate lines, Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol.17. 2020, P. 647-660.

19. Fayazov K.S.,Khudayberganov Y.K., An ill-posed boundary value problem for a mixed type second-order differential equation with two degenerate lines, Mathematical notes of nefu, Vol. 30 2003, No1, P. 51-62.

20. Pyatkov S.G., Properties of Eigen functions of a certain spectral problem and their applications, Some Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical Physics. Inst. Mat. Novosibirsk., 1986, P. 65-84.

21. Krein M.G.,Gokhberg I.T., Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators in Hilbert space.,Moscow: Scinse 1965.

22. Pyatkov S.G., Some properties of proper and attached functions of unfamiliar Sturm-Liouville problems, Nonclassical equations of mathematical physics. Collection of scientific papers. Novosibirsk: Publishing House of the Institute of Mathematics, 2005, P. 240-251.

REZYUME

Ushbu ish ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan bir jinsli bo'lmagan parabolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun nolokal chegaraviy masalaning shartli turg'riligini o'rganishga bag'ishlangan. Ushbu ishda A.N. Tixonov bo'yicha masalaning shartli turg'inligi isbotlangan, ya'ni korrektlik to'plamida yagonalik va shartli turg'unlik teoremalari isbotlangan. Yechim uchun Aprior baho olishda logarifmik qavariqlik usulidan va S.G.Pyatkov tomonidan qaralgan spektral masala xossalaridan foydalanilgan.

Kalit so'zlar: Nolokal chegaraviy masala, nokorrekt masala, Aprior baho, shartli turg'unlik bahosi, yechimning yagonaligi, korrektlik to'plami.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена исследованию условной корректности нелокальной краевой задачи для системы неоднородных уравнений параболического типа с двумя линиями вырождения. В данной работе на основе идеи А.Н. Тихонова доказана условная корректность задачи, а именно, доказаны теоремы единственности и условной устойчивости на множестве корректности. Для получения априорной оценки решения использован метод логарифмической выпуклости и результаты спектральной задачи, рассмотренной С.Г. Пятковым.

Ключевые слова: Нелокальная краевая задача, некорректная задача, априорная оценка, оценка условной устойчивости, единственность решения, множество корректности.

UDC 517.54

RIESZ'S THEOREM FOR $A(z)$-ANALYTIC FUNCTIONS

Husenov B. E.
Bukhara State University, Bukhara
b.e.husenov@buxdu.uz

RESUME

We consider $A(z)$-analytic functions in case when $A(z)$ is antianalytic function. In this paper, an analogue of theorem Riesz's is proved for $A(z)$-analytic functions from the Hardy class.

Key words: $A(z)$-analytic function, Hardy class, $A(z)$-lemniscate, Taylor series, Blaschke product, Riesz's theorem for $A(z)$-analytic functions.

Introduction

$A(z)$**-analytic functions.** Let $A(z)$ be antianalytic function, i.e. $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ in the domain $D \subset \mathbb{C}$ and there is a constant $c < 1$ such that $|A(z)| \leq c$ for all $z \in D$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$-*analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$-analytic functions defined in the domain D. Since an antianalytic function is infitely smooth, then $O_A(D) \subset C^{\infty}(D)$ (see [2]). In this case, the following takes place:

Theorem 1. (see [3], analogue of Cauchy integral theorem). *If $f \in O_A(D) \cap C\left(\bar{D}\right)$, where $D \subset \mathbb{C}$ is a domain with smooth ∂D, then*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0\cdot$$

Now we assume that the domain $D \subset \mathbb{C}$ is convex, and $\xi \in D$ is a fixed point in it. Since the function $\overline{A}(z)$ is analytic, the integral

$$I(z) = \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$$

is independent of the path of integration; it coincides with the antiderivative $I'(z) = \overline{A}(z)$. Consider the function

$$K(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z - \xi + I(z)},$$

where $\gamma(\xi, z)$ is a smooth curve which connects the points $\xi, z \in D$ [5].

Theorem 2. (see [5]). *$K(z,\xi)$ is an $A(z)$-analytic function outside of the point $z=\xi$, i.e. $K(z,\xi) \in O_A(D\backslash\{\xi\})$. Moreover, at $z=\xi$ the function $K(z,\xi)$ has a simple pole.*

Remark 1. (see [5]). *If a simply connected domain $D \subset \mathbb{C}$ is not convex, then the function*

$$\psi(\xi, z) = z - \xi + I(z),$$

although well defined in D, may have other isolated zeros except $\xi : \psi(\xi, z) = 0$ for except $z \in P\backslash\{\xi, \xi_1, \xi_2, ...\}$. Consequently, $\psi \in O_A(D)$, $\psi(\xi, z) \neq 0$ when $z \notin P$ and $K(z,\xi)$ is an $A(z)$-analytic function only in $D\backslash P$, it has poles at the points of P. Due to this fact we consider the class of $A(z)$-analytic functions only in convex domains.

According to [5], Theorem 1.2, the function $\psi(\xi, z)$ is an $A(z)$-analytic function.

The following set is an open subset of D:

$$L(a,r) = \{z \in D : |\psi(a,z)| < r\}.$$

For suffiently small $r > 0$, this set compactly lies in D (we denote it by $L(a,r) \subset\subset D$) and contains the point a. The set $L(a,r)$ is called an $A(z)$-*lemniscate* centered at the point a. The lemniscate $L(a,r)$ is a simply-connected set (see [5]).

Theorem 3. (see [4], Cauchy's integral formula). *Let $D \subset \mathbb{C}$ be a convex domain and $G \subset\subset D$ be an arbitrary subdomain with a smooth or piecewise smooth ∂G. Then for any function $f(z) \in O_A(G) \bigcap C(\bar{G})$, the following formula holds:*

$$f(z) = \int\limits_{\partial G} f(\xi) K(z,\xi) \left(d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right), \quad z \in G\cdot \tag{2}$$

Note that from formula (2) it follows that if $f(z) \in O_A(L(a,r)) \bigcap C\left(\bar{L}(a,r)\right)$, where $L(a,r) \subset\subset D$ is a fixed $A(z)$-lemniscate, then in $L(a,r)$ the function $f(z)$ is expanded in a Taylor series:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi^k(a,z), \tag{3}$$

where $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\psi(a,\xi))^{k+1}} \left(d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}\right), 0 < \rho < r, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Angular limits and Hardy classes for $A(z)$-analytic functions. Let $L(a,r) \subset\subset D$ and $f(z) \in O_A(L(a,r))$. We define the concepts of angular and radial limits of $A(z)$-subharmonic and $A(z)$-analytic functions in lemniscate $L(a,r)$. The radial limits of the function $f(z)$ at some point $\zeta \in \partial L(a,r)$ are denoted as $f^*(\zeta)$ and the angular limits are denoted as $f^*_\sphericalangle(\zeta)$ (see [6]).

In the classical case of the disk $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\} \subset \mathbb{C}_w$, the limit by the radius $\tau_\zeta = \{w = t\zeta\}$, $0 \leq t \leq 1$, $\zeta \in \partial U$ of the function $g(w)$,

$$g^*(\zeta) = \lim_{w \to \zeta, w \in \tau_\zeta} g(w)$$

is called the radial limit, and the limit by the angle $\sphericalangle \subset U$, ending at the point $\zeta \in \sphericalangle$, is called the angular limit,

$$g^*_\sphericalangle(\zeta) = \lim_{w \to \zeta, w \in \sphericalangle_\zeta} g(w)\cdot$$

Since lemniscate $L(a,r)$ is a simply connected domain with a real analytic boundary, then according to Riemann's theorem there exists a conformal map $\chi(z): U \to L(a,r)$, which is also conformal in some neighborhood of closure $\bar{U}$. Let χ maps the boundary point $\lambda \in \partial U$ to the boundary point $\zeta \in \partial L(a,r)$. Then the curve $\gamma_\zeta = \chi(\tau_\lambda)$ has the property that it connects points a, ζ and is perpendicular to all lines of level $\partial L(a,\rho) = \{|\psi(a,z)| = \rho\}, 0 < \rho \le r$. In the theory of $A(z)$–analytic functions, the curve $\gamma_\zeta = \chi(\tau_\lambda)$ plays the role of the radial direction, and the image of the angle $\chi(\sphericalangle)$ plays the role of the angular set at the point $\zeta \in \partial L(a,r)$. We will denote this angle by $\sphericalangle = \sphericalangle_\zeta$. The limit $f^*(\zeta) = \lim\limits_{z \to \zeta, z \in \gamma_\zeta} f(z)$ is called the radial limit, and $f^*_\sphericalangle(\zeta) = \lim\limits_{z \to \zeta, z \in \sphericalangle_\zeta} f(z)$ is the angular limit of the function $f(z)$ at the point $\zeta \in \partial L(a,r)$ (see [6]).

Now we will show the smoothness of the boundary of lemniscate $L(a,r)$. For this, we take automorphism $\chi^{-1}(z): \overline{L}(a,r) \to \overline{U}$ by Riemann's theorem. Let there be some neighborhood $V = \{\psi(a,\zeta) = re^{i\theta}, |\theta| < \varepsilon\}$ for $\forall \varepsilon > 0$. Also has $\chi^{-1}(V) \subset \partial U$ and $\chi^{-1}(\zeta_0) = \lambda_0 \in \partial U$. Further, there is a diffeomorphism $\pi = -i \ln \chi^{-1}(\zeta): V \to [-1;1]$. This diffeomorphism represents all boundary points of the differentiability of the function $f^*(\zeta)$ and $f^*_\sphericalangle(\zeta)$ (see [8]).

Next we introduce the Hardy class for $A(z)$-analytic functions:

Definition 1. (see [6]). *The Hardy class $H^p, p > 0$, for $A(z)$-analytic functions is the set of all functions $f(z)$ such that its averages*

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right| \tag{4}$$

are uniformly bounded for $\rho < r$, i.e. $\sup\limits_{\rho<r} \left\{ \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right| \right\} < \infty$.

The Hardy class for $A(z)$-analytic functions in the domain $L(a,r)$ is denoted as $H^p_A(L(a,r))$. The norms in them are defined by the formula (see [6]):

$$\| f \|_{H^p_A} = \sup_{|\psi(a,z)|<r} \left(\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Further, from the inequality $b^q < b^p + 1, \quad 0 < q < p, \quad b \ge 0$ we conclude that $f \in H^p_A$ follows $f \in H^q_A$, i.e. $H^p_A \subset H^q_A$ for all p and q. Let us define a class of bounded functions

$$H^\infty_A(L(a,r)) = \left\{ f(z) \in O_A(L(a,r)) : \sup_{|\psi(a,z)|<r} \{|f(z)|\} < \infty \right\}.$$

The norm in $H^\infty_A(L(a,r))$ is defined as $\| f(z) \|_{H^\infty_A} = \sup\limits_{z \in L(a,r)} \{|f(z)|\}$ (see [6]).

The Fatou's theorems and Cauchy's integral formula for Hardy class H^1_A.

Now, we will consider the Fatou's theorem for the class of functions H^1_A :

Theorem 4. (see [6], the Fatou's theorem for the class of functions H^1_A). *If $f(z) \in H^1_A(L(a,r))$, then the angular limit*

$$f^*_\sphericalangle(\zeta) = \lim_{z \to \zeta, z \in \sphericalangle_\zeta} f(z)$$

exists and is finite for almost all $\zeta \in \partial L(a,r)$, except, perhaps, the points of some set E of measure zero.

The following statements follow from Theorem 4:

Theorem 5. (see [6]). *If $f(z) \in H_A^1(L(a,r))$, then $f^*(\zeta) \in L_A^1(\partial L(a,r))$. As $\rho \to r$*

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} f(z)\left|dz + A(z)d\bar{z}\right| \longrightarrow \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} f^*(\zeta)\left|d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}\right| \tag{5}$$

and

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z) - f^*(\zeta)|\left|dz + A(z)d\bar{z}\right| \longrightarrow 0. \tag{6}$$

According to Cauchy integral formula (2) for lemniscates $L(a,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} f(\xi)K(\xi,z)\left(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right),$$

we conclude that

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} f^*(\zeta)K(\zeta,z)\left(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}\right). \tag{7}$$

This is the Cauchy integral formula for functions of H_A^1.

Let the function $f(z) \in O_A(L(a,r))$ and $a_1, a_2, a_3, ...$ be the zeros of the function in this domain, $r_n = |\psi(a,a_n)|$. If

$$M = \sup_{0<\rho<r} \left\{ \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a,\rho)} |f(z)|\,|dz + A(z)d\bar{z}| \right\}$$

then

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r - |\psi(a,a_n)|)$$

is bounded and the Blaschke product

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r \cdot \frac{|\psi(a,a_n)|}{\psi(a,a_n)} \frac{\psi(a,a_n) - \psi(a,z)}{r^2 - \bar{\psi}(a,a_n)\psi(a,z)}$$

is $A(z)$-analytic in $L(a,r)$, $f(z) = B(z)G(z)$, where the function $G(z)$ is $A(z)$-analytic and has no zeros at $|\psi(a,z)| < r$ (see [7]).

Also, from formula (7) it follows that if $f(z) \in H_A^1(L(a,r))$, then there exists a Blaschke product $B(z)$ and a function $G(z) \in H_A^1(L(a,r))$ that has no zeros in $L(a,r)$, such that $f(z) = B(z)G(z)$.

Therefore, for almost all $\zeta \in \partial L(a,r)$, the limit function $B_{\triangleleft}^*(\zeta)$ at $z \to \zeta_{\triangleleft}$ exists from Theorem 4.

Main result

Theorem 6. (Riesz's theorem for $A(z)$-analytic functions). *If $f(z) \in H^p(L(a,r))$, then*

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z) - f^*(\zeta)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \longrightarrow 0$$

at $\rho \to r$, where $f^*(\zeta)$ - there is almost everywhere an angular value of the function $f(z)$.

Proof. If $B(z)$ is the Blaschke product constructed from the zeros of the function $f(z)$, then $f(z) = B(z)G(z)$, where $G(z) \in H^p$ and $G(z)$ have no zeros in $L(a,r)$. For $\rho < r$ and $0 < p < 1$

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \leq \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z)\big|^p\big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| +$$

$$+ \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z) - B^*(\zeta)\big|^p\big|f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \leq$$

$$\leq \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| + \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z) - B^*(\zeta)\big|^p\big|f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \cdot$$

For $p \geq 1$, similar inequalities hold, with the only difference being that the p^{nd} degree roots are extracted from the integrals.

Now, from the fact that $|B(z)| \leq 1, B(z) \to B^*(\zeta)$ is almost everywhere for $\rho \to r$ and $|G^*(\zeta)|^p \in L^1_A$, it follows by Lebesgue's theorem on majorized convergence that

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z) - B^*(\zeta)\big|^p\big|f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \to 0 \text{ is for } \rho \to r \cdot$$

So we see that it is enough to show the following fact:

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \to 0 \text{ at } \rho \to r$$

for functions $G(z) \in H^p$ that have no zeros in $L(a,r)$.

If $p \geq 1$, then this is simple, since according to the previous subsection

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} P(z,\zeta)G^*(\zeta)\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|,$$

because it is obviously $G(z) \in H^1_A(L(a,r))$, where $P(z,\zeta) = \frac{r^2 - |\psi(a,z)|^2}{|\psi(\zeta,z)|^2}$ is the Poisson kernel. By Theorem 5 the function is $G^*(\zeta) \in L^p_A(L(a,r))$ if $G(z) \in H^p_A(L(a,r))$; therefore, since the kernel $P(z,\zeta)$ is an approximate unit,

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^p\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \to 0,$$

if $\rho \to r$.

Let's assume $p \geq \frac{1}{2}$. Using Zygmund's clever trick, let us set $h(z) = \sqrt{G(z)}$; the square root in this case is well defined, since the function $G(z)$ never vanishes $L(a, r)$. Then $h(z) \in H_A^{2p}(L(a, r))$ and $2p \geq 1$. We have

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|G(z) - G^*(\zeta)\right|^p \left|dz + A(z)d\bar{z}\right| = \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|\left(h(z) - h^*(\zeta)\right)\left(h(z) + h^*(\zeta)\right)\right|^p \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|,$$

which, according to the Schwarz inequality, does not exceed

$$\sqrt{\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|h(z) - h^*(\zeta)\right|^{2p} \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|} \cdot \sqrt{\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|h(z) + h^*(\zeta)\right|^{2p} \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|} \leq$$

$$\leq C' \sqrt{\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|h(z) - h^*(\zeta)\right|^{2p} \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|},$$

where C' does not depend on ρ, since $h(z) \in H_A^{2p}(L(a, r))$. But due to the fact that $2p \geq 1$, and what was proved above, the last expression tends to zero at $\rho \to r$. Therefore, it is proved that the required result is valid for $p \geq \frac{1}{2}$.

If now $p \geq \frac{1}{4}$, then, again introducing the auxiliary function $h = \sqrt{G}$, we will reason as above, using the result just proven. $\rhd$

First of all, we note that the proof in case $p = 2$ is elementary. Indeed, if the function $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \psi^n(a, z)$ belongs to the space H_A^2, then

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^2 \left|dz + A(z)d\bar{z}\right| = \pi\rho \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n},$$

due to absolute convergence and orthogonality, therefore $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ is bounded.

According to the Riesz-Fischer theorem, there exists a function $f^*(\zeta) \in L_A^2(\partial L(a, r))$ with a Fourier series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \psi^n(a, z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n' e^{in\theta}$, where $\psi(a, z) = \rho e^{i\theta}$. Now, by direct calculation it is easy to check that for $\rho < r$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} P(z, \zeta) f^*(\zeta) \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|$$

(using series expansion), so that in fact

$$f(z) \to f^*(\zeta) \ \text{ almost everywhere at } \ z \to \zeta_{\sphericalangle}$$

and

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \left|f(z) - f^*(\zeta)\right|^2 \left|dz + A(z)d\bar{z}\right| \to 0$$

at $\rho \to r$.

Using this result we can prove the theorem of F. and M. Riesz as follows. Let's take any measure $\mu(\zeta)$ by $\partial L(a,r)$, such that

$$\int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} \psi^n(a,\zeta)|d\mu(\zeta)| = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

and put

$$f(z) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} P(z,\zeta)\big|d\mu(\zeta)\big|$$

for $0 \le \rho < r$. As is easy to see,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi^n(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n e^{in\theta},$$

where $c_n = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \psi^n(a,z)\,(dz + A(z)d\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(\theta) = c'_n$; therefore, the function is $f(z) \in O_A(L(a,r))$ and according to the previous subsection, $f(z) \in H^1_A(L(a,r))$. As at the beginning of the proof of the theorem, we can represent the function $G(z)$ as $f(z) = B(z)G(z)$, where $B(z)$ is the Blaschke product, and $h(z) \in H^1_A(L(a,r))$, and the function $h(z)$ has no zeros in $L(a,r)$. Therefore, there exists an $A(z)$-analytic function in $L(a,r)$ such that $h(z) = f^2(z)$; it is almost obvious that $f(z) \in H^2_A(L(a,r))$. Now we use a special case of the theorem just proven: let's put $G^*(\zeta) = B^*(\zeta)(f^*(\zeta))^2$; then $G^*(\zeta) \in L^1_A(\partial L(a,r))$. We have

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \le \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z) - B^*(\zeta)\big|\big|f^*(\zeta)\big|^2\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| +$$

$$+ \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|B(z)\big|\big|f^2(z) - (f^*(\zeta))^2\big|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|.$$

At $\rho \to r$, the first integral on the right-hand side tends to zero by Lebesgue's theorem on dominated convergence. The second does not exceed

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f^2(z) - (f^*(\zeta))^2\big|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|,$$

and this last value tends to zero at $\rho \to r$ (we reason in the same way as when using Zigmund's method, taking into account the already proven fact that $\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|f(z) - f^*(\zeta)\big|^2\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \to 0$ at $\rho \to r$). Finally,

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \big|G(z) - G^*(\zeta)\big|^2\big|dz + A(z)d\bar{z}\big| \to 0, \quad \text{at} \quad \rho \to r.$$

But according to the previous subsection at $\rho \to r$

$$G(z)\left(dz + A(z)d\bar{z}\right) \to d\mu(z).$$

Consequently, $d\mu(\zeta) = G^*(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}\right)$ and the measure μ are absolutely continuous, which proves the theorem of F. and M. Riesz.

REFERENCES

1. Koosis P. Introduction to H^p Spaces. Mir, Moscow, 1984. – 368 p. (in Russian).
2. Vekua I. N. Generalized analytical functions. Nauka, Moscow, 1988. – 507 p. (in Russian).
3. Zhabborov N. M., Otaboyev T. U. Cauchy's theorem for $A(z)$-analytic functions. Uzbek Mathematical Journal, 2014, V.1, p.15-18 (in Russian).
4. Zhabborov N. M., Otaboyev T. U. An analogue of the Cauchy integral formula for $A(z)$-analytic functions. Uzbek Mathematical Journal, 2016, V.4, p.50-59 (in Russian).
5. Sadullaev A., Zhabborov N. M. On a class of A-analytic functions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics-Physics, 2016, V.9, no.3, p.374-383.
6. Zhabborov N. M., Khursanov Sh. Y., Husenov B. E. Existence of boundary values of Hardy class functions H^1_A. Bulleten of NUUz, 2022, V.5., no.2, p.374-383.
7. Khursanov Sh. Y., Ne'matillaeva M. D. Analog of the Weierstrass Theorem and the Blaschke Product for $A(z)$-analytic Functions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics-Physics, 2023, V.16., no.4, p.420-430.
8. Zhabborov N. M., Narzillaev N. Kh., Husenov B. E. Carleman's formula for $A(z)$-analytic functions. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, V.12., no. 12, p.6541–6549.

REZYUME

Ushbu maqolada $A(z)$ funksiyani antianalitik bo'lgan holda $A(z)$-analitik funksiyalarni qaraymiz. Ushbu maqolada biz Xardi sinfidagi $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Riesz teoremasining analogini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: $A(z)$-analitik funksiya, Xardi sinfi, $A(z)$-lemniskata, Teylor qatori, Blyashke ko'paytmasi, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Riss teoremasi.

РЕЗЮМЕ

Мы рассматриваются $A(z)$-аналитические функции в случае, когда $A(z)$ - анти-аналитическая функция. В данной работе доказывается аналог теоремы Рисса для $A(z)$-аналитических функций из класса Харди.

Ключевые слова: $A(z)$-аналитическая функция, класс Харди, $A(z)$-лемниската, ряд Тейлора, произведение Бляшке, теорема Рисса для $A(z)$-аналитических функций.

UDC 517.55

STRONGLY $m-$SUBHARMONIC FUNCTIONS ON A COMPACT KÄHLER MANIFOLD.

Imomkulov S. A.
National University of Uzbekistan, Tashkent
sevdiyor_i@mail.ru
Kurbonboyev S. I.
National University of Uzbekistan, Tashkent
suqrot.qurbonboyev.93@mail.ru

RESUME

This article is devoted to the definition and study of strongly $m-$subharmonic functions on compact Kähler manifolds. In particular, the Green's function, the $\mathcal{P}_m-$measure and $m-$regular sets were studied. The main result of the article is establishing the connection between locally $m-$regular sets and globally $m-$regular sets in local coordinates of a compact Kähler manifold.

Key words: differential forms, strongly m-subharmonic functions, Kähler manifolds, m-polar sets, $\mathcal{P}_m$-measure, $m-$regular sets.

1. Introduction

A compact complex manifold M is called Kähler if it admits a Kähler metric associated with a smooth, positive, and d-closed $(1,1)-$form ω. A Kähler manifold M with a fixed ω is also denoted as (M,ω).

Let us provide the definition of twice differentiable qsh_m-functions on a compact Kähler manifold (see, for example, [7, 8]).

Definition 1. *A function $u \in C^2(D)$ is called quasi-strongly $m-$subharmonic function (or qsh_m) in domain $D \subset M$ if the differential forms*

$$[dd^c u + \omega]^k \wedge \omega^{n-k} \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., n-m+1, \tag{1}$$

are positive in domain D.

The class of qsh_m-functions are analogous to a well-known class of strongly $m-$subharmonic (sh_m-)functions in the space $\mathbb{C}^n$. Let ω be a smooth, positive, $d-$closed $(1,1)-$differential form defined in domain $D \subset M$. Therefore, *a function $u \in C^2(D)$ is called strongly $m\omega-$subharmonic (or briefly ωsh_m) in domain D if the differential forms*

$$(dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k} \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., n-m+1, \tag{2}$$

are positive in domain D.

As in work [5], it is demonstrated that if $v_1, ..., v_{n-m+1} \in \omega sh_m(D) \bigcap C^2(D)$, then the differential form $dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m+1} \wedge \omega^{m-1}$ is positive, i.e.,

$$dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m+1} \wedge \omega^{m-1} \geq 0.$$

Moreover, if for a function $u \in C^2(D)$ the relations

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1} \geq 0 \tag{3}$$

holds for all $v_1, ..., v_{n-m} \in \omega sh_m(D) \bigcap C^2(D)$, then $u \in C^2(D)$, is a ωsh_m-function.

Using this, we can define ωsh_m-functions in the class of upper semicontinuous functions.

Definition 2. *A function $u(z)$ defined in domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called ωsh_m if:*

1. *it is upper semicontinuous in D;*

2. *for any twice differentiable ωsh_m-functions $v_1, ..., v_{n-m} \in \omega sh_m(D) \bigcap C^2(D)$ the current $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1}$ defined as*

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1} \circ \theta = \int u dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1} \wedge dd^c \theta$$

is positive for all $\theta \in F^{0,0}(D),\ \theta \geq 0$,i.e.

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1} \circ \theta =$$

$$= \int u \cdot dd^c v_1 \wedge ... \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \omega^{m-1} \wedge dd^c \theta \geq 0,\ \forall \theta \in F^{0,0},\ \theta \geq 0. \tag{4}$$

Here $F^{(0,0)}$ is a space of test functions in D. Note that for $m = 1$ the class ωsh_1 coincides with the class of plurisubharmonic functions, and for $m = n$ it coincides with the class of $\omega-$subharmonic functions. Moreover,

$$psh = \omega sh_1 \subset \omega sh_2 \subset ... \subset \omega sh_m \subset ... \subset \omega sh_n = \omega sh.$$

ωsh_m-functions are the subject of study by many mathematicians and are well reflected in the works [1, 9, 10, 11, 13, 14]. In the study of qsh_m-functions on a Kähler manifold, we often use these well-known properties of ωsh_m-functions on the complex space $\mathbb{C}^n$.

2. qsh_m-functions on a compact Kähler manifold

A quasi-strongly $m-$subharmonic function on a Kähler manifold (M, ω) is defined using ωsh_m-functions. On a compact Kähler manifold M locally, in a neighborhood of each point $z^0 \in M$ there exists a neighborhood $U \subset M$ and some strictly plurisubharmonic function $\rho \in psh(U)$ for which $dd^c \rho = \omega$.

Definition 3. *A function u, defined in a domain $D \subset M$, with Kähler form ω is called qsh_m in a domain $D \subset M$, if it:*

1. *is upper semicontinuous in D;*

2. *locally, in a neighborhood $U \ni z^0$ of each point $z^0 \in D$ for any twice differentiable qsh_m-functions $v_1, ..., v_{n-m} \in qsh_m(D) \bigcap C^2(D)$ the current*

$$(dd^c u + \omega) \wedge (dd^c v_1 + \omega) \wedge ... \wedge (dd^c v_{n-m} + \omega) \wedge \omega^{m-1},$$

locally defined in a neighborhood U as

$$(dd^c u + dd^c \rho) \wedge (dd^c v_1 + \omega) \wedge ... \wedge (dd^c v_{n-m} + \omega) \wedge \omega^{m-1} \circ \theta =$$

$$= \int (u+\rho) \wedge (dd^c v_1 + \omega) \wedge ... \wedge (dd^c v_{n-m} + \omega) \wedge \omega^{m-1} \wedge dd^c \theta \geq 0 \tag{5}$$

(is positive) for all $\theta \in F^{0,0}(D),\ \theta \geq 0$.

If we put $\omega = dd^c\rho$ in a neighborhood $U \subset M$, then the differential form $\omega = dd^c\rho$ of bidegree $(1,1)$ is positive and $d-$closed, $d\omega = 0$. From (4) and (5) it follows that if $u \in qsh_m(D)$, then locally it can be represented in the form

$$u = v - \rho, \tag{6}$$

where $v \in \omega sh_m(U),\ \rho \in psh(U)$.

qsh_m-functions have many of the local properties of ωsh_m-functions. In particular,

1) *A linear combination of qsh_m-functions with non-negative coefficients is also a qsh_m-function:*

$$u_k(z) \in qsh_m(D),\ \ a_k \in \mathbb{R}^+\ (k=1,2,...,p) \quad \Rightarrow$$
$$a_1u_1(z) + a_2u_2(z) + ... + a_pu_p(z) \in qsh_m(D);$$

2) *The following relation is true*

$$qpsh(D) = qsh_1(D) \subset ... \subset qsh_m(D) \subset ... \subset qsh_n(D) = qsh(D);$$

The class of functions $qpsh(D) = qsh_1(D)$ corresponds to the class of plurisubharmonic functions. Therefore it is called the class of quasi-plurisubharmonic functions. And also, the class $qsh_n(D) = qsh(D)$ is called the class of quasi-subharmonic functions.

3) *The limit of a uniformly convergent or monotonically decreasing sequence of qsh_m-functions is also qsh_m-function:*

$$u_j(z) \in qsh_m(D),\ \ u_j(z) \rightrightarrows u(z) \quad \Rightarrow \quad u(z) \in qsh_m(D);$$

$$u_j(z) \geq u_{j+1}(z)\ (j=1,2,...) \ \Rightarrow\ \lim_{j\to\infty} u_j(z) \in qsh_m(D);$$

4) *Let $u_j(z) \in sh_m(D)$ be a sequence of sh_m- functions satisfying $u_j(z) \leq A_j,\ (j=1,2,...)$ where $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ converges. Then $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ is a sh_m- function.*

The functions $u_j(z) - A_j\ (j = 1,2,...)$ are not positive. Therefore, the sequence $v_k(z) = \sum\limits_{j=1}^{k} [u_j(z) - A_j]$ is monotonically decreasing. By property 3) we have $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (u_j(z) - A_j) \in qsh_m(D)$. Since the series $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ converges, then $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j(z) \in qsh_m(D)$;

5) *Regularization of the limit of a monotonically increasing and uniformly upper-bounded sequence of qsh_m-functions is also qsh_m-function:*

$$u_j(z) \in qsh_m(D):\ \ \exists A,\ u_j(z) < A,\ \ \forall j \in \mathbb{N}, \forall z \in D,\ \ u_j(z) \nearrow,$$

then $\left[\lim\limits_{j\to\infty} u_j(z)\right]^* \in qsh_m(D)$;

6) *The maximum of a finite number of* qsh_m-*functions is also* qsh_m-*function:*

$$u_j(z) \in qsh_m(D), \quad 1 \le j \le j_0 \ \Rightarrow \max\{u_1(z); u_2(z); ...; u_{j_0}(z)\} \in qsh_m(D).$$

In fact, it is enough to show the statement for two functions. By Definition 2 it is easy to show that if $u, v \in qsh_m(D)$, then $\frac{u+v}{2} \in qsh_m(D)$ and $\ln(e^u + e^v) \in qsh_m(D)$. This means that if we take $w_j = \frac{1}{j}\ln(e^{ju} + e^{jv}) \in qsh_m(D)$, then we get $\lim\limits_{j\to\infty} w_j = \lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{j}\ln(e^{ju} + e^{jv}) = \max\{u, v\}$, which means $\max\{u, v\} \in qsh_m(D)$.

3. $m-$polar sets on a compact Kähler manifold

$m-$polar sets on a compact Kähler manifold are defined similarly to $m-$polar sets in $\mathbb{C}^n$. Let M be a compact Kähler manifold and $D \subset M$ is a domain.

Definition 4. *A set* $E \subset D$ *is called* $m-$*polar set if there exists a function* $u(z) \in qsh_m(D), u(z) \not\equiv -\infty$, *such that* $u\,|_E = -\infty$.

It is clear that if the set $E \subset D$ is $m-$polar, then it is also $k-$polar for all $k = m+1,\ m+2, ..., n$. In particular, it is polar in the class of quasi-subharmonic (qsh) functions in D.

Recall that a set $E \subset D$ is $m-$polar if the intersection $E \bigcap U$ is $m-$polar in $U \bigcap D$ for each local coordinate neighborhood $U \subset M$.

Next we present a property that connects $m-$polars set with its Hausdorff measure. We define the Hausdorff measure $H_s(A),\ 0 \le s \le n$, over the manifold M as follows: $H_s(A \bigcap U_j) = H_s\left(\phi_j^{-1}(A \bigcap U_j)\right)$, where $(U_j, \phi_j),\ \ j = 1, ..., J$ map for M.

Property 1. *If a set* $E \subset D$ *is* $m-$*polar, then the Hausdorff measure* $H_{2n-2+\varepsilon}(E) = 0,\ \forall\varepsilon > 0$. *In particular, it has Lebesgue measure zero.*

Proof. As we noted above, $m-$polar set is a polar set. Therefore, it is enough to show the statement for polar sets. Let $E \subset D$ be a polar set. Then there is a function $u(z) \in qsh(D), u(z) \not\equiv -\infty$, such that $u\,|_E = -\infty$. Therefore, by formula (6) there is a function $v(z) \in \omega sh(D), v(z) \not\equiv -\infty$, such that $v\,|_E = -\infty$.

We take some map $(U, \phi), \phi : U \to B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$. Then, by definition 2, the function $v(z)$ in local coordinates satisfies the inequalities

$$dd^c v(\phi^{-1}(\xi)) \wedge \omega^{n-1}(\phi^{-1}(\xi)) \ge 0, \ \ \xi \in B(0,1).$$

Consequently, the function $v(\phi^{-1}(\xi))$ is a $\alpha-$subharmonic function, where $\alpha = \omega^{n-1}(\phi^{-1}(\xi))$ ($\alpha-$subharmonic functions can be found in [2]). This means that the set $\phi^{-1}(E \bigcap U)$ is an $\alpha-$polar set and has zero $(2n-2+\varepsilon)-$Hausdorff measure, i.e. $H_{2n-2+\varepsilon}(\phi^{-1}(E \bigcap U)) = 0$ in $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. According to countably subadditivity, it follows that $H_{2n-2+\varepsilon}(E) = 0$. *Property 1 is proven.*

Property 2. *A countable union of* $m-$*polar sets is again* $m-$*polar, i.e. if* $E_j \subset D$ *are* $m-$*polar, then* $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ *is also* $m-$*polar.*

Proof. Let us prove it using ideas, as in the case of $\mathbb{C}^n$. The sets E_j are $m-$polar sets, which means that there are functions $u_j \in qsh_m(D),\ u_j \not\equiv -\infty,\ u_j|_{E_j} = -\infty$. Since the

$m-$polar set has measure zero, $mes_n E_j = 0$, then the countable union $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ also has measure zero, $mes_n E = 0$. Using this, we can find a point $z^0 \in D \backslash E$ such that the functions $u_j(z^0) \neq -\infty,\ j = 1, 2, ...$.

Using the point z^0, we construct a function $u(z)$ such that $u(z) \in qsh_m(D)$,

$u|_D \not\equiv -\infty,\ \ u|_E = -\infty$. For this we take exhaustion $D = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j,\ D_j \subset\subset D_{j+1} \subset\subset D,\ z^0 \in D_1$ and denote $A_j = \sup\limits_{D_j} u_j(z)\ \ (\Rightarrow A_j > u_j(z^0))$. Using $u_j(z^0) \neq -\infty$ and $A_j \neq -\infty$ we construct $u(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{u_j - A_j}{2^j(A_j - u_j(z^0))}$. Then on any fixed compact set $K \subset\subset D$, starting from some number $j \geq N(K)$ the terms of this series are negative. It follows that the partial sums of the series starting from the number $j \geq N(K)$ be monotonically decreasing and converges to the function $u(z)$. Since the partial sums are qsh_m-functions in D, then $u(z) \in qsh_m(D)$. From $u(z^0) = -1$ it follows that $u(z) \not\equiv -\infty$. Clear , that $u|_E = -\infty$ and E is an $m-$polar set. *Property 2 is proven.*

4. The Green's function on a Kähler manifold

Let $K \subset M-$ be a compact set in the compact Kähler manifold M.

Let's put

$$V_{qm}(z, K, M) = \sup \left\{ u(z) \in qsh_m(M) :\ \ u|_K \leq 0 \right\}.$$

Then regularization

$$V^*_{qm}(z, K, M) = \overline{\lim_{w \to z}} V_{qm}(w, K, M)$$

is called the Green's function K. It is not difficult to prove that either $V^*_{qm}(z, K, M) \equiv +\infty$, or $V^*_{qm}(z, K, M) \in qsh_m(M)$. Moreover, $V^*_{qm}(z, K, M) \equiv +\infty$ if and only if K is $m-$polar set in M. If K is not is $m-$polar, then the set $I = \left\{ z \in K :\ V^*_{qm}(z, K, M) > 0 \right\}$ is $m-$polar.

To demonstrate the difference between the Green's functions in the space $\mathbb{C}^n$ and in the space M, we give two examples (in the case of $m = n$):

Example 1. *Let* $K = \{\|z\| = 1\} \bigcup \{z = 0\}$. *Then*

$$V^*(z, K, \mathbb{C}^n) = \ln^+ |z|,$$

so $V^*(0, K, \mathbb{C}^n) = 0$. *Here* $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, *and* $\ln^+ |z| = \begin{cases} \ln |z|, & |z| > 1; \\ 0, & |z| \leq 1. \end{cases}$

Example 2. *We take a neighborhood* $U \subset M$ *and a biholomorphism* $\psi : U \to B(0, R) \subset \mathbb{C}^n$, *for* $R > 1$. *Compact set* K *choose as* $K = \{\psi^{-1}(S)\} \bigcup \{\psi^{-1}(0)\} \subset\subset U$, *where* $S = \partial B(0, 1)$ *and* $S \bigcup \{0\} \subset\subset B(0, R)$.

Hence,

$$V^*_{qn}(z, K, M) = V^*_{qn}(\psi^{-1}(\xi), K, M) = \ln^+ \left|\psi^{-1}(\xi)\right| - \frac{1}{2}\rho(\psi^{-1}(\xi)) + \frac{1}{2}\rho(\psi^{-1}(1)),$$

where $\xi \in B(0,R)$ *and* $dd^c(\rho\circ\psi^{-1}) = \omega|_U \circ \psi^{-1}$.

Then it is clear that $V^*_{qn}(\psi^{-1}(0), K, M) = \frac{1}{2}\rho(\psi^{-1}(1)) \neq 0$.

5. qsh_m-functions in local coordinates

In this section we will consider qsh_m-functions in local coordinates, in some neighborhood of $U \subset M$. Using $\psi : U \to B(0,R)$ we go to $B(0,R) \subset \mathbb{C}^n$. In local coordinates $\xi \in B(0,R)$ the differential $(1,1)-$form ω is represented as $\omega = dd^c\rho(z) = dd^c(\rho(\psi^{-1}(\xi)))$ for some smooth plurisubharmonic function ρ. Hence, in a local coordinates the class of quasi-strongly $m-$subharmonic function is defined as follows:

Definition 5. *A function* $u \in C^2(D)$ *is called a quasi-strongly* $m-$*subharmonic function (or* qsh_m*) in domain* $D \subset B(0,R)$ *if the following differential forms*

$$\left[dd^c(u(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right]^k \wedge \left[dd^c\rho(\psi^{-1}(\xi))\right]^{n-k} \geq 0, \ \ k = 1,2,...,n-m+1, \qquad (7)$$

are positive in D. *The differential form can be written as*

$$\left[dd^c(u+\rho)\right]_D{}^k \wedge \left[dd^c\rho\right]_D{}^{n-k} \geq 0, \ \ k = 1,2,...,n-m+1.$$

Quasi-strongly $m-$subharmonic functions can also be defined in the class of upper semicontinuous functions

Definition 6. *A function* $u \in L^1_{loc}(D)$ *is called* qsh_m *in domain* D *if:*

1. *it is upper semicontinuous in* D;
2. *for any twice differentiable* qsh_m-*functions* $v_1, ..., v_{n-m} \in qsh_m(D) \bigcap C^2(D)$ *the current*

$$\left[dd^c(u(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge \left[dd^c(v_1(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge ...$$

$$... \wedge \left[dd^c(v_{n-m}(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge \left(dd^c\rho(\psi^{-1}(\xi))\right)^{m-1},$$

defined as

$$\left[dd^c(u(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge \left[dd^c(v_1(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge ...$$

$$... \wedge \left[dd^c(v_{n-m}(\psi^{-1}(\xi)) + \rho(\psi^{-1}(\xi)))\right] \wedge \left[dd^c\rho(\psi^{-1}(\xi))\right]^{m-1} \circ \theta =$$

$$= \int (dd^c(u+\rho)) \wedge (dd^c(v_1+\rho)) \wedge ... \wedge (dd^c(v_{n-m}+\rho)) \wedge \left[dd^c\rho\right]^{m-1}{}_D \wedge \theta =$$

$$= \int u(dd^c(v_1+\rho)) \wedge ... \wedge (dd^c(v_{n-m}+\rho)) \wedge \left[dd^c\rho\right]^{m-1}{}_D \wedge dd^c\theta +$$

$$+ \int (dd^c(v_1+\rho)) \wedge ... \wedge (dd^c(v_{n-m}+\rho)) \wedge \left[dd^c\rho\right]^{m}{}_D \wedge \theta$$

is positive for all $\theta \in F^{0,0}(D)$, $\theta \geq 0$.

In the class $qsh_m(D)$ we can introduce $\mathcal{P}_{qm}-$measure $\omega^*_{qm}(\xi, E, D) = \overline{\lim\limits_{\zeta\to\xi}}\omega_{qm}(\zeta, E, D)$, where

$$\omega_{qm}(\zeta, E, D) = \sup\{u \in qsh_m(D): \ u|_D < 0, \ \ u|_E \leq -1\}.$$

Thus, the upper semi-continuous function u belongs to the class $qsh_m(D),\ u \in qsh_m(D)$, if $u + \rho \in sh_m(D)$.

Hence, $\mathcal{P}_{qm}-$measure

$$\omega_{qm}(\xi, E, D) = \sup\{u \in qsh_m(D): \ \ u|_D < 0, \ \ u|_E \leq -1\}$$

in terms of $sh_m(D)$ can be written as

$$\omega_m(\xi, E, D) = \sup\{u \in sh_m(D): \ \ u|_D < \rho|_D, \ \ u|_E \leq -1 + \rho|_D\},$$

where $\rho|_D = \rho(\psi^{-1}(\xi))$.

From the above it follows that the study of $\mathcal{P}_{qm}-$measure $\omega^*_{qm}(\xi, E, D)$ reduces to the study of $\mathcal{P}_m-$measures $\omega^*_m(\xi, E, \phi(\xi), D)$ with weight function $\phi(\xi) = -1 + \rho(\psi^{-1}(\xi))$.

Note that many properties of a $\mathcal{P}_m-$measure $\omega^*_m(\xi, E, \phi(\xi), D)$ with the weight function $\phi(\xi) = -1 + \rho(\psi^{-1}(\xi))$ have been studied by many authors (see, for example, [3, 4, 6, 12]). In particular, questions of local or global regularity of compact sets, the relation of $m-$regularity $\omega^*_m(\xi, E, \phi(\xi), D)$ with $m-$regularity $\omega^*_m(\xi, E, D) = \omega^*_m(\xi, E, 0, D)$ were considered in the mentioned works.

Definition 7. *Let $D \subset B(0, R)$ be some domain, $E \subset D$ some subset of it and $\phi(\xi)$ is a function bounded on E. For convenience, we assume that it is negative, $\phi(\xi) < 0,\ \forall \xi \in E$.*

We take the function

$$\omega_m(z, E, \phi, D) = \sup\{u \in sh_m(D): \ \ u \leq 0, \ \ u \leq \phi(\xi)\}.$$

Its regularization $\omega^*_m(\xi, E, \phi, D) = \overline{\lim_{\zeta \to \xi}} \omega_m(\zeta, E, \phi, D)$ is called $\mathcal{P}_m-$measure of the set E with the weight function $\phi(\xi)$.

Note that if $\phi(\xi) \equiv -1$ we get the well-known $\mathcal{P}_m-$measure $\omega^*_m(\xi, E, D) = \omega^*_m(\xi, E, 0, D)$. It is known that $\mathcal{P}_m-$measure $\omega^*_m(\xi, E, D)$ either $\equiv 0$, or is nowhere is not equal to 0, $\omega^*_m(\xi, E, D) < 0$. And, $\omega^*_m(\xi, E, D) \equiv 0$ if and only if E is $m-$polar. If the weight function $\phi(\xi) \in sh_m(D)$, $\phi(\xi) < 0\ \forall z \in D$, then $\omega_m(\xi, E, \phi, D) \geq \phi(\xi),\ \forall z \in D$. Therefore, $\omega(\xi, E, \phi(\xi), D)|_E = \phi(\xi)$. However, after regularization, a "jump"is possible at some points $\xi^0 \in E$. Such points are called irregular points of the compact set E, otherwise, if $\omega^*_m(\xi^0, E, \phi(\xi), D)|_E = \phi(\xi^0)$ then ξ^0 is called an $m-$ regular point of the compact set.

Let us give the definition of $m\phi-$regular compact.

Definition 8. *A compact set E is called globally $m\phi-$regular in $\xi^0 \in E$ if $\omega^*_m(\xi^0, E, \phi(\xi), D) = \phi(\xi^0)$. A compact set E is called locally $m\phi-$regular if $\omega^*_m(\xi^0, E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r), \phi(\xi), D) = \phi(\xi^0)$ for any ball $B(\xi^0, r),\ r > 0$.*

Theorem 1. *Let $\phi(\xi)$ be a strictly $m-$subharmonic function in D. Then the point $\xi^0 \in E$ is locally $m\phi-$regular if and only if it is globally $m\phi-$regular.*

Note that if the weight function $\phi(\xi)$ is not strictly $m-$subharmonic, then Theorem 1, generally speaking, does not hold, i.e. globally regularity does not imply locally regularity of the compact set E.

Example 3. *Let $D = B(0, 2) = \{z \in \mathbb{C}^n: \ |z| < 2\}-$ball, $E = \{|z| = 1\} \bigcup 0,\ \ \phi(\xi) \equiv -1,\ 1 < m \leq n$. Then*

$$\omega^*_m(\xi, E, -1, B(0,2)) = -1 + \begin{cases} \frac{2^{2(m-1)}}{2^{2(m-1)-1}} \left(\frac{-1}{|z|^{2(m-1)}} + \frac{1}{2^{2(m-2)}} \right), & |z| \leq 1; \\ 0, & 1 < |z| \leq 2. \end{cases}$$

From here we have $\omega_m^*(0, E, B(0,2)) = \omega_m^*(0, E, -1, B(0,2)) = -1$ *and the point* $\xi^0 = 0$ *is globally* $m-$*regular. However, it is not locally* $m-$*regular.*

Proof of Theorem 1. For the class of plurisubharmonic functions (case $m = n$), the theorem was proven by A. Sadullaev (see [6]).

It is clear that global $m\phi-$regularity follows from local $m\phi-$regularity. To prove the opposite, suppose that the point ξ^0 is globally $m\phi-$regular, $\omega_m^*(\xi^0, E, \phi(\xi), D) = \phi(\xi^0)$, but is not locally $m\phi-$regular,

$$\exists r^0 > 0: \ \ \omega_m^*(\xi^0, K \bigcap \overline{B}(\xi^0, r^0), \phi(\xi), D) > \phi(\xi^0).$$

It is clear that

$$\omega_m^*(\xi^0, K \bigcap \overline{B}(\xi^0, r), \phi(\xi), D) \geq \omega_m^*(\xi^0, K \bigcap \overline{B}(\xi^0, r^0), \phi(\xi), D) > \phi(\xi^0) \ \ \forall r > r^0.$$

We use strictly strongly $m-$subharmonicity of the weight function $\phi(\xi)$. This means that $\exists \varepsilon > 0: \ \ \phi(\xi) - 2\varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 \in sh_m(D)$.

We fix $u(\xi) \in sh_m(D): \ \ u|_{E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r)} \leq \phi|_{E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r)}, \ u|_D < 0$ and put

$$\varphi(\xi) = \varepsilon r^2(u(\xi) - \phi(\xi)) + \phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2.$$

Since

$$\varphi(\xi) = \varepsilon r^2(u(\xi) - \phi(\xi)) + \phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 =$$
$$= \varepsilon r^2 u(\xi) + (1 - \varepsilon r^2)\phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2,$$

then for all small $r < r^0$ the function $\varphi(\xi) \in sh_m(D)$ and $\varphi|_D < 0$. If $\xi \in E \bigcap B(\xi^0, r)$, then $\varphi(\xi) = \varepsilon r^2(u(\xi) - \phi(\xi)) + \phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 \leq \phi(\xi)$, since $u|_{K \bigcap B(\xi^0, r)} \leq \phi|_{K \bigcap B(\xi^0, r)}$. If $\xi \in K \bigcap \{|\xi - \xi^0| > r\}$, then

$$\varphi(\xi) = \varepsilon r^2 u(\xi) + (1 - \varepsilon r^2)\phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 <$$
$$< \phi(\xi) - \varepsilon r^2(\phi(\xi) + \left|-\phi\right|_E) \leq \phi(\xi).$$

It means that

$$\varphi(\xi) = \varepsilon r^2(u(\xi) - \phi(\xi)) + \phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 \leq \omega_m^*(\xi, E, \phi(\xi), D).$$

In this inequality we take the supremum (sup) over all the above functions $u(\xi)$:

$$\varepsilon r^2(\omega_m^*(\xi, E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r), \phi(\xi), D) - \phi(\xi)) + \phi(\xi) - \varepsilon \left|-\phi\right|_E \cdot \left|\xi - \xi^0\right|^2 \leq$$
$$\leq \omega_m^*(\xi, E, \phi(\xi), D).$$

Putting $\xi = \xi^0$ we get

$$\varepsilon r^2(\omega_m^*(\xi^0, E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r), \phi(\xi^0), D) - \phi(\xi^0)) + \phi(\xi) \leq \omega_m^*(\xi^0, E, \phi(\xi), D) = \phi(\xi^0).$$

Hence, $\omega_m^*(\xi^0, E \bigcap \overline{B}(\xi^0, r), \phi(\xi), D) \leq \phi(\xi^0)$. Contradiction. *Theorem 1 is proven.*

Above, in the fourth paragraph we introduced the Green's function $V_{qm}^*(z, K, D)$ and in the fifth paragraph we introduced $\mathcal{P}_{qm}-$measure $\omega_{qm}(\xi, E, D)$ using the class of quasi strongly $m-$subharmonic functions ω, differential $(1,1)-$Fubini-Study form, which in local coordinates $\xi \in B(0, R)\ subset \mathbb{C}^n$ is represented as $\omega = dd^c(\rho(\psi^{-1}(\xi)))$. Thus, we have reduced the study of extremal functions into M to study them in the complex space $\mathbb{C}^n$. In particular, the study of $\mathcal{P}_{qm}-$measure $\omega_{qm}(\xi, E, D)$ was reduced to the study of $\mathcal{P}_m-$measure $\omega_m(\xi, E, \phi(\xi), D)$ with the weight function $\phi(\xi) = -1 + \rho(\psi^{-1}(\xi))$.

The function $\phi(\xi) = -1 + \rho(\psi^{-1}(\xi))$ is a strictly plurisubharmonic function in $\mathbb{C}^n$. From Theorem 1 we obtain the following result:

Theorem 2. *A compact set $K \subset M$ is locally $m-$regular if and only if it is globally $m-$regular.*

REFERENCES

1. Abdullayev B.I., $\mathcal{P}-$measure in the class of $m-wsh$ functions, *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, **7(1)**, (2014), 3-9.

2. Abdullaev B. I., Imomkulov S. A., Sharipov R. A., $\alpha-$subharmonic functions, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **67(4)**, (2021), 620-633.

3. Alan M.A., Supports of weighted equilibrium measures and examples, *Potential Analysis*, **38**, (2013), 457-470.

4. Alan M.A., Weighted regularity and two problems of Sadullaev on weighted regularity, *Complex Analysis and its Synergies. Springer*, **5**, (2019), 1-7.

5. S.-Y.Li, Weak solutions to the complex Hessian equation, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **55(5)**, (2005), 1735-1756.

6. Bloom T., Levenberg N., Weighted pluripotential theory in $\mathbb{C}^n$, *American Journal of Mathematics*, **125(1)**, (2003), 57-103.

7. Dinew S., Kolodziej S., Liouville and Calabi-Yau type theorems for complex Hessian equations, *American Journal of Mathematics*, **139(2)**, (2017), 403-415.

8. Sadullaev A. Gohkan G., Sadullaev A., $m-$subharmonic functions on the projective space $\mathbb{P}^n$, *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, **4(4)**, (2021), 210-220.

9. Harvey F.R., Lawson H.B.Jr., Plurisubharmonicity in a general geometric context, *Geometry and Analysis 1*, (2010), 363-401.

10. Harvey F.R., Lawson H.B.Jr., Geometric plurisubharmonicity and convexity - an introduction, *Advances in Mathematics*, **230**, (2012), 2428-2456.

11. Lu H.Ch., Solutions to degenerate Hessian equations, *Jurnal de Mathematique Pures et Appliques*, **100(6)**, (2013), 785-805.

12. Narzillaev N. Kh., Delta-extremal functions in $\mathbb{C}^n$, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **14(3)**, (2021), 389-398.

13. Sadullaev A., Abdullayev B., Potential theory in the class of m-subharmonic functions, *Trudi of Moscow Steklov Institut of math.*, **279**, (2012), 166-192.

14. Verbitsky M., Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and $q-$convexity, *Mathematische Zeitschrift*, **264**, (2010), 939-957.

REZYUME

Ushbu maqola kompakt Keyler ko'pxilliklarida kuchli $m-$subgarmonik funksiyalarning aniqlanishi va o'rganilishiga bag'ishlangan. Xususan, Grin funksiyasi, $\mathcal{P}_m-$o'lchov va $m-$regulyar to'plamlar tadqiq qilingan. Maqolaning asosiy natijasi kompakt Keyler ko'pxilligining lokal koordinatalarida lokal $m-$regulyar to'plamlar bilan global $m-$regulyar to'plamlar o'rtasidagi bog'liqlikni o'rnatishdan iborat.

Kalit so'zlar: differensial formalar, kuchli m-subgarmonik funksiyalar, Keyler ko'pxilliklari, m-polyar to'plamlar, $\mathcal{P}_m$-o'lchov, $m-$regulyar to'plamlar.

РЕЗЮМЕ

Данная статья посвящена определению и изучению сильно m-субгармонических функций на компактных Кэлеровых многообразиях. В частности, исследуются функция Грина, $\mathcal{P}_m-$мера и m-регулярные множества. Основной результат статьи заключается в установлении связи между локально m-регулярными и глобально m-регулярными множествами в локальных координатах компактного Кэлерового многообразия.

Ключевые слова: дифференциальные формы, сильно m-субгармонические функции, Кэлерово многообразие, m-полярные множества, $\mathcal{P}_m$-мера, m-регулярные множества.

UDC 004.942

EPIDEMIK KASALLIK TARQALISH MODELIDAGI “ASOSIY REPRODUKTIV SON” NING AHAMIYATI VA UNI TOPISH USULLARI

Jabborov N. M.
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti, Toshkent
jabborov61@mail.ru
Eshdavlatova S. E.
Toshkent shahridagi Belarus-O‘zbekiston qo‘shma tarmoqlararo amaliy texnik kvalifikatsiyalar instituti, Toshkent
sevaraeshdavlatova@gmail.com
Tuychiyev S. G‘.
Toshkent xalqaro moliyaviy boshqaruv va texnologiyalar universiteti, Toshkent
stuychev@gmail.com

REZYUME

Ushbu maqolada kasallik tarqalishining epidemik SIR (Susceptible-Infected-Recovered) modelining izohi va uning korrupsiya dinamikasida qo‘llanilishi va modelning "asosiy reproduktiv son" (R_0) ning mavjudligi, uni topish usullari hamda qaysi usul samaradorligi haqida fikrlar misollar bilan keltirilgan.

Kalit so‘zlar: epidemik model, asosiy reproduktiv son.

“Koronavirus pandemiyasi butun dunyo qatori xalqimiz, ayniqsa O‘zbekiston tibbiyoti uchun ham jiddiy sinov bo‘lganini barchamiz yaxshi bilamiz. El boshiga ish tushgan ana shunday og‘ir va murakkab paytda birinchi bo‘lib yordamga shoshilgan, virus o‘choqlarida o‘z hayotini xatarga qo‘yib, bu xavfli kasallikka qarshi mardona kurashgan sog‘liqni saqlash xodimlariga ushbu quvonchli ayyomda yana bir bor minnatdorlik bildiramiz”, — dedi Shavkat Mirziyoyev [1].

Epidemik kasallik tarqalishi matematik modelining 1927-yilda birinchi marta Kermak va MakKendrik [2] (Kermack, McKendrick,1927) ning asarlarida tatqiqot jarayonlari ko‘rsatilgan. Kermak va MakKendrik modeli differensial tenglamalar sistemalari yordamida kasallikka moyil (sezgir), kasallangan(infektsiyalangan) va kasallikdan tuzalgan shaxslar guruhlarining dinamikasi tasvirlangan SIR modellarining (“Susceptible – Infected – Recovered”) keng qo‘llanilishiga olib keldi.

SIR modeli (Susceptible-Infected-Recovered) – bu epidemiyalar (yoki boshqa tarqaluvchi jarayonlar, masalan, korrupsiya) dinamikasini o‘rganish uchun eng oddiy va keng qo‘llaniladigan matematik modeldir. U shaxslarni uchta asosiy guruhga bo‘lib tahlil qiladi va ularning o‘zaro o‘tishini hisoblaydi. S (Susceptible) – yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar soni. I (Infected) – hozirgi vaqtda yuqtirgan va boshqalarga yuqtirish xususiyatiga ega shaxslar soni. R (Recovered) – tuzalgan yoki immunitet hosil qilgan shaxslar soni. Bu guruhdagi shaxslar qayta yuqtirmaydi.

SIR modeli uchta differensial tenglama bilan tavsiflanadi:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

bu yerda:

1. S — sog‘lom odamlar soni,
2. I — yuqumli odamlar soni,
3. R — sog‘ayganlar soni,
4. β — kasallik yuqish darajasi,
5. γ — tuzalish darajasi.

Yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar sonining o‘zgarishi:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

bu yerda β – yuqtirish koeffitsienti. Ushbu tenglama S shaxslarning I bilan kontaktga kirishishi orqali kamayishini ifodalaydi.

Yuqtirgan shaxslar sonining o‘zgarishi:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

bu yerda γ – tuzalish koeffitsienti. Yuqtirgan shaxslar soni βSI tufayli ortadi va γI tufayli kamayadi.

Tuzalgan shaxslar sonining o‘zgarishi:

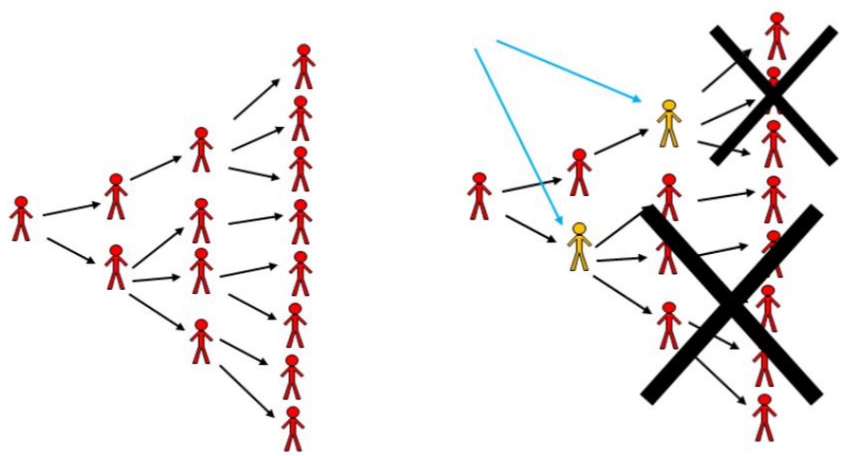
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Ushbu tenglama yuqtirgan shaxslarning sog‘ayish tezligini tavsiflaydi [3-7].

SIR modelining quyidagi asosiy xususiyatlari mavjud: guruhlardagi shaxslar soni: $S(t) + I(t) + R(t) = N$, bu yerda $N(t)$ – populyatsiyaning umumiy soni. Boshlang‘ich vaqtda yuqtirganlar soni $I(0)$, yuqtirish xavfi ostidagi shaxslar soni $S(0)$ va sog‘ayganlar soni $R(0)$ aniq beriladi. Odatda $R(0) = 0$ va $I(0) \geq 0$ deb olinadi.

SIR modeli vaqt o‘tishi bilan uch guruhning sonidagi o‘zgarishlarni quyidagicha tasvirlaydi: $S(t)$– dastlab yuqori bo‘ladi va vaqt o‘tishi bilan kamayadi. $I(t)$– boshlang‘ich holatda kasallanganlar soni kichik bo‘ladi, lekin epidemiyaning avj olishida maksimal qiymatga yetib, keyin kamayadi. $R(t)$ – vaqt o‘tishi bilan ortib boradi va sog‘ayganlar sonini ifodalaydi. Bu matematik model muhim amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, SIR modeli yordamida kasallik tarqalishini oldindan bashorat qilish va kasallikning oldini olish chora-tadbirlari rejasini ishlab chiqish mumkin. R_0 (asosiy reproduktiv son) orqali kasallikning tarqalish darajasini baholash mumkin. R_0 populyatsiyaning qancha qismini emlash kerakligini aniqlashda qo‘llaniladi [8].

R_0 ga izoh beramiz. SIR modelining asosiy xossasi bu “kasallik tarqalishi” nomli ko‘rsatkichning mavjudligi bo‘lib, unga ko‘ra, model R_0 ko‘rsatkichdan kelib chiqib, turlicha holatlarni izohlab beradi, R_0- infeksiyani yuqtirib olgan va bu haqida hali o‘zi behabar bo‘lgan bir nafar kasallik tashuvchi odamning o‘zida infeksiya borligini bilguniga qadar muddatda o‘rtacha necha nafar kishiga infeksiya yuqtirishi sonidir.



$R = 2$ $R < 1$

Agar $R_0 < 1$ bo‘lsa, infeksiya tarqalishi kamaya boshlaydi; agar $R_0 > 1$bo‘lsa, epidemiya kuchaya boshlaydi va aholining katta qismini qamrab oladi. Aynan qancha qismini epidemiya qamrab olishi esa R_0 ning aniq qiymatidan kelib chiqadi [9]. Lekin bu qiymatning arzimas o‘zgarishi ham umumiy aholi sonining o‘nlab foizlarini epidemiya qamrab olishini belgilashi mumkin. Masalan, $R_0 = 2$ bo‘lsa, epidemiya tufayli aholining 80 foizgacha bo‘lgan qismi kasallikka yo‘liqishi mumkin deyiladi.

Aholining katta qismi mazkur kasallikka qarshi emlangan bo‘lsa, epidemik o‘tish R_0 bo‘yicha kichikroq sonni ko‘rsatadi va emlanganlar soni yuqori bo‘lsa, epidemiya tezlik bilan to‘xtaydi. Bu hodisa fanda “guruhli immunitet” deyiladi va u aholini ommaviy emlash tadbirlarining asosini tashkil qiladi.

SIR modeli yuqumli kasalliklarning tarqalish dinamikasi borasida asosiy sifat ko‘rsatkichini taqdim qila oladi; biroq miqdor dinamikasini modellashtirish uchun muayyan aniq bir olingan kasallikning klinik xususiyatlaridan kelib chiquvchi turli boshqa parametrlarni ham inobatga olish talab etiladi. Ko‘plab yuqumli kasalliklarning o‘ziga xosligi, uning qo‘zg‘atuvchisining inkubatsion davri qancha ekani bilan bog‘liq bo‘ladi.

Bu davr shunday davrki, u paytda odam o‘zi allaqachon kasallikni yuqtirib olgan bo‘lsa-da, bundan hali o‘zi bexabar bo‘ladi va unda kasallik alomatlari hali yuzaga chiqmaydi. Shunga qaramay, u atrofdagilarga kasallik yuqtirib yurgan bo‘ladi. Muayyan yuqumli kasallik uchun ushbu o‘ziga xoslikni, I guruhini yana kichikroq tarkibiy guruhlarga bo‘lish orqali e’tiborga olish mumkin bo‘ladi.

R_0 asosan chegaraviy parametr sifatida ishlatiladi: agar $R_0 < 1$ bo‘lsa, kasallik aholida yo‘qolib ketadi; agar $R_0 > 1$ bo‘lsa, kasallik saqlanib qoladi va aholiga xos bo‘lgan endemik holatga aylanadi. Bundan tashqari, R_0 kattaligi qancha katta bo‘lsa, kasallik shuncha tez tarqaladi va uni nazorat qilish qiyinlashadi.

R_0 biologiya sohasidagi muhim tushunchalardan biri bo‘lib, uni 1952 yilda birinchi bo‘lib Jorj MakDonald qo‘llaganidan beri keng foydalanilmoqda [8]. Biroq, R_0 ning matematik ta’rifi muammoli va ayrim hollarda noaniqlikka olib kelishi mumkin.

R_0 ni hisoblash usullari

R_0 ni hisoblashning bir nechta usullari mavjud. Eng keng tarqalgan usullar quyidagilarni o‘z ichiga oladi:

1. Keyingi avlod matrisi usuli,
2. Endemik muvozanatning mavjudligi,
3. Xarakteristik polinomning doimiy hadlari va boshqalar [10].

Shuni ta’kidlash kerakki, ushbu usullarning har biri bir xil model uchun turli R_0 qiymatlarini berishi mumkin, shuningdek, qaysi usulni modelga mos deb hisoblasa, shunga bog‘liq holda turli qiymatlar olinishi mumkin. Har bir usul R_0 ning chegaraviy xususiyatiga asoslangan shartlardan kelib chiqadi, lekin ko‘p hollarda biologik ta’rifga mos kelmaydigan qiymatlar hosil qiladi.

Tasodifiy bir usulni tanlab foydalanish birinchi zararlangan shaxsdan kelib chiqadigan ikkilamchi infeksiyalar sonini aniq ifodalaydi, deb kafolat bermaydi. Hatto bir xil sistema uchun turli usullar R_0 ning turli qiymatlarini berishi mumkin.

Qanday qilib ikki xil qiymat bir vaqtda bitta zararlangan shaxsdan kelib chiqadigan ikkilamchi infeksiyalar sonini ifodalashi mumkin? Agar R_0 ning faqat chegaraviy qiymat xususiyatidan tashqari holatlar ham muhim bo‘lsa, R_0 ni hisoblash uchun usul tanlashda ehtiyotkorlik bilan yondashish kerak.

Keyingi Avlod Usuli (Next generation matrix). R_0 ni hisoblashning eng keng qo‘llaniladigan usullaridan biri – keyingi avlod matritsasi usuli. Ushbu yondashuv infeksiyalangan sinfning tenglamalaridan tegishli hadlarni ikkita vektor: F va V ga joylashtirish orqali amalga oshiriladi:

1. F: Yangi infeksiyalar paydo bo‘lishini tavsiflovchi hadlarni o‘z ichiga oladi.
2. V: Mavjud infeksiyalarning boshqa holatlarga o‘tishini ifodalovchi hadlarni o‘z ichiga oladi (bu hadlar manfiy ishora bilan olinadi).

Keyin, F va V vektorlarining mos keluvchi o‘zgaruvchilarga nisbatan Yakobian matritsalari olinadi va ular kasallik yuqtirilmagan muvozanat holatida (Disease-Free Equilibrium, DFE) baholanadi. Natijada ikkita matritsa hosil bo‘ladi:

Keyingi avlod matritsasi FV^{-1}orqali aniqlanadi. Shu holda: $R_0 = \rho\left(FV^{-1}\right)$ bu yerda ρ-spektral radius operatori, ya’ni matritsaning eng katta absolyut qiymatga ega bo‘lgan xos soni.

Biologik ma’nosi:

1. FV^{-1} - ning (i,j)-elementi — x_j-holatidan kelib chiqqan x_i-holatidagi yangi infeksiyalar sonining kutilgan qiymatini ifodalaydi.

2. Ushbu usul biologik R_0 ta'rifiga juda mos keladi va ko‘plab tizimlarda ishlaydi, lekin hamma hollarda emas.

Afzalliklari va Kamchiliklari. Ushbu usul aniq matematik asosga ega, shuning uchun R_0-ning ma'nosini foydalanuvchi aniq bilib olishi mumkin. Biroq, ayrim hollarda bu usul murakkab bo‘lishi yoki R_0 ning biologik ma'nosini to‘liq ifodalay olmasligi mumkin. Shunga qaramay, u R_0-ni hisoblashda eng keng tarqalgan va moslashuvchan usul hisoblanadi [11].

SIR-modelining asosiy tenglamalari uchun keltirilgan usullar yordamida topamiz va natijalarni solishtiramiz:

Keyingi avlod matrisi usuli

Bu usul infektsiyaning keyingi avlodini oldingi avloddan qanday hosil bo‘lishini tahlil qiladi.

F va V matritsalarini aniqlash

F — yangi infektsiyalarni ifodalaydi: $F = \beta S$

V — infeksiyadan chiqish (tuzalish yoki o‘lim): $V = \gamma$

Keyingi avlod matritsasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\rho = FV^{-1} = \frac{\beta S}{\gamma}$$

SIR-modeli uchun keyingi avlodning asosiy formulasi:

$$R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

bu yerda S_0 boshlang‘ich sog‘lom odamlar soni. Boshlang‘ich sharoitda $S_0 \approx N$ (populyatsiyaning to‘liq soni) deb hisoblasak:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ (agar $S_0 = 1$ deb olinadigan bo‘lsa).

Endemik muvozanatning mavjudligi

Endemik muvozanatda infektsiya darajasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmas holatda qoladi.

1. Muvozanat sharoitida $\frac{dI}{dt} = 0$ bo‘lganda: $\beta SI - \gamma I = 0$

2. $I \neq 0$ bo‘lganda: $\beta SI = \gamma I$

3. Shundan: $R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$

Boshlang‘ich sharoitda $S = S_0 \approx 1$ deb olsak: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

Xarakteristik polinomning doimiy hadlari

Bu usul chiziqlashtirilgan differentsial tenglamalar sistemasidan xarakteristik polinomni topishga asoslanadi.

1. SIR-modeli uchun infektsiyalanganlar tenglamasini chiziqlashtiramiz:$\frac{dI}{dt} = (\beta S_0 - \gamma) I$

2. Xarakteristik polinom: $\lambda = \beta S_0 - \gamma$

Yuqumli o‘sish bo‘lishi uchun $\lambda > 0$ bo‘lishi kerak: $\beta S_0 - \gamma > 0$

1. Shundan: $R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$, $R_0 \approx \frac{\beta}{\gamma}$ (agar $S_0 = 1$ deb olinadigan bo‘lsa$R_0 \approx \frac{\beta}{\gamma}$.

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, har bir usul SIR-modeli uchun bir xil natija beryabdi:$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

SIR modeli asosida korrupsiya dinamikasini o‘rganish mumkin. SIR modeli faqat epidemiyalarni emas, balki ijtimoiy tizimlarda korrupsiya kabi "yuqumli"hodisalarni ham tahlil qilish uchun moslash mumkin. Bu holda: S – korrupsiyaga aralashmagan va undan ehtiyot bo‘lgan shaxslar. I – korrupsiyaga aralashgan shaxslar (yuqtirgan). R – korrupsiyadan xalos bo‘lgan shaxslar (tuzalgan). Bu borada [12-16] da to‘liq talqini asosida tatqiqot ishlari olib borilgan. R_0 epidemiologiyada hal qiluvchi parametr bo‘lib, kasallikning tarqalish tezligini tushunish, oldini olish strategiyalarini ishlab chiqish va sog‘liqni saqlash tizimini samarali boshqarish uchun muhimdir. Shu sababli R_0 ni to‘g‘ri aniqlash va uning dinamikasini kuzatib borish har qanday pandemiya yoki epidemiyaga qarshi kurashda asosiy vositalardan biridir.

ADABIYOTLAR

1. “Asosiy vazifamiz – tibiiyot sohasini xalqchil tizimga aylantirish” Prezident SH.M.Mirziyoyevning soha xodimlariga yo‘llagan tabrigi. 13-noyabr, 2021-yil.

2. W.O.Kermack, A.G.McKendrick, “Proceedings of the Royal Society of London” // Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Vol. 115, No. 772. (Aug. 1, 1927), pp. 700-721.

3. S.M.Blower and H.Dowlatabadi. “Sensitivity and uncertainty analysis of complex models of disease transmission: an hiv model, as an example,” // International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, vol. 62, pp. 229–243, 1994.

4. M.A.Mikucki “Sensitivity analysis of the basic reproduction number and other quantities for infectious disease models” // Thesis Colorado State University Fort Collins, Colorado Spring 2012. 109 pages.

5. H.S.Rodrigues, T.T.Monteiro and F.M.Torres “Sensitivity Analysis in a Dengue Epidemiological Model” // Hindawi Publishing Corporation Conference Papers in Mathematics Volume 2013, Article ID 721406, 7 pages

6. _V.P.Driessche, J.Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibrium for compartmental models of disease transmission. Math Bioscience. (2002) 180:29–48. doi: 10.1016/S0025-556400108-6

7. O.Diekmann, J.Heesterbeek. Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Integration. New York, NY: Wiley (2000).

8. M.Osman, I.Adu, A.K.Isaac. Simple mathematical model for malaria transmission. Journal of Advances in Mathematics and Computer Science (2017) 25:1–24. doi: 10.9734/JAMCS/2017/ 37843

9. N.K.Goswami, S.Olaniyi, S.F.Abimbade, F.M.Chuma. A mathematical model for investigating the effect of media awareness programs on the spread of COVID19 with optimal control. Healthc Analsys. (2024) 5:100300. doi: 10.1016/j.health.2024. 100300

10. S.Lenhart, J.T.Workman. Optimal Control Applied to Biological Models, 1st Edn. Chapman and Hall/CRC (2007). p. 274

11. J.H.Jones "Notes On R0" // Department of Anthropological Sciences. Stanford University. May 1, 2007. 19pages

12. S.E.Eshdavlatova "Poraxo'rlikning dinamikasini nazorat choralari orqali matematik modellashtirish" // "Ta'lim transformatsiyasi: Ilm-fan taraqqiyotida xotin-qizlarning roli" mavzusidagi IV xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. Toshkent sh., 2023 yil, 16-fevral, 690-694-betlar.

13. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova "Korrupsiyani matematik modellashtirish va dinamikasini nazorat choralari orqali tahlil qilish" // O'zMU xabarlari. Aniq fanlar. 2023 1/1. 13-20-betlar.

14. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova, S.G'.To'ychiyev. "O'zbekistonda sharoitida poraxo'rlikni oldini olishning matematik model asosidagi tahlili" // "Amaliy matematika, matematik modellashtirish va informatikaning dolzarb muammolari" Respublika ilmiy konferensiya ma'ruzalar to'plami. Nukus 2024 yil, 24-25-may. 186-188-betlar.

15. S.E.Eshdavlatova, H.R.Raufov, N.X.Matyoqubova. "Matematik modellashtirish yordamida yoshlar orasida jinoyatchilikning tarqalishini tadqiq qilish" // "Raqamlashtirish sharoitida uzluksiz ta'limni sifat va samaradorligini oshirish: muammo va yechimlari" mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiya ma'ruzalar to'plami. Guliston 2024-yil, 7-8-iyun. 63-68-betlar.

16. N.M.Jabborov, S.E.Eshdavlatova "Функции ляпунова и анализ глобальной стабильности для эпидемической модели" // "Axborot texnologiyalaridan foydalanishni yangi bosqichga ko'tarishning ilmiy asoslari va avtomatlashtirishning zamonaviy muammolari" mavzusidagi III Xalqaro ilmiy anjuman Toshkent sh., 2024 y., 20-noyabr, 687-689 betlar.

РЕЗЮМЕ

В данной статье дано объяснение эпидемической модели распространения заболеваний SIR (Susceptible Infected-Recovered) и ее применение в динамике коррупции и существования «основное репродуктивное число» модели (R_0), методы как его найти, и эффективность какого метода представлены на примерах.

Ключевые слова: эпидемическая модель, основное репродуктивное число.

RESUME

This article explains the epidemic model of disease spread SIR (Susceptible Infected-Recovered) and its application to the dynamics of corruption and the existence of the "basic reproductive number"of the model (R_0), methods for finding it, and the effectiveness of which method are presented with examples..

Key words: epidemic model, basic reproductive number.

UDC 512.745.2

EUCLIDEAN CONTROL INVARIANTS OF BÉZIER CURVES

Khadjiev D.
Institute of mathematics of Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent
khdjavvat@gmail.com,
Bayturaev A.
National University of Uzbekistan, Tashkent
abayturayev@gmail.com

RESUME

Let G be the group $M(3)$ of all motions of the 3-dimensional Euclidean space or G is the subgroup of $M(3)$ generated by rotations and translations of R^3. Two minimal complete systems of control G-invariants of a Bézier curve are obtained. Correlations between elements of the second minimal complete system of control $M(3)-$invariants are investigated.

Key words: Bézier curve, control invariant.

Introduction

Transformations and invariants of curves, surfaces and graphical objects appear in many areas of Computer Aided Geometric Design, Computer Aided Design, computer graphics, computer vision and pattern recognition. Applications of affine and projective transformations of curves, surfaces and other graphical objects are considered in ([11], [13], [20], [22], [24]). The invariance of curves and surfaces relative to the Euclidean group, the affine group and the projective group is investigated in ([2], [3], [5], [6], [17]). The geometric invariance has been obtained wide applications in the computer vision (see [18], [19]). Applications of the invariant theory and invariants in computer vision and pattern recognition are discussed in ([1], [4], [8], [14], [23], [24], [25]). Properties of Euclidean differential invariants (the curvature, the torsion, the Gaussian curvature and mean curvature) of Bézier curves and surfaces are investigated in ([7], [9], [12], [27]).

The present paper is devoted to a study of Euclidean control invariants of Bézier curves. This paper is organized as follows. Let G be the group $M(3)$ of all motions of the 3-dimensional Euclidean space R^3 or $G = SM(3)$ is the subgroup of $M(3)$ generated by rotations and translations of R^3. In Section 1, the definitions of a G-equivalence of Bézier curves, a control $G-$invariant of a Bézier curve, a complete system of control $G-$invariants of a Bézier curve and a minimal complete system of control $G-$invariants of a Bézier curve are introduced. A minimal complete system of control G-invariants is described. In Section 2, the definition of the type of a Bézier curve is introduced and the other minimal complete system of control G-invariants is obtained. In Section 3, correlations between elements of the second minimal complete system of control $M(3)-$invariants are investigated.

1. Monomial and control invariants of Bézier curves

Let R be the field of real numbers. We realize the 3-dimensional Euclidean space as the 3-dimensional vector space R^3 with the scalar product $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ of vectors $x = (x_1, x_2, x_3)$ and $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Let $O(3)$ be the group of all orthogonal real 3×3-matrices. Then the group $M(3)$ of all Euclidean motions of an 3-dimensional Euclidean space has the form $M(3)$=$\{F : R^3 \to R^3 \mid Fx = gx + p;\ g \in O(3)\ ,\ p \in R^3\}$, where gx is the multiplication of a matrix g and a column vector $x \in R^3$. Denote by $SO(3)$ the group all rotations of R^3 that is $SO(3) = \{g \in O(3) | \det g = 1\}$. Put $SM(3) = \{F \in M(3)|Fx = gx + p; g \in SO(3), p \in R^3\}$. $SM(3)$ is a subgroup of $M(3)$.

By the property of the affine invariance (see [6, p.30]; [17, p.137]), if $x\,(t)$ is a Bézier curve in R^3 then $Fx\,(t)$ is also a Bézier curve in R^3 for any $F \in M(3)$. Let G be a subgroup of $M(3)$.

Definition 1. Bézier curves $x(t)$ and $y(t)$ in R^3 will be called G-equivalent and written $x \overset{G}{\sim} y$ if there exists $F \in G$ such that $y(t) = Fx(t)$ for all $t \in [0, 1]$.

Remark 1. In this definition, Bézier curves are considered as paths (see [3, p.796]; [16, Definition 3]; [21, Definition 2.3]; [15, p.26]). The essential other definition of the congruence of curves for the group of euclidean motions is given in [10, p.21].

Definition 2. Systems $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ and $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ of vectors in R^3 will be called G-equivalent and written by $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \overset{G}{\sim} \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ if there exists $F \in G$ such that $w_j = Fz_j$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$.

Definition 3. A function $f(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$ in R^3 will be called G-invariant if $f(Fz_0, Fz_1, \ldots, Fz_m) = f(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ for all $F \in G$. A G-invariant function $f(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ of control points $b_0, b_1, \ldots, b_m$ of a Bézier curve $x(t) = b_0B_{0,m}(t) + b_1B_{1,m}(t) + \cdots + b_mB_{m,m}(t)$ will be called a control G-invariant of $x(t)$. A G-invariant function $f(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ of monomial control points $a_0, a_1, \ldots, a_m$ of a polynomial curve $x(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m$ will be called a monomial G-invariant of $x(t)$.

Example 1. Since $< g(u), g(v) >=< u, v >$ for all $g \in O(3)$, we obtain that the scalar product $< u, v >$ of vectors $u, v \in R^3$ is $O(3)$-invariant. Similarlly, the function $f(u, v, w) = < u - w, v - w >$ is $M(3)$-invariant.

Example 2. Let u_1, u_2, u_3 be vectors in R^3. Denote by $\|u_1u_2u_3\|$ the matrix of column-vectors u_1, u_2, u_3. Then $\det \|u_1u_2u_3\|$ is $SO(3)$-invariant. In fact,

$$\det \|gu_1gu_2gu_3\| = \det g\, \|u_1u_2u_3\| = \det g \det \|u_1u_2u_3\| = \det \|u_1u_2u_3\|$$

for all $g \in SO(3)$.

Example 3. Let $x(t)$ and $y(t)$ be Bézier curves of degrees of m and k, respectively. Assume that $x \overset{O(3)}{\sim} y$. Then $m = k$ that is the degree of a Bézier curve $x(t)$ is $O(3)$-invariant.

Example 4. The rank of a system $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ of vectors in R^3 is $O(3)$-invariant, but it is not $M(3)$-invariant.

Theorem 1. Let $x(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m = b_0B_{0,m}(t) + b_1B_{1,m}(t) + \cdots + b_mB_{m,m}(t)$ and let $y(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_mt^m = d_0B_{0,m}(t) + d_2B_{1,m}(t) + \cdots + d_mB_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Then following four conditions are equivalent:

(i) $x \overset{M(3)}{\sim} y$;

(ii) $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$;

(iii) $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0\} \overset{O(3)}{\sim} \{d_1 - d_0, d_2 - d_0, \dots, d_m - d_0\}$;

(iv) $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \overset{O(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$.

Proof. $(i) \leftrightarrow (ii)$. According to the property of the affine invariance ([6, p.30]; [17, p.137]),

$$F\left(\sum_{j=0}^{m} b_j B_{j,m}(t)\right) = \sum_{j=0}^{m} F(b_j) B_{j,m}(t) \tag{5}$$

for every $F \in M(3)$. Assume that $x \overset{M(3)}{\sim} y$. Then $y(t) = Fx(t)$ for some $F \in M(3)$. Using Eq. (5), we obtain $d_j = Fb_j$ for all $j = 0, 1, \dots, m$ that is $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$. Conversely, suppose that $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$. Then there exists $F \in M(3)$ such that $d_j = Fb_j$ for all $j = 0, 1, \dots, m$. Using Eq. (5), we obtain $y(t) = Fx(t)$ that is $x \overset{M(3)}{\sim} y$.

$(ii) \leftrightarrow (iii)$. Assume that $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$. Then there exists $F \in M(3)$, where F has the form $Fz = gz + p$, $g \in O(3), p \in R^3$, such that $d_j = Fb_j = gb_j + p$ for all $j = 0, 1, \dots, m$. These equalities imply $d_j - d_0 = g(b_j - b_0)$ for all $j = 1, 2, \dots, m$. This means that $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0\} \overset{O(n)}{\sim} \{d_1 - d_0, d_2 - d_0, \dots, d_m - d_0\}$. Conversely, assume that $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0\} \overset{O(3)}{\sim} \{d_1 - d_0, d_2 - d_0, \dots, d_m - d_0\}$. Then there exists $g \in O(n)$ such that $d_j - d_0 = g(b_j - b_0)$ for all $j = 1, 2, \dots, m$. Put $p = d_0 - gb_0$. Then $d_j = gb_j + p$ for all $j = 0, 1, \dots, m$. This means that $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$.

Prove $(i) \leftrightarrow (iv)$. Assume that $x \overset{M(3)}{\sim} y$. Then there exists $F \in M(3)$ of the form $Fz = gz + p$, where $g \in O(3), p \in R^3$, such that $y(t) = Fx(t) = gx(t) + p$. This equality implies that $c_j = ga_j$ for all $j = 1, 2, \dots, m$ and $c_0 = ga_0 + p$. Hence $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \overset{O(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Conversely, suppose that $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \overset{O(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Then there exists $g \in O(3)$ such that $c_j = ga_j$ for all $j = 1, 2, \dots, m$. Put $p = c_0 - ga_0$. These equalities imply $y(t) = gx(t) + p$ that is $x \overset{M(3)}{\sim} y$. □

Theorem 2. Let $x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \dots + b_m B_{m,m}(t)$ and let $y(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m = d_0 B_{0,m}(t) + d_2 B_{1,m}(t) + \dots + d_m B_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Then following four conditions are equivalent:

(i) $x \overset{SM(3)}{\sim} y$;

(ii) $\{b_0, b_1, \dots, b_m\} \overset{SM(3)}{\sim} \{d_0, d_1, \dots, d_m\}$;

(iii) $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0\} \overset{SO(3)}{\sim} \{d_1 - d_0, d_2 - d_0, \dots, d_m - d_0\}$;

(iv) $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \overset{SO(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$.

Proof. It is similar to the proof of Theorem 1. □

Theorem 3. Let $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ and $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ be two system of vectors in R^3. Then following two conditions are equivalent:

(i) $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \overset{O(3)}{\sim} \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$;

(ii) $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m$ such that $j \leq k$.

Proof. $(i) \to (ii)$. Since the function $f(u_j, u_k) =< u_j, u_k >$ is $O(3)$-invariant, condition (i) implies (ii).

$(ii) \to (i)$. Assume that condition (ii) is valid. Denote by $r(u)$ and $r(v)$ ranks of the systems $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ and $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, respectively.

A). First we consider the case $r(u) = 3$. Then there exist vectors u_j, u_k, u_l which are linearly independent. For simplicity, we assume that vectors u_1, u_2, u_3 are linearly independent. We prove that vectors v_1, v_2, v_3 are linearly independent. Let $\|u_1u_2u_3\|$ be the matrix of column-vectors u_1, u_2, u_3. Linearly independence of u_1, u_2, u_3 implies $det\,\|u_1u_2u_3\| \neq 0$. Let $\|u_1u_2u_3\|^\top$ be the transpose matrix of $\|u_1u_2u_3\|$ and $\|< u_i, u_q >\|_{i,q=1,2,3}$ is the Gram matrix of vectors u_1, u_2, u_3. Then it is easy to see that

$$\|u_1u_2u_3\|^\top \|u_1u_2u_3\| = \|< u_s, u_q >\|_{s,q=1,2,3}\,. \tag{6}$$

Since $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m$, we have

$$\|< u_s, u_q >\|_{s,q=1,2,3} = \|< v_s, v_q >\|_{s,q=1,2,3}\,. \tag{7}$$

Eq. (2) and Eq. (3) imply

$$\|u_1u_2u_3\|^\top \|u_1u_2u_3\| = \|v_1v_2v_3\|^\top \|v_1v_2v_3\|\,, \tag{8}$$

whence

$$det\,\|u_1u_2u_3\|^2 = det\,\|v_1v_2v_3\|^2\,. \tag{9}$$

Since $det\,\|u_1u_2u_3\| \neq 0$, Eq. (5) implies $det\,\|v_1v_2v_3\| \neq 0$ that is vectors v_1, v_2, v_3 are linearly independent. Then there exists a 3×3-matrix g such that $det(g) \neq 0$ and

$$\|v_1v_2v_3\| = g\,\|u_1u_2u_3\|\,. \tag{10}$$

Eq. (10) and Eq. (8) imply

$$\|u_1u_2u_3\|^\top \|u_1u_2u_3\| = \|u_1u_2u_3\|^\top g^\top g\,\|u_1u_2u_3\|\,. \tag{11}$$

Since $det\,\|u_1u_2u_3\| \neq 0$, Eq. (7) implies $g^\top g = I$, where I is the identity matrix. This means that $g \in O(3)$. Eq. (6) implies $v_j = gu_j$ for all $j = 1, 2, 3$.

Let $j > 3$. Condition (ii) of our theorem and equalities

$$\|u_1, u_2, u_3\|^\top u_j = \begin{pmatrix} < u_1, u_j > \\ < u_2, u_j > \\ < u_3, u_j > \end{pmatrix},$$

$$\|v_1, v_2, v_3\|^\top v_j = \begin{pmatrix} < v_1, v_j > \\ < v_2, v_j > \\ < v_3, v_j > \end{pmatrix}$$

imply

$$\|u_1, u_2, u_3\|^\top u_j = \|v_1, v_2, v_3\|^\top v_j. \tag{12}$$

Using Eq. (6) and Eq. (8), we obtain

$$\|u_1, u_2, u_3\|^\top u_j = \|u_1, u_2, u_3\|^\top g^\top v_j. \tag{13}$$

Since $g \in O(n)$, we have $g^\top = g^{-1}$. Hence Eq. (9) implies $v_j = gu_j$ for all $j > 3$. These equalities and Eq. (6) mean $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Our theorem is proved in the case $rank(u) = 3$.

B). Now we consider the case $rank(u) = 2$. We prove that $rank(v) \leq 2$. Assume that $rank(v) = 3$. As above (in the case A)) the condition $rank(v) = 3$ implies that $rank(u) = 3$. It is a contradiction. Thus $rank(v) \leq 2$. Denote by U and V the linear subspaces of R^3 spanned by systems $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ and $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, respectively. Then $dim(U) = 2, dim(V) \leq 2$. There exists $h \in O(3)$ such that $h(V) \subseteq U$. Since $dim(U) = 2$, there exists a vector $u_{m+1} \in R^3$ such that $< u_{m+1}, u_{m+1} >= 1$ and $< u_{m+1}, z >= 0$ for all $z \in U$. Consider systems $\bar{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ and $\bar{v} = \{hv_1, hv_2, \ldots, hv_m, hv_{m+1}\}$, where $v_{m+1} = h^{-1}u_{m+1}$. Since $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >=< hv_j, hv_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m$, $< u_{m+1}, u_{m+1} >=< hv_{m+1}, hv_{m+1} >= 1$ and $< u_i, u_{m+1} >=< hv_i, hv_{m+1} >=< hv_i, u_{m+1} >= 0$ for all $i = 1, 2, \ldots m$, we have $< u_j, u_k >=< hv_j, hv_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m + 1$. The rank of the system $\bar{u}$ is equal 3. Therefore, according to the case A), there exists $g \in O(3)$ such that $\bar{v} = g\bar{u}$. Then $hv_j = gu_j$ for all $j = 1, 2, \ldots, m + 1$. These equalities imply $v_j = h^{-1}gu_j$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$. Since $h^{-1}g \in O(3)$, this means that systems $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ and $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ are $O(3)$-equivalent. Our theorem is proved for the case $rank(u) = 2$.

C) A proof of the theorem for the case $rank(u) = 1$ is similar. □

Corollary 1. Let $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \cdots + b_m B_{m,m}(t)$ and let $y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m = d_0 B_{0,m}(t) + d_2 B_{1,m}(t) + \cdots + d_m B_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Then following three conditions are equivalent:

(i) $x \overset{M(3)}{\sim} y$;

(ii) $< b_j - b_0, b_k - b_0 >=< d_j - d_0, d_k - d_0 >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m; j \leq k$;

(iii) $< a_j, a_k >=< c_j, c_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m; j \leq k$.

Proof. It follows from Theorems 1 and 3. □

Theorem 4. Let $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ and $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ be two system of vectors in R^3. Then following two conditions are equivalent:

(i) $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \overset{SO(3)}{\sim} \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$;

(ii) $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >$, $\det \|u_i u_j u_k\| = \det \|v_i v_j v_k\|$ for all $i, j, k = 1, \ldots, m, i < j < k$.

Proof. $(i) \to (ii)$. Since the functions $f(u_j, u_k) =< u_j, u_k >$ and $\det \|u_i u_j u_k\|$ are $SO(3)$-invariant, condition (i) implies (ii).

$(ii) \to (i)$. Assume that the condition (ii) is valid.

$A)$. First we consider the case $r(u) = 3$. Then there exist vectors u_j, u_k, u_l which are linearly independent. For simplicity, we assume that vectors u_1, u_2, u_3 are linearly independent. This equivalent to $\det \|u_1 u_2 u_3\| \neq 0$. Condition (ii) imply $\det \|u_1 u_2 u_3\| = \det \|v_1 v_2 v_3\| \neq 0$. By Theorem 3, equalities $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m, j \leq k$ imply the existence $g \in O(3)$ such that $v_j = g u_j$ for all $j = 1, \ldots, m$. Using the inequality $\det \|u_1 u_2 u_3\| \neq 0$ and following equalities

$$\det \|u_1 u_2 u_3\| = \det \|v_1 v_2 v_3\| = \det \|g u_1 g u_2 g u_3\| = \det g \det \|u_1 u_2 u_3\|,$$

we obtain that $\det g = 1$ that is $g \in SO(3)$. The theorem is proved in the case $A)$.

$B)$. Let $r(u) \leq 2$. By Theorem 3, equalities $< u_j, u_k >=< v_j, v_k >$ for all $j, k = 1, 2, \ldots, m, j \leq k$ imply the existence $g \in O(3)$ such that $v_j = g u_j$ for all $j = 1, \ldots, m$. The property $g \in O(3)$ imply $\det g = \pm 1$. If $\det g = 1$ then the theorem is completed. Assume that $\det g = -1$. Denote by W the linear subspace of R^3 generated by the system $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Since $r(u) \leq 2$, we have $\dim W \leq 2$. Assume that $\dim W = 2$. Denote by u_{m+1} a vector such that $< u_{m+1}, y >= 0$ for all $y \in W$. Consider the linear mapping $h : R^3 \to R^3$ such that $h(u_{m+1}) = -u_{m+1}$ and $h(y) = y$ for all $y \in W$. It is obvious that $\det h = -1$. Then $v_j = gh(u_j) = g(u_j)$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$ and $\det(gh) = 1$. The theorem is completed in the case $r(u) = 2$. In the case $r(u) = 1$, a proof is similar. □

Corollary 2. Let $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \cdots + b_m B_{m,m}(t)$ and let $y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m = d_0 B_{0,m}(t) + d_2 B_{1,m}(t) + \cdots + d_m B_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Then following three conditions are equivalent:

(i) $x \overset{SM(3)}{\sim} y$;

(ii) $< b_j - b_0, b_k - b_0 >=< d_j - d_0, d_k - d_0 >$, $\det \|(b_i - b_0)(b_j - b_0)(b_k - b_0)\| = \det \|(d_i - d_0)(d_j - d_0)(d_k - d_0)\|$ for all $i, j, k = 1, 2, \ldots, m, i < j < k$;

(iii) $< a_j, a_k >=< c_j, c_k >$, $\det \|a_i a_j a_k\| = \det \|c_i c_j c_k\|$ for all $i, j, k = 1, 2, \ldots, m, i < j < k$.

Proof. It follows from Theorems 2 and 4. □

Definition 4. A system $\{f_\tau, \tau \in Q\}$ of $M(3)$-invariant functions $f_\tau(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$ in R^3 will be called complete if equalities

$$f_\tau(x_0, x_1, \ldots, x_m) = f_\tau(y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

for all $\tau \in Q$ imply $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.

According to Corollary 1, the system $\{< b_j - b_0, b_k - b_0 >, j, k = 1, 2, \ldots, m; j \leq k\}$ is a complete system of $M(3)$-invariant functions of control points $b_0, b_1, \ldots, b_m$ of a Bézier curve $x(t)$ in R^3. By the same corollary, the system $\{< a_j, a_k >, j, k = 1, 2, \ldots, m; j \leq k\}$ is a complete system of $M(3)$-invariant functions of monomial control points $a_0, a_1, \ldots, a_m$ of a polynomial curve $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$.

Definition 5. A complete system $U = \{f_\tau, \tau \in Q\}$ of $M(3)$-invariant functions f_τ of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$ in R^3 will be called minimal if every proper subset of U is not complete.

Theorem 5. The system $U = \{< z_j - z_0, z_k - z_0 >, j,k = 1,2,\ldots,m; j \leq k\}$ is a minimal complete system of $M(3)$-invariants of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$ in R^3.

Proof. Every a proper subset of U is contained in a subset of the form $U_1 = U \setminus \{< z_p - z_0, z_q - z_0 >\}$ for some p, q, where $1 \leq p \leq q$. U_1 is a proper subset of U. Prove that U_1 is not a complete system of $M(3)$-invariants.

First we assume that $p \neq q$. Consider systems $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ and $\{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$ of vectors in R^3, where $z_p = z_q = (1,0,0), z_j = 0$ for all j such that $j \neq p, j \neq q$ and $w_p = (1,0,0), w_q = (0,1,0), w_j = 0$ for all j such that $j \neq p, j \neq q$. Then $< z_j - z_0, z_k - z_0 >= < w_j - w_0, w_k - w_0 >= 0$ for all j, k such that $j \leq k$ and $(j,k) \neq (p,q)$. But these equalities are not imply $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$ because of $1 =< z_p - z_0, z_q - z_0 >\neq < w_p - w_0, w_q - w_0 >= 0$. This means that U_1 is not complete.

Now we consider the case $p = q$. Consider systems $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ and $\{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$, where $z_p = (1,0,0), z_j = 0$ for all j such that $j \neq p$ and $w_j = 0$ for all $j = 0, 1, \ldots m$. Then $< z_j - z_0, z_k - z_0 >=< w_j - w_0, w_k - w_0 >= 0$ for all j, k such that $j \leq k$ and $(j,k) \neq (p,p)$. But these equalities are not imply $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\} \overset{M(3)}{\sim} \{w_0, w_1, \ldots, w_m\}$ because of $1 = < z_p - z_0, z_p - z_0 >\neq< w_p - w_0, w_p - w_0 >= 0$. This means that U_1 is not complete. □

The number of elements in the system $\{< z_j - z_0, z_k - z_0 >, j,k = 1,2,\ldots,m; j \leq k\}$ is $\frac{m(m+1)}{2}$. In Section 3, for $m > 3$, we shall find the minimal complete system of M(3)-invariant functions with $3m$ elements (Theorem 10).

Corollary 3.

(i) The system $\{< b_j - b_0, b_k - b_0 >, j,k = 1,2,\ldots,m; j \leq k\}$ is a minimal complete system of $M(3)$-invariants of control points $b_0, b_1, \ldots, b_m$ of a Bézier curve $x(t)$ in R^3;

(ii) The system $\{< a_j, a_k >, j,k = 1,2,\ldots,m; j \leq k\}$ is a minimal complete system of $M(3)$-invariants of monomial control points $a_0, a_1, \ldots, a_m$ of a polynomial curve $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$.

Proof. It follows from Corollary 1 and Theorem 5. □

Theorem 6. The system $\{< z_j - z_0, z_k - z_0 >, \det \|z_i z_j z_k\|,\ i,j,k = 1,2,\ldots,m; i < j < k\}$ is a minimal complete system of $SM(3)$-invariants of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$ in R^3.

Proof. A proof is similar to the proof of Theorem 5. □

Corollary 4.

(i) The system $\{< b_j - b_0, b_k - b_0 >, \det \|(b_i - b_0)(b_j - b_0)(b_k - b_0)\|, i,j,k = 1,2,\ldots,m,$ $i < j < k\}$ is a minimal complete system of $SM(3)$-invariants of control points $b_0, b_1, \ldots, b_m$ of a Bézier curve $x(t)$ in R^3;

(ii) The system $\{< a_j, a_k >, \det \|a_i a_j a_k\|, i,j,k = 1,2,\ldots,m\ , i < j < k\}$ is a minimal complete system of $SM(3)$-invariants of monomial control points $a_0, a_1, \ldots, a_m$ of a polynomial curve $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$.

Proof. It follows from Corollary 2 and Theorem 6. □

2. The type of a Bézier curve and the second minimal complete system of control invariants of a Bézier curve

Let $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ be a system of vectors in R^3. Assume that the rank $r(Z)$ of the system Z is 1. Denote by k the minimum of $s, 1 \leq s \leq m$, such that $z_s \neq 0$. The number k will be called the type of the system Z in the case $r(Z) = 1$. Assume that the $r(Z) = 2$. Denote by k the minimum of $s, 1 \leq s \leq m$, such that $z_s \neq 0$. Let $[z_k]_R$ be the linear subspace of R^3 generated by z_k. Denote by l the minimum of $s, k < s \leq m$ such that $z_s \notin [z_k]_R$. The pair (k, l) will be called the type of the system Z in the case $r(Z) = 2$. Assume that the $r(Z) = 3$. Denote by k the minimum of $s, 1 \leq s \leq m$, such that $z_s \neq 0$. Denote by l the minimum of $s, k < s \leq m$ such that $z_s \notin [z_k]_R$. Let $[z_k, z_l]_R$ be the linear subspace of R^3 generated by vectors z_k, z_l. Denote by p the minimum of $s, l < s \leq m$ such that $z_s \notin [z_k, z_l]_R$. The vector (k, l, p) will be called the type of the system Z in the case $r(Z) = 3$. The type of the system $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ will be denoted by $T(Z)$.

We note that the type $T(Z)$ of a system $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ is not $M(3)$-invariant. But

Proposition 1. Let $Z = \{z_1, \ldots, z_m\}$ be a system of vectors in R^3. Then $T(Z)$ is $O(3)$-invariant.

Proof. A proof follows easy from the definition of the type. □

Corollary 5. Let $\{z_0, z_1, \ldots, z_m\}$ be a system of vectors in R^3. Then the type $T(z_1 - z_0, z_2 - z_0 \ldots, z_m - z_0)$ is $M(3)$-invariant function of vectors $z_0, z_1, \ldots, z_m$.

Proof. Assume that systems $\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ and $\{d_0, d_1, \ldots, d_m\}$ are $M(3)$-equivalent. By Theorem 1, systems $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \ldots, b_m - b_0\}$ and $\{d_1 - d_0, d_2 - d_0, \ldots, d_m - d_0\}$ are $O(3)$-equivalent. Then by Proposition **??**, $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_m - b_0) = T(d_1 - d_0, d_2 - d_0 \ldots, d_m - b_0)$. □

Theorem 7. Let $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \cdots + b_m B_{m,m}(t)$ and let $y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m = d_0 B_{0,m}(t) + d_2 B_{1,m}(t) + \cdots + d_m B_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Then

(i) $r(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_k - b_0) = r(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ for every $k, 1 \leq k \leq m$;

(ii) $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_k - b_0) = T(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ for every $k, 1 \leq k \leq m$;

(iii) $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_k - b_0)$ is $M(3)$-invariant for every $k, 1 \leq k \leq m$.

Proof. The assertion (iii) follows from the definition of the type $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_m - b_0)$. Prove assertions (i) and (ii). First we prove the following

Lemma 1. The following equalities

$$a_i = \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (b_j - b_0), \qquad b_i - b_0 = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \Big/ \binom{n}{j} a_j \tag{14}$$

hold for all $i = 1, 2, \ldots, m$.

Proof of lemma. We use following equalities in [17, p.157]:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} b_j, \qquad b_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Big/ \binom{n}{j} a_j \tag{15}$$

for all $i = 0, 1, \ldots, m$.

According to Eq. (11), we have $a_0 = b_0$. Using equalities $a_0 = b_0$ and

$$b_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Big/ \binom{n}{j} a_j,$$

we obtain

$$b_i - b_0 = b_i - a_0 = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \Big/ \binom{n}{j} a_j.$$

Using Eq. (11), $a_0 = b_0$ and $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = 0$ for every $i = 1, 2, \ldots, m$, we obtain

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n}{i} \binom{i}{j} b_j = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} b_j =$$

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (b_j - b_0) + b_0 \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} =$$

$$= \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (b_j - b_0)$$

for all $i = 1, 2, \ldots, m$. The lemma is proved.

Now assertions (i) and (ii) of our theorem follow from the definition of the type $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_m - b_0)$ and Eq. (10). □

Definition 6. Let $x(t) = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \cdots + b_m B_{m,m}(t)$ be a Bézier curve of degree m. The type $T(b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_m - b_0)$ of the system $\{b_1 - b_0, b_2 - b_0 \ldots, b_m - b_0\}$ will be called the control type of the Bézier curve x and will be denoted by $T(x)$.

Since the type of a Bézier curve is $M(3)$-invariant by Theorem 6, in the case $T(x) \neq T(y)$, Bézier curves x and y are not $M(3)$-equivalent. Therefore, for an investigation of $M(3)$-equivalence of Bézier curves x and y, we assume that $T(x) = T(y)$.

Theorem 8. Let $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m = b_0 B_{0,m}(t) + b_1 B_{1,m}(t) + \cdots + b_m B_{m,m}(t)$ and $y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m = d_0 B_{0,m}(t) + d_2 B_{1,m}(t) + \cdots + d_m B_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Assume that $rank(x) = rank(y) = 3$ and $T(x) = T(y) = (k, l, p)$. Then following three conditions are equivalent:

(E_1) $x \overset{M(3)}{\sim} y$;

(E_2) $< a_k, a_i >=< c_k, c_i >$,
$< a_l, a_j >=< c_l, c_j >$,
$< a_p, a_s >=< c_p, c_s >$,
for all $i, j, s = 1, 2, \ldots, m; j \neq k, s \neq k, s \neq l$;

(E_3) $< b_k - b_0, b_i - b_0 >=< d_k - d_0, d_i - d_0 >$,
$< b_l - b_0, b_j - b_0 >=< d_l - d_0, d_j - d_0 >$,
$< b_p - b_0, b_s - b_0 >=< d_p - d_0, d_s - d_0 >$
for all $i, j, s = 1, 2, \ldots, m; j \neq k, s \neq k, s \neq l$.

Proof. $(E_1) \to (E_2)$. By Corollary 1, $x \overset{M(3)}{\sim} y$ implies equalities $< a_i, a_j >=< c_i, c_j >$ for all $i, j = 1, 2, \ldots, m$. In particular, equalities (E_2) hold. A proof of the implication $(E_1) \to (E_3)$ is similar.

$(E_2) \to (E_1)$. Assume that equalities (E_2) hold. Prove that $< a_i, a_j >=< c_i, c_j >$ for all $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Let $z_1, z_2, z_3, z_4, w_1, w_2, w_3, w_4$ be vectors in R^3. Denote by $Gr(z_1, z_2, z_3, z_4; w_1, w_2, w_3, w_4)$ the Gram matrix of the system $z_1, z_2, z_3, z_4, w_1, w_2, w_3, w_4$:

$$Gr(z_1, z_2, z_3, z_4; w_1, w_2, w_3, w_4) = \left\| < z_i, w_j > \right\|_{i,j=1,2,3,4}. \tag{16}$$

The following lemma is known (see [26, p.75]; [15, p.106-107]).

Lemma 2. Let $z_1, z_2, z_3, z_4, w_1, w_2, w_3, w_4$ be vectors in R^3. Then

$$det \left\| < z_i, w_j > \right\|_{i,j=1,2,3,4} = 0.$$

Let r, q be numbers such that $1 \leq r, q \leq m, r \neq k, r \neq l, r \neq p, q \neq k, q \neq l, q \neq p$. Using Lemma 2 to vectors $z_1 = a_k, z_2 = a_l, z_3 = a_p, z_4 = a_r, w_1 = a_k, w_2 = a_l, w_3 = a_p, w_4 = a_q$, we obtain

$$det \begin{Vmatrix} < a_k, a_k > & < a_k, a_l > & < a_k, a_p > & < a_k, a_q > \\ < a_l, a_k > & < a_l, a_l > & < a_l, a_p > & < a_l, a_q > \\ < a_p, a_k > & < a_p, a_l > & < a_p, a_p > & < a_p, a_q > \\ < a_r, a_k > & < a_r, a_l > & < a_r, a_p > & < a_r, a_q > \end{Vmatrix} = 0. \tag{17}$$

The matrix of this determinant is $Gr(a_k, a_l, a_p, a_r; a_k, a_l, a_p, a_q)$. Cofactors of elements $< a_r, a_k >, < a_r, a_l >, < a_r, a_p >, < a_r, a_q >$ in $Gr(a_k, a_l, a_p, a_r; a_k, a_l, a_p, a_q)$ denote by $D_{rk}(a)$, $D_{rl}(a), D_{rp}(a), D_{rq}(a)$, respectively. From Eq. (13), we obtain

$$< a_r, a_k > D_{rk}(a) + < a_r, a_l > D_{rl}(a) + < a_r, a_p > D_{rp}(a) + < a_r, a_q > D_{rq}(a) = 0. \tag{18}$$

Similarly, for the system $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, we obtain

$$< c_r, c_k > D_{rk}(c) + < c_r, c_l > D_{rl}(c) + < c_r, c_p > D_{rp}(c) + < c_r, c_q > D_{rq}(c) = 0.$$

By the definition of the type of the system $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, we obtain that vectors a_k, a_l, a_p are linearly independent. This implies $det \left\| a_k a_l a_p \right\| \neq 0$. Applying equality (2) to vectors $u_1 = a_k, u_2 = a_l, u_3 = a_p$, we obtain

$$D_{rq}(a) = det \left\| < a_i, a_j > \right\|_{i,j=k,l,p} = det \left\| a_k a_l a_p \right\|^2 \neq 0.$$

Similarly, we have

$$D_{rq}(c) = det \left\| < c_i, c_j > \right\|_{i,j=k,l,p} = det \left\| c_k c_l c_p \right\|^2 \neq 0.$$

Since $D_{rq}(a) \neq 0$, equality (14) implies

$$< a_r, a_q >= \frac{< a_r, a_k > D_{rk}(a) + < a_r, a_l > D_{rl}(a) + < a_r, a_p > D_{rp}(a)}{D_{rq}(a)}. \tag{19}$$

For vectors $c_1, c_2, \ldots, c_m$, we obtain similarly the following equality

$$< c_r, c_q >= \frac{< c_r, c_k > D_{rk}(c) + < c_r, c_l > D_{rl}(c) + < c_r, c_p > D_{rp}(c)}{D_{rq}(c)}. \tag{20}$$

By equalities (E_2), we have $D_{rk}(a) = D_{rk}(c), D_{rl}(a) = D_{rl}(c), D_{rp}(a) = D_{rp}(c), D_{rq}(a) = D_{rq}(c)$. Using these equalities, equalities (E_2), (15) and (16), we obtain the equality

$$< a_r, a_q >=< c_r, c_q >$$

for all $r, q = 1, 2, \ldots, m$. According to Theorems **??** and 3, this means that $x \stackrel{M(3)}{\sim} y$.

A proof of the implication $(E_3) \to (E_1)$ is similar. The theorem is completed. □

Corollary 6. The system

$$U = \{T(x) = (k, l, p), < b_k - b_0, b_i - b_0 >, < b_l - b_0, b_j - b_0 >, < b_p - b_0, b_s - b_0 >,$$
$$i, j, s = 1, 2, \ldots, m; j \neq k, s \neq k, s \neq l\}$$

is a minimal complete system of $M(3)$-invariants of a Bézier curve $x(t) = b_0B_{0,m}(t)+b_1B_{1,m}(t)+\cdots + b_mB_{m,m}(t)$.

Proof. A proof is similar to the proof of Theorem 5. □

The number of elements in this system U is $3m$, where $3 \leq m$.

Theorem 9. Let Let $x(t) = a_0+a_1t+\cdots+a_mt^m = b_0B_{0,m}(t)+b_1B_{1,m}(t)+\cdots+b_mB_{m,m}(t)$ and $y(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_mt^m = d_0B_{0,m}(t) + d_2B_{1,m}(t) + \cdots + d_mB_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Assume that $rank(x) = rank(y) = 3$ and $T(x) = T(y) = (k, l, p)$. Then following three conditions are equivalent:

(S_1) $x \stackrel{SM(3)}{\sim} y$;

(S_2) $\det \|a_ka_la_p\| = \det \|c_kc_lc_p\|$, $< a_k, a_i >=< c_k, c_i >$,
$< a_l, a_j >=< c_l, c_j >$, $< a_p, a_s >=< c_p, c_s >$,
for all $i, j, s = 1, 2, \ldots, m; j \neq k, s \neq k, s \neq l, s \neq p$;

(S_3) $\det \|(b_k - b_0)(b_l - b_0)(b_p - b_0)\| = \det \|(d_k - d_0)(d_l - d_0)(d_p - d_0)\|$,
$< b_k - b_0, b_i - b_0 >=< d_k - d_0, d_i - d_0 >$, $< b_l - b_0, b_j - b_0 >=< d_l - d_0, d_j - d_0 >$,
$< b_p - b_0, b_s - b_0 >=< d_p - d_0, d_s - d_0 >$
for all $i, j, s = 1, 2, \ldots, m; j \neq k, s \neq k, s \neq l, s \neq p$.

Proof. $(S_1) \to (S_2)$. By Theorem 4, $x \stackrel{SM(3)}{\sim} y$ implies equalities $< a_i, a_j >=< c_i, c_j >$ and $\det \|a_ka_la_p\| = \det \|c_kc_lc_p\|$, for all $i, j, k, l, p = 1, 2, \ldots, m$. In particular, equalities (S_2) hold. A proof of the implication $(S_1) \to (S_3)$ is similar.

$(S_2) \to (S_1)$. Assume that equalities (S_2) hold. Prove that $< a_p, a_p >=< c_p, c_p >$.

Using Eq. (2), we obtain $(\det \|a_ka_la_p\|)^2 = \det \|< a_j, a_s >\|_{j,s=k,l,p}$. Using this equality and equalities (S_2), we obtain the equality $< a_p, a_p >=< c_p, c_p >$. This equality and equalities (S_2) imply the equalities (E_2) in Theorem 8. According to Theorem 8, $x \stackrel{M(3)}{\sim} y$. Then by Theorem 1, we have $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \stackrel{O(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ that is there exists $g \in O(3)$ such that $c_j = ga_j$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$. The equality $\det \|a_ka_la_p\| = \det \|c_kc_lc_p\|$ in (S_2) implies $\det \|a_ka_la_p\| = \det \|ga_kga_lga_p\| = \det g \det \|a_ka_la_p\|$. Since $\det \|a_ka_la_p\| \neq 0$, we have $\det g = 1$. This means that $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \stackrel{SO(3)}{\sim} \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. By Theorem 2, $x \stackrel{SM(3)}{\sim} y$. The implication $(S_2 \to (S_1))$ have been proved. A proof of $(S_3 \to (S_1))$ is similar. □

Theorem 10. Let Let $x(t) = a_0+a_1t+\cdots+a_mt^m = b_0B_{0,m}(t)+b_1B_{1,m}(t)+\cdots+b_mB_{m,m}(t)$ and $y(t) = c_0 + c_1t + \cdots + c_mt^m = d_0B_{0,m}(t) + d_2B_{1,m}(t) + \cdots + d_mB_{m,m}(t)$ be Bézier curves of degree m. Assume that $rank(x) = rank(y) = 2$ and $T(x) = T(y) = (k, l)$. Then following three conditions are equivalent:

(C_1) $x \overset{M(3)}{\sim} y$;

(C_2) $< a_k, a_i >=< c_k, c_i >$,
$< a_l, a_j >=< c_l, c_j >$,
for all $i, j = 1, 2, \dots, m; j \neq k$;

(C_3) $< b_k - b_0, b_i - b_0 >=< d_k - d_0, d_i - d_0 >$,
$< b_l - b_0, b_j - b_0 >=< d_l - d_0, d_j - d_0 >$,
for all $i, j = 1, 2, \dots, m; j \neq k$.

Proof. A proof is similar to the proof of Theorem 8. □

3. Correlations between elements of the second minimal complete system of control $M(3)$-invariants of a Bézier curve

We find correlations between elements of the minimal complete system $I = \{T(Z) = (k, l, p), \ < z_k, z_i >, < z_l, z_j >, < z_p, z_s >, i, j, s = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq k, s \neq k, s \neq l\}$ of invariants of the system of vectors $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m, \}$, where $3 < m$. For the system I, the Gram matrix $Gr(z_k, z_l, z_p, z_k, z_p, z_l,)$ is a symmetric positive definite matrix. This condition implies some system correlations between elements of the system I. We prove that an arbitrary correlation between elements of the system I is a consequence of the same correlations.

Theorem 11. Let k, l, p, m be natural numbers such that $1 \leq k < l < p \leq m$ and $\|w_{ij}\|$ is a real $3 \times m$-matrix such that the 3×3-matrix $\|w_{ij}\|_{i=1,2,3;j=k,l,p}$ is symmetric positive definite. Then there exists a system $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ of vectors in R^3 such that $rank(Z) = 3$, $T(Z) = (k, l, p)$ and $< z_k, z_j >= w_{1j}, < z_l, z_j >= w_{2j}, < z_p, z_j >= w_{3j}$ for all $j = 1, 2, \dots, m$.

Proof. Put $W = \|w_{ij}\|_{i=1,2,3;j=k,l,p}$. Since W is a symmetric positive definite 3×3-matrix, it is known from the linear algebra that there exists a real 3×3-matrix $g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$ such that $det(g) \neq 0$ and $g^\top g = W$, where $g^\top$ is the transpose matrix of g. Put $z_k = \|g_{s1}\|_{s=1,2,3}, z_l = \|g_{s2}\|_{s=1,2,3}, z_p = \|g_{s3}\|_{s=1,2,3}$. Then z_k, z_l, z_p are column-vectors such that $\|< z_i, z_j >\|_{i,j=k,l,p} = W$ that is $< z_k, z_j >= w_{1j}, < z_l, z_j >= w_{2j}, < z_p, z_j >= w_{3j}$ for all $j = k, l, p$. For $j \neq k, l, p$, put $z_j = h^{-1} \|w_{sj}\|_{s=1,2,3}$, where $h = g^\top$. Then $< z_k, z_j >= w_{1j}, < z_l, z_j >= w_{2j}, < z_p, z_j >= w_{3j}$ for all $j \neq k, l, p$. Thus $< z_k, z_j >= w_{1j}, < z_l, z_j >= w_{2j}, < z_p, z_j >= w_{3j}$, for all $j = 1, 2, \dots, m$. The theorem is completed. □

Corollary 7. Let k, l, p, m be natural numbers such that $1 \leq k < l < p \leq m$ and $\|b_{ij}\|$ is a real $3 \times m$-matrix such that the 3×3-matrix $\|b_{ij}\|_{i=1,2,3;j=k,l,p}$ is symmetric positive definite. Then there exists a Bézier curve $x(t) = b_0B_{0,m}(t) + b_1B_{1,m}(t) + \cdots + b_mB_{m,m}(t)$ of degree m such that $rank\{b_1 - b_0, b_2 - b_0, \dots, b_m - b_0\} = 3$, $T(x) = (k, l, p)$ and $< b_k - b_0, b_j - b_0 >= b_{1j}, < b_l - b_0, b_j - b_0 >= b_{2j}, < b_p - b_0, b_j - b_0 >= b_{3j}$ for all $j = 1, 2, \dots, m$.

Proof. It follows from Theorem 11. □

Corollary 8. Let k, l, p, m be natural numbers such that $1 \leq k < l < p \leq m$ and $\|a_{ij}\|$ be a real $3 \times m$-matrix such that the 3×3-matrix $\|a_{ij}\|_{i=1,2,3; j=k,l,p}$ is symmetric positive definite. Then there exists a polynomial curve $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ of degree m such that $rank\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} = 3$, $T(x) = (k, l, p)$ and $< a_k, a_j >= a_{1j}, < a_l, a_j >= a_{2j}, < a_p, a_j >= a_{3j}$ for all $j = 1, 2, \ldots, m$.

Proof. It follows from Theorem 11. □

REFERENCES

1. Bayro-Corrochano, E., Banarer, V., A geometric approach for the theory and applications of 3D projective invariants, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 16 (2002) 131-154.

2. Bez, H. E., An analysis of invariant curves, Computer Aided Geometric Design, 6 (1989) 265-277.

3. Bez, H. E., On the relationship between parametrisation and invariance for curve functions, Computer Aided Geometric Design, 17 (2000) 793-811.

4. Civi, H., Christopher, C., Ercil, A., The classical theory of invariants and object recognition using algebraic curve and surfaces, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 19 (2003) 237-253.

5. Chen, F., Yang, W., Degree reduction of disk Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, 21 (2004) 263-280.

6. Farin, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide. Academic Press, INC., New York, 1990.

7. Farin, G., Sapidis, N., Curvature and the fairness of curves and surfaces, IEEE Comput. Graph. Appl., 9 (2) (1989) 52-57.

8. Forsyth, D., Mundy, J. L., Zisserman, A., Coelho, C., Heller, A., Rothwell, C., Invariant descriptors for 3D object recognition and pose, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13, No. 10 (1991) 971-992.*

9. Frey, W. H., Field, D. A., Designing Bézier conic segments with monotone curvature, Computer Aided Geometric Design, 17 (2000) 457-483.

10. Guggenheimer, H.W.: Differential Geometry, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963.

11. Goldman, R., Schaefer, S., Ju, T., Turtle geometry in computer graphics and computer aided design, Computer Aided Design, 36 (2004) 1471-1482.

12. Goldman, R., Curvature formulas for implicit curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design, 22 (2005) 632-658.

13. Gomes, J., Darsa, L., Costa, B., Velho, L., Warping and Morphing of Graphical Objects, Morgan Kaufmann Publ. INC., San Francisco, 1999. I, Berlin, Springer -Verlag, 1971.

14. Heisterkamp, D. R., Bhattacharya, P., Invariants of families of coplanar conics and their applications to object recognition, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 7 (1997) 235-267.

15. Khadjiev, D., An Application of Invariant Theory to Differential Geometry of Curves, Fan Publ., Tashkent, 1988. (In Russian).

16. Khadjiev, D. and Pekşen Ö., The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves, Differential Geometry and its Applications, 20 (2004), 167-175.

17. Marsh, D., Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, Springer-Verlag, London, 1999.

18. Mundy, J. L., Zisserman, A., (editors), Geometric Invariance in Computer Vision, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1992.

19. Mundy, J. L., Zisserman, A., Forsyth, D., (editors), Applications of Invariance in Computer Vision, Second Joint European-US Workshop, Ponta Delgada, Azores, Portugal, 1993, Proceedings, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

20. Patterson, R. R., Composition of parametrizations, using the paired algebras of forms and sites, Computer Aided Geometric Design 23 (2006) 113-124.

21. Pekşen Ö. and Khadjiev, D.: On invariants of curves in centro-affine geometry, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 44-3 (2004) 603-613.

22. Penna, M., Patterson, R., Projective Geometry and Its Applications to Computer Graphics, Prentice Hall, 1986.

23. Peters, J., Reif, U., The 42 equivalence classes of quadratic surfaces in affine n-space, Computer Aided Geometric Design, 15 (1998) 459-473.

24. Weinshall, D., Minimal decomposition of model-based invariants, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 0 (1999) 75-85.

25. Weiss, I., Geometric invariants and object recognition, International Journal of Computer Vision, 10 , No.3 (1993) 201-231.

26. Weyl, H., The Classical Groups. Their Invariants and Representations., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

27. Zheng, J., Sederberg, T., Gaussian and mean curvatures of rational Bézier patches, Computer Aided Geometric Design, 20 (2003) 297-301.

REZYUME

Agar G gruppa 3-o'lchovli Evklid fazosining barcha harakatlarining $M(3)$ gruppasi bo'lsa yoki G gruppa R^3 fazoning aylanishi va siljishlari natijasida hosil qilingan $M(3)$ gruppaning qism gruppasi bo'lsa, Béze egri chizig'i G-invariantlar boshqaruvining ikkita minimal to'liq sistemasi hosil qilingan. $M(3)$-invariantlar boshqaruvining ikkinchi minimal to'liq sistemasi elementlari orasidagi korrelyatsiyalar tadqiq etilgan.

Kalit so'zlar: Bez'e egri chizig'i, boshqaruv invarianti.

РЕЗЮМЕ

Пусть G - группа $M(3)$ всех движений 3-мерного евклидова пространства или G подгруппа $M(3)$, порожденная вращениями и сдвигами R^3. Получены две минимальные полные системы управляющих G-инвариантов кривой Безье. Исследуются корреляции между элементами второй минимальной полной системы $M(3)$-инвариантов управления.

Ключевые слова: Кривая Безье, инвариант управления.

UDC 517.946

Panjaradagi ikki zarrachali diskret Shryodinger operatori xos qiymatlari uchun asimptotika

Mahmudov H.Sh.
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand
mahmudovh276@gmail.com

REZYUME

Ushbu ishda ikki o‘lchamli $\mathbb{Z}^2$ panjarada silindrik potensialli ikki fermionli sistema Hamiltoniani qaralgan. Toq funksiyalar Gilbert fazosi $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ sistema Hamiltonianiga mos $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo‘lgan $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ fazolar to‘g‘ri yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlanib, ixtiyoriy $\beta \in (0,\pi)$ uchun $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta) := H(\mathbf{k}_\beta)\big|_{L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)}$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi)$ operatorning muhim spektrdan quyida cheksizta xos qiymatlarga ega ekanligi ko‘rsatilgan. $\beta \to 0$ da $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operatorning $n-$ xos qiymati $z_n(\beta)$ uchun asimptotik formula topilgan.

Kalit so‘zlar: Shryodinger operatori, panjara, kvaziimpuls, fermion, muhim spektr, xos qiymat, invariant qism fazolar, asimptotik yoyilma.

Kirish va asosiy natijalar

[1] ishda ikki zarrachali uzluksiz $h_\lambda = -\Delta + \lambda V$ Shryodinger operatori spektrining manfiy elementlari to‘plamining chekliligi va h_λ musbat xos qiymatlari yo‘qligi sharti topilgan. Agar $V \le 0$ bo‘lsa, u holda $N(\lambda)$ manfiy xos qiymatlar soni $\lambda \in (0,\infty)$ ning kamaymaydigan funksiyasidir va har bir $z_n(\lambda)$ xos qiymat $(0,\infty)$ oraliqda kamayadi. Ma’lumki [1], λ bog‘liqlik konstantasi kamayishi bilan h_λ bog‘langan holatlarning energiyalari uzluksiz spektrning chegarasiga intiladi va ba’zi bir chekli λ uchun ular chegarada bo‘ladi. U holda ikkita savol tug‘iladi: bog‘langan yoki virtual holat bunday chegara holatiga mos keladimi (ya’ni, mos keladigan to‘lqin funksiyasi kvadratik integrallash mumkinmi?) va λ yanada kamayganda, bog‘langan holatlar “qayerga yo‘qoladi?” Birinchi savol [2], [3] va [4] ishlarda o‘rganilgan.

Ikki zarrachali Shryodinger operatorning bir o‘lchamli panjaradagi xos qiymatlarining qo‘zg‘alishi [5] ishda o‘rganilgan. $H(\pi)$ operatorining cheksizta $z_m(\pi) = \hat{v}(m), m \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$) xos qiymatlari borligi isbotlangan. Agar $\hat{v}$ potentsial $\mathbb{Z}_+$ bo‘ylab ortib borsa, u holda faqatgina $z_0(\pi)$ xos qiymat oddiy, boshqa barcha xos qiymatlar ikki karrali bo‘ladi. $H(\pi)$ operatorning barcha $z_m(\pi)$, $m \in \mathbb{N}$ ikki karrali xos qiymatlarining har biri $k \in (\pi - \delta, \pi)$ kichik qo‘zg‘alishlar uchun $z_m^-(k)$ va $z_m^+(k)$ oddiy xos qiymatlarga ajralishi ko‘rsatilgan.

[6] ishda uch o‘lchamli $\mathbb{Z}^3$ panjaradagi ikki zarrachali sistema Hamiltonianiga mos $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$ Shredinger operatori qaralgan. Har bir $k_i \in [0,\pi], i = 1,2,3$ uchun $H(\mathbf{k})$ operatorning muhim spektrdan chapdagi xos qiymatlari soni $N(\mathbf{k}) = N(k_1,k_2,k_3)$ kamaymovchi funksiya

ekanligi isbotlangan. [7] ishda ν – o'lchamli panjara $\mathbb{Z}^\nu$ da ikki zarrachali $H(k)$ Shryodinger operatorlari o'rganilgan va $H(k)$ ning manfiy xos qiymatlari soni $\hat{v}$ potensiallarining keng sinfi uchun chekli ekanligi isbotlangan.

[8] ishda $\mathbb{Z}^2$ ikki o'lchamli panjarada eksponensial kamayuvchi potensialli ikki fermionli sistema Hamiltoniani qaralgan. Qaralayotgan sistemaga mos $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ operatori uchun $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ toq funksiyalar gilbert fazosi ikkita $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ invariant qism fazolarga ega bo'lib, $H^{oe}(\mathbf{k}_\beta)$, va $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi)$ lar orqali $H(\mathbf{k})$ operatorning mos ravishda $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolardagi qismlari belgilangan. Ixtiyoriy $\beta \in (0, \pi)$ uchun $H^{oe}(\mathbf{k}_\beta)$ operatorning muhim spektrdan chapda joylashgan chekli sondagi xos qiymatlarga ega ekanligi hamda ixtiyoriy$\beta \in [0, \pi]$ uchun $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operatorning esa muhim spektrdan chapda joylashgan cheksizta xos qiymatga ega ekanligi isbotlangan. $\beta \to 0$ da $H^{oe}(\mathbf{k}_\beta)$ operatorning xos qiymatlari soni $N(\beta)$ cheksizga intilishi ko'rsatilgan va u uchun asimptotik formula topilgan.

Panjaradagi ikki zarrachali sistema gamiltoniani impuls tasvirda quyidagi fon-Neyman to'g'ri integraliga yoyiladi [9]:

$$H \simeq \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2} \oplus H(\mathbf{k})\, \mathrm{d}\mathbf{k},$$

bu yerda $\mathbb{T}^2-$ ikki o'lchamli tor.

Ikki o'lchamli panjarada ikki fermionli sistemasiga mos $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ operator $L_2^o(\mathbb{T}^2) \subset L_2(\mathbb{T}^2)$ toq funksiyalar qism fazosida quyidagi

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V, \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad (Vf)(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) f(\mathbf{s})\, \mathrm{d}\mathbf{s},$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}); \quad \varepsilon(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2} (1 - \cos q_i), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{T}^2. \tag{2}$$

V integral operatorining $v(\mathbf{q})$ yadrosi $v(\mathbf{q}) = \dfrac{c_0}{2\pi} v_1(q_1) v_2(q_2)$ shaklida ifodalanadi va

$$v_1(q_1) = 1 + \frac{2}{10}\cos q_1 + \frac{2}{10^2}\cos 2q_1, \quad v_2(q_2) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} 10^{-m} \cos m q_2. \tag{3}$$

Ma'lumki, $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ fazoni $L_2^o(\mathbb{T}^2) = L_2^{eo}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ to'g'ri yig'indi shaklida, $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolarni quyidagicha tenzor ko'paytmalar shaklida yozish mumkin [10]:

$$L_2^{eo}(\mathbb{T}^2) = L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^o(\mathbb{T}), \qquad L_2^{oe}(\mathbb{T}^2) = L_2^o(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}),$$

bu yerda

$$L_2^e(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}, \qquad L_2^o(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\}.$$

Ta'kidlaymizki, $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazo $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi (3.1. lemmaga qarang). $H^{eo}(\mathbf{k})$ orqali $H(\mathbf{k})$ operatorning $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazodagi qismini belgilaymiz.

Ushbu ishda olingan asosiy natija quyidagi tasdiq orqali keltiriladi:

Teorema 1. *a) $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\pi}=(\pi,\pi)\in\mathbb{T}^2$ operatorning ikki karrali $z_1(\boldsymbol{\pi})=4-\bar{v}(1)$ xos qiymatining biror atrofida joylashgan oddiy xos qiymatga ega va bu xos qiymat uchun quyidagi asimptotik formula o‘rinli:*

$$z_1^{(1)e}(\beta)=z_1(\boldsymbol{\pi})-\frac{2\cdot 10^2}{9c_0}\beta^2+O\left(\beta^4\right),\quad \beta\to 0;$$

b) $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$ operatorning to‘rt karrali $z_2(\boldsymbol{\pi})=4-\bar{v}(2)$ xos qiymatining biror atrofida yotuvchi ikkita oddiy xos qiymatga ega va bu xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formulalar o‘rinli:

$$z_2^{(1)e}(\beta)=z_2(\boldsymbol{\pi})-\frac{2\cdot 10^3}{9c_0}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z_2^{(2)e}(\beta)=z_2(\boldsymbol{\pi})-\frac{92\cdot 10^2}{81c_0}\beta^2+O\left(\beta^4\right),\quad \beta\to 0;$$

c) Har bir $n\geq 3$ uchun shunday $\delta_n>0$ mavjudki, ixtiyoriy $\beta\in(0,\delta_n)$ uchun $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operator $H(\boldsymbol{\pi})$ operator besh karrali $z_n(\boldsymbol{\pi})=4-\bar{v}(n)$ xos qiymati xos qiymatning biror atrofida yotuvchi uchta xos qiymati mavjud va bu xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formula o‘rinli:

$$z_n^{(1)e}(\beta)=z_n(\boldsymbol{\pi})-\frac{2\cdot 10^{n+1}}{9c_0}\beta^2+O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z_n^{(2)e}(\beta)=z_n(\boldsymbol{\pi})-\frac{92\cdot 10^{n}}{81c_0}\beta^2+O\left(\beta^4\right),\quad \beta\to 0,$$

$$z_n^{(3)e}(\beta)=z_n(\boldsymbol{\pi})-\frac{8\cdot 10^{n}}{9c_0}\beta^2+O\left(\beta^4\right),\quad \beta\to 0.$$

Panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatori muhim spektri haqida

Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistemasiga mos $H(\mathbf{k}),\ \mathbf{k}\in\mathbb{T}^2$ operator $L_2^o(\mathbb{T}^2)=\{f\in L_2(\mathbb{T}^2):f(-q)=-f(q)\}$ qism fazoda (1) ko‘rinishda va $H_0(\mathbf{k})$ hamda V operatorlar (2) formula orqali berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, $H_0(\mathbf{k})$ operator spektri $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiya qiymatlar sohasidan iborat:

$$\sigma(H_0(\mathbf{k}))=[m(\mathbf{k}),M(\mathbf{k})],$$

bu yerda

$$m(\mathbf{k})=\min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})=2\,\varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2}\right),$$

$$M(\mathbf{k})=\max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})=\varepsilon_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\pi})=8-2\,\varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2}\right).$$

V operatorining spektri $\{0,\bar{v}(n),\ n\in\mathbb{N}\}$ to‘plamidan iborat, bu yerda $\bar{v}(n)$ lar V operatorning xos qiymatlari. (3) shartdan V operatorning Gilbert-Shmidt operatori ekanligi kelib chiqadi.

V kompakt operator bo‘lgani uchun Veyl teoremasiga ko‘ra $H(\mathbf{k})$ operatorining muhim spektri $H_0(\mathbf{k})$ operatorining spektri bilan ustma-ust tushadi ([1] ga qarang), ya’ni

$$\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})].$$

$w(\mathbf{k})$ orqali $H(\mathbf{k})$ operator muhim spektri kengligini belgilaymiz. U holda

$$w(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) - m(\mathbf{k}) = 8 - 4\,\varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}}\right) = 4\cos\frac{k_1}{2} + 4\cos\frac{k_2}{2} \tag{4}$$

va

$$\min_{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2} w(\mathbf{k}) = w(\boldsymbol{\pi}) = 0, \quad \max_{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2} w(\mathbf{k}) = w(\mathbf{0}) = 8,$$

bo‘ladi, bu yerda $\boldsymbol{\pi} = (\pi,\pi)$, $\mathbf{0} = (0,0)$.

(4) dan ko‘rinadiki, agar ikki zarrachali sistema to‘la kvaziimpulsi $\mathbf{k}$ ning koordinatasi $k_j \in [0,\pi], j = 1,2,$ ortsa, u holda muhim spektr kengligi $w(\mathbf{k})$ kamayadi. $H(\mathbf{k})$ operator muhim spektrining yo‘nalishlar bo‘yicha kengligini $\mathbf{e}_j, j = 1,2,$ orqali ifodalaymiz:

$$w_j(\mathbf{k}) = \max_{p_j\in[-\pi,\pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - \min_{p_j\in[-\pi,\pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4\cos\frac{k_j}{2}, \quad j = 1,2.$$

U holda

$$w(\mathbf{k}) = w_1(\mathbf{k}) + w_2(\mathbf{k})$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi}$ bo‘lsa, u holda muhim spektr birgina $\{4\}$ nuqtaga yig‘iladi, ya’ni $w(\boldsymbol{\pi}) = 0$. $H(\boldsymbol{\pi}) = 4I - V$ ning spektri $4 - \bar{v}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ko‘rinishdagi xos qiymatlardan iborat bo‘ladi. Agar muhim spektrning kengligi kamaysa, $H(\mathbf{k})$ Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni ortadi.Faraz qilaylik, $\mathfrak{H}$ Gilbert fazosida ixtiyoriy B o‘z-o‘ziga qo‘shma operator uchun $n[\mu, B]$ soni B ning μ, $\mu > \ sup\sigma_{ess}(B)$ dan yuqorida joylashgan xos qiymatlari sonini bildirsin.

$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operator o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi va V ning musbatligidan

$$\sigma(H(\mathbf{k})) \cap (M(\mathbf{k}), \infty) = \emptyset$$

kelib chiqadi, ya’ni $\sigma_{disc}(H(\mathbf{k})) \subset (-\infty, m(\mathbf{k}))$.

Invariant qism fazolar

Dastlab $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant qism fazo haqidagi lemmani keltiramiz.

Lemma 1. *$L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazo $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

Isbot. Dastlab, $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoning $H_0(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariantligini keyin esa V ga nisbatan invariantligini isbotlaymiz. (2) tasvirdan ko‘rinadiki, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ operator $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ ga qarashli bo‘ladi, bu yerda $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2) = L_2^{e}(\mathbb{T}) \otimes L_2^{e}(\mathbb{T})$. Bu yerdan $f \in L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ bo‘lsa, $\varepsilon_{\mathbf{k}} f \in L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ bo‘lishini hosil qilamiz. Bu munosabat $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoning $H_0(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariantligini isbotlaydi. (3) shartga ko‘ra V operatorning $v(p_1,p_2)$ yadrosi $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoga qarashlidir. Bundan $f \in L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ uchun $g = Vf$ ning $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoga tegishli bo‘lishi kelib chiqadi, ya’ni:

$$(Vf)(p_1,p_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^2} v(p_1 - s_1, p_2 - s_2) f(s_1,s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 \in L_2^{oe}(\mathbb{T}^2).$$

Yuqoridagi munosabatlardan $L_2^{\mathrm{eo}}(\mathbb{T}^2)$ qism fazoning $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operatorga nisbatan invariantligini hosil qilamiz. Lemma isbotlandi.

(3) tenglikga ko‘ra $V^{eo} = V\big|_{L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)}$ operatorning aniq ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$(V^{eo}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\Big\{\bar v(1)\sin p_2\sin q_2 + \bar v(2)\{\sin 2p_2\sin 2q_2 +$$
$$+2\cos p_1\sin p_2\cos q_1\sin q_2\} +$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\bar v(n)[\sin np_2\sin nq_2 + 2\cos p_1\ \sin(n-1)p_2\ \cos q_1\ \sin(n-1)q_2 +$$
$$+2\cos 2p_1\ \sin(n-2)p_2\ \cos 2q_1\ \sin(n-2)q_2]\Big\}f(\mathbf{q})\,\mathrm{d}\mathbf{q},\quad f\in L_2^{eo}(\mathbb{T}^2).$$

Faraz qilaylik, $\big\{\psi_n^o(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nq\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema $L_2^o(\mathbb{T})$ qism fazodagi ortonormal bazis, $L^o(n)$ esa $\big\{\psi_n^o(q)\big\}, n\in\mathbb{N}$ vektorga tortilgan bir o‘lchamli qism fazo bo‘lsin. U holda:

$$L_2^o(\mathbb{T}) = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus L^o(n)$$

tenglikka egamiz. Bundan quyidagi

$$L_2^e(\mathbb{T})\otimes L_2^o(\mathbb{T}) = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus\{L_2^e(\mathbb{T})\otimes L^o(n)\} = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{B}_n^{eo},$$

yoyilmani hosil qilamiz, bu yerda $\mathfrak{B}_n^{eo} := L_2^e(\mathbb{T})\otimes L^o(n)$.

Lemma 2. *Ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$ uchun $\mathfrak{B}_n^{eo}$ qism fazo $H^{eo}(k_1,\pi)$ operatorga nisbatan invariant bo‘ladi.*

Isbot. $\mathfrak{B}_n^{eo}$ ning ixtiyoriy elementini $\big(f\,\psi_n^o\big)(p_1,p_2) := f(p_1)\,\psi_n^e(p_2)$, ko‘rinishda tanlab olamiz. U holda $H^{eo}(k_1,\pi) = H_0(k_1,\pi) - V^{eo}$ operatorning $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ fazodagi ta’siri quyidagicha bo‘ladi:

$$(H_0(k_1,\pi)f\psi_n^o)(p_1,p_2) = \Big[(4 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1)f(p_1)\Big]\psi_n^o(p_2)\in\mathfrak{B}_n^{eo}, \tag{5}$$

$$(V^{eo}f\psi_n^o)(p_1,p_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\Big\{\bar v(1)\sin p_2\sin q_2 + \bar v(2)\{\sin 2p_2\sin 2q_2 + 2\cos p_1\sin p_2\cos q_1\sin q_2\} +$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\bar v(n)[\sin np_2\sin nq_2 + 2\cos p_1\ \sin(n-1)p_2\ \cos q_1\ \sin(n-1)q_2 +$$
$$+2\cos 2p_1\ \sin(n-2)p_2\ \cos 2q_1\ \sin(n-2)q_2]\Big\}f(q_1)\psi_n^e(q_2)\,dq_1dq_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\{\bar v(n) + 2\bar v(n+1)\cos p_1\cos q_1 + 2\bar v(n+2)\cos 2p_1\cos 2q_1\Big]\psi_n^e(p_2)\in\mathfrak{B}_n^{eo}. \tag{6}$$

Lemma isbotlandi.

(5) va (6) ifodalardan ko‘rinadiki, $H^{eo}(k_1,\pi)$ operatorning $\mathfrak{B}^{eo}_n := L^e_2(\mathbb{T}) \otimes L^o(n)$ qism fazodagi qismi $H^{eo}_n(k_1,\pi)$ quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$H^{eo}_n(k_1,\pi) = [H_0(k_1) - V^e_n] \otimes I_n, \tag{7}$$

bu yerda I_n operator $L^o(n)$ dagi birlik operator, $H^e_n(k_1) := H_0(k_1) - V^e_n$ esa $L^e_2(\mathbb{T})$ fazoda quyidagicha ta’sir qiladi:

$$(H^e_n(k_1)f)(p) = \varepsilon_{k_1}(p)f(p)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1)\cos p \cos q + 2\bar{v}(n+2)\cos 2p \cos 2q] f(q)dq. \tag{8}$$

bunda $\varepsilon_{k_1}(p) = 4 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p$.

Shunday qilib, $H^{eo}(k_1,\pi)$ operator quyidagi to‘g‘ri yig‘indilarga yoyiladi:

$$H^{eo}(k_1,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H^{eo}_n(k_1,\pi). \tag{9}$$

Bu yerda $H^{eo}_n(k_1,\pi)$ operator (7) munosabatga ko‘ra aniqlangan.

Shu tariqa ikki o‘lchamli $H^{eo}(k_1,\pi)$ operator spektrini o‘rganish masalasini bir o‘lchamli $H^e_n(k_1), n \in \mathbb{N}$ operator spektrini o‘rganish masalasiga keltirildi.

$H^e_n(k_1)$ operator spektri haqida

Ushbu bo‘limda biz (8) bilan aniqlangan $H^e_n(k_1), n \in \mathbb{N}$ operator spektriga doir ba’zi tasdiqlarni keltiramiz, so‘ngra (7) va (9) tasvirlardan foydalanib $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi)$ operator uchun natijalarni keltiramiz.

Eslatib o‘tamizki, $H^e_n(k_1)$ operator muhim spektri kengligi bo‘lgan $w(k_1) := w(k_1,\pi)$ funksiya n dan bog‘liq emas va quyidagiga teng:

$$w(k_1) = w_1(k_1) = 4\cos\frac{k_1}{2}.$$

Ma’lumki, $H^e_n(k_1)$ operatorning muhim spektrdan chapda yotuvchi xos qiymatlarini o‘rganish o‘z-o‘ziga qo‘shma, kompakt va musbat $T^e_n(k_1,z) = r_0^{\frac{1}{2}}(k_1,z)V^e_n r_0^{\frac{1}{2}}(k_1,z)$ operator xos qiymatlarini o‘rganishga keltiriladi ([11] ga qarang).

Faraz qilaylik, $m(k_1)$ va $M(k_1)$ sonlar ε_{k_1} funksiyaning minimum va maksimum qiymatlari bo‘lsin. Ixtiyoriy $z \in (-\infty, m(k_1))$ uchun $T^e_n(k_1,z)$ operator $L^e_2(\mathbb{T})$ fazoda quyidagi formula orqali aniqlangan:

$$(T^e_n(k_1,z)g)(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\left[\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1)\cos p\cos s + 2\bar{v}(n+2)\cos 2p \cos 2s\right] g(s)ds}{\sqrt{\varepsilon_{k_1}(p) - z}\sqrt{\varepsilon_{k_1}(s) - z}}.$$

$T^e_n(k_1,z)$ operator aniqlanishidan ravshanki, har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun ushbu operator rangi uchga teng.

Lemma 3. *$z \in (-\infty, m(k_1))$ soni $H_n^e(k_1)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun 1 soni $T_n^e(k_1, z)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi zarur va yetarli.*

Ushbu lemma isboti [11] ishdagi 5-lemmaning isbotiga o‘xshash bo‘lganligi uchun keltirmaymiz.

Lemma 4. *$H_n^e(k_1)$ operatorining $z < m(k_1)$ dan chapda yotuvchi xos qiymatlari soni $T_n^e(k_1, z)$ operatorining birdan katta xos qiymatlari soniga teng, ya’ni:*

$$n\Big[1, T_n^e\,(k_1, z)\Big] = n\Big[-z, -H_n^e(k_1)\Big].$$

Ushbu lemma [11] ishdagi 7-lemma kabi ibotlanadi.

Teorema 2. *Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun $H_n^e(k_1)$ operatorning muhim spektrdan chapda joylashgan kamida bitta xos qiymati mavjud.*

Teorema 2 isboti [8] ishdagi 5.3 teorema kabi bajariladi.

Teorema 3. *Ixtiyoriy $\beta \in [0, \pi]$ uchun $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ operatorning muhim spektrdan chapda yotuvchi cheksizta xos qiymati mavjud.*

Isbot. Teorema isboti bevosita Teorema 2 va (9) tenglikdan kelib chiqadi.

Endi $H_n^e(\pi - 2\beta)$ operatorining xos qiymatlari uchun kichik β larda ba’zi tasdiqlarni isbotsiz keltirib o‘tamiz. Ta’kidlab o‘tamizki, tayinlangan $n \in \mathbb{N}$ uchun $H_n^e(\pi)$ operator uchta oddiy xos qiymatlarga ega:

$$z_n(\pi) = 4 - \bar{v}(n), \quad z_{n+1}(\pi) = 4 - \bar{v}(n+1), \quad z_{n+2}(\pi) = 4 - \bar{v}(n+2).$$

Teorema 4. *Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun shunday $\delta_n > 0$ mavjudki, ixtiyoriy $\beta \in (0, \delta_n)$ uchun $H_n^e(\pi - 2\beta)$ operatorning $z_n^{(1)e}(\beta)$, $z_{n+1}^{(2)e}(\beta)$ va $z_{n+2}^{(3)e}(\beta)$ xos qiymatlari mavjud bo‘lib, ular uchun quyidagi asimptotik formulalar o‘rinli:*

$$z_n^{(1)e}(\beta) = z_n(\pi) - \frac{20 \cdot 10^n}{9c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0, \tag{10}$$

$$z_{n+1}^{(2)e}(\beta) = z_{n+1}(\pi) - \frac{92 \cdot 10^{n+1}}{81c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0, \tag{11}$$

$$z_{n+2}^{(3)e}(\beta) = z_{n+2}(\pi) - \frac{8 \cdot 10^{n+2}}{9c_0}\beta^2 + O\left(\beta^4\right), \quad \beta \to 0. \tag{12}$$

Isbot. Faraz qilaylik $H_n^e(\pi - 2\beta)f = zf$ tenglama nolmas $f \in L_2^e(\mathbb{T})$ yechimga ega bo‘lsin. U holda bu tenglamadan

$$(4 - 2\sin\beta\cos p - z)f(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}[\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1)\cos p\cos s + 2\bar{v}(n+2)\cos 2p\cos 2s]f(s)ds$$

tenglikni olamiz. Quyidagi

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(s)ds, \;\; c_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos s f(s)ds, \;\; c_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos 2s f(s)ds \tag{13}$$

belgilashlarni olib, $f(p)$ xos funksiya uchun ushbu tasvirga ega bo‘lamiz:

$$f(p) = \frac{\bar{v}(n)}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}c_1 + \frac{2\bar{v}(n+1)\cos p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}c_2 + \frac{2\bar{v}(n+2)\cos 2p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}c_3. \tag{14}$$

(14) ni (13) ga qo‘yib, c_1, c_2 va c_3 larga nisbatan bir jinsli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} c_1 = \bar{v}(n)\Delta_{11}(\beta,z)c_1 + 2\bar{v}(n+1)\Delta_{12}(\beta,z)c_2 + 2\bar{v}(n+2)\Delta_{13}(\beta,z)c_3, \\ c_2 = \bar{v}(n)\Delta_{21}(\beta,z)c_1 + 2\bar{v}(n+1)\Delta_{22}(\beta,z)c_2 + 2\bar{v}(n+2)\Delta_{23}(\beta,z)c_3, \\ c_3 = \bar{v}(n)\Delta_{31}(\beta,z)c_1 + 2\bar{v}(n+1)\Delta_{32}(\beta,z)c_2 + 2\bar{v}(n+2)\Delta_{33}(\beta,z)c_3. \end{cases}$$

Bu yerda

$$\Delta_{11}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}; \quad \Delta_{12}(\beta,z) = \Delta_{21}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos p\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z};$$

$$\Delta_{13}(\beta,z) = \Delta_{31}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2p\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}; \quad \Delta_{22}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 p\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}; \tag{15}$$

$$\Delta_{23}(\beta,z) = \Delta_{32}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos p\cos 2p\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}; \quad \Delta_{33}(\beta,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 2p\mathrm{d}p}{4 - 2\sin\beta\cos p - z}.$$

Bu bir jinsli tenlamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo‘lishi uchun

$$\Delta(\beta,z) = \begin{vmatrix} 1 - \bar{v}(n)\,\Delta_{11}(\beta,z) & -2\bar{v}(n+1)\Delta_{12}(\beta,z) & -2\bar{v}(n+2)\Delta_{13}(\beta,z) \\ -\bar{v}(n)\Delta_{21}(\beta,z) & 1 - 2\bar{v}(n+1)\Delta_{22}(\beta,z) & -2\bar{v}(n+2)\Delta_{23}(\beta,z) \\ -\bar{v}(n)\Delta_{31}(\beta,z) & -2\bar{v}(n+1)\Delta_{32}(\beta,z) & 1 - 2\bar{v}(n+2)\Delta_{33}(\beta,z) \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Kichik β lar uchun $1/(6 - z - 2\sin\beta\cos p)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyamiz:

$$\frac{1}{(4-z)\Big(1 - \dfrac{2\sin\beta\cos p}{4-z}\Big)} = \frac{1}{4-z}\Big(1 + \frac{2\sin\beta\cos p}{4-z} + \frac{4\sin^2\beta\cos^2 p}{(4-z)^2} + \cdots + \frac{(2\sin\beta\cos p)^n}{(4-z)^n} + \cdots\Big).$$

Ushbu tenglik o‘ng tominidagi yoyilmani (15) ga qo‘yamiz. Agar

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n-1} p dp = 0$$

munosabatni hisobga olsak, $\Delta(\beta,z)$ funksiya β ning juft funksiyasi ekanligini ko‘rish mumkin.

Endi $\Delta(\beta,z)=0$ tenglamaning $z=z(\beta)$ yechimini β^2 aniqlikda hisoblaymiz va quyidagi tasvirlarni olamiz:

$$\Delta_{11}(\beta,z)=\frac{1}{4-z}+\frac{2\beta^2}{(4-z)^3},\qquad \Delta_{12}(\beta,z)=\Delta_{21}(\beta,z)=\frac{\beta}{(4-z)^2},$$

$$\Delta_{22}(\beta,z)=\frac{1}{2(4-z)}+\frac{3\beta^2}{2(4-z)^3},\quad \Delta_{13}(\beta,z)=\Delta_{31}(\beta,z)=\frac{\beta^2}{(4-z)^3},$$

$$\Delta_{23}(\beta,z)=\Delta_{32}(\beta,z)=\frac{\beta}{2(4-z)^2},\qquad \Delta_{33}(\beta,z)=\frac{1}{2(4-z)}+\frac{\beta^2}{(4-z)^3}.$$

Bu tengliklarni determinant $\Delta(\beta,z)$ ga qo‘yib:

$$\Delta(\beta,z)=(1-\frac{\bar{v}(n)}{(4-z)}-\frac{2\bar{v}(n)\beta^2}{(4-z)^3})\cdot(1-\frac{\bar{v}(n+1)}{(4-z)}-\frac{3\bar{v}(n+1)\beta^2}{(4-z)^3})\cdot(1-\frac{\bar{v}(n+2)}{(4-z)}-\frac{2\bar{v}(n+2)\beta^2}{(4-z)^3})-$$

$$\frac{\bar{v}(n+1)\bar{v}(n+2)\beta^2}{(4-z)^4}\cdot(1-\frac{\bar{v}(n)}{(4-z)}-\frac{2\bar{v}(n)\beta^2}{(4-z)^3})-\frac{2\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)\beta^2}{(4-z)^4}\cdot(1-\frac{\bar{v}(n+2)}{(4-z)}-\frac{2\bar{v}(n+2)\beta^2}{(4-z)^3})$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan ko‘rinadiki $\Delta(0,z)=0$ tenglamani uchta oddiy noli bor.

$$z_n^{(1)e}(0)=4-\bar{v}(n)=z_n(\pi,\pi),\quad z_{n+1}^{(2)e}(0)=4-\bar{v}(n+1)=z_{n+1}(\pi,\pi),$$

$$z_{n+2}^{(3)e}(0)=4-\bar{v}(n+2)=z_{n+2}(\pi,\pi).$$

Ma’lum soddalshtirishlardan so‘ng $\Delta(\beta,z)$ uchun β^2 aniqlikda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\Delta(\beta,z)=1-\frac{\bar{v}(n)+\bar{v}(n+1)+\bar{v}(n+2)}{4-z}+\frac{\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)+\bar{v}(n)\bar{v}(n+2)+\bar{v}(n+1)\bar{v}(n+2)}{(4-z)^2}-$$

$$-\frac{2\bar{v}(n)\beta^2+3\bar{v}(n+1)\beta^2+2\bar{v}(n+2)\beta^2+\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)\bar{v}(n+2)}{(4-z)^3}+$$

$$+\frac{3\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)\beta^2+4\bar{v}(n)\bar{v}(n+2)\beta^2+4\bar{v}(n+1)\bar{v}(n+2)\beta^2}{(4-z)^4}-\frac{4\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)\bar{v}(n+2)\beta^2}{(4-z)^5}.$$

Murakkab bo‘lmagan hisoblashlar ko‘rsatadiki, $\Delta(\beta,z)$ funksiyaning nollari β^2 aniqlikda quyidagi

$$z_n^{(1)e}(\beta)=4-\bar{v}(n)-\frac{2}{\bar{v}(n)-\bar{v}(n+1)}\sin^2\beta+O(\beta^4),$$

$$z_{n+1}^{(2)e}(\beta)=4-\bar{v}(n+1)-\frac{\bar{v}(n)-3\bar{v}(n+1)+2\bar{v}(n+2)}{(\bar{v}(n)-\bar{v}(n+1))\,(\bar{v}(n+1)-\bar{v}(n+2))}\sin^2\beta+O(\beta^4),$$

$$z_{n+2}^{(3)e}(\beta)=4-\bar{v}(n+2)-\frac{\bar{v}(n+1)-2\bar{v}(n+2)}{\bar{v}(n+2)\,(\bar{v}(n+1)-\bar{v}(n+2))}\sin^2\beta+O(\beta^4)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Ushbu yoyilmalar uchun $\beta\to 0$ da $\sin\beta\sim\beta$ hamda (3) potensial tasvirini hisobga olib, teorema 4 tasdig‘idagi (10), (11) va (12) yoyilmalarni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Teorema 4 tasdig‘idan bevosita teorema 1 isbotini hosil qilamiz.

ADABIYOTLAR

1. Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators.* Academic. New York.: 1979.
2. Rauch J. Perturbation theory for eigenvalues and resonances of Schrödinger Hamiltonians. *J. Funct. Anal.* 1980. V.35, P.304-315.
3. Simon B. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Ann. Phys.* 1976. V.97, P.279-288.
4. Klaus M. On the Bound state of Schrödinger operators in one dimension. *Ann. Phys.* 1977. V.108, P.288-30.
5. Abdullaev J. I. Perturbation theory for the two-particle Schrödinger operator on a one-dimensional lattice. *Theor. Math. Phys.* 2005. V.145(2). P.1551-1558.
6. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M., Usmonov L. S. Monotonicity of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operatoron a lattice. *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2021. V.12, (6). P.657-663.
7. Abdullaev J. I., Ikromov I. A. Finiteness of the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice. *Theor. Math. Phys.* 2007. V.152, P.1299-1312.
8. Abdullaev J. I., Khalkhuzhaev A. M., Makhmudov Kh. Sh. Discrete spectrum asymptotics for the two-particle Schrëdinger operator on a lattice. Journal of Mathematical Sciences. 2024. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07334-3
9. Lakaev S. N., Khalkhuzhaev A. M. Spectrum of the two-particle Schrödinger operator on a lattice. *Theoret. and Math. Phys.* 2008. V.155, (2). P.754-765.
10. Abdullaev Zh. I., Kuliev K. D. Bound states of a two-boson system on a two-dimensional lattice. *Theor. Math. Phys.* 2016. V.186, (2). P.231-250.
11. Lakaev S. N., Muminov Z. I. The Asymptotics of the Number of Eigenvalues of a Three-Particle Lattice Schrödinger Operator, Funct. Anal. Appl., 2003. V.37, (3) P.228-231.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается гамильтониан системы двух фермионов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$ с цилиндрическим потенциалом. Гильбертово пространство нечетных функций $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ представляется в виде прямых сумм двух инвариантных подпространств $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора $H(\mathbf{k})$, ассоциированного этому гамильтониану. Показано, что для любого $\beta \in (0,\pi)$, оператор $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta) := H(\mathbf{k}_\beta)\big|_{L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)}$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi)$ имеет бесконечное число собственных значений ниже существенного спектра. Получены асимптотические формулы для $n-$ собственного значения $z_n(\beta)$ оператора $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ при $\beta \to 0$.

Ключевые слова: Оператор Шредингера, решетка, квазиимпульс, фермион, существенный спектр, собственное значение, инвариантные подпространства, асимптотическое ражложение.

RESUME

In this paper, we consider the Hamiltonian of a system of two fermions on a two-dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ with a cylindrical potential. The Hilbert space of odd functions $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ is represented as direct sums of two invariant subspaces $L_2^{oe}(\mathbb{T}^2)$ and $L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)$ with respect to the operator $H(\mathbf{k})$ associated with this Hamiltonian. It is shown that for any $\beta \in (0,\pi)$, the operator $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta) := H(\mathbf{k}_\beta)\big|_{L_2^{eo}(\mathbb{T}^2)}$, $\mathbf{k}_\beta = (\pi - 2\beta, \pi)$ has infinite number of eigenvalues lying below the essential spectrum. Asymptotic formulas are obtained for the n-eigenvalue of $z_n(\beta)$ of the operator $H^{eo}(\mathbf{k}_\beta)$ for $\beta \to 0$.

Key words: Schrödinger operator, lattice, quasi-momentum, fermion, essential spectrum, eigenvalue, invariant subspaces, asymptotic expansion.

UDC 517.55

OB-HAVO HOSILALARINING OQILONA NARXINI MODELLASHTIRISH

Raxmatov M. Y.
Raqamli iqtisodiyot va agrotexnologiyalar universiteti
makhmadrasul1972@gmail.com

REZYUME

Ushbu maqolada ko'p yillik ob-havo harorati ko'rsatkichlari yordamida hosilalarning (xosilaviy qimmatbaho qog'ozlar) oqilona narxini baholash uchun matematik modellar o'rganilgan. Hosilalar narxini baholashda Toshkent shahridagi I.Karimov nomidagi xalqaro aeroport ob-havo stansiyasining so'ngi 30 yillik harorat ko'rsatkichlari olingan. Shuningdek, maqolada hosilalarning oqilona narxini bir necha matematik modellar yordamida olingan natijalar sonli va grafiklarda tahlil qilingan. Bu natijalarni olish va ularni tahlil qilishda MINITAB paketi va Borland Delphi dasturlash tillaridan foydalanildi.

Kalit so‘zlar: ob-havo xosilalari, volatillik, o'rtacha chetlanish, oqilona narx, o'rtacha kunlik harorat, opsion, call va put opsionlar.

Kirish. 20-asrning o'rtalaridan boshlab insoniyatning iqtisodiy-ijtimoiy rivojlanishi, ilm-fan taraqqiyoti, iqtisodiy rivojlanishdagi inqirozlar, ayniqsa, iqlim o'zgarishlari tabiiy ofatlar va hokazolarga bog'liq bo'lgan qishloq xo'jaligidagi keskin zararlarning oldini olish yo'llarini tadqiq etishni talab qilmoqda. Bu boradagi izlanishlarda xorijiy davlatlar, jumladan amerikalik iqtisodchilar, qishloq xo'jaligi va boshqa sohalar mutaxassislarining tajribasi shubhasiz qiziqish uyg'otmoqda.

Yangi moliyaviy instrumentlar - hosilalar - o'tgan asrning oxiridan boshlab keng qo'llanila boshlandi. Ulardan eng mashxurlari - fyuchers shartnomalari va opsionlar hisoblanadi. Ushbu hosilalaviy qimmatbaho qog'ozlar ishlab chiqaruvchilarning daromadlarini sug'urtalashga qaratilgan bo'lib, bunda ishlab chiqaruvchilarning mahsulot sotish hajmi tasodifiy tabiiy ofatlar (misol uchun ob-havo o'zgarishi)ga bog'liq. Bunday qimmatbaho qog'ozlarning asosida qanday tabiiy hodisa, ob-havoning qanday miqdoriy xususiyatlari yotishi aniq vaziyatga bog'liq. Bu atmosfera bosimi, shamol tezligi va namlik bo'lishi mumkin. Ammo eng ko'p ishlatiladigan hosilalar ob-havo harorati ko'rsatkichlariga asoslangan.

Ob-havoning noqulay kelishidan zarar ko'ruvchi sifatida elektr energiyasi ishlab chiqaruvchilari va iste'molchilari, savdo tarmoqlari, dam olish maskanlari hamda qishloq xo'jaligining ko'plab tarmoqlarini aytish mumkin. Ob-havodagi kutilmagan o'zgarishlarning asosiy parametrlar sifatida harorat, namlik, turli ko'rinishdagi yog'ingarchiliklar qaraladi. Ma'lumki, ob-havo bilan bog'liq eng ko'p qo'llanilib kelayotgan asosiy parametr sifatida harorat qaraladi, shu sababli ushbu maqolada harorat ko'rsatkichlari asosiy o'zgaruvchi qilib olingan hosilalar qaraladi. Shuningdek, qimmat baho qog'ozlar bozorida ob-havo hosilalarining tez sur'atlar bilan o'sishiga ta'sir etuvchi aksariyat omillar ichidan eng asosiylarini quyida keltirib o'tamiz:

- energiya narxlari ob-havo bilan juda bog'liq ekanligi;
- kapital va sug'urta bozorlarining bir-biriga yaqinlashganligi.

Shuningdek bu maqolada quyidagi muammolar haqida ham to'xtalib o'tamiz:

- harorat o'zgarishini xarakterlovchi stoxastik jarayonlarni o'rganish;
- hosilalarning oqilona narxlarini modellashtirish va Monte Karlo usulidan foydalanib sonli yechimini hisoblash.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Tabiatdagi tasodifiy hodisalarning iqtisodiyotning turli sohalariga qiladigan ta'siri risklarini minimallashtirish hamda hosilalarning oqilona narxlarini hisoblash ilmiy izlanuvchilar oldidagi muhim va dolzarb masala bo'lib kelgan. Umuman olganda, yuqorida keltirib o'tilgan muammolarning sonli yechimini topishda, hozirgi kundagi iqlimning global isishi hamda tez o'zgaruvchanligi ham qo'shilganligi ilmiy izlanuvchilarga yanada yangi ilmlar ustida ishlashga olib kelmoqda. Bu borada P.Alaton (P.Alaton) ilmiy ishlarida ob-havo hosilalari orqali risklarni boshqarish va moliyaviy instrumentlarning oqilona narxini hisoblashning matematik modellarini taklif qilgan [1]. Ma'lumki, ob-havodagi o'zgarishlar tasodifiy bo'lganligi sababli stoxastik jarayonlar matematik modellashtirish hamda Monte-Karlo usulini qo'llab jarayonning sonli yechimini topish metotologiyasini S.M.Ermakovning ishlarida ko'rish mumkin [2]. Hozirgi kunda O'zbekiston olimlari tomonidan tasodifiy jarayonlarni modellashtirish, qimmatbaho qog'ozlar bozori hamda ob-havo harorati ko'rsatkichlarining xalq xo'jaligi sektorlariga bo'ladigan ta'sir risklarini boshqarish, moliyaviy intrumentlarning oqilona narxini hisoblashga oid ko'plab ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Jumladan, bu borada A.S.Rasulov, M.T.Bakoev, G.M.Raimovalar tomonidan chop etilgan ilmiy maqolalarda stoxastik jarayonlarni modellashtirishda kelib chiqadigan turli integral va differensial tenglama hamda tenglamalar sistemasini taqribiy yechishda Monte-Karlo usullaridan foydalanishgan [6;7].

Tadqiqot metodoligiyasi.

- **Opsion** - bu investorga muayyan aktivni kelajakdagi aniq bir narxda sotib olish yoki sotish huquqini beruvchi shartnoma. Bu huquqni amalga oshirish majburiy emas.
- **CALL opsion** - aktivni belgilangan narxda sotib olish huquqini beradi.
- **PUT opsion** - aktivni belgilangan narxda sotish huquqini beradi.

Ob-havo hosilalari odatda turli xil iqlim indekslariga asoslangan svoplar, fyucherslar va call/put opsionlari sifatida shakllanadi. Aksariyat hollarda iqlim indekslari sifatida asosan kunning isish va sovish daraja hamda yog'ingarchiliklar ko'rsatkichlari kiradi. Quyida biz ko'p holatlarda ishlatiladigan har kunlik harorat indekslari haqida ma'lumotlar berib o'tamiz.

Ta’rif 1. T_i^{max} va T_i^{min} lar i kunidagi maksimal va minimal ob-havo haroratini (Selsiy gradusida) bildirsin. i kun uchun o’rtacha haroratni quyidagicha aniqlaymiz

$$T_i = \frac{T_i^{min} + T_i^{max}}{2} \tag{1}$$

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, ob-havo hosilalari uchun muhim asosiy parametr bu kunlik harorat ko’rsatkichidir. Bu kattalik kuyidagi sovitish va isitish kunlari indekslari orkali tavsiflanadi.

Ta’rif 2. $T_i - i$ kunning o’rtacha harorati bo’lsin. Isish kunlari indeksini HDD_i va sovish kunlari indeksini CDD_i sonini, kunlik harorat ko’rsatkichlari yig’indisi sifatida topish mumkin:

$$HDD_i = max(18 - T_i, 0), \tag{2}$$

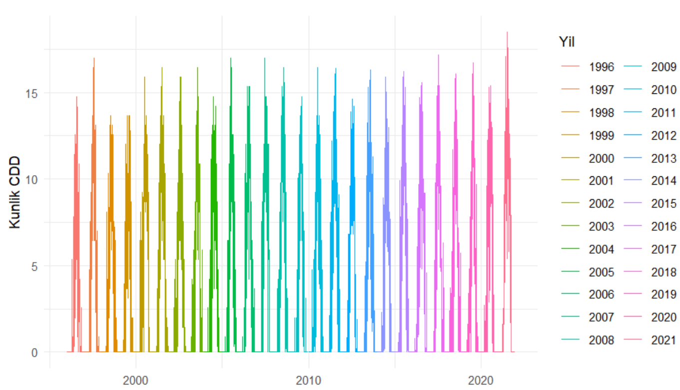
$$CDD_i = max(T_i - 18, 0), \tag{3}$$

.

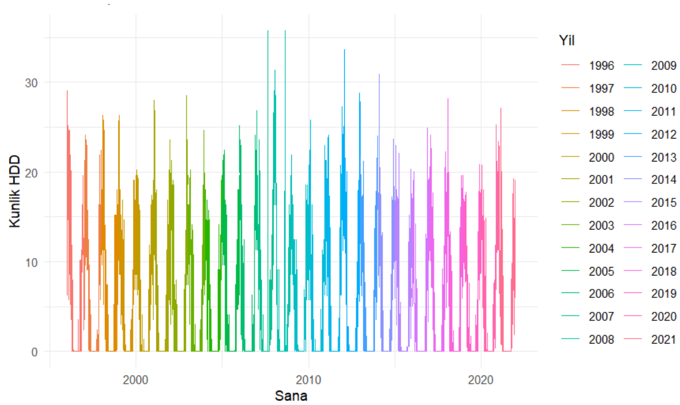
2-ta’rifga asosan biz ma’lum bir kun uchun HDD yoki CDDlar sonini, kunlik harorat ko’rsatkichlari yig’indisi sifatida topish mumkin:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} CDD_i, \quad H_n = \sum_{i=1}^{n} HDD_i \tag{4}$$

Agarda harorat Farengeytda hisoblansa isish va sovish indekslari uchun harorat sifatida 65^o Farengeyt (18^oC) olinadi. Ob-havo indekslari ob-havo risklarini boshqarishda asosiy parametr bo’lib xizmat qiladi.



Rasm 1: **1996-2021 yillar davomida I. Karimov nomidagi aeroportida kunlik CDD lar soni.**



Rasm 2: 1996-2021 yillar davomida I. Karimov nomidagi aeroportida kunlik HDD lar soni.

Fyuchers shartnomasining narxlari, shuningdek, opsionning amalga oshirish narxi ma'lum bir davr uchun HDD yoki CDD indekslarida ifodalanadi. Shartnomada ko'rsatib o'tilgan meteorologiya stansiyasining aniq ma'lumotlari ob-havo hosilalarini amalga oshirish narxini (strike price - shartnoma muddati tugagandan so'ng indeksning haqiqiy qiymati) aniqlashda ishlatiladi.

Haroratga asoslangan ob-havo hosilalarning narxi yilning ma'lum bir davri uchun yig'ilgan HDD yoki CDDlar asosida aniqlanadi. Odatda, HDD mavsumi noyabrdan martgacha, CDDlar mavsumi esa maydan sentyabrgacha bo'lgan davrni o'z ichiga oladi. Odatda aprel va oktyabr oylari bir mavsumdan boshqa mavsumga o'tish oylari deb ataladi.

Fyuchers shartnomasi bo'yicha to'lov, shartnoma tuzilgan narx va shartnoma muddati tugagandan so'ng ma'lum bo'ladigan narxi o'rtasidagi farq bilan belgilanadi. So'ngra bu farq shartnomada kelishilgan qayta hisoblash stavkasiga ko'paytiriladi. Shunday qilib, fyuchers shartnomasining oqilona qiymati uning HDD yoki CDD indeksi birliklarida ifodalangan joriy narxiga teng bo'lib, indeks miqdorining bahosiga ko'paytiriladi. Opsion shartnomalarini tuzishda uni amalga oshirish narxi K, qayta hisoblash stavkasi ρ oldindan kelishib olinadi. Misol uchun, HDD indeksiga tuzilgan call opsioni uchun t_n kunidagi χ to'lovi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\chi = \{\rho \max(H_n - K, 0)\}$$

Ba'zan sotuvchi va xaridor opsionning maksimal to'lovi MT ga cheklovni kelishib oladi. Bunday holda, HDD indeksidagi call opsioni uchun to'lov quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\chi = \min(\rho max(H_n - K, 0), MT)$$

Opsionning narxi bank foiz stavkasi r bo'yicha amalga oshirish kunida diskontlangan avvaldan kelishilgan to'lov miqdoriga teng bo'ladi. Ob-havo shartnomalaridan foydalanishda yuzaga keladigan asosiy matematik muammo opsionning oqilona narxini aniqlashdan iborat.

Ob-havo harorati ko'rsatkichlarini modellashtirish asosida hosilalarning oqilona narxini hisoblash.

Ob-havo harorati ko'rsatkichlarini modellashtirishga mo'ljallangan ekonometrik modellarda harorat o'zgarishini bashorat qilish uchun odatda ko'pgina usullar qo'llaniladi, bularga: ARCH, GARCH, A-GARCH, E-GARCH, ARMA, ARFIMA, FBM, ARFIMA-FIGARCH, LSTM, Bootstrap lar kiradi. Esga olingan modellar o'zgaruvchanligi ob-havoning oldingi qiymatlaridan foydalanilmasdan faqat uning korrelyatsiyasiga bog'liqligini hisobga olishga imkon beradi. Masalan, GARCH modellari, kuzatilayotgan vaqt qatorlariga mos har qanday o'zgarishlarga o'z aks ta'sirini bildirish hamda bu qator o'zgaruvchanligi bo'yicha kuchli tebranishlardan so'ng tezda tiklash xossasiga egaligidir.

Ob-havo hosilalarining oqilona narxini aniqlashda, unga ta'sir etuvchi omil sifatida ob-havoning tarixiy ma'lumotlariga asoslanib joriy ob-havo o'zgarishining taxminiy tendensiyasini olish mumkin. Shuningdek, ob-havo hosilalar bozori - hosilaviy qimmatbaho qog'ozlar bozoriga mansub bo'lganligi sababli, unga boshqa bozorlar o'z ta'sirini o'tkazadi. Hozirgi kunda hosilalarni narxlarini hisoblash usullarida ob-havoning o'tgan yillardagi ko'rsatkichlaridan foydalaniladi, bu ko'rsatkichlar asosida yaqin kelajakda ro'y beradigan harorat o'zgarishlarini bashorat qilish mumkin. Ob-havo harorati ko'rsatkichlarini matematik modellashtirish bosqichlarni quyidagilardan iborat bo'ladi:

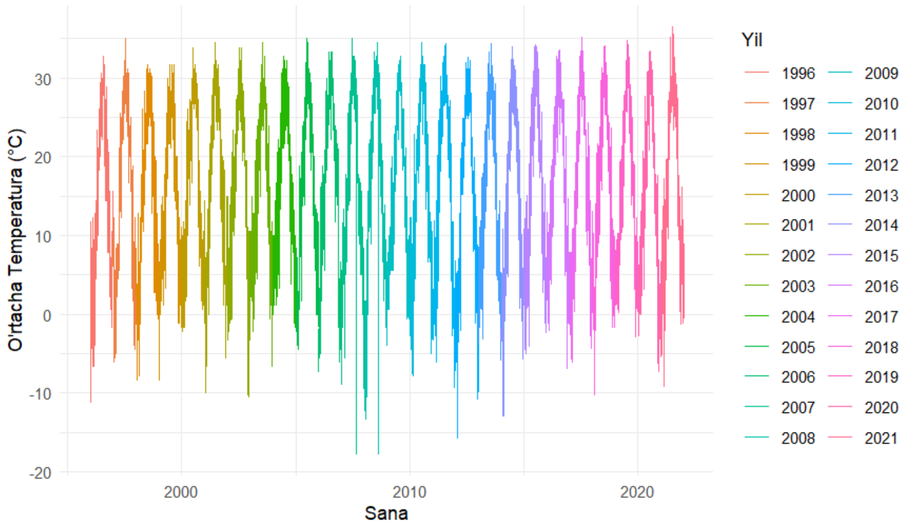
- O'tgan davr uchun ob-havo harorati ko'rsatkichlari ma'lumotlarini to'plash;
- Ob-havo ko'rsatkichlarining statistik modelini yaratish;
- Kelajakda kutilishi mumkin bo'lgan ob-havo o'zgarishlarini modellashtirish (Monte-Karlo usuli);
- Har bir ssenariy bo'yicha opsion to'lovini aniqlash;
- Ushbu ma'lumotlarni o'rta qiymatini aniqlash;
- Hisob-kitob muddatiga diskontlash.

Ob-havo haroratini modellashtirish.

Yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek, ob-havo hosilalari uchun asosiy parametri sifatida harorat qaralayotganligi sababli, haroratni xarakterlovchi modelni topishga harakat qilamiz. Bundan ko'zlangan maqsad - harorat o'zgarishini tavsiflovchi stoxastik jarayonni aniqlash. Keyinchalik ob-havo hosilalarini haroratga nisbatan baholamoqchi bo'lsak, iqlim jarayoni qanday bo'lishi haqidagi ma'lumotlarga ega bo'lish ahamiyatli bo'ladi. Yaxshi modelni topishda yordam berish uchun bizda Toshkent shaxridagi so'nggi 30 yildagi harorat ma'lumotlar bazasini shakllantiramiz. Harorat ma'lumotlari 1 - ta'rifga muvofiq hisoblangan kunlik o'rtacha haroratlardan iborat. 1-rasmda biz Toshkent shaxridagi I.Karimov nomidagi aeroportida ketma-ket 10 yil davomida kunlik o'rtacha haroratning o'zgarish grafigini quramiz.

Keyingi tahlillarda Toshkent shahridagi I.Karimov nomidagi aeroporti uchun o'tgan 30 yillik ob-havo harorati ko'rsatkichlari ma'lumotlari bazasidan foydalanamiz. O'rtacha harorat 1-rasmdan ob-havo haroratida kuchli mavsumiy o'zgarishlar mavjudligini aniq ko'ramiz. O'rtacha harorat yozda taxminan 34^o C va qishda 3^o C gacha o'zgarib turadi. 1-rasmdan ob-havodagi mavsumiy o'zgarishlarini sinus-funksiyasi orqali modellashtirish mumkinligini ko'rish mumkin. Ushbu funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$sin(\omega t + \varphi), \tag{5}$$



Rasm 3: **1996-2021 yillar davomida I. Karimov nomidagi aeroportida kunlik o’rtacha harorat.**

bu yerda t kun bilan o’lchanadigan vaqtni, ya’ni, $t = 1, 2, \ldots$ bo’lib, 1 yanvar, 2 yanvar va hokazolarni bildiradi. Tebranishlar davri bir yil ekanligini bilganimiz uchun $\omega = 2\pi/365$ ga teng bo’ladi. Odatda yilning eng minimal va maksimal o’rtacha haroratlari yil boshida yoki yilning ikkinchi yarminining boshlanishida kuzatilmaganligi sababli faza burchagi ”φ” tushunchasini kiritamiz. Shuningdek, ob-havo harorati ko’rsatkichlarining o’zgarishiga diqqat bilan e’tibor berilsa, ma’lumotlar tendensiyasi ijobiy zaif, biroq mavjudligi ko’rish mumkin. Ushbu tendensiyaning mavjudligidan, o’rtacha haroratning yildan-yilga o’sayotganligini ko’rish mumkin. Iqlim haroratining o’sishiga ta’sir qiladigan bir nechta omillar mavjud. Ulardan biri, hozirgi kunda butun dunyoda kuzatilayotgan global isishni misol keltirish mumkin. Keyingisi katta shaharlar aholisining tez sur’atlar o’sib borayotganligi sababli undagi harakatlarning me’yoridan ortib borayotganligi natijasida, yaqin hududlarda ob-havo haroratining oshib borayotganlgidir. Ob-havo harorati ko’rsatkichlaridan ushbu zaif tendensiyani aniqlash uchun biz birinchi taxmin sifatida isish o’zgarishini chiziqli deb taxmin qilamiz. Biz uni ko’phad deb hisoblashimiz ham mumkin, lekin u o’rtacha haroratning umumiy dinamikasiga kam ta’siri tufayli, faqat ushbu ko’phadning chiziqli qismigina hukmronlik qiladi.

Yuqoridagi ma’lumotlardan xulosa qilib aytadigan bo’lsak, $T_t^m - t$kundagi o’rtacha ob-havo harorati modeli quyidagi ko’rinishda bo’ladi.

$$T_t^m = A + Bt + C\sin(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

bu yerda A, B, C, ω, φ parametrlari haroratning ko’p yillik stoxastik kuzatuvlari asosida baholanadi. Endi ushbu parametrlarni baholashni keltirib o’tamiz.

O’rtacha harorat modelini ma’lumotlarga moslashtirish.

(6) tenglamdagi noma’lum konstantalarning sonli qiymatlarini baxolashni havo ko’rsatkichlaridan tashkil topgan ma’lumotlari asosida kichik kvadratlar usuli yerdamida amalga oshiramiz.

$$Y_t = a_1 + a_2 t + a_3 \sin(\omega t) + a_4 \cos(\omega t) \tag{7}$$

Bundan shunday xulosaga kelamizki, $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ parametr vektorini quyidagi tenglamani yechish orqali topishiladi.

$$\min_{\xi} = \| Y - X \|^2 \tag{8}$$

bu erda Y- (7) tenglama orqali baholanayotgan kattaliklar vektori, X - ob-havo harorati ko'rsatkichlaridan iborat ma'lumotlar vektori. U holda (6) modeldagi konstantalar quyidagicha topiladi

$$A = a_1, \tag{9}$$

$$B = a_2, \tag{10}$$

$$C = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \tag{11}$$

$$\varphi = \arctan(\frac{a_4}{a_3}) - \pi \tag{12}$$

Noma'lum koeffitsientlarning sonli qiymatlarni (6) tenglamaga qo'yib, o'rtacha harorat uchun quyidagi funksiyani olamiz:

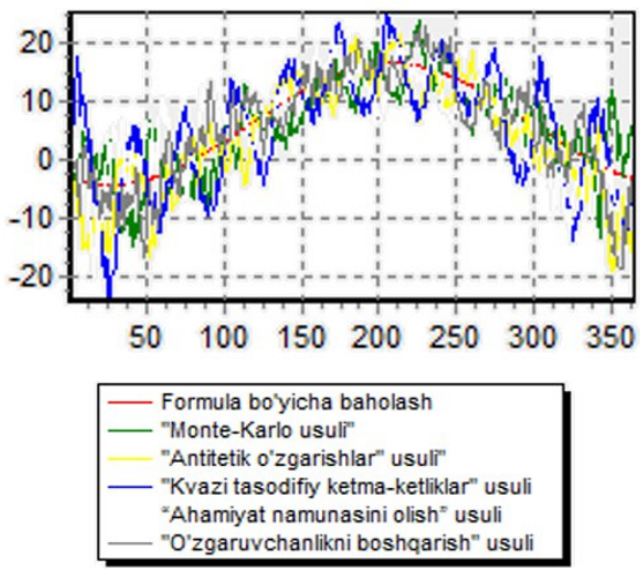
$$T_t^m = 14.882 + 1.54 \cdot 10^{-4} t + 13.4830 \sin(\frac{2\pi}{360} t - 1.81042) \tag{13}$$

Sinusoida funksiyaning amplitudasi qariyib $10^o C$ ni tashkil qiladi, bu esa odatdagi qish kuni va yoz kuni o'rtasidagi harorat farqi taxminan $22^o S$ ni tashkil qilishini bildiradi. Ushbu funksiyaning holati ob-havo harorati ko'rsatkichlaridan tashkil topgan ma'lumotlari bilan birga 2-rasmda ko'rsatilgan.

Sinusoida funksiyaning amplitudasi qariyib $10^o C$ ni tashkil qiladi, bu esa odatdagi qish kuni va yoz kuni o'rtasidagi harorat farqi taxminan $22^o C$ ni tashkil qilishini bildiradi. Ushbu funksiyaning holati ob-havo harorati ko'rsatkichlaridan tashkil topgan ma'lumotlari bilan birga 2-rasmda ko'rsatilgan.

Afsuski, ob havo parmetrlari deterministik bo'la olmaydi. Shuning uchun realroq modelga ega bo'lish uchun (6) deterministik modelga qandaydir shovqin, ya'ni standart Vinner $(W_t, t \geq 0)$ jarayonini qo'shishimiz kerak bo'ladi.

Ob-havo harorati ko'rsatkichlaridan iborat ma'lumotlar qatoridan, haroratning $\sigma_t^2 \in R_+$ kvadratik o'zgarishi yilning turli oylarida turli xil bo'lishi, biroq yilning barcha oylarida deyarli o'zgarmasligini ko'rish mumkin. Ayniqsa, qish faslida o'rtacha kvadratik o'zgarishlar yilning qolgan faslllari bilan solishtirilganda ancha yuqori bo'ladi. Shuning uchun biz σ_t ni har oy davomida o'zgarmas qiymatga ega bo'lgan bo'lakli o'zgarmas funksiya deb quyidagi ko'rinishda topamiz.



Rasm 4: **ikki yilllik o'rtacha harorat (13) va haqiqiy harorat.**

$$f(x) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{Yanvar oyida} \\ \sigma_2 & \text{Fevral oyida} \\ .... & .... \\ \sigma_{12} & \text{Dekabr oyida} \end{cases}$$

bu yerda $\{\sigma_i\}_{i=1}^{12}$ musbat o'zgarmas konstanta, $(\sigma_t W_t \geq 0), t \geq 0)$ esa haroratning shovqin jarayoniga ta'sirini bildiradi.

Bu yerda biz ob-havo harorati ko'rsatkichlaridan iborat ma'lumotlardan σ ning ishonchli bahosini olishga harakat qilamiz. To'plangan ma'lumotlar asosida har bir oy uchun σ ning bahosini chiqaramiz. N_μ kundan iborat aniq bir μ oy davomida kuzatilgan harorat ko'rsatkichlarini $T_j (j = 1, \ldots, N_\mu)$ deb belgilaymiz. Birinchi baho T_t ning o'rtacha kvadratik o'zgarishiga asoslangan holda olinadi.

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=1}^{N_\mu - 1} (T_{j+1} - T_j)^2 \tag{14}$$

Olingan sonli qiymatlarni (14) ga qo'yib, turli oylar uchun σ ning qiymatlarini hisoblaymiz. 1-jadvalda σ uchun olingan baholar keltirilgan.

1-jadval. σ **kvadratik chetlanish va regressiya yondashuviga asoslangan baholarning o'rtacha qiymati.**

Oylar	O'rtacha chetlanish
Yanvar	5.005
Fevral	5.555
Mart	5.140
Aprel	4.800
May	4.286
Iyun	3.183
Iyul	5.140
Avgust	3.676
Sentyabr	4.022
Oktyabr	4.789
Noyabr	5.071
Dekabr	4.697

O'rtacha qiymatga qaytish.

Ob-havo harorati ko'rsatkichlarini modellashtirish yordamida hosilalarning oqilona narxini hisoblashda turli xil usullar mavjud. Haroratni tavsiflovchi stoxastik jarayonni o'rtacha qiymatga qaytaruvchi xususiyatga ega modelni hosilalarlarning oqilona narxini aniqlashda qo'llash mumkin. Ushbu modelning foiz stavkalari asosida qurilgan modeldan, hosilalar oqilona narxini ob-havoning o'tgan davrlardagi ma'lumotlari bilan hisoblanishi bilan farq qiladi. Opsionlar uchun qo'llaniladigan standart stoxastik modellar ob-havo hosilalariga mos kelmaydi, chunki harorat ko'rsatkichlari valyuta kurslari yoki aksiya narxlaridagi kabi keskin o'zgarishlarga emas, balki sekin va uzluksiz dinamikaga ega bo'ladi.

Ob-havo haroratini modellashtirishda nazarda tutilmaydigan mavjud tabiiy holatlarni iqlimning diskret holati bilan birlashtirib stoxastik differensial tenglamani (SDT) hosil qilamiz. Ushbu SDTni sonli yechimini topish orqali ob-havo harorati ko'rsatkichlarini modellashtiramiz:

$$dT_t = a(T_t^m - T_t)dt + \sigma_t dW_t \tag{15}$$

bu yerda $a \in R$ bilan o'rtacha qiymatga qaytish tezligini belgilaymiz. (15) tenglama bilan bog'liq muammo shundaki, u haqiqatdan xam uzoq muddatda T_t^m ga qaytmaydi. Shunday qilib, haqiqatdan ham o'rtacha qiymat (6) ga qaytadigan jarayonni ta'minlay olish uchun biz (15) tenglamaga quyidagi drift hadni qo'shishimiz kerak bo'ladi.

$$\frac{dT_t^m}{dt} = B + \omega C cos(\omega t + \varphi) \tag{16}$$

T_t^m o'rtacha harorati o'zgarmas bo'lmaganligi sababli, bu had SDTning yechimi uzoq muddatli o'rtacha T_t^m ga teng bo'lishini ta'minlaydigan xolatda driftni to'g'irlaydi.

O'rtacha kunlik haroratning o'zgarishini tavsiflovchi stoxastik model quyidagi shaklga ega:

$$dT_t = \left\{ \frac{dT_t^m}{dt} + a(T_t^m - T_t) \right\} dt + \omega_t dW_t, t > s, \tag{17}$$

Ushbu tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi

$$T_t = (x - T_s^m)e^{-a(t-s)} + T_t^m + \int_s^t e^{-a(t-\tau)}\omega_\tau dW_\tau \tag{18}$$

Kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, ob-havo harorati uzoq vaqt davomida o'sishi (yoki kamayishi) mumkin emas. Shuning uchun, harorat o'zgarishini aniqlovchi stoxastik jarayon **"o'rtacha qiymatga qaytish"** xususiyatiga ega bo'lishi hamda harorat ma'lum bir o'rtacha iqlim T_t^m darajasiga qaytishi kerak. a parametrning qiymati bu haroratning o'rtacha qiymatga qaytish tezligini aniqlaydi. n kun mobaynida to'plangan kuzatish natijalari asosida, a uchun samarali baho quyidagi $\widehat{a}_n$ tenglamaning yechimi sifatida olinadi.

$$G_n(\widehat{a}_n) = 0, \tag{19}$$

bu yerda,

$$G_n(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{b}(T_{i-1}, 0)}{\sigma_{i-1}^2}\{T_i - E[T_i|T_{i-}]\} \tag{20}$$

va $\dot{b}(T_{i-1}; a)$ - drift hadining a parmetrga nisbatan hosilasini bildiradi.

$$b(T_{i-1}; a) = \frac{dT_t^m}{dt} + a(T_t^m - T_t) \tag{21}$$

(19) ni yechish uchun (20) dagi $E[T_i|T_{i-1}]$ har bir hadlarni aniqlashimiz kerak. Darhaqiqat, (18) tenglamada $t \geq s$ uchun, quyidagi tenglamani yozamiz:

$$T_t = (T_s - T_s^m)e^{-a(t-s)} + T_t^m + \int_s^t e^{-a(t-\tau)}\sigma_\tau dW_\tau \tag{22}$$

bu tenglamadan, quyidagi tenglamaga o'tish mumkin.

$$E[T_i|T_{i-1}] = (T_{i-1} - T_{i-1}^m)e^{-a} + T_i^m, \tag{23}$$

Bundan, yana avvaldan ma'lum bo'lgan munosabtni olamiz

$$T_t^m = A + Bt + C\sin(\omega t + \varphi).$$

Shuning uchun, quyidagi munosabatni keltirib chiqarish mumkin.

$$G_n(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2}\left\{(T_{i-1} - T_{i-1}^m)e^{-a} - T_i^m\right\} \tag{24}$$

Ushbu moslikni quyidagi munosabat bilan tekshirish mumkin

$$\widehat{a}_n = -log\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_{i-1}\{T_i - T_i^m\}}{\sum_{j=1}^n Y_{i-1}\{T_{i-1} - T_{i-1}^m\}}\right) \tag{25}$$

(19) tenglamaning yagona yechimi hisoblanib, bu yerda Y_{i-1} quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$Y_{i-1} \equiv \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} \quad i = 1, 2,', n. \tag{26}$$

Yuqoridagi hisoblashlarni amalga oshirgandan so’ng biz $\widehat{a} = 0,131$ ni olamiz.

Monte-Karlo usuli yordamida ob-havo haroratini modellashtirish

Moliyaviy matematikaning sonli ilovalarida, xususan, opsionlar narxini hisoblashda asosiy usullardan biri sifatida Monte-Karlo usuli qaraladi. Monte-Karlo usuli bilan ob-havo haroratini modellashtirish (17) tenglamani quyidagi ko’rinishga olib kelinadi:

$$T_j = T_j^m - T_{j-1}^m + aT_{j-1}^m + (1-a)T_{j-1} - \lambda\sigma_t + \sigma_\mu \varepsilon_{j-1} \tag{27}$$

bu yerda - $\{\varepsilon_j\}$ standart normal taqsimotga ega bo’lgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi. Shunindek, standart normal taqsimotni modellashtirish uchun hisob-kitoblarda qo’llaniladigan usul bilan tanishib chiqamiz [2]. Aytaylik α_1, α_2 lar (0;1) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan ikkitasi bo’lsin. Oddiy taqsimlangan tasodifiy o’zgaruvchining ikkita mustaqil amalga oshirilishi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\xi_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin(2\pi\alpha_2), \quad \xi_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2) \quad (28)$$

Yuqoridagi ifodalarga asosan, ob-havoning mumkin bo’lgan harorat o’zgarishi senariylarining N o’zaro bog’liq bo’lmagan traektoriyalari modellashtiriladi. 3-rasmda (7) formula yordamida qurilgan o’rtacha kunlik haroratning grafiklari ko’rsatilgan. Quyida opsion uchun to’lovlarni ob-havo haroratining har bir ssenariysi uchun aniqlab chiqamiz. Misol uchun, HDD indeksidagi call opsionining to’lov miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$\chi = max\{H_n - K, 0\}, \quad H_n = \sum_{i=1}^{n} \max\{18 - T_t, 0\} \tag{29}$$

Opsionlar uchun to’lovlar quyidagi tenglama bilan amalga oshirish sanasida diskontlangan holda hisoblanadi:

$$\tilde{s}(t) = \frac{e^{-r(t_n - t)}}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_i \tag{30}$$

Ob-havoning hosilalarining oqilona narxini hisoblash.

Ob-havoning hosilalarining oqilona narxini hisoblash modelida bazaviy parametr sifatida Toshkent shahrining harorat ko’rsatkichi olingan, shu sababli, qish mavsumida shaxardagi iqlimning o’zgarish xususiyatlaridan kelib chiqqan holda, hisoblash formulalarini soddalashtirish orqali opsionning oqilona narxini aniqlovchi formulasini qurish mumkin. Buning uchun Toshkent shahrida qish mavsumida harorat $18^o \ C$ dan oshib ketmasligini faraz qilsak, hodisa ehtimoli $\max\{18 - T_t, 0\} = 0$ bo’lgan yetarlicha kichik miqdor bo’ladi. Bu fikrlardan quyidagi tenglikga ega bo’lamiz:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} HDD_k = 18n - \sum_{i=1}^{n} T_{t_i}$$

$[t_1; t_n]$ oraliq bilan opsion shartnomasi tuzilgan oyni belgilasak, bu yerda t_1 - oyning birinchi va t_n oxirgi kuni, t esa shartnomani tuzish vaqti bo'lsa, opsion narxini baholash momenti $t < t_1$. Narxni baholash oyiga mos keladigan kvadratik o'zgarishlarning qiymati σ_i va shartnoma oyidagi qiymat σ_j bilan belgilanadi. Yuqorida eslatib o'tilganlarga ko'ra $N(\mu_n, \delta_n)$ parametrlar normal taqsimotga ega ekanligini [108] ko'rsatish mumkin:

$$\mu_n = E^Q[H_n|F_t] = 18n - \sum_{i=1}^{n} = E^Q[T_{t_i}|F_t],$$

$$E^Q[H_n|F_t] = (T_t - T_t^m)e^{-a(s-t)} + T_s^m - \frac{\lambda\sigma_i}{a}(\sigma_i - \sigma_j)e^{-a(s-t)} - \frac{\lambda\sigma_j}{a}$$

$$\delta_n^2 = Var[H_n|F_t] = \sum_{i=1}^{n} Var[T_{t_i}|F_t] + 2\sum_{i<j}\sum Cov[T_{t_i}, T_{t_j}|F_t],$$

$$Cov[T_s, T_u|F_t] = e^{-a(u-s)}Var[T_s|F_t],$$

$$Var[T_s|F_t] = \frac{1}{2a}(\sigma_i^2 - \sigma_j^2)e^{-2a(t-t_1)} - \frac{\sigma_i^2}{2a}e^{-2a(t-s)} + \frac{\sigma_j^2}{2a},$$

bu yerda $0 \leq s \leq t \leq u$, T_t^m ning qiymati (14) formuladan, parametrlari qiymati esa 1-jadvaldan olinadi.

HDD indeksi uchun call opsioning oqilona narxini navbatdagi formuladan foydalangan holda topish mumkin:

$$c(t) = e^{-r(t_n-t)}E^Q[\max H_n - K, 0|F_t] = e^{-r(t_n-t)}\left((\mu_n - K)\Phi(-\alpha_n) + \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha_n^2}{2}}\right) \tag{31}$$

bu yerda $\alpha_n = \frac{K-\mu_n}{\sigma_n}$ va Φ standart normal taqsimot funksiyasini bildiradi.

Xuddi shu usullardan foydalangan holda, so'ralgan HDD put opsion uchun oqilona narx formulasini keltirib chiqarish mumkin:

$$p(t) = e^{-r(t_n-t)}E^Q[\max\{K - H_n, 0\}|F_t] = e^{-r(t_n-t)}\int_0^K (K-x)f_{H_n}(x)dx =$$

$$= e^{-r(t_n-t)}\left[(K-\mu_n)(\Phi(\alpha_n) - \Phi\left(-\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right) + \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\alpha_n^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\right)^2}\right)\right] \tag{32}$$

(17) dan HDD indeksida ob-havo hosilalari uchun call opsionning oqilona narxini Monte-Karlo usuli bilan hisoblashda foydalaniladi. Modellashtirilgan traektoriyalar sonini va foiz stavkasi bo'yicha diskontlashni belgilaymiz. Bunda bozor riski bahosi $\lambda = 0,08$ ga teng deb hisoblanadi. 2-jadvalda keltirilgan quyidagi xususiyatlarga ega opsionlarni ko'rib chiqamiz.

Biz yanvar, fevral va mart oylari uchun HDD call opsioni "narxlarini"oldik. Ushbu shartnomalarning texnik xususiyatlari 2-jadvalda keltirilgan.

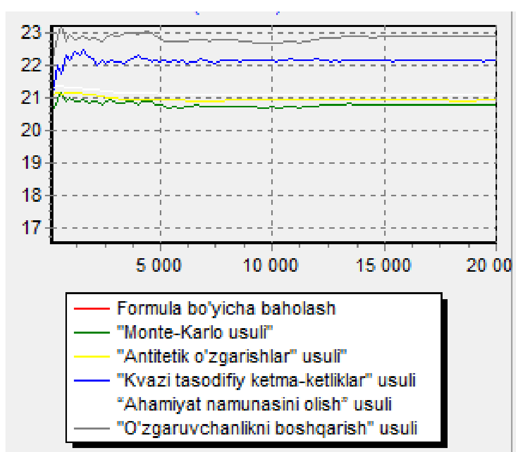
2-jadval: Uchta HDD opsionining texnik xususiyatlari.

Parametr	I Opsion	II Opsion	III Opsion
Ob-havo stansiyasi	I.A.Karimov nomli aeroport	I.A.Karimov nomli aeroport	I.A.Karimov nomli aeroport
Indeks	HDD	HDD	HDD
Turi	Call	Call	Call
Davri	2018 yil yanvar	2018 yil fevral	2018 mart
Amalga oshirish narxi (Strike)	600	600	600
Maksimum to’lov	365	306	275

3-jadvalda o’tkazilgan tajribaning asosiy natijalari keltirilgan. 3-rasmda modellashtirilgan traektoriyalar sonining o’zgarishi bilan tuzilgan hisob-kitoblarning dinamikasi ko’rsatilgan. Quyidagi 4-rasmda modellashtirilgan traektoriyalar sonining o’zgarishi bilan sig3 qiymatlarining o’zgarishi ko’rsatilgan.

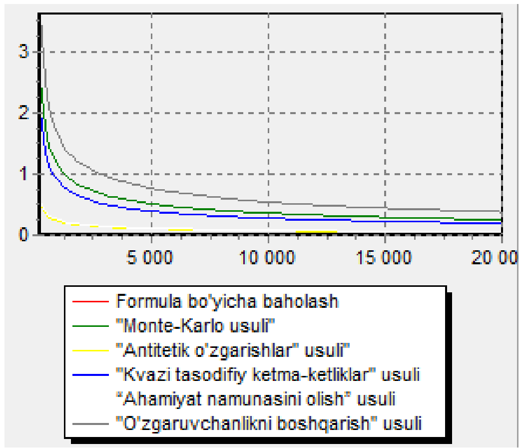
3-jadval. Hisoblash natijalari

	Opsion I	Opsion II	Opsion III
(31) asosida opsion narxi, f	13,14627	22,2987	20,3657
Monte Karlo usuli			
Opsion narxi, sx	13,14627	21,4622	20,0572
sig3	0,26387	0,4115	0,4133
Xotolik |f-sx|	0,99916	0,8365	0,3085
Asosiy qismni ajratish usuli			
Opsion narxi, sx	19,7696	21,6804	20,1767
sig3	0,3753	0,0543	0,0349
Xotolik |f-sx|	0,0006	0,6183	0,189
Kvazi Monte Karlo usuli			
Opsion narxi, sx	19,5501	21,9387	20,3491
sig3	0,3267	0,3261	0,3268



Rasm 5: **Opsion narxini N bo’yicha baholash o’zgarishi.**

Ob-havo hosilalarini baholashdagi eng muhim masala - bu ob-havoning yaxshi modeliga ega bo’lishdir. Bu yerda ishlatiladigan harorat modeli, albatta, haqiqiy holatni soddalashtirilgan ko’rinishi bo’lib u harorat ma’lumotlariga juda mos kelishini ko’rish mumkin. Yuqorida keltitrilgan modellar yordamida ko’p yillik ob-havoning o’zgarish holatining o’zgaruvchanlik(volatillik) qonuniyatini topish mumkin. Stoxastik modellar yordamida aniq yechimga yanada yaqinlashishga erishish imkoniyati mavjud. Eng yaxshi harorat modelini



Rasm 6: **sig3 qiymatining N bo'yicha o'zgarishi.**

topishda, haroratning bir necha xil parametrlardan tashkil topgan iqlim modellarini qo'llash maqsadga muvofiqdir. Hozirgi kunda yuqori xarakteristikali kompyuterlar va yaxshi iqlim modellarining mavjudligi, mutaxassislar tomonidan ob-havo hosilalarining oqilona narxini hisoblashda hamda kelajakdagi narx o'zgarishini bashorat qilish imkoniyatini yaratadi. Qimmatbaho qog'ozlar bozorining o'sishi bilan bir qatorda ob-havo hosilalarining ma'lum bir vaqtga mos keluvchi oqilona narxlari aniqlash mumkin bo'lsa, bozordagi narxlar riskini boshqarish uchun uchun yaxshiroq modellarni topish mumkin.

ADABIYOTLAR

1. Alaton P., Djehiche B., Stilberger D. On modeling and pricing weather derivatives. Applied Mathematical Finance, 9(1), 1-20, 2002.

2. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 312. с.

3. Байден С., Смирнова Н. Погодные деривативы в электроэнергетике. ЭнергоРынок, 3, 2006.

4. Ермаков С.М., Михайлов А.Г., Статистическое моделирование. М., Наука, 1982.

5. Glasserman R. Monte Karlo methods in finansial enginering. Series: Stochastic Modelling and Applied Probablity, 53. Springer., 2003.

6. A. Rasulov and M. Bakoev. Variance reduction techniques in pricing weather derivatives. Proceedings of the 4th International Conference on Computer Science and Computational mathematics (ICCSCM 2015), 2:225'232, 2015.

7. Раимова Г.М. Способы понижения дисперсии при оценивание стоимости погодных опционов, М., Прикладная эконометрика, № 1(21), 201, Стр.3-15

8. A.S. Rasulov, M.T. Bakoyev, and M.Y. Rahmatov. Monte carlo method for the calculation the price of multi-asset options. In Published by the American Institute of Physics, editor, AIP Conference Proceedings 1978, 460006 (2018); doi:

10.1063/1.5044068 View online: https://doi.org/10.1063/1.5044068 View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1978/1, pages 340’344, USA, 2018. Published by the American Institute of Physics.

РЕЗЮМЕ

В этой статье исследуются математические модели для оценки рациональной стоимости деривативов (производных ценных бумаг) с использованием многолетних погодных показателей. При оценке стоимости деривативов были взяты температурные показатели метеостанции международного аэропорта имени И.Каримова в Ташкенте за последние 30 лет. В работе проанализирован численный результаты, полученные с помощью некоторых математических моделей для нахождения рациональной стоимости деривативов. Для моделирования и анализа результатов использовались пакет MINITAB и язык программирования Borland Delphi.

Ключевые слова: погодные производные, волатильность, среднее отклонение, рациональная стоимость, среднесуточная температура, опцион, опционы call и put.

RESUME

This article examines mathematical models for assessing the fair value of derivatives (financial instruments) using multi-year weather data. Temperature data from the meteorological station at Islam Karimov International Airport in Tashkent over the past 30 years were utilized for derivative valuation. The study analyzes numerical results obtained through certain mathematical models for determining the fair value of derivatives. The modeling and result analysis were carried out using the MINITAB software package and the Borland Delphi programming language.

Key words: weather derivatives, volatility, mean deviation, rational value, average daily temperature, option, call and put options.

УДК 517.98

ОПИСАНИЕ АБЕЛЕВЫХ W*- И C*-АЛГЕБР

Бердимуратова Ш. К.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
shaxrizadaberdimuratova@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе изучаются коммутативные W*- и C*-алгебры. Приведены основные моменты описание абелевых W*- и C*-алгебр, а также описание вещественных абелевых W*-алгебр. В частном случае, т.е. когда эта алгебра действует в сепарабельном вещественном Гильбертовом пространстве и не содержит ненулевого минимального проектора, описание более конкретно уточнено.

Ключевые слова: коммутативные W*- и C*-алгебры, пространство характеров, (гипер)стоуновский компакт.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются коммутативные W*- и C*-алгебры. Чтобы получить описание этих алгебр рассматривается пространство всех характеров алгебры, которое является стоуновским компактом. Показано, что для гиперстоуновского пространства Ω пространство $C(\Omega)$ является абелевой W*-алгеброй и если существует нормальная регулярная Борелевская мера ν на Ω с $\mathrm{supp}\nu = \Omega$, то доказано, что $C(\Omega) = L^\infty(\Omega, \nu)$ является σ-конечной W*-алгеброй. Доказано и обратное утверждение, т.е. если Z – абелева W*-алгебра и Ω – ее спектральное пространство, то Ω – гиперстоуновское пространство и существуют локально компактное Хаусдорфово пространство X и регулярная Борелевская мера ν на X с $\mathrm{supp}\nu = X$ такие, что Z – *-изоморфна $L^\infty(X, \nu)$. Также доказано, что если A – коммутативная C*-алгебра, то она изометрически изоморфна алгебре всех непрерывных функций на Ω, исчезающих в бесконечности, причем, алгебра A имеет единицу тогда и только тогда, когда Ω – компактен. Приведена описание вещественных абелевых W*-алгебр. В частном случае, т.е. когда эта алгебра действует в сепарабельном вещественном Гильбертовом пространстве и не содержит ненулевого минимального проектора, описание более конкретно уточнено.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть A – банахово *-алгебра. Если для любого $a \in A$ выполняется условие $\|a^*a\| = \|a\|^2$, то A называется *C*-алгеброй.* Если для C*-алгебры A существует нормированное пространство N такое, что $N^* = A$, то A называется *W^*-алгеброй*. При этом пространство N называется *предсопряженным* пространством, обозначается как A_*.

Пусть Ω — локально-компактное Хаусдорфово пространство и ν — нормальная регулярная Борелевская мера на Ω. Напомним, что функционал f на Ω называется локально существенно ограниченным (вкратце л.с.о.), если $\exists C > 0,\ f(t) \leq C$ и $\nu(\{t : |f(t)| > C\}) = 0$ локально почти всюду. Положим

$$L^\infty(\Omega, \nu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ – измерима и } f \text{ – л.с.о.}\}.$$

Легко показать, что это пространство является нормированным относительно нормы

$$\|f\|_\infty = \inf\{C > 0 \ : \ |f(t)| \leq C\}.$$

Положим

$$L^1(\Omega, \nu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int\limits_\Omega |f(t)| d\nu < \infty\}.$$

Непосредственно показывается, что $(L^\infty(\Omega, \nu), \|.\|_\infty)$ – абелева C*-алгебра и $L^1(\Omega, \nu)^* = L^\infty(\Omega, \nu)$, следовательно L^∞ является W*-алгеброй.

Определение 1. Говорят, что Хаусдорфово пространство *эктремально несвязно*, если замыкание каждого открытого подмножества также открыто. Компактное экстремально несвязное пространство называется *Стоуновским пространством.* X называется *гиперстоуновским* пространством, если оно является Стоуновским пространством и для любого $f \in C(X)$ и $f > 0$ существует нормальная регулярная Борелевская мера μ на X такая, что $\mu(f) > 0$.

ОПИСАНИЕ σ-КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ W*-АЛГЕБР

Теорема 1 [1]. Пусть Ω – компактное Хаусдорфово пространство, $C_r(\Omega)$ – множество всех действительных непрерывных функций на Ω. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Ω — Стоуновское пространство.

2) Для любой ограниченной возрастающей сети неотрицательных функций из $C_r(\Omega)$ существует ее наименьшая верхняя граница в $C_r(\Omega)$.

3) Для любого ограниченного подмножества $C_r(\Omega)$ существует его наименьшая верхняя граница в $C_r(\Omega)$.

4) Пусть g – ограниченная вещественнозначная полунепрерывная снизу функция на Ω. Тогда существует $f \in C_r(\Omega)$ такая, что $E = \{t \in \Omega \mid f(t) \neq g(t)\}$ – Борелевское подмножество первой категории из Ω.

Более подробные доказательства результатов об описание абелевых W*-алгебр можно найти в [1-3]. Здесь мы приведем основные моменты описание этих алгебр.

Предложение 1. Пусть a_l – ограниченная возрастающая сеть самосопряженных элементов $B(H)$, т.е., $a_l^* = a_l$, $\|a_l\| \leq M$ $(\forall l)$, для некоторого число M, и $a_{l'} \geq a_l$, $\forall l' \geq l$. Тогда имеем $a_l \to a = \sup_l a_l$ (сильно)

Доказательство. Так как $\{\langle a_l\xi,\xi\rangle\}$ – ограниченная возрастающая сеть действительных чисел для любого $\xi \in H$, то $\lim\langle a_l\xi,\eta\rangle$ существует для любых $\xi,\eta \in H$. Тогда ввиду $|\langle a_l\xi,\eta\rangle| \leq M\|\xi\|\|\eta\|$, имеется $a \in B(H)$ такой, что $\lim\langle a_l\xi,\eta\rangle = \langle a\xi,\eta\rangle$, $\forall\xi,\eta \in H$. Разумеется, $\langle a\xi,\xi\rangle = \sup_l\langle a_l\xi,\xi\rangle$, $\forall\xi \in H$. Таким образом, $a = \sup_l a_l$ и $a_l \to a$ (слабо). Более того, для любого $\xi \in H$, также имеем

$$\|(a-a_l)\xi\|^2 \leq \|(a-a_l)^{1/2}\|^2 \cdot \|(a-a_l)^{1/2}\xi\|^2 \leq 2M\langle(a-a_l)\xi,\xi\rangle \to 0.$$

Поэтому $a_l \to a$ (сильно). Предложение доказано.

Следующие предложения доказываются непосредственно.

Предложение 2. Пусть Ω – Стоуновское пространство, а μ нормальная регулярная Борелевская мера на Ω. Тогда $\mathrm{supp}\mu$ открытое и замкнутое подмножество Ω.

Предложение 3. Пусть Ω – Стоуновское пространство, а h ограниченная измеримая функция на Ω. Тогда существует $f \in C(\Omega)$ такая, что

$$f(t) = h(t), \text{ п.в.}\mu$$

для любой нормальной регулярной Борелевской меры μ на Ω.

Предложение 4. Пусть Ω – гиперстоуновское пространство. Тогда существует семейство μ_l нормальной регулярной Борелевской меры на Ω такое, что $\mathrm{supp}\mu_l \cap \mathrm{supp}\mu_{l'} = \emptyset$, $\forall l \neq l'$ и $\sqcup_l \mathrm{supp}\mu_l$ плотно в Ω.

Напомним, что W*-алгебра называется *σ-конечной*, если семейство попарно ортогональных проекторов не более чем счетно.

Предложение 5. Пусть Ω – компактное Хаусдорфово пространство и ν регулярная Борелевская мера на Ω. Тогда $L^\infty(\Omega,\nu)$ – σ-конечная абелева W*-алгебра.

Теорема 2. Пусть Ω – гиперстоуново пространство. Тогда $C(\Omega)$ – абелева W^*-алгебра. Более того, если существует нормальная регулярная борелевская мера ν на Ω с $\mathrm{supp}\nu = \Omega$, то $C(\Omega) = L^\infty(\Omega,\nu)$ является σ-конечной W*-алгеброй.

Доказательство. Сначала предположим, что существует нормальная регулярная борелевская мера ν на Ω такая, что $\mathrm{supp}\nu = \Omega$. Тогда $C(\Omega)$ можно вложить в $L^\infty(\Omega,\nu)$. Более того, для любого $h \in L^\infty(\Omega,\nu)$ по Предложению 3 существует $f \in C(\Omega)$ такая, что $f(t) = h(t)$, п.в.ν.Таким образом, $C(\Omega) = L^\infty(\Omega,\nu)$. Далее, $C(\Omega)$ является σ-конечной абелевой W^*-алгеброй из Предложения 5.

В общем случае, по Предложению 4 существует семейство ν_l нормальных регулярных борелевских мер на Ω такое, что $\mathrm{supp}\nu_l \cap \mathrm{supp}\nu_{l'} = \emptyset$, $\forall l \neq l'$ и $X = \sqcup_l supp\nu_l$ плотно в Ω. По Предложению 2, $\mathrm{supp}\nu_l$ открыто и замкнуто, $\forall l$. Тогда X есть локально компактное Хаусдорфово пространство. Пусть $\nu = \sum_l \bigoplus \nu_l$. Тогда ν регулярная борелевская мера ν на X и $\mathrm{supp}\nu = X$. Следовательно, $f \to f|X$ инъективное отображение из $C(\Omega)$ на $L^\infty(X,\nu)$. Более того, для любого $h \in L^\infty(X,\nu)$, пусть $h(t) = 0$, $\forall\ t \in \Omega \setminus X$. Тогда по Предложению

3 существует $f \in C(\Omega)$ такое, что $f(t) = h(t)$, п.в.ν. Таким образом $f(t) = h(t)$, л.п.в. ν на X. Далее, $C(\Omega) - *$ изоморфна к $L^\infty(X, \nu)$ и является W^*-алгеброй. Теорема доказана.

Теперь докажем результат об описание абелевых W*-алгебр.

Теорема 3. Пусть Z – абелева W^*-алгебра и Ω – ее спектральное пространство. Тогда Ω – гиперстоуновское пространство и существуют локально компактное Хаусдорфово пространство X и регулярная Борелевская мера ν на X с supp$\nu = X$ такие, что Z*-изоморфна $L^\infty(X, \nu)$.

Доказательство. Пусть $Z \subset B(H)$, а $f \to m_f - *$ изоморфизм из $C(\Omega)$ на Z. Тогда для любого $\xi \in H$ существует регулярная Борелевская мера ν_ξ такая, что

$$\langle m_f \xi, \xi \rangle = \int\limits_\Omega f(t) d\nu_\xi(t), \forall f \in C(\Omega)$$

Из Теоремы 1 и Предложения 1 следует, что Ω – Стоуновское пространство, а ν_ξ – нормальная, $\forall \xi \in H$. Если f – ненулевой положительный элемент $C(\Omega)$, то существует $\xi \in H$, такой что $\langle m_f \xi, \xi \rangle > 0$, т.е., $\nu_\xi(f) > 0$. Следовательно, Ω – гиперстоуново. Остальной вывод содержится в доказательстве Теоремы 2. Теорема доказана.

Определение 2. Пусть A – алгебра. Линейное отображение $\chi : A \to \mathbb{C}$ со свойством $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ $(\forall a, b \in A)$ называется *характером* алгебры A. То есть всякий гомоморфизм из A в $\mathbb{C}$ называется характером.

Очевидно, что $\chi \equiv 0$ – есть характер, и если $\chi \not\equiv 0$ и алгебра A с единицей $\mathbb{1}$, то $\chi(\mathbb{1}) = 1$. Множество всех (ненулевых) характеров обозначим через Ω и Ω_+, соответственно: $\Omega = \{\chi$ – характер$\}$, $\Omega_+ = \{\chi \in \Omega : \chi \not\equiv 0\}$. Если $B(H)$ – алгебра всех линейно ограниченных операторов действующих в гильбертовом пространстве H, то $\Omega = \emptyset$. Непосредственно показывается, что если A – банахова алгебра, то всякий характер ограничен (а значит непрерывен), и более того, сжимающий функционал, т.е. $\|\chi\| \leq 1$.

Поскольку $\Omega_+ \subset A^*$, то на Ω_+ рассмотрим w*-топологию, т.е. топологию поточечной сходимости:

$$\chi_n \to \chi \;\Leftrightarrow\; \chi_n(a) \to \chi(a), \quad \forall a \in A$$

База окрестностей нуля задается множествами $U_{\varepsilon,F} := \{\chi : \; |\chi(x)| < \varepsilon, \; \forall x \in F\}$, где $F \subset A$ – конечное подмножество. Если $\chi_1, \chi_2 \in \Omega_+$ и $\chi_1 \neq \chi_2$, то $\exists x_0 \in A$: $\chi_1(x_0) \neq \chi_2(x_0)$. Тогда из непрерывности $\exists \varepsilon > 0$: $|\chi_1(x_0) - \chi_2(x_0)| > \varepsilon$. Положим

$$U_{\chi_1} = \big\{\chi : \; |\chi_1(x_0) - \chi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\big\}, \qquad V_{\chi_2} = \big\{\chi : \; |\chi_2(x_0) - \chi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\big\}$$

Очевидно, что множества U_{χ_1} и V_{χ_2} – есть открытая окрестность χ_1 и χ_2, соответственно, такие, что $U_{\chi_1} \cap V_{\chi_2} = \emptyset$. Таким образом, мы доказали, что Ω_+ – есть T_2-пространство, т.е. Хаусдорфово пространство. Аналогично показывается, что если алгебра с единицей, то пространства Ω и Ω_+ – замкнута. Отсюда следует, что пространство Ω_+ – компактен, и если алгебра с единицей, то пространство Ω – также компактен; а в общем случае пространство Ω – локально компактен.

Теперь, для каждого $a \in A$ рассмотрим отображению (функционал): $\hat{a}_+ : \Omega_+ \to \mathbb{C}$ с $\hat{a}(\chi) := \chi(a)$. Ясно, что $\hat{a}(0) = 0$. Сужению $\hat{a}_+$ на Ω обозначим как $\hat{a}$. Легко показать, что $\hat{a}_+$ – w*-непрерывен, и если $\Omega \neq \emptyset$, то $\hat{a}$ – также w*-непрерывен и $\hat{a}(\infty) = 0$, т.е. функционал, исчезающий в бесконечности. Напомним, что последнее условие означает, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset \Omega$, такой, что $|\hat{a}(\chi)| < \varepsilon$, для всех $\chi \in \Omega \setminus K$. Совокупность всех таких $\hat{a}$ обозначим через $C_0(\Omega)$.

Рассмотрим отображение $\Gamma_+ : A \to C(\Omega_+)$, который сопоставляет каждому элементу $a \in A$ функционал $\hat{a}_+$. Непосредственно показывается, что Γ_+ является гомоморфизмом и сжимающим, а значит непрерывный. Если $\Omega \neq \emptyset$, то отображение $\Gamma : A \to C_0(\Omega)$ с $\Gamma(a) := \hat{a}$ является изоморфизмом. Таким образом, имеет место следующая теорема, которая есть теорема Гельфанда-Наймарка об описание коммутативных C*-алгебр.

Теорема 4. Если A – коммутативная (абелева) C*-алгебра, то она изометрически изоморфна алгебре всех непрерывных функций на Ω, исчезающих в бесконечности, т.е. $A \cong C_0(\Omega)$. Причем, алгебра A имеет единицу тогда и только тогда, когда Ω – компактен.

АБЕЛЕВЫ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ W*-АЛГЕБРЫ

Предложение 6. [4]. Пусть A – абелева вещественная C*-алгебра. Тогда

$$A \cong C_0(\Omega, -) = \{f \in C_0(\Omega) |\ f(\bar{t}) = \overline{f(t)},\ \forall t \in \Omega\},$$

где Ω – спектральное пространство A. Обратно, если Ω – локально компактное Хаусдорфово пространство, и $" * "$ – гомеоморфизм Ω с периодом 2, то алгебра $C_0(\Omega, -) = \{f \in C_0(\Omega) | f(\bar{t}) = \overline{f(t)},\ \forall t \in \Omega\}$ является абелевой вещественной C*-алгеброй,

Теорема 5. [4]. Пусть Z – конечная абелева вещественная W*-алгебра, $Z \cong C(\Omega, \tau)$, где Ω – спектральное пространство (компактное Хаусдорфово пространство) $Z_c = Z + iZ$, а τ – гомеоморфизм Ω с периодом 2. Тогда Ω – гиперстоуново пространство, и существует нормальная регулярная Борелевская мера ν на Ω такая, что

$$\nu \circ \tau = \nu, \quad supp\nu = \Omega,$$

$$C(\Omega, \tau) = L^\infty(\Omega, \nu, \tau) = \{f \in L^\infty(\Omega, \nu) | f = \overline{f \circ \tau}\}$$

Замечание. Если Ω – компактное Хаусдорфово пространство, τ – гомеоморфизм Ω с периодом 2 и ν – регулярная Борелевская мера на Ω такая, что $\nu \circ \tau = \nu$, то $L^\infty(\Omega, \nu, \tau)$ – σ-конечная абелева вещественная W*-алгебра.

Замечание. Если Ω – гиперстоуново пространство, а τ – гомеоморфизм Ω с периодом 2, то $C(\Omega, \tau)$ абелева вещественная W*-алгебра. Более того, если ν – нормальная регулярная Борелевская мера на Ω такая, что $\nu \circ \tau = \nu$ и supp $\nu = \Omega$, то $C(\Omega, \tau) = L^\infty(\Omega, \nu, \tau)$ – также является σ-конечной.

Теорема 6. [4]. Пусть Z – абелева вещественная W*-алгебра, и $Z \cong C(\Omega, \tau)$, где Ω – спектральное пространство $Z_c = Z + iZ$, а τ – гомеоморфизм Ω с периодом 2. Тогда Ω – гиперстоуново пространство, и существуют плотное открытое подмножество Γ из Ω (Γ

– локально компактное Хаусдорфово пространство) и регулярная Борелевская мера ν на Γ, такие, что

$$\tau(\Gamma) = \Gamma, \nu \circ \tau = \nu, supp\nu = \Gamma,$$

и $Z \cong L^{\infty}(\Gamma, \nu, \tau)$.

Из выше полученных результатов получим

$$C(\Omega) = C(\Omega, \tau) + iC(\Omega, \tau), L^{\infty}(\Omega, \nu) = L^{\infty}(\Omega, \nu, \tau) + iL^{\infty}(\Omega, \nu, \tau),$$

отсюда получим основной результат работы

Теорема 7. Если Z – абелева вещественная W*-алгебра в сепарабельном вещественном Гильбертовом пространстве, и Z не содержит ненулевого минимального проектора, то Z – $*$ изоморфна $L_r^{\infty}([0,1])$ или $L^{\infty}([0,1])$ (как вещественная W*-алгебра) или $L_r^{\infty}([0,1]) \oplus L^{\infty}([0,1])$. Более того, вещественные W*-алгебры $L_r^{\infty}([0,1])$, $L^{\infty}([0,1])$ и $L_r^{\infty}([0,1]) \oplus L^{\infty}([0,1])$ не являются $*$ изоморфнымы друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li Bing-Ren Introduction to operator algebras. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific. 1992
2. Диксмье Ж. C*-алгебры и их представления. Москва: Наука. 1974.
3. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin: Springer. 1971.
4. Li B.R. Real operator algebras. // World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003, 241p.

REZYUME

Bu ishda kommutativ W*- и C*-algebralar o'rganiladi. Abel W*- va C-algebralarini tavsiflashning asosiy xolatlari, shuningdek, haqiqiy Abel W*-algebralarining tavsifi berilgan. Muayyan holatda, ya'ni bu algebra separabel xaqiqiy Gilbert fazosiga ta'sir etsa va nolga teng bo'lmagan minimal proyektorni o'z ichiga olmasa, tavsif yanada aniqroq bo'lishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Kommutativ W*- va C*-algebralari, xarakterlar fazosi, (giper)stoun kompakti.

RESUME

In the paper commutative (abelian) W*- and C*-algebras is studied. The main points of the description of Abelian W*- and C*-algebras, as well as the description of real Abelian W*-algebras are given. In the special case, i.e. when this algebra acts on a separable real Hilbert space and does not contain a non-zero minimal projection, the description is more specifically specified.

Key words: Commutative W*- and C*-algebras, space of characters, (hyper)stonean compact.

UDC 519.214

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АБЕЛЕВЫХ СУММ С СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Жовлиев А. И.
Институт предпринимательства и педагогики имени Денова,
jovliyevaziz91@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе доказана центральная предельная теорема (ц.п.т.) для Абелевой суммы с случайными коэффициентами $S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$,где $v,\ 0 < v < 1-$ случайная величина (с.в.), не зависящая от последовательности $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}$ −независимых одинаково распределенных с.в. в случае когда выполнены условия $E\xi_1 = 0,\ D\xi_1 = \sigma^2 < \infty,\ E|\xi_1|^k < \infty,\ k = 3, 4, ...$ и при $n \to \infty\ v \xrightarrow{P} 1$.

Ключевое слава: Абелевая сумма, случайныме коэффициенты, центральная предельная теорема, нормированная сумма.

1. Введение. Работа посвящена исследованию Абелевой суммы со случайными коэффициентам $S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$, где $v,\ 0 < v < 1-$ случайная величина (с.в.), не зависящая от последовательности $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}-$ независимых одинаково распределенных с.в. С помощью метода моментов доказана центральная предельная теорема (ц.п.т.) для нормированной суммы $\frac{S(v)}{\sqrt{DS(v)}}$ в случае когда выполнены условия $E\xi_1 = 0,\ D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, $E|\xi_1|^k < \infty$, $k = 3, 4, ...$ и при $n \to \infty\ v \xrightarrow{P} 1$.

Сравнивая результаты, полученные для обычных и взвешенных сумм можно заключить, что на случай взвешенных сумм переноситься далеко не все факты, доказанные для обычных сумм. В частном случае взвешенных сумм $S(v)-$ для схем суммирования независимых случайных величин (н.с.в.) по Абелю

$$S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j, \quad v \in (0, 1),$$

где $\{\xi_j,\ j \geq 0\}-$ н.с.в. и ν неслучайный параметр, в этом вопросе удается продвинутся значительно дальше.

Аналог известной теоремы Берри-Эссена для $S_n(v)$ получен в работе [1]. Дальнейшие исследования по предельным теоремам для схеме суммирования н.с.в. по Абелю, когда каждая ξ_j имеет различные распределения проводились С.Х.Сираждиновым и М.У.Гафуровым [2], Т.А.Азларовым и Б. Мередовым [3], [4]. Работы [5], [6], и [8] также посвящены доказательству ц.п.т. и оценки остаточного члена в ц.п.т. для Абелевой суммы $S(v)$ с неслучайными коэффициентами. Почти во всех перечисленных работ для доказательства ц.п.т. и получения оценок остаточного члена в ц.п.т. для Абелевых сумм с неслучайным параметром применяется метод характеристических функций. Используя независимости членов, можно легко найти характеристическую функцию Абелевой суммы и применить различные методы анализа чтобы доказать требуемый результат.

В последние годы возрос интерес к изучению асимптотики Абелевой суммы $S(v)$ с неслучайными коэффициентами при $v \to 1-$ в связи с тем, что, к этой схеме суммирования приводят многие прикладные задачи.

В связи с зависимостью слагаемых метод характеристических функций и другие известные вероятностные методы плохо работают при доказательстве ц.п.т. для Абелевых сумм с случайными коэффициентами. Поэтому в работе применяется другой метод -метод моментов для доказательства ц.п.т., основой которой является следующая основная лемма.

Лемма 1. (см. работу [10]) Пусть $\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$– произвольная последовательность случайных величин, $F_n(x) = P(\xi_n \le x)$ – соответствующие функции распределения. Обозначим $m_n^{(k)} = E\xi_n^k$. Если при всех $k = 0, 1, 2, ...$ $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{(k)} = m^{(k)} < \infty$, то существует функция распределения $F(x) = P(\xi \le x)$ такая, что $m^{(k)} = E\xi^k$. Если этому условию удовлетворяет единственная функция $F(x)$, то $F_n(x)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к $F(x)$.

2. Основные понятия и результаты

Лемма 2. Пусть $\mu = N(0,\ 1)$– нормальная с.в. с параметрами $(0,\ 1)$ и $l \in \mathbb{N}$. Тогда момент l -того порядка с.в. η имеет вид;

$$E\left(\eta^l\right) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad l = 2k-1, \\ \frac{(2k)!}{2^k k!}, & \text{если} \quad l = 2k. \end{cases} \tag{1}$$

Равенство (1) общеизвестно, его можно найти, например, в [11].

Лемма 3. Пусть $0 \le j_i < \infty$ произвольные целые числа, $i = 1, 2, ..., s$ и p_i натуральные числа, удовлетворяющие условию $p_1 + ... + p_s = l$. Тогда ссправедливы соотношения:

а)$V(s,p) = \sum_{0\le j_1\ne j_2\ne ...\ne j_s<\infty} v^{j_1p_1}v^{j_2p_2}...v^{j_sp_s} \le \left(\frac{1}{1-v}\right)^s$;

б) $\sum_{0\le j_1<j_2<...<j_s<\infty} v^{2j_1}v^{2j_2}...v^{2j_s} = \frac{v^2}{1-v^2}\frac{v^4}{1-v^4}...\frac{v^{2(s-1)}}{1-v^{2s}}$.

Доказательство. Так как, $0 < v < 1$, то используя сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим

$$V(s,p) \le \sum_{j_1=0}^{\infty}(v^{p_1})^{j_1}...\sum_{j_s=0}^{\infty}(v^{p_s})^{j_s} = \prod_{i=1}^{s}\frac{1}{1-v^{p_i}}.$$

Отсюда, в силу элементарного тождества

$$1 - x^p = (1-x)(1 + x + ... + x^{p-1}),$$

$$V(s,p) \le \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{1-v}\right)\frac{1}{1 + ... + v^{p_i-1}} \le \left(\frac{1}{1-v}\right)^s,$$

что доказывает соотношение, а) Аналогично, используя метод математической индукции, можно легко доказать равенство б) Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть v, $0 < v < 1-$ с. в., не зависящая от последовательности $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}$ $-$независимых одинаково распределенных с.в. с $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$и $S(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$.

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{v \xrightarrow{P} 1-} \frac{2k!}{2^k \sigma^{2k}} E\left[(1-v^2)^k \sum_{0 \le j_1 < ... < j_k < \infty} v^{2j_1} ... v^{2j_k} \xi_{j_1}^2 ... \xi_{j_k}^2\right] = E\eta^{2k}.$$

Доказательство. Используя независимость с.в. v от последовательности $\{\xi_j, j$=0,1,2,...$\}$ и равенство б) леммы 3, имеем

$$\frac{2k!}{2^k \sigma^{2k}} E\left[(1-v^2)^k \sum_{0 \le j_1 < ... < j_k < \infty} v^{2j_1} ... v^{2j_k} \xi_{j_1}^2 ... \xi_{j_k}^2\right] =$$

$$= \frac{2k!}{2^k \sigma^{2k}} \sum_{0 \le j_1 < ... < j_k} E\left[(1-v^2)^k v^{2j_1} .. v^{2j_k}\right] E\xi_{j_1}^2 ... E\xi_{j_k}^2 =$$

$$= \frac{2k!}{2^k} E \sum_{0 \le j_1 < ... < j_k} \left[(1-v^2)^k v^{2j_1} .. v^{2j_k}\right] =$$

$$= \frac{2k!}{2^k} E\left[\frac{v^2}{1-v^2} \frac{v^4}{1-v^4} ... \frac{v^{2k}(1-v^2)^k}{1-v^{2k}}\right] =$$

$$= \frac{2k!}{2^k} E \frac{v^{k(k+1)}}{(1+v^2)(1+v^2+v^4)...(1+v^2+...+v^{2(k-1)})}.$$

Отсюда, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком математического ожидания, окончательно получим, что

$$\lim_{v \xrightarrow{P} 1-} \frac{2k!}{2^k \sigma^{2k}} E\left[(1-v^2)^k \sum_{0 \le j_1 < ... < j_k < \infty} v^{2j_1} ... v^{2j_k} \xi_{j_1}^2 ... \xi_{j_k}^2\right] =$$

$$= \lim_{v \xrightarrow{P} 1-} \frac{2k!}{2^k k!} = E\eta^{2k}.$$

В следующем пункте приведено доказательство следующей ц.п.т. для Абелевой суммы со случайными коэффициентами.

Теорема 1. Пусть v, $0 < v < 1$ - с. в., не зависящая от последовательности $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}$ $-$независимых одинаково распределенных с.в. с $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, $E|\xi|^k < \infty$, $k = 3, 4, ...$

Пусть $S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$. Тогда последовательность $\sqrt{1-v^2} S(v)$ подчиняется центральной предельной теореме.

3. Доказательство теоремы 1.

Сначала заметим, что $ES(v)$ =0 и

$$B_v^2 = DS(v) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} E v^{2j} \xi_j^2 = \sigma^2 E\left(\frac{1}{1-v^2}\right)$$

Теперь для доказательства теоремы нам нужно доказать справедливость соотношения:

$$\sqrt{1-v^2}S(v) \xrightarrow{d} N(0,1)\text{при } v \xrightarrow{P} 1- . \tag{2}$$

(2) докажем с помощью метода моментов (леммы 1). В силу леммы 1 и 2, для доказательства (2) с помощью метода моментов, достаточно показать справедливость следующего соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_\eta(\nu)}{B_n}\right)^l = \begin{cases} 0, \text{если } l=2k-1, \\ \frac{(2k)!}{2^k k!}, \text{ если } l=2k. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство (3) опирается на следующее полиномиальное разложения

$$E\left(\sqrt{1-v^2}S(v)\right)^l = \sum_{0\le j_1\ne\ldots\ne j_s<\infty; p_1+\ldots p_s=l; p_i\ne 0} \frac{l!E(1-v^2)^l v^{j_1p_1}\ldots v^{j_sp_s}}{p_1!p_2!\ldots p_s!} E\xi_{j_1}^{p_1}\ldots\xi_{j_s}^{p_s}. \tag{4}$$

Отдельные слагаемые разложения (4) при фиксированном $p_1,\ldots,p_s$ обозначим через $E(p_1,...,p_s)$и для простоты изложения назовем “размахом”. В лемме 4 доказано, что при $l=2k,\ p_1=...=p_k=2,\ E(2,...,2) \overset{v\xrightarrow{P}1}{\longrightarrow} E\eta^{2k}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$E(p_1,...,p_s) \overset{v\xrightarrow{P}1}{\longrightarrow} 0 \tag{5}$$

при всех остальных случаях.

Так как $E\xi_j=0$, в силу независимости с.в. $\{\xi_j\}$ и $v<1$, то $E(p_1,...,p_s)$=0. Кроме того, для всех v, достаточно близких к 1, с ростом размаха величина $E(p_1,...,p_s)$ строго возрастает. Таким образом, если покажем, что соотношение (5) справедливо для $p_1=...=p_{k-2}=2,\ p_{k-1}=4$, в случае $l=2k$ и $p_1=...=p_{k-1}=2,\ p_k=3$, в случае $l=2k+1$, то отсюда следует доказательство теоремы. Рассмотрим только случай $l=2k+1$, в случае $l=2k$ соотношение (5) доказывается аналогично. В случае $l=2k+1$, используя лемму 3 пункт а) получим, соотношение

$$E(p_1,...,p_s)=$$

$$=\frac{l!\sigma^{2(k-1)}E\xi_0^3}{3\cdot 2^{k-1}}E\left[(1-v^2)^k\sqrt{1-v^2}\sum_{0\le j_1<\ldots<j_k} v^{2j_1}\ldots v^{2j_{k-1}}v^{3j_k}\right]\le$$

$$\le C(l)E\left[\frac{(1-v^2)^k}{(1-v)^k}\sqrt{1-v^2}\right]\le 2^kC(l)E\sqrt{1-v^2} \overset{v\xrightarrow{P}1}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.U.Gerber, The discounted central limit theorem and its Berry-Essen analogue, Ann. Math. Statist. 42, 1, 1971, pp. 389 – 392.

2. С.Х.Сираждинов, М.У.Гафуров, Замечание к одной предельной теореме, В сб.“Случайные процессы и статистические выводы”, вып.3 Изд-во. “Фан” УзССР, 1973, ст. 170 – 172.

3. Т.А.Азларов, Б.Мередов, Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю, Изв. АН УзССР, сер. физ. – мат. наук, №5, 1977, ст. 7 – 15.

4. Б.Мередов, Теорема Линдеберга-Феллера для одной схеме суммирования независимых случайных величин, Изв.АН ТССР, сер. ФТХ и ГН, №4,1977, ст. 12 – 18.

5. K.Jöcker and W.Sendler, A Central limit theorem for generalized discounting, Math. Operationsforsch. Statist., ser.Statistiks, v.12 (1981) №4, pp.605 – 608.

6. L.Horva′th, Approximation for Abel sums of independent, identically distributed random variables, Satistics & Probability Letters 3 (1985), pp. 221 – 225.

7. L.Saulis and D.Deltuviene, The Discounted limit theorems, ActaApplican. Math. (2006) 90: pp. 219 – 226.

8. W.Whitt, Stochastic Abelian and Tauberian theorems. Z.Wahrsch. Verw. Gebiete 22 (1972), pp. 251 – 267.

9. G.Katriel, K.Israel, A quantitative discounted central limit theorem using the Fourier metric, arXiv: 1804.02855 v1[math. PR] 9 Apr 2018.

10. И.П.Чистяков, Курс теории вероятностей, М.:Наука, 147 стр. 1982.

11. П.Уиттл, Вероятность, М.:Наука, 288 стр. 1982.

RESUME

In this paper we prove the central limit theorem for an Abelian sum with random coefficients $S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$, where $0 < v < 1-$ is a random variable independent of a sequence of $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}-$ independent identically distributed random variable when conditions $E\xi_1 = 0,\ D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, $E|\xi_1|^k < \infty$, $k = 3, 4, ...$ and at $n \to \infty\ v \xrightarrow{P} 1$ are satisfied.

Key words: Abelian sum, random coefficients, central limit theorem, normalised sum.

REZYUME

Ushbu ishda koeffisientlari tasodifiy bo'lgan $S(v) = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$ Abel yig'indisi uchun markaziy limit teorema isbotlangan, bu yerda $\{\xi_j, j = 0, 1, 2, ...\}-$bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, $E\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, $E|\xi_1|^k < \infty$, $k = 3, 4, ...$ va v, $0 < v < 1-$ $\{\xi_k\}$ ketma-ketlikka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'lib $n \to \infty$ da $v \xrightarrow{P} 1$ shartni qanoatlantiradi.

Kalit so'zlar: Abel yig'indi, tasodifiy miqdor, Markaziy limit teorema, normallashgan yig'indi.

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Мамадалиев Н. А.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
m_numana59@mail.ru
Васиева Х. Г.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,Ташкент
vasiyeva98@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучены линейные дифференциальные игры, описываемые системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при геометрических ограничениях на управления игроков. С помощью модификации первого метода задачи преследования для данных игр получены новые достаточные условия для разрешимости игровых задач управления пучками траекторий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, терминальное множество, преследователь, убегающий, управление.

Важной составной частью математической теории управляемых процессов является теория дифференциальных игр, предметом которой является изучение управления объектами в конфликтных ситуациях, движения которых описываются дифференциальными уравнениями. Проблемы теории дифференциальных игр имеют своим источником такие актуальные прикладные задачи, как преследование одного управляемого объекта другим, приведение управляемого объекта в заданное состояние при неизвестных заранее возмущающих силах, задачи военного характера, задачи из экономики и др. Задолго до развития теории дифференциальных игр существовал хорошо развитый аппарат дифференциальных уравнений, что наложило определенный отпечаток на ее терминологию и проблематику. Многие понятия и постановки задач общей теории игр, естественным образом переносятся на дифференциальные игры и оказываются там весьма полезными. Однако, в теории дифференциальных игр большое значение имеют свои понятия и проблемы, связанные со спецификой дифференциальных уравнений и особенностями тех конкретных прикладных задач, которые моделируются дифференциальными играми.

Первые работы теории дифференциальных игр проявились в начале 50-х годов. Начиная с этого времени дифференциальные игры являются основным предметом исследований многих советских и зарубежных ученых. Одними из первых серьезных исследований являются работы американского математика Р.Айзекса, который и ввел термин

"Дифференциальная игра". Он в своей монографии [1] развил оригинальный метод решения весьма общих дифференциальных игр, рассмотрел целый ряд прикладных задач и получил интересные результаты. Кроме того, в первых работах, относящихся к теории дифференциальных игр, использовался метод динамического программирования [2]. Этот подход описан в монографии Р.Айзекса "Дифференциальные игры"[1], где предложены к рассмотрению некоторые примеры игровых задач динамики. Другое направление в теории дифференциальных игр, которое разрабатывалось американскими математиками, составляет исследование вопроса о существовании седловой точки дифференциальной игры.

Фундаментальный вклад в развитие теории дифференциальных игр принадлежит школам, возглавляемые академиками Л.С.Понтрягиным и Н.Н.Красовским. В работрах Л.С.Понтрягина, Н.Н.Красовского, Е.Ф.Мищенко, Ю.С.Осипова, Б.Н.Пшеничного, Л.А.Петросяна, М.С.Никольского, Н.Ю.Сатимова, А.А.Азамова, А.А.Меликяна, Н.Н.Петрова, А.Г.Ченцова, А.А.Чикрия и многих других, дифференциальные игры рассмотрены как конфликтно-управляемые системы и предложены различные подходы их формализации.

Основополагающие результаты в этой области получены Л.С. Понтрягиным [3-8], Н.Н.Красовским [9-11], их сотрудниками и их учениками. В работе [7] Л.С.Понтрягин предложил принципиально новую формализацию понятия дифференциальной игры, особенностью которой является рассмотрение дифференциальной игры с двух различных точек зрения: с точки зрения преследователя и с точки зрения убегающего. Таким образом, Л.С.Понтрягин связывает с дифференциальной игрой две различные задачи: задачу преследования и задачу убегания. В первом случае задача состоит в отыскании множества начальных состоянии, из которых преследователь может гарантировать сближение с убегающим. Во втором случае задача состоит в описании множества начальных состояний, из которых преследуемый может гарантировать избежание встречи.

В работах [3]-[4] Л.С.Понтрягиным получены достаточные условия для возможности завершения преследования в линейных дифференциальных играх. В работе [3] использован формализм принципа максимума - одного из центральных методов математической теории управления. Упрощение результатов [4], полученное Л.С.Понтрягиным и Е.Ф.Мищенко [8], в конечном счете привело к созданию Л.С.Понтрягиным первого и второго (прямых) методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных игр [5]-[6]. В продолжение первого и второго метода Л.С.Понтрягина в работе [12] Н.Ю.Сатимовым предложен новый метод преследования в линейных дифференциальных играх. Модификации этого метода, который мы называем третьим(промежуточным) методом для линейных дифференциальных игр преследования.

В работах Н.Н.Красовского и представителями его научной школы [9]-[11] была предложена такая математическая формализация понятия дифференциальной игры, которая позволила ему и его сотрудникам дать постановку задач позиционных дифференциальных игр, доказать фундаментальные теоремы об альтернативе и предложить эффективные методы построения экстремальных стратегий сближения и уклонения на основе принципа экстремального прицеливания.

Полученные Н.Н.Красовским и его сотрудниками результаты имеют фундаментальное значение в теории дифференциальных игр. Ими созданы позиционные методы для решения игровых задач для дифференциально -разностных уравнений в частных производных, задач с распределенными параметрами. Начальные идеи в этом направлении принадлежат Л.С.Понтрягину и реализованы им в методе альтернированного интеграла [4]-[5]. В линейном случае этот метод дает эффективные достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Во всех упомянутых выше работах изучались дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако, при более тщательном изучении часто становится очевидным, что более реалистичная модель игры должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Поэтому в настоящее время при создании и исследовании математических моделей в большинстве случаев использование обыкновенных дифференциальных уравнений уже недостаточно. Более адекватным является использование аппарата дифференциально-разностных уравнений. На практике сегодня возникла необходимость в моделировании игр преследования дифференциально-разностными уравнениями, в которых учитывается предистория состояния системы, что позволяет более адекватно отражать динамику. Для решения таких задач разработан метод разрешающих функций [14], который развивает первый прямой метод Л.С.Понтрягина [4].

Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова [15], А.Б.Куржанского [16], В.И. Максимова [17], М.С. Никольского [18]-[19], Е.С. Половинкина [20], А.А.Чикрия, Г.Ц.Чикрия [21], А.П.Коновалова [22]-[23], Н.А.Мамадалиева [24]-[31], Л.В.Барановской [32] и др. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе, даются достаточные условия завершения дифференциально - разностной игры сближения, в основе лежит понятие минимаксного программного поглощения, модифицированное для приложения к изучаемому кругу вопросов, изучаются дифференциально-разностные игры преследования при геометрических, интегральных и различных ограничениях на управления игроков при наличии запаздывания, изучаются дифференциально-разностные игры преследования многих лиц.

Отметим, что игровые задачи управления пучками траекторий впервые исследованы в работах Н.Ю.Сатимова [33]-[34]. В этих работах изучены квазилинейная дифференциальная игра преследования при геометрических ограничениях на управления игроков без запаздывания. Получены достаточные условия разрешимости задачи управления пучками траекторий при геометрических ограничениях на управления игроков. Все теоремы формулируются в терминах аналогов первого и второго методов Л, С. Понтрягина [1]-[2], а также методов, предложенных в работе [12]. В дальнейщем эти задачи изучены в работах М.Тухтасинова [35]-[36], в случае, когда на управления игроков наложены интегральные и различные ограничения без запаздывания. Как продолжение вышеуказанных работ Н.Ю.Сатимова и М.Тухтасинова, Н.А. Мамадалиевым [24],[30], [31] предложены различные схемы для получения достаточных условий успешного завершения преследования в линейных и квазилинейных дифференциальных играх с геометрическими, интегральными и различными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

Данная работа посвящена исследованию игровой задачи управления пучками траекторий описываемая системой дифференциально-разностных уранений нейтрального типа

[30]-[31], [37] в формализации дифференциальных игр, предложенной Л.С.Понтрягиным [6]. В данной статье в отличие от вышеупомянутых работ предлагаются различные модификации первого [4] метода преследования в случае, когда осуществляется управление пучками траекторий с геометрическими ограничениями на управления игроков. Получены достаточные условия для возможности перевода пучка траекторий, исходящих из начального множества $N\left(X\left(\cdot\right)\right)$, на терминальное множество M за некоторое конечное время. Полученные результаты развивают и обобщают ряд известных достаточных условий из теории преследования. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [21]-[24], [32], и продолжает исследования [18]-[19], [25]-[30]. Следует отметить, что: а) если $h = o$, то из наших результатов следует результаты работ [34], [36], полученные для модификации первого метода преследования; б) если начальное множество $N(X(\cdot))$ состоит из одного элемента (точки), то из наших результатов следуют соответствующие теоремы работ [19], [23], [25]. Предлагаемые схемы являются естественным обобщением конструкции Л.С.Понтрягина [4]-[5] на случай линейных дифференциальных игр описываемых системой дифференциально-разностных уранений нейтрального типа. Исходя из этого полученные в настоящей работе результаты отличаются от полученных ранее для уравнений нейтрального типа.

При изучении игры (1), (2), (3) мы отождествляем себя с преследователем.

Заметим, что когда начальное множество $N(X(\cdot))$ одноточечно, то такие задачи изучались многими авторами, из них следует отметить следующие работы [18]-[19], [21]-[23], [25]-[29], [37]. Поэтому с точки зрения развития теории дифференциальных игр представляет интерес случай, когда $N(X(\cdot))$ содержит более одного элемента. Так как в случае одноэлементного $N(X(\cdot))$ стратегия преследователя строится, в частности, исходя из данного начального положения $z_o(\cdot)$, то в случае, когда $N(X(\cdot))$ содержит более одного элемента, трудность заключается в том, что для всех начальных положений $z_o(\cdot)$, из $N(X(\cdot))$ строится одна и та же стратегия преследователя. Для рассматриваемой задачи стратегия преследователя строится в виде $u = u(t, v),\ t \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^q$ при условии, что для любого допустимого управления $v = v(t)$, $t \geq 0$, убегающего игрока функция $u[t] = u(t,\, v(t)),\ t \geq 0$, измерима и является допустимым управлением преследующего игрока. В частности, измеримость $u[t]$, $t \geq 0$, гарантируется, если $u(t, v)$, непрерывна по v при фиксированном t и измерима по t при фиксированном v [38]-[39]. Отметим, что рассматриваемая задача ранее в бесконфликтной ситуации изучалась в [40], а в конфликтной ситуации, но несколько с другой точки зрения - в работе [16].

Постановка задачи. I. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования, описываемая системой уравнений нейтрального типа [42, с.36]

$$\dot{z}(t) = Az(t) - B\dot{z}(t-h) - Cz(t-h) - f(u(t), v(t)), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^p,\ v(t) \in \mathbb{R}^q, n \geq 1,\ p \geq 1,\ q \geq 1$; $A, B, C-$ постоянные $(n \times n)$ матрицы; $f : P \times Q \to R^n-$ непрерывная функция. $h-$ фиксированное положительное число.; $u(t), v(t)-$ называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно, они выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$,$v = v(\cdot)$, определенных на отрезке $[0, +\infty)$. Кроме того, они удовлетворяют ограничениям вида

$$u(t) \in P,\ \ v(t) \in Q,\ \ 0 \leq t < +\infty, \tag{2}$$

где P и $Q-$ непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Измеримые функции $u(t),\ v(t),\ \ 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0- линейное подпрос-транство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1- компактное подмножество подпространства L, $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$(т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через $\pi-$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L:\ \ \pi : \mathbb{R}^n \to L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [7, с. 411];

В пространстве $\mathbb{R}^n$, кроме множества M, выделено множество $N(X(\cdot))$, из точек которого исходят траектории игры (1), называемое начальным множеством. В качестве начального множества $N(X(\cdot))$, берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения $X(s)$, $-h \leq s \leq 0:$

$$N(X(\cdot)) = \{\varphi(t) : z(s) = \varphi(t), \quad -h \leq t \leq 0\}.$$

Пусть $u = u(t),\ \ 0 \leq t < +\infty$ и $v = v(t),\ \ 0 \leq t < +\infty,-$ произвольные допустимые управления в игре (1)-(2). Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек множества $N(X(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot),\ v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ на терминальное множество M за конечное время.

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0,\ +\infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t),\ 0 \leq t < +\infty$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t),\ t \in [0, +\infty)$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода.*

В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T. Для рассматриваемой задачи стратегия преследователя строится в виде $u = u(t, v), t \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^q$ при условии, что для любого допустимого управления $v = v(t)$, убегающего игрока функция $u[t] = u(t, v(t)),\ t \geq 0$ измерима и является допустимым управлением преследующего игрока.

Обозначим через Ω совокупность всех выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Через Sобозначим замкнутый единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $X, Y \in \Omega$. Тогда множество $\{x : x + Y \subset X\}$ называется геометрической разностью (разность Минковского) множеств X и Y и обозна-чается $X \overset{*}{-} Y$ [7, с.459].

Пусть $\tau > 0-$ некоторое число и $t \in [0, \tau]$. Через $K(t), -\infty < t \leq \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами [2,с.199]: а) $K(t) = \tilde{0}, t < 0, \tilde{0}-$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E$, $E-$единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t),\ 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) - B\dot{K}(t-h) - CK(t-h), \tag{3}$$

при $t > 0$, $t \notin S^0 = S \bigcup (-h, +\infty)$, где $S = \{t : t = \sum_{i=0}^{\infty} j_i h_i\}$, $\quad j_i-$ целые числа.

Матричная функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$, $t \notin S^0$ но, в общем случае, имеет разрывы первого рода в точках множества S^0.

Пусть $u = u(s)$,$v = v(s)$ допустимые управления выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$. Тогда для решения $z(t)$ системы (1), при начальном условии $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$, $(z(s) = \varphi(s),\ -h \leq s \leq 0)$, в силу формулы Коши имеет место следующее представление [2.с.201]

$$z(t) = [K(t) - K(t-h)B]\, \varphi(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)\, [B\dot{\varphi}(s) + C\varphi(s)]\, ds -$$

$$- \int_0^t K(t-s) f(u(s), v(s)) ds. \tag{4}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty\ < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - г), могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Пусть $\tau > 0$ и $t \in [0, \tau]$. Рассмотрим следующие многозначные отображения [33]

$$\hat{W}(t) = \bigcap_{v \in Q} F(t, v), \quad W(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{W}(t) dt, \tag{5}$$

где $F(t, v) = \pi K(t) f(P, v)$ и $\pi K(t) f(P, v) = \{\pi K(t) f(u, v) : u \in P\}$.

Далее, через $W_1[M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]$ обозначим следующее множество [34]

$$W_1[M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))], \tau] = [M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))]] + \int_0^{\tau} \hat{W}(t) dt, \tag{6}$$

где $H[\tau, N(X(\cdot))] = [\pi K(t) - \pi K(t-h)B]\, X(0) +$

$$+ \int_{-h}^{0} \pi K(t-s-h) \left[B\dot{X}(s) + CX(s)\right] ds = \{[\pi K(t) - \pi K(t-h)B]\, \varphi(0) +$$

$$\left. + \int_{-h}^{0} \pi K(t-s-h)\, [B\dot{\varphi}(s) + C\varphi(s)]\, ds : \varphi(s) \in X(s),\ -h \leq s \leq 0 \right\}.$$

Предположение 1. *Множество $\hat{W}(t)$ непусто для всех $t \in [0, \tau]$ [7].*

Теорема 1. *Предположим, что при некотором $\tau = \tau_1 > 0$ имеет место включение*

$$0 \in W_1[M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]. \tag{7}$$

Тогда в игре (1), (2) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за конечное время $T = \tau_1$.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы, т.е.

$$0 \in [M_1 \underline{*} H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + \int_0^{\tau_1} \hat{W}(t)dt, \tag{8}$$

Значит (см. (6), (8)) найдутся векторы $w \in W(\tau_1)$ и $d \in M_1 \underline{*} H[\tau_1, N(X(\cdot))]$, и в соответствии с определением интеграла $W(\tau_1)$ существует суммируемая вектор-функция $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(t)$,$0 \le t \le \tau_1$, такая, что

$$\tilde{w}(t) \in \hat{W}(t), d + \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t)dt, 0 \le t \le \tau_1, \tag{9}$$

В соответствии с (5) для произвольного фиксированного значения пары $(r, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ уравнение

$$\tilde{w}(\tau_1 - t) = \pi K(\tau_1 - t) f(u, v), \qquad 0 \le t \le \tau_1, \tag{10}$$

относительно $u \in P$ имеет решение. Пусть для $(r, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ вектор $u(r, v)-$ наименьшее в лексикографическом смысле решение уравнения (10), а для $(r, v) \in (\tau_1, \infty) \times Q$ положим $u(r, v) = u_0$, где u_0- произвольная точка из множества P. Поэтому для произвольной измеримой функции $v = v(t) \in Q$, $0 \le t < \infty$, $v(t) \in Q$, функция $u[t] = u(t, v(t))$,$0 \le t < \infty$,$-$ является лебеговски измеримой функцией [39,с.179].

Утверждается, что пучок траекторий $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$ попадает на терминальное множество M. Действительно, пусть $\varphi(\cdot)-$ произвольная точка из начального множества $N(X(\cdot))$, $z(t)$, $0 \le t < \infty$,$-$ траектория уравнения (1). Имеем

$$\pi z(\tau_1) = [\pi K(\tau_1) - \pi K(\tau_1 - t - h)B]\,\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h)\,[B\dot{\varphi}(t) + C\varphi(t)]\,dt -$$

$$- \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) f(u(t), v(t))dt = [\pi K(\tau_1) - \pi K(\tau_1 - t - h)B]\,\varphi(0) +$$

$$+ \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h)\,[B\dot{\varphi}(t) + C\varphi(t)]\,dt - \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt =$$

$$= [\pi K(\tau_1) - \pi K(\tau_1 - t - h)B]\,\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h)\,[B\dot{\varphi}(t) + C\varphi(t)]\,dt + d. \tag{11}$$

Далее (см.(11)),

$$\pi z(\tau_1) = [\pi K(\tau_1) - \pi K(\tau_1 - t - h)B]\,\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h)\,[B\dot{\varphi}(t) + C\varphi(t)]\,dt + d \in$$

$$\in H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + d \in H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + [M_1 \underline{*} H[\tau_1, N(X(\cdot))]] \subset M_1,$$

в соответствии с определением геометрической разности $\underline{*}$. Таким образом, для любого начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$ имеет место включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, что эквивалентно $z(\tau_1) \in M$. Это означает, что задача управления пучками траекторий решена, а временем перевода является τ_1. Теорема 1 доказана.

II. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot)$. Положим

$$\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=[\pi K(t)-\pi K(t-h)B]\,\varphi(0)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\pi K(t-s-h)\,[B\dot{\varphi}(s)+C\varphi(s)]\,ds-f(\tau), \tag{12}$$

В силу предположения 1 и в соответствии с определением интеграла от многозначного отображения (5) следует существование суммируемой функции $\tilde{w}(t)\in\hat{W}(t)$, для всех $0\le t\le\tau$, такой, что выполнено равенство

$$f(\tau)=\int_0^{\tau}\tilde{w}(t)dt.$$

Зафиксируем его. Тогда функция $\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=[\pi K(t)-\pi K(t-h)B]\,\varphi(0)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\pi K(t-s-h)\,[B\dot{\varphi}(s)+C\varphi(s)]\,ds-\int_0^{\tau}\tilde{w}(\tau-t)dt. \tag{13}$$

Если $\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]\neq 0$ то

$$\eta[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=\frac{\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]}{|\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]|},$$

и для произвольного вектора $v\in Q$ определим разрешающую функцию $\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,v,\tilde{w}(\cdot))$ определенную следующим образом [24]:

$$\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,v)=\sup\{\,\lambda\ge 0:\lambda\eta[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]\in\pi K(\tau-t)f(P,v)-\tilde{w}(\tau-t)\},$$

$\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,\tilde{w}(\cdot))=\inf\{\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,v,\tilde{w}(\cdot)):v\in Q\}$; а если $\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=0$, то считается $\eta[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=0$, $\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,v,\tilde{w}(\cdot))\equiv\lambda(\varphi(\cdot),\tau,t,v,\tilde{w}(\cdot))\equiv 0$.

Пусть $\xi[\tau,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]=-d-\int_0^{\tau}\tilde{w}(t)dt$.

Предположение 2. *Существуют число* $\tau=\tau_2>0$, вектор $d\in M_1\underline{*}H[\tau_2,N(X(\cdot))]$, и *суммируемая функция* $\tilde{w}(t)$, $\tilde{w}(t)\in\hat{W}(t)$, $0\le t\le\tau_2$, $d+\int_0^{\tau_2}\tilde{w}(t)dt\neq 0$, *такие, что: а) функция* $\lambda(\varphi(\cdot),\tau_2,t,\tilde{w}(\cdot))$, $0\le t\le\tau_2$, *а также суперпозиция* $\lambda(\varphi(\cdot),\tau_2,t,v(t),\tilde{w}(\cdot))$, $0\le t\le\tau_2$, *функции* $\lambda(\varphi(\cdot),\tau_2,t,v,\tilde{w}(\cdot))$, $0\le t\le\tau_2$, $v\in Q$, *при произвольной измеримой функции* $v(t)$, $0\le t\le\tau_2$, *являются суммируемыми; б) выполнено неравенство*

$$|\xi[\tau_2,\varphi(\cdot),\tilde{w}(\cdot)]|-\int_0^{\tau_2}\lambda(\varphi(\cdot),\tau_2,t,\tilde{w}(\cdot))dt\le 0. \tag{14}$$

Теорема 2. *Если выполнены сформулированные выше предположения 1, 2, то в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий из начального множества* $N(X(\cdot))$ *можно перевести на терминальное множество* M *за конечное время* $T=\tau_2$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot)\in N(X(\cdot))$ выполнены условия предположения 1,2. Для произвольной измеримой функции $v=v(t)$, $0\le t\le$

τ_2, $v(t) \in Q$, рассмотрим функцию $\rho(\tau_2;\, v(t),\, 0 \leq t \leq \tau_2)$, определенную следующим образом:

$$\rho(\tau_2;\, v(t),\, 0 \leq t \leq \tau_2) = |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, \tilde{w}(\cdot))dt.$$

В силу п.б) предположения 2 существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_2]$ такой, что $\rho(t^*;\, v(t),\ \ 0 \leq t \leq t^*) = 0$. Ясно,что если $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(M(t), t)$, то можно считать $t^* = 0$. Пусть $\xi[t^*, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0$ и $\rho(\tau;\, v(t),\, 0 \leq t \leq \tau) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в противном случае

$$0 < \rho(\tau_2;\, v(t),\, 0 \leq t \leq \tau_2) = |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))dt \leq$$

$$\leq |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t)dt,$$

что противоречит неравенству (14). Таким образом, пусть $\rho(t^*;\, v(t),\ \ 0 \leq t \leq t^*) = 0$. Учитывая этот факт, рекомендуется значение $u[t]$ параметра u выбирать как первый компонент решения уравнений

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u, v(t)) = \tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v, \tilde{w}(\cdot))\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)], 0 \leq t \leq t^*, \tag{15}$$

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u, v(t)) = \tilde{w}(\tau_2 - t), t^* < t \leq \tau_2, \tag{16}$$

относительно $u \in P$. Используя лемму Филиппова–Кастена [39. с.179] можно показать существование измеримых решений уравнений (15), (16). Как обычно, за решение $u[t]$ уравнений (15), (16) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений уравнений (15), (16). При таком способе управления параметром $u[t]$ убедимся, что пучок траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попадает на множество M к моменту времени τ_1. Действительно, (см.(15), (16)) имеем соотношение

$$d = -\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt = -\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] -$$

$$- \int_0^{t^*} \left[\pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t)) - \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v, \tilde{w}(\cdot))\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]\right] dt -$$

$$- \int_{t^*}^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = -\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]dt -$$

$$- \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt, \tag{17}$$

ибо, из установленного выше равенства $\rho(t^*;\, v(t),\, 0 \leq t \leq t^*) = 0$ имеем

$$-\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]dt =$$

$$= -|\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]dt =$$

$$= -|\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))dt \cdot \eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] =$$

$$= \left[-|\xi[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]| + \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t), \tilde{w}(\cdot))dt \right] \eta[\tau_2, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0.$$

Следовательно (см.(17)), получаем

$$-\int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t) f(u[t], v(t))dt = d \in [M_1 \underline{*} H[\tau_2, N(X(\cdot))]].$$

Из определения геометрической разности множеств следует, что

$$H[\tau_2, N(X(\cdot))] - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t) f(u[t], v(t))dt \subset M_1.$$

Таким образом, учитывая произвольность начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$, пучок траекторий, из множества $N(X(\cdot))$ переведен на множество M за время τ_2. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Мир, М. 1967.

2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные игры. Мир, М. 1967.

3. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр.// УМН. 1966. №21. С. 219–274.

4. Понтрягин Л.С.О линейных дифференциальных играх I.// Докл.АН СССР 1967. 174. С.1278–1280

5. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II.// Докл.АН СССР 1967. 175. С. 764–766

6. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования.// Мат. сб.1980. 112(154). С. 307–330

7. Понтрягин Л.С. Избранные труды.1988. Наука М. Т. 2.

8. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Линейные дифференциальные игры. // Докл.АН СССР 1967. 174. С. 27–29

9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Наука, М. 1974

10. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Наука, М. 1985

11. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Наука, М. 1970

12. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх.// Дифференц. уравнения. 1973. IX. С. 2000–2009

13. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Наукова Думка. Киев. 1992

14. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Наука думка. Киев. 1992

15. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Линейные дифференциально - разностные игры.// Докл.АН СССР 1971. 197. С. 777–780

16. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Наука, М. 1977

17. Максимов В.И. Альтернатива в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения с функциональной целью.// Прикл. мат. и мех. 1976. вып.40. С.987-994

18. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Докл.АН СССР 1971. 197. С.1018-1021

19. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Дифференц. уравнения 1972. С. 260-267

20. Половинкин Е.С. Структура дифференциальных игр, описываемых уравнениями с запаздывающем аргументом.// Кибернетика. 1971. №6. С. 87-89

21. Чикрий А.А.,Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх.// Дифференц. уравнения. 1984. №20. С. 802-810

22. Коновалов А.П. Линейные дифференциальные игры с запаздываниями и разнотипными ограничениями.// Кибернетика. 1983. №6. С. 124-126

23. Коновалов А.П. Линейные дифференциальные игры с запаздываниями и двойными ограничениями.//Рук.деп.в ВИНИТИ 04.12.85 2671 42 с. 1985

24. Мамадалиев Н. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания. // Международный научно-технический журнал Кибернетика и системный анализ. 2012. №5. вып. 1 С. 154–164

25. Мамадалиев Н.А. О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний.//Изв.вузов.Матем.2010. №6. С.16-22

26. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков. // Изв.вузов.Матем. 2020. №3. С. 12-28

27. Мамадалиев Н.А. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний. // Математические заметки. 2012. №5. С. 750-760

28. Мамадалиев Н.А. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков.// Сибирский математический журнал. 2015. т.56. №1. С. 129-148

29. Мамадалиев Н.А. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков.// Дифференц. уравнения. 860-873 2012

30. Mamadaliyev N., Kh. Mustapokulov Pursuit Problem for Differential-Difference Equations of Neutral Type// Journal of Mathematical Sciences, 2023. вып. 277. №3. December. DOI 10.1007/s10958-023-06846-8

31. Мамадалиев Н.А.,Мустапокулов Х.Я., Абдуманнопов М.М. Дифференциальные игры преследования нейтрального типа с интегральными ограничениями на управления игроков// Математическая терия игр и её приложения. 2024. Т.16. в.4. С.45-68.

32. Барановская Л.В. Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. №2. С. 4-8

33. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий.// Докл.АН СССР. 1990. 314. С. 132-134

34. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий.// Дифференц. уравнения. 1991. вып. 27. С. 219-228

35. Тухтасинов М. Линейные дифференциальные игры преследования при интегральных ограничениях на управляющие параметры.//Рук.деп.в ВИНИТИ 15.08.89. 5486-В89 16 с.1989

36. Тухтасинов М. Управления пучками траекторий при различных ограничениях на управляющие параметры.// Рук.деп.в ВИНИТИ 04.10.89 6101-В89. 33 с. 1989

37. Мамадалиев Н.А., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.// Изв.вузов.Матем. 2021. №11. С. 21-33

38. Филлипов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Наука.М. 1985

39. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. Наука. М. 1977

40. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками траекторий. Л. 1981

41. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения Наука, М., 1967

42. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Мир. М. 1984

REZYUME

Mazkur ishda o‘yinchilarning boshqaruvlariga geometrik chegara qo‘yilgan differensial-ayirmali neytral tipdagi differensial o‘yinda traektoriyalarni boshqarishning o‘yin masalasi tadqiq qilinadi. Quvish masalasi birinchi usulining modifikatsiyasi yordamida traektoriyalar dastasini boshqarishning o‘yin masalasini yechish uchun yangi yetarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: differensial o'yin, quvish masalasi, neytral tipdagi differensial-ayirmali tenglama, terminal to'plam, quvlovchi, qochuvchi, boshqaruvlar.

RESUME

In this paper, we study linear differential games described by a system of linear differential-difference equations of neutral type under geometric constraints on the players' controls. Using a modification of the first method of the pursuit problem for these games, we obtain new sufficient conditions for the solvability of game problems of control by trajectory bundles.

Key words: differential game, pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, terminal set, pursuer, evader, control.

УДК 517.55

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $\mathbf{R}^6 \lhd \mathbf{Sp}(6,\mathbf{R})$ и $\mathbf{R}^6 \lhd \Gamma\mathbf{Sp}(6,\mathbf{R})$

Муминов К. К.
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
qobiljonmuminov2023@gmail.com
Султонова Б. Р.
Гулистанский Государственный Университет, Узбекистан,
barnosultonova444@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Пусть R^6 конечномерное линейное пространство над полем действительных чисел R. Через $GL(6,R)$ обозначим группу всех обратимых линейных преобразований пространства R^6 . Обозначим через $Aff(R^6)= R^6 \lhd GL(6,R)$ группу всех аффинных преобразований пространств R^6 . Каждое преобразование из $Aff(R^6)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL(6,R)$ и сдвига, порожденного элементом $u = (u_i)_{i=1}^6$ из R^6 . Пусть $R^6 \lhd Sp(6,R)$ $(R^6 \lhd \Gamma Sp(6,R))$ подгруппа группы $Aff(R^6)$.

В настоящей работе дается необходимые и достаточные условия для $R^6 \lhd Sp(6,R)$ $(R^6 \lhd \Gamma Sp(6,R))$-эквивалентности путей в R^6 .

Ключевые слова: действие группы, эквивалентность путей, аффинных преобразований, Галилеево-симплектическая группа, полупрямого произведения, регулярные пути.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $R^6 - 6$ - мерное векторное пространство над полем рациональных чисел R. Элементы из R^6 представляем в виде $6-$мерных вектор строк. Через $GL(6,R)$ обозначим группу всех обратимых линейных преобразований пространства R^6, и пусть G подгруппа группы $GL(6,R)$. Путем в R^6 называется вектор-функция $x:(0,1)\to R^6$, $x(t)=\{x_i\}_{i=1}^6$, у которой все координатные отображения $x_i:(0,1)\to R$ является бесконечно дифференцируемыми функциями. Одной из важных задач дифференциальной геометрии является нахождение легко проверяемых необходимых и достаточных условий, обеспечивающих $G-$ эквивалентность путей, лежащих в X. При решении этой задачи используются методы теории дифференциальных инвариантов, дающие описание образующих дифференциального поля G -инвариантных дифференциальных рациональных функций. Явный вид этих образующих позволяет установить эффективные критерии для G-эквивалентности путей. В работе [5] этим методом была решена задача об эквивалентности кривых, в случае действия симплектической группы $Sp\left(2n,C\right)$, а в [4]- для действия групп $R^n\ \triangleright O\left(n,R\right)$ $R^n\ \triangleright SO\left(n,R\right)$. В работах [7], [8] даны необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей при действии псевдоортогональной группы $O\left(n,p,R\right)$ и специальной псевдоортогональной группы $SO\left(n,p,R\right)$. Такой подход был использован при решении задачи об эквивалентности путей относительно действия групп $K^n\ \triangleright O\left(n,p,K\right)$ и $K^n\ \triangleright SO\left(n,p,K\right)$ (где K - поле действительных чисел R, либо поле комплексных чисел C) [6].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $GL\left(6,R\right)$ группа всех обратимых линейных преобразований R^6 ,а $G = Sp\left(6,R\right) = \left\{g \in GL\left(6,R\right) : gIg^T = g^TIg = I\right\}$ её симплектическая подгруппа, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим правое действие $(g,x) \to gx$ группы $Sp\left(6,R\right)$ в R^6, т.е. обычное умножение строки на матрицу.

Путем $x\left(t\right), t \in \left(0,1\right)$, назовём бесконечно дифференцируемое отображение x интервала $\left(0,1\right)$ в R.

Два пути $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ называются $Sp\left(6,R\right)$ - эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$ что $y\left(t\right) = gx\left(t\right)$ для любого $t \in \left(0,1\right)$.

Функция f от $x\left(t\right)$ и конечного числа ее производных называется инвариантной, если ее значения для $Sp\left(6,R\right)$ - эквивалентных путей совпадают.

Если $x\left(t\right) = \left\{x_i\left(t\right)\right\}_{i=1}^6$, $y\left(t\right) = \left\{y_i\left(t\right)\right\}_{i=1}^6$ произвольные элементы из R^6 то xIy обозначим через $[x,y]$, т.е.

$$[x,y] = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \ldots + x_5y_6 - x_6y_5$$

кососимметрическое произведение векторов x, y.

В теории инвариантов при изучении $Sp\left(6,R\right)$- эквивалентности конечных множеств точек важную роль играют понятия $Sp\left(6,R\right)$- инвариантного многочлена и $Sp\left(6,R\right)$ - инвариантной рациональной функции от координат точек. Аналогичные понятия вводятся и в случае, когда координаты векторов из R^6 являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Рассмотрим множество всех путей в R^6, т. е. множество векторов $x\left(t\right) = \left\{x_i\left(t\right)\right\}_{i=1}^6$ где $x_i\left(t\right)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на интервале $\left(0,1\right)$, $i = 1,\ldots,6$. Производной r - ого порядка от пути $x\left(t\right)$ назовём вектор $x^{(r)}\left(t\right) = \left\{x_i^{(r)}\left(t\right)\right\}_{i=1}^6$. Для каждого пути $x\left(t\right)$ можно рассмотреть 6×6 - матрицу $M\left(x\right)$, в которой r - строкой служат координаты вектора $x^{(r-1)}$. Определитель матрицы $M\left(x\right)$ будем записывать в виде $\left[x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}\right]$. Путь $x\left(t\right)$ называется регулярным, если определитель матрицы $M\left(x\left(t\right)\right)$ не равен нулю при всех $t \in \left(0,1\right)$. В дальнейшем будут рассматриваться только регулярные пути, т. е. такие пути $x(t)$, для которых $\left[x, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}\right](t) \neq 0$ при всех $t \in (0,1)$. Заметим, что два пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(6,R)$- эквивалентными в том и только том случае, когда $M(y) = gM(x)$ для некоторого $g \in G$. В этом случае, очевидно, что $y^{(m)}(t) = gx^{(m)}(t)$, $m = \overline{1,6}$ и поэтому G - эквивалентность путей $x(t), y(t)$ равносильна выполнению равенства $M(y)(t) = gM(x)(t)$ при всех $t \in (0,1)$.

Лемма 2.1.[1] *Два пути $x(t)$ и $y(t)$ $Sp(6,R)$ - эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:*

1. $M'(x)(M(x))^{-1} = M'(y)(M(y))^{-1}$
2. $M(x)IM^T(x) = M(y)\ IM^T(y)$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия G- эквивалентности регулярных путей $x(t)$ и $y(t)$, описываемые с помощью матриц $M(x(t))$ и $M(y(t))$, в случае, когда G являются группой $Sp(6,R)$ (см. [1]).

Теорема 2.1. *Два регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(6,R)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства:*

$$M'(x)(M(x))^{-1} = M'(y)(M(y))^{-1} \tag{1}$$

$$M(x)IM^T(x) = M(y)\ IM^T(y) \tag{2}$$

$$detM(x(t) = detM(y(t))\ для\ всех t \in (0,1). \tag{3}$$

Рассмотрим кольцо $R\{x\} = R\{x_1, \ldots, x_6\}$ всех многочленов от счётного числа переменных $x_1, \ldots, x_6,\ x_1^{'}, \ldots, x_6^{'}, \ldots, x_1^{r}, \ldots, x_6^{r}$ и положим $d\left(x_i^{(r)}\right) = x_i^{(r+1)}$ Ясно, что d можно однозначно продолжить до дифференцирования в кольце $R\{x\}$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (d - кольца). Элементы этого d - кольца называются d - многочленами (дифференциальными многочленами). Известно , что дифференцирование на единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле отношений. Это поле будем называть d - полем (или дифференциальным полем) и обозначать через $R\langle x\rangle = R\langle x_1, \ldots, x_6\rangle$, а его элементы будем называть d - рациональными функциями и будем записывать в виде $f\langle x\rangle = f\langle x_1, \ldots, x_6\rangle$, где $x = x(x_1, \ldots, x_6)$ 6- мерный d - переменный вектор.

Действие группы $Sp(6,R)$ на 6 мерный d - переменный вектор x и его производные $x^{(r)}$ определим как умножение $x^{(r)}$справа на матрицу $g \in G : x^{(r)}g$, где $r \in N \cup \{0\} = Z_0^+$ d - рациональная функция называется $f\langle x\rangle$ - инвариантной, если при любом $g \in G$.

Известно, что множество всех $Sp(6,R)$- инвариантных d - рациональных функций, обозначаемое через $R\langle x\rangle^{Sp(6,R)}$, является дифференциальным полем относительно индуцированного дифференцирования из $R\langle x\rangle$.

Дифференциальное кольцо всех $Sp(6,R)$- инвариантных дифференциальных многочленов будем обозначать через $R\{x\}^{Sp(6,R)}$.

Говорят, что система элементов $A = \{a_i,\ i \in T\}$ являются системой образующих d - поля $R\langle x\rangle$ (d - кольца), если любой элемент $b \in R\langle x\rangle$ может быть получен из конечного числа элементов множества применением конечного числа раз операций d - поля $R\langle x\rangle$ (d - кольца $R\{x\}$). В случае, когда в качестве системы образующих может быть выбрано конечное множество $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ то говорят, что d - поле (d - кольцо) имеет конечное число образующих $a_1, \ldots, a_m$. Элементы $a_1, \ldots, a_m$, из $R\{x\}$ называются d - алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $f \in R\{x\}$ что $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$. В противном случае система элементов $a_1, \ldots, a_m$ называется d - алгебраически независимой.

Для d - переменных векторов x, y из R^6 через $[x,y]'$ обозначим первую производную кососимметрического произведения $[x,y]$. Ясно, что $[x,y]' = [x',y] + [x,y']$. (см. [1, 2]).

Теорема 2.2.[1] *В d - поле $R\langle x\rangle^{Sp(6,R)}$ следующие d - многочлены являются его образующими*

$$f^{(m)}(x) = \left[x^{m-1}, x^m\right].$$

Эта система дифференциальных многочленов d - алгебраически независима, т.е. степень дифференциальной трансцендентности d - поля $R\langle x\rangle^{Sp(6,R)}$ равна 6. .

Теорема 2.3.[3] *Два регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $Sp(6,R)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0,1)$, $m = \overline{1,6}$ выполнены следующие равенства:*

$$\left[x^{(m-1)}(t), x^{(m)}(t)\ \right] = \left[y^{(m-1)}(t), y^{(m)}(t)\ \right]. \tag{4}$$

для всех $t \in (0,1)$ и $m = \overline{1,6}$.

Рассмотрим в R^6 билинейную форму $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_6y_6$ и соответствующую евклидову метрику $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i - y_i)^2}$. Ортогональная подгруппа $O(6,R)$ в $GL(6,R)$ определяется с помощью равенства

$$O(6,R) = \left\{g \in GL(6,R) : (gx, gy) = (x,y);\ x,y \in R^6\right\}.$$

Один из важных примеров неевклидовых геометрий реализуется в пространстве Галилея $(R^6, d) = \Gamma_6$ [9, Глава 6], где метрика Галилея $d(x,y)$, $x = \{x_i\}_{i=1}^6$, $y = \{y_i\}_{i=1}^6$ определяется с помощью следующих равенств

$$d(x,y) = |x_1 - y_1|\,, \text{ если } x_1 \neq y_1,$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=2}^{6}(x_i - y_i)^2}, \text{ если } x_i = y_i.$$

Обозначим через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ канонический базис в R^6, где 1 стоят на i-ом месте, $i = 1, ..., 6$. Положим

$$U_6 = \{\alpha e_1 : \alpha \in R\}\,,\ V_6 = \left\{\sum_{i=2}^{6}\alpha_i e_i : \alpha_i \in R,\ i = 2, \ldots, 6\right\},$$

и обозначим через $\Gamma(6,R)$ множества всех таких $y = \{g_{i,j}\}_{i,j=1}^6 \in GL(6,R)$, для которых $g(U_6) = U_6$, $g_{11} = \pm 1$, $g(V_6) = V_6$, и сужение g на V_6 есть элемент ортогональной группы $O(5,R)$. Известно, что $\Gamma(6,R)$ есть подгруппа в $GL(6,R)$, которую называют группой Галилея преобразований в R^6 [3].

Путь $x=\{x_i(t)\}_{i=1}^{6}\subset\Gamma_6$, $t\in(0,1)$ называют Γ_6 - регулярным, если определитель матрицы $x=\left\{x_i^{(j)}(t)\right\}_{j=0,1,\ldots,4,\,i=2,\ldots,6}$ отличен от нуля.

Следующая теорема дает критерий для $\Gamma(6,R)$ -эквивалентности Γ_6 - регулярных путей в пространстве Галилея Γ_6.

Теорема 2.4.[3] *Два* Γ_n*- регулярных пути* $x(t)$ *и* $y(t)$*являются* $\Gamma(6,R)$*- эквивалентными в том и только в том случае, когда* $y_1(t)=\pm x_1(t)$ *и верны равенства*

$$\sum_{i=2}^{6}\left(x_i^{(m)}(t)\right)^2=\sum_{i=2}^{6}\left(y_i^{(m)}(t)\right)^2$$

для всех $t\in(0,1)$ *и* $m=0,1,\ldots4$. Рассмотрим следующий симплектический вариант группы Галилея. Пусть, как и ранее, $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ есть канонический базис в R^6 , где $i=1,\ldots,6$. Положим

$$U_6=\{\alpha e_1:\alpha\in R\},\ \ V_6=\left\{\sum_{i=2}^{6}\alpha_i e_i:\alpha_i\in R,\ \ i=2,\ldots,5\right\},\ W_6=\{\alpha e_6:\alpha\in R\}$$

Как и при определение группы Галилея рассмотрим подгруппу $\Gamma Sp(6,R)$и $GL(6,R)$ всех таких $g=\{g_{i,j}\}_{i,j=1}^{6}\in GL(6,R)$, для которых $g(U_6)=U_6,\ g_{11}=\pm1,\ g(W_6)=W_6,\ g_{66}=\pm1,$ и $g(V_6)=V_6,$ при этом сужение g на пространства V_6 есть элемент симплектической группы $Sp(4,R)$. Очевидно, что $U_6\oplus V_6\oplus W_6=R^6$, при этом, $(x,y)=0$ и $(y,z)=0$ для всех $x\in U_6,\ y\in V_6, z\in W_6$.

Для каждого элемента $g\in\Gamma Sp(6,R)$ имеем $ge_1=\{y_1,0,\ldots,0\}\in U_6, ge_6=\{0,\ldots,0,y_6\}\in W_6$, в частности,

$$g_{1j}=(ge_1,e_j)=0,\text{при}\,j=2,\ldots,6;g_{i6}=(ge_6,e_i)=0,\text{ при}\,i=1,\ldots,5.$$

Кроме того, в силу равенства $g(V_6)=V_6$ получим что $g_{ij}=0$ для всех $j=2,\ldots,5$.Следовательно, матрица $g\in Sp(6,R)$ имеем следуший вид:

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & 0\\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & 0\\ 0 & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & 0\\ 0 & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66}\end{pmatrix}.$$

При этом, сужение

$$g/V_6=\begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25}\\ g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35}\\ g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45}\\ g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55}\end{pmatrix}\in\ Sp\,(4,R)\,.$$

Таким образом, введенную подгруппу

$$\Gamma Sp(6,R)=\left\{g=\{g_{i,j}\}_{i,j=1}^{6}\in GL(6,R):g_{11}=\pm1,g_{66}=\pm1,\ \{g_{ij}\}_{i,j=2}^{5}\in Sp(4,R)\right\}$$

естественно называть группой Галилея симплектических линейных преобразований в R^6.

Обозначим через $R < x_1, x_2, ..., x_6 >^{\Gamma Sp(6,R)}$ дифференциальное поле всех $\Gamma Sp(6,R)$-инвариантных d - рациональных функций. Следующая теорема описывает конечный набор образующих в дифференциальном поле $R < x_1, x_2, ..., x_6 >^{\Gamma Sp(6,R)}$.

Путь $x(t) = \{x_i(t)\}^6 \in R^6, t \in (0,1)$, назовем $\Gamma Sp(6,R)$ - регулярным, если $\det M_4(x(t)) \neq 0$ для всех $t \in (0,1)$, где

$$M_4(x(t)) = \left({x_i}^{(j)}(t)\right)_{j=0,1,2,3,\ i=2,...,5},\ \ x_i^{(0)}(t) = x_i(t), i = 2, ..., 5.$$

Следующая теорема устанавливает критерий для $\Gamma Sp(6,R)$ эквивалентности $\Gamma Sp(6,R)$ - регулярных путей в пространстве R^6.

Теорема 2.5. [11] *$Sp(6,R)$-регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma Sp(6,R)$-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0,1)$ выполнение следующие равенства*

$$y_1(t) = \pm x_1(t);$$
$$y_6(t) = \pm x_6(t);$$
$$M_4^{-1}(x(t))M_4^{(1)}(x(t)) = M_4^{-1}(y(t))M_4^{(1)}(y(t))$$
$$M_4^T(x(t))IM_4(x(t)) = M_4^T(y(t))IM_4(y(t)).$$

С помощью теорем 2.3 и 2.5 устанавливается следующие критерий для $\Gamma Sp(6,R)$ эквивалентности $\Gamma Sp(6,R)$-регулярных путей в пространстве R^6.

Теорема 2.6. [10] *$\Gamma Sp(6,R)$-регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma Sp(6,R)$-эквивалентным в том и толка в том случае, когда для всех $t \in (0,1)$ и $k = 1, ..., 4$ выполнены следующие равенства*

$$y_1(t) = \pm x_1(t); y_6(t) = \pm x_6(t);$$

$$x_2^{(k-1)}(t)x_3^{(k)}(t) - x_2^{(k)}(t)x_3^{(k-1)}(t) + ... + x_4^{(k-1)}(t)x_5^{(k)}(t) - x_4^{(k)}(t)x_5^{(k-1)}(t) =$$
$$= y_2^{(k-1)}(t)y_3^{(k)}(t) - y_2^{(k)}(t)y_3^{(k-1)}(t) + ... + y_4^{(k-1)}(t)y_5^{(k)}(t) - y_4^{(k)}(t)y_5^{(k-1)}(t).$$

3. ПОСТОНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДИКА ЕЕ РЕШЕНИЯ

Обозначим через $Aff\,(R^6\,)$ группу всех аффинных преобразований пространств R^6 . Каждое преобразование из $Aff\,(R^6\,)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL\,(6,R)$ и сдвига, порождённого элементом $u = (u_i)_{i=1}^6$ из R^6 , т. е., аффинное преобразование $(u,g) \in Aff\,(R^6\,)$ действует в R^6 по правилу: $(u,g)\,(x) = gx+u$, где $x, u \in R^6,\ g \in GL\,(6,R)$.

Операция умножения в группе $Aff\,(R^6\,)$ определяется равенством $(u,g)\,(v,h) = (u + g \cdot v, h)$ где $u, v \in R^6,\ g \in GL\,(6,R)$. В этом случае, говорят, что группа $Aff\,(R^6\,)$ есть полупрямое произведение групп R^6 и $GL\,(6,R)$, что записывается следующим образом:

$$Aff\left(R^6\,\right) = R^6\, \triangleleft GL\,(6,R)\,.$$

Если $Sp\left(6,R\right)$ - подгруппа в $GL\left(6,R\right)$, то следующее множество является подгруппой в $R^6 \lhd GL\left(6,R\right)$, которую называют полупрямым произведением групп R^6 и $Sp\left(6,R\right)$:

$$R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)=\left\{\left(u,g\right)\in R^6 \lhd GL\left(6,R\right);g\in Sp\left(6,R\right)\right\}.$$

Пути $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ в R^6 называют эквивалентными относительно действия подгруппы $R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$ в группе $R^6 \lhd GL\left(6,R\right)$ ($R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$ - эквивалентными), если существует такое $\left(u,g\right)\in R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$, что для всех $t\in\left(0,1\right)$ выполнено следующее:

$$y\left(t\right)=gx\left(t\right)+u.$$

Следующая теорема сводит задачу о $R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$-эквивалентности путей $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ к задаче $Sp\left(6,R\right)$-эквивалентности путей $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$.(см. [3, 8])

Теорема 3.1. *Пусть $Sp\left(6,R\right)$- подгруппа в $GL\left(6,R\right)$. Тогда пути $x(t)$ и $y(t)$ в R^6 являются $R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$ - эквивалентными в том и только том случае, когда пути $x'\left(t\right)$ и $y'\left(t\right)$ являются $Sp\left(6,R\right)$ - эквивалентными.*

Доказательство. Если $I-$пути $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ в R^6 -$R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$- эквивалентны , то $y\left(t\right)=gx\left(t\right)+u$ для всех $t\in I$ и некоторых $u=\left\{u_i\right\}_{i=1}^6\in R^6$ и $g=\left\{g_{ij}\right\}_{i,j=1}^6\in Sp\left(6,R\right)$.

$$y_i\left(t\right)=\sum_{j=1}^6 g_{ij}x_j\left(t\right)+u_i \tag{5}$$

то

$$y_i^{'}\left(t\right)=\sum_{j=1}^6 g_{ij}x_j^{'}\left(t\right) \tag{6}$$

для всех $i=\overline{1,6}$, т,е . $y'\left(t\right)=gx'\left(t\right),\ t\in I$, что влачат $G-$эквивалентность $I-$путей $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$.

Обратно, пусть верно равенство $y'\left(t\right)=gx'\left(t\right)$ для некоторого $g=\left\{g_{ij}\right\}_{i,j=1}^6\in Sp\left(6,R\right)$ и всех $t\in I$. Тогда верно равенство (6), и поэтому для $u_i\left(t\right)=y_i\left(t\right)-\sum\limits_{j=1}^6 g_{ij}x_j\left(t\right)$ имеем, что $u_i^{'}\left(t\right)=0$ для всех $t\in I$, т.е. $u_i\left(t\right)=u_i^{(0)}\left(t\right)\in R,\ t\in I,\ i=\overline{1,6}$. Следовательно, для $u=\left\{u_i^{(0)}\right\}_{i=1}^6\in R^6$ верно равенство $y\left(t\right)=gx\left(t\right)+u$ для всех $t\in I$, т.е. $I-$пути $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)-R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$- эквивалентны.

Из теоремы 2.4 и теоремы 3.1 вытекают следующие необходимые и достаточные условия для $R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$ – эквивалентности путей.

Теорема 3.2. *Пусть $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ такие $I-$ пути в R^6 , что $I-$ пути $x'\left(t\right)$ и $y'\left(t\right)$-регулярны. Тогда путы $x\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ являются $R^6 \lhd Sp\left(6,R\right)$- эквивалентны тогда и только тогда, когда $\left[x^{(m)}\left(t\right),x^{(m+1)}\left(t\right)\ \right]=\left[y^{(m)}\left(t\right),y^{(m+1)}\left(t\right)\ \right]$ для всех $t\in I,\ m=\overline{1,6}$.*

Пусть $H=R^6\lhd\Gamma Sp(6,R)$ погруппа в $R^6\lhd GL(6,R)$.

Два пути $x(t)$ и $y(t)$ заданные R^6, называются H эквивалентными, если существует такое $(u,g)\in H$, что $y(t)=gx(t)+u$ для всех $t\in(0,1)$.

Теорема 3.3. *Два пути $x(t)$ и $y(t)$ задание R^6, являются $R^6\lhd\Gamma Sp(6,R)$- эквивалентными тогда и толка тогда, когда пути $x^{'}(t)$ и $y^{'}(t)$- $\Gamma Sp(6,R)$- эквивалентны.*

Доказательства. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ $\Gamma Sp(6,R)$- эквивалентны, то $y(t)=gx(t)+u$ для всех $t\in(0,1)$ и некоторых $u=\{u_i\}_{i=1}^{6}\in R^6$ и $g=\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{6}\in\Gamma Sp(6,R)$.

Поскольку

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{6}g_{ij}x_j(t)+u_j \tag{7}$$

то

$$y_i^{'}(t)=\sum_{j=1}^{6}g_{ij}x_j^{'}(t) \tag{8}$$

для всех $i=1,...,6$ т.е $y^{'}(t)=gx^{'}(t),\ t\in(0,1)$, что влечет $\Gamma Sp(6,R)$ путей $x(t)$ и $y(t)$.

Обратно, пусть верно равенства $y^{'}(t)=gx^{'}(t)$ для некоторого $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{6}\in\Gamma Sp(6,R)$ и всех $t\in(0,1)$. Тогда верно равенства (8) поэтому для $u_i(t)=y_i(t)-\sum\limits_{j=1}^{6}g_{ij}x_j(t)$ имеем, что $u_i^{'}(t)=0$ для всех $t\in(0,1)$, т.е. $u_i(t)=u_i{}^{(0)}(t)\in R$, $t\in(0,1)$, $i=1,...,6$. Следовательно, для $u=\left\{u_i{}^{(0)}\right\}_{i=1}^{6}\in R^6$ верно равенства $y(t)=gx(t)+u$ для всех $t\in(0,1)$, т.е.. пути $x(t)$ и $y(t)$-$R^6\lhd\Gamma Sp(6,R)$-эквивалентно.

Из теоремы 2.5 и теоремы 3.3 вытекают следующие необходимые и достаточные условия для $R^6\lhd\Gamma Sp(6,R)$ эквивалентности путей.

Теорема 3.4. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ такие пути в R^6, для которых пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ регулярны. Тогда пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $R^6\lhd\Gamma Sp(6,R)$ эквивалентными тогда и толка тогда, когда выполнении равенства*

$$y_1^{(1)}(t)=x_1^{(1)}(t);$$

$$y_6^{(1)}(t)=x_6^{(1)}(t);$$

$$M_4^{-1}(x^{(1)}(t))M_4^{(1)}(x^{(1)}(t))=M_4^{-1}(y^{(1)}(t))M_4^{(1)}(y^{(1)}(t));$$
$$M_4^{T}(x^{(1)}(t))IM_4(x^{(1)}(t))=M_4^{T}(y^{(1)}(t))IM_4(y^{(1)}(t)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы. Известия ВУЗов. Математика, 2002, №7, 27-38.

2. Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. Ташкент. ФАН, 1988.

3. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность путей в геометрии Галилея. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 144 (2018). С. 3-16.

4. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии. Известия ВУЗов. Математика. 2007. №7, С. 3-15.

5. Муминов К.К. Эквивалентность Кривых относительно действия симплектической группы. Известия ВУЗов. Математика, 2009, №6, 31-36.

6. Муминов К.К., Чилин В.И. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве. Динамические системы, том 3(31), No.1-2, С 135-149.

7. Муминов К.К. Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы // Uzbek Math. J. 2005. №2. С. 35–43.

8. Муминов К.К., Гаффоров Р.А. Эквивалентность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы // Uzbek Math. J. 2010. №4. С. 135–141.

9. Розенфелд Б.А. Неевклидовы пространства. М.Наука,1969.

10. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность путей в Галилеево - симплектической геометрии. ТВИМ 2024, №1, С-82.

11. Муминов К.К., Султонова Б.Р. Эквивалентность путей относительно действия группы Галилеево - симплектической.//НамГУ 2024, №6, с-28.

REZYUME

R^6 $- R$ haqiqiy sonlar maydoni ustidagi chekli o‘lchovli chiziqli fazo bo‘lsin. $GL\,(6,R)-$ R^6 fazoning barcha teskarilanuvchi chiziqli almashtirishlar guruppasi bo‘lsin. R^6 fazoning barcha affin almashtirishlari gruppasini $Aff\,(R^6\,)=$ R^6 $\triangleleft$ $GL\,(6,R)$- orqali belgilaymiz. $Aff\,(R^6\,)$ gruppaning har bir almashtirishi $g\in GL\,(6,R)$ va $u=(u_i)_{i=1}^6\in R^6$ elementlarning superpozitsiyasidan iborat. $Aff\,(R^6\,)$ gruppaning $R^6\triangleleft Sp\,(6,R)$ $(R^6\triangleleft Sp\,(6,R))$ gruppaostisi berilgan bo‘lsin.

Ushbu maqolada $R^6\triangleleft Sp\,(6,R)$ $(R^6\triangleleft Sp\,(6,R))$ - yo‘llar ekvivalentligi uchun zarur va yetarli shartlar berilgan.

Kalit so‘zlar: guruppa tasiri, ekvivalent yo‘llar, affin almashtirishlar, Galiley-simplektik guruppa, yarim to‘g’ri ko‘paytmalar, regulyar yo‘l.

RESUME

Let R^6 be a finite-dimensional linear space over the field of real numbers R. Denote by $GL\,(6,R)$ the group of all invertible linear transformations of R^6 let G be a subgroup of $GL\,(6,R)$. Denote by $Aff\,(R^6\,)=R^6\triangleleft GL\,(6,R)$ the group of all affine transformations of R^6. Each transformation from $Aff\,(R^6\,)$ is a superposition of a linear non-degenerate transformation $g\in GL\,(6,R)$ and the shift generated by the element $u=(u_i)_{i=1}^6$ from R^6 . Let $R^6\triangleleft Sp\,(6,R)$ $(R^{2n}\triangleleft Sp\,(6,R))$ be a subgroup of $Aff\,(R^6\,)$ This article gives necessary and sufficient conditions for the equivalence of lines $R^6\triangleleft Sp\,(6,R)\,(R^{2n}\triangleleft Sp\,(6,R))$.

Key words: group effect, equivalent of paths, affine transformations, Galilean-symplectic group, regular paths.

УДК 517.956.6

О НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Сагдуллаева М. М.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
sagdullayevam@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для уравнения в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. Здесь доказаны теоремы о существовании и единственности решения изучаемой нелокальной задачи. При доказательстве разрешимости задачи применяются методы теории дифференциальных уравнений, функции Грина и теории интегральных уравнений. Изучаемая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешима.

Ключевые слова: краевая задача; регулярное решение; нелокальное условие; интегральное условие; нелокальная задача; уравнение теплопроводности; функция Грина; интегральное уравнение; уравнение Вольтерра; уравнение Абеля.

Введение

Исследование разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для параболических уравнений начались, по–видимому, с работ [1] и [2]. Смешанные задачи с интегральными условиями для параболического уравнения были рассмотрены в работах [3]–[9], но при этом, в основном исследовались уравнения второго порядка, как в одномерных [3]–[7], так и в многомерных [8]–[9] областях.

Различные нелокальные задачи с интегральными условиями для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка изучались во многих работах (см. например [10]– [16]).

Разрешимость нелокальных задач для дифференциальных уравнений третьего порядка представляется важным как с точки зрения развития теории начально–краевых задач для уравнений в частных производных, так и с точки зрения приложений математического моделирования различных процессов.

В данной работе изучается нелокальная граничная задача с интегральными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной частьи.

Постановка задачи

В области $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = f(x,t), \tag{21}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Заметим, что уравнение (1) относится к первому каноническому виду относительно старших производных, указанных в работе [15], т. е. уравнение характеристики имеет один общий интеграл, причём трехкратный. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая нелокальная задача.

Нелокальная задача. *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{22}$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{23}$$

и интегральным условиям

$$\int\limits_0^l k(x)u(x,t)dx = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{24}$$

где $\varphi(x)$, $k(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$ – заданные, непрерывные на $[0,l]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(l) = \mu_2(0), \quad \int\limits_0^l k(x)\varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

В условии (4) $k(x)$ заданная, непрерывная на $[0,l]$ функция, и обладает необходимой для предстоящих преобразований гладкостью.

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, рассмотренная в работе [16]. Заметим, что в работах А.И.Кожанова и его учеников исследована разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А.А.Самарского и задачи с интегральными условиями.

Разрешимость нелокальной задачи (1)–(4)

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем ν, $0 < \nu < 1$.

Определение. *Под регулярным в области D решением задачи (1)–(4) будем понимать действительную функцию $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) в обычном смысле.*

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, при этом, справедлива следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4):

Теорема 1. *Пусть выполнено условие $f(x,t) \in C(\overline{D})$ и заданные функции $\varphi(x)$, $\mu_i(y)$, $(i = 1,2,3)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x), k(x) \in C^2[0,l]; \quad \mu_1(t), \quad \mu_3(t) \in C^1[0,T], \quad \mu_2(t) \in C[0,T].$$

Тогда существует единственное регулярное решение нелокальной задачи (1)–(4).

Построим решение задачи (1)–(4) с помощью функции Грина для уравнения теплопроводности.

Введя обозначение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = v(x,t), \tag{5}$$

из уравнение (1) получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,t). \tag{6}$$

Обозначим $v(l,t)$ через $\mu(t)$ и для уравнения (6) решим следующую задачу: *Найти решение $v = v(x,t)$ уравнения параболического типа (6), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t-\tau\to 0} V(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} v(x,0) = \varphi'(x), & 0 \le x \le l, \\ v(0,t) = \mu_2(t), & 0 \le t \le T, \\ v(l,t) = \mu(t), & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{7}$$

Затем определим функцию $\mu(t)$ из условия (4).

От функции $\mu(t)$ будем требовать соблюдения следующих предположений: функция $\mu(t)$ непрерывно-дифференцируема на $[0,T]$, интегрируема на $(0,T)$ и $\mu(0) = 0$.

Представим решение задачи (6)–(7) в виде $v(x,t) = \mathrm{w}(x,t) + v_1(x,t)$, где функция

$$v_1(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_2(t) + \frac{x}{l}\,\mu(t)$$

удовлетворяет граничным условиям (7), а функция $\mathrm{w}(x,t)$ — нулевым граничным условиям.

Таким образом, решение задачи (6)–(7) свелось к решению следующей краевой задачи: *Найти решение* $\mathrm{w}(x,t)$ *неоднородного уравнения теплопровоности*

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} = F(x,t), \tag{8}$$

удовлетворяющее условиям

$$\mathrm{w}(x,0)=\varphi_1(x), \quad \mathrm{w}(0,t)=\mathrm{w}(l,t)=0, \tag{9}$$

где

$$F(x,t)=f(x,t)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_2^{'}(t)-\frac{x}{l}\,\mu^{'}(t), \quad \varphi_1(x)=\varphi^{'}(x)-v_1(x,0).$$

Теперь преобразуем условие (4) в новых обозначениях, для этого интегрируя равенство (5) и пользуясь условием (3), находим

$$u(x,t)=\mu_1(t)+\int\limits_0^x v(z,t)dz.$$

Учитывая выражения для функции $v(x,t)$, из последнего равенства получим

$$u(x,t)=\mu_1(t)+\left(x-\frac{x^2}{2l}\right)\mu_2(t)+\frac{x^2}{2l}\,\mu(t)+\int\limits_0^x \mathrm{w}(z,t)dz. \tag{10}$$

Умножим обе части (10) на функцию $k(x)$ и интегрируем полученное выражение от 0 до l, после некоторых преобразований, имеем

$$\int\limits_0^l k(x)u(x,t)dx=\mu_1(t)\int\limits_0^l k(x)dx+\mu_2(t)\int\limits_0^l\left(x-\frac{x^2}{2l}\right)k(x)dx+$$

$$+\mu(t)\int\limits_0^l \frac{x^2}{2l}k(x)+\int\limits_0^l k(x)dx\int\limits_0^x \mathrm{w}(z,t)dzdx$$

Таким образом, условие (4) в новых обозначениях имеет вид:

$$\int\limits_0^l k_0(x)\mathrm{w}(x,t)dx=\mu_4(t)-\mu(t)\int\limits_0^l \frac{x^2}{2l}\,k(x)dx; \tag{11}$$

здесь

$$k_0(x)=\int\limits_x^l k(z)dz; \quad \mu_4(t)=\mu_3(t)-\mu_1(t)\int\limits_0^l k(x)dx-\mu_2(t)\int\limits_0^l\left(x-\frac{x^2}{2l}\right)k(x)dx.$$

Из [17] следует, что с помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, решение задачи (8)–(9) можно выписать следующим образом:

$$\mathrm{w}(x,t)=\int\limits_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau; \tag{12}$$

где

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi.$$

Подставляя (12) в левую часть (11) имеем

$$\int_0^l k_0(x)\mathrm{w}(x,t)dx=\int_0^l k_0(x)dx\int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^l k_0(x)dx\int_0^t\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau=J_1+J_2; \tag{13}$$

здесь

$$J_1=\int_0^l k_0(x)dx\int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi;$$

$$J_2=\int_0^l k_0(x)dx\int_0^t\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau;$$

Учитывая явный вид функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$, интеграл J_2 перепишем в виде

$$J_2=\int_0^l k_0(x)dx\int_0^t\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{2}{l}\int_0^l k_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\int_0^l\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi\int_0^t\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\mu_2'(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{2}{l}\int_0^l k_0(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\int_0^l\frac{\xi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,d\xi\int_0^t\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\mu'(\tau)d\tau.$$

Преобразуя интегралы из последнего выражения, получим

$$J_2=\int_0^l k_0(x)dx\int_0^t\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}k_0^n\left[\mu_2(t)-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^t\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\mu_2(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}k_0^n\left[\mu(t)-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^t\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\mu(\tau)d\tau\right], \tag{14}$$

где

$$k_0^n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l k_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right)dx. \tag{15}$$

Подставляя (14) в условие (11) и, поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим относительно функции $\mu(t)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\alpha\mu(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = g(t), \tag{16}$$

с ядром

$$K(t,\tau) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}k_0^n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}; \tag{17}$$

и правой частью

$$g(t) = \mu_4(t) - \frac{2}{l}\int\limits_0^l k_0(x)dx\int\limits_0^l \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{l}\,\xi\right)\varphi_1(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{2}{l}\int\limits_0^l k_0(x)dx\int\limits_0^t\int\limits_0^l \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{l}\,\xi\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}k_0^n\left[\mu_2(t) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\int\limits_0^t \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)\right\}\mu_2(\tau)d\tau\right], \tag{18}$$

здесь

$$\alpha = \int\limits_0^l \frac{x^2}{2l}\,k(x)dx + \left(\frac{l}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}k_0^n. \tag{19}$$

Теперь покажем существование и единственность решения уравнения (16).

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1, кроме того*

$$k_0(0) = k_0(l) = 0, \quad k_0''(0) = k_0''(l) = 0, \tag{20}$$

то интегральное уравнение (16) имеет единственное решение $\mu(t)$ в классе функций $C^1[0,T]$.

Доказательство. 1. Интегрируя по частьям три раза интергал из формулы (15) с учетом условий (20), имеем

$$k_0^n = \frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^3\int\limits_0^l k_0^{'''}(x)\cos\frac{n\pi}{l}\,xdx = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{p_n}{n^3}, \tag{21}$$

Поскольку функция $k_0^{'''}(x)$ непрерывна на сегменте $[0,l]$, то как известно из теории рядов Фурье, в силу неравенства Бесселя, следующий ряд из квадратов

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \leq \frac{2}{l}\int_0^l [k_0^{'''}(x)]^2 dx.$$

сходится, а значит, $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда будем иметь $|k_0^n| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{n^3}$, где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Учитывая (21), перепишем ряд (17) в виде

$$|K(t,\tau)| \leq \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{n^4}\right| \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)\right\}, \tag{22}$$

где, ряд (22) равномерно сходится при $n \to \infty$. В самом деле, числовой ряд $\dfrac{p_n}{n^4}$ сходится при $n \to \infty$. Тогда ядро $K(t,\tau)$ непрерывна на множестве $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

В силу равенство (21), легко показать непрерывность правой части уравнения (16).

Таким образом, уравнение (16) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и с непрерывной правой частью, а значит имеет единственное решение в классе непрерывных на $[0,T]$ функций.

2. Теперь рассмотрим случай, когда в уравнении (16) $\alpha = 0$, то относительно неизвестной функции $\mu(t)$, получим интегральное уравнение Волтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = g(t), \tag{23}$$

где функции $K(t,\tau)$ и $g(t)$ определены в (17) и (18) соответственно.

Если уравнение (23) разрешимо в классе $C[0,T]$, то $g(t) \in C^1[0,T]$. В силу сходимости числового ряда (21) ядро (17) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t при $0 \leq \tau \leq t \leq T$. Тогда функция $K_t'(t,\tau)$ непрерывна на указанном множестве. Дифференцируя обе части равенства (23), имеем

$$K(t,t)\mu(t) + \int_0^t \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t}\mu(\tau)d\tau = g'(t). \tag{24}$$

Положив в (17) $\tau = t$, получим

$$K(t,t) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n} k_0^n, \tag{25}$$

В силу оценки $|k_0^n| \leq \dfrac{\varepsilon_n}{n^3}$, ряд (25) сходится равномерно, поэтому уравнение (24) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, следовательно уравнение (24) иметь единственное решение $\mu(t) \in C[0,T]$).

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) доказана.

Заключение

Отметим, что используя фундаментальной решений и функцию Грина уравнения теплопроводности, можем описать следующие корректные нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части (1), будут:

Задача 1. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le \ell,$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(\ell,t)=\mu_2(t), \qquad 0\le t\le T,$$

$$u_x(0,t)=\int\limits_0^\ell u(x,t)dx+\mu_3(t), \qquad 0\le t\le T,$$

где $\varphi(x),\mu_i(t),(i=1,2,3)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi(0)=\mu_1(0), \quad \varphi(\ell)=\mu_2(0), \quad \int\limits_0^\ell \varphi(x)dx=\mu_3(0).$$

Задача 2. Найти регулярное в области D решение уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le \ell,$$

$$u_x(0,t)=\nu_1(t), \quad u_x(\ell,t)=\nu_2(t), \qquad 0\le t\le T,$$

$$\int\limits_0^\ell u(x,t)dx=\mu_3(t), \qquad 0\le t\le T,$$

где $\varphi(x),\nu_i(t),(i=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\varphi'(0)=\nu_1(0), \quad \varphi'(\ell)=\nu_2(0), \quad \int\limits_0^\ell \varphi(x)dx=\mu_3(0).$$

Комбинируя метод настоящей работы и работы [14], можно получить новые условия разрешимости краевых задач с интегральными условиями для некоторых других классов дифференциальных уравнений, например, для уравнения

$$Lu\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+c(x,t)u=f(x,t),$$

где $c(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.,* 1963. Vol. 21, No. 2. pp. 155–160.

2. *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями,// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,* 1964. Том 4, №6. –С. 1006–1024.

3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием,// *Дифференц. уравнения,* 1977. Том 13, №2. –С. 294–304.

4. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // *Дифференц. уравнения,* 1986, Том 22, №12. –С. 2117–2126.

5. *Bouziani A.* Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation // *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 1996, 9. –P. 323–330.

6. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Дифференц. уравн.,* 2004. Т. 40, №4. –С. 547–564.

7. *Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С.* Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2022, номер 2. –С. 380–395.

8. *Кожанов А. И., Дюжева А. В.* Интегральный аналог первой начально–краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Матем. заметки,* 2022. Том 111, выпуск 4. –С. 540–550.

9. *Попов Н.С.* О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // *Матем. заметки СВФУ.* 2016. Т. 23, №1. –С. 79-86.

10. *Кожанов А. И., Попов Н. С.* О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // *Вестник НГУ. Серия: Матем., механ. и информ.* 2010. Том 10, вып. 3. –С. 46–62.

11. *Попов Н. С.* О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // *Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер.,* 2015, 3(125). –С. 29–43.

12. *Кожанов А. И., Тарасова Г. И.* Задача Самарского–Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика,* 2021. Том 36. –С. 14–28.

13. *Кожанов А. И., Хромченко Д. С.* Нелокальные задачи с интегральновозмущенным условием А. А. Самарского для квазипараболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки СВФУ.* 2023, том 30, выпуск 4. –С. 12–23.

14. *Zikirov O. S., Sagdullayeva M. M.* Solvability of nonlocal problem with integral condition for third-order equation, *J. Math. Sci.* 284, No. 2, 287–298, (2024). DOI 10.1007/s10958-024-07350-3

15. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.// *Дифференц. уравнения,* 1991. Том 27, №10, (1991), 1734–1745.

16. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // *Дифференц. уравнения,* 2004. Том 40, №6. –С. 763–774.

17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.* - М.: Наука, 1977. –736 с.

18. *Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов.* – Ташкент.: "Фан", 1979. – 240 с.

REZYUME

Bu maqolada bosh qismida operator qatnashgan integral shartli uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun ba'zi nolokal masala haqida. Bu yerda yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan teoremalar keltirilgan o'rganilgan nolokal masala. Aralash masalani yechishda differentsial tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalangan holda hal qilinadi, Grin funksiyalari va integral tenglamalar nazariyalari. O'rganilayotgan masala ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. Ikkinchi turdagi Volterra, va Abel integral tenglamasi yechiladi

Kalit so'zlar: Grin funksiyasi, integral shart, integral tenglama,chegaraviy masala, tegulyar yechim,Volter integral tenglama, Abel integral tenglama

RESUME

In this paper, we consider a non-local problem with an integral condition for a third-order partial differential equation with the thermal conductivity operator in the main part. The theorems on the existence and uniqueness of the solution of the studied non-local problem are proved here. Methods of the theory of differential equations, the Green's function and the theory of integral equations are used to the prove the solvability of the problem. The problem under study is reduced to an equivalent second kind Volterra integral equation which is certainly solvable.

Key words: boundary value problem; regular solution; non–local condition; integral condition; non–local problem; equation of thermal conductivity; Green's function; integral equation; the Volterra equation; the Abel equation.

УДК 517.926

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ

Усмонов Д. А
Ферганский государственный университет
usmonov-doniyor@inbox.ru
Омонова А. Н.
Ферганский государственный университет
adibaxonomonova@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется задача Коши для неоднородного обыкновенного уравнения интегро-дифференциального уравнения, содержащего интегральный оператор с функцией Бесселя в ядре. Поставленная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Методом последовательных приближений найдено решение интегрального уравнения. Доказано, что найденное решение действительно удовлетворяет условиям поставленной задачи. При выводе формулы для решения поставленной задачи выведена новая специальная функция, которая в частном случае следует функция Миттага - Леффлера. Изучено свойства введенной функции, в частности, выписаны формулы дифференцирования для неё.

Ключевые слова: функция Бесселя, интегро-дифференциальное уравнение, интегральный оператор, задача Коши.

I. Введение

Теория дробного интегрирования и дифференцирования в настоящее время стала одним из центральных разделов математической науки. В зарождении и развитии теории интегро-дифференцирования дробного порядка большую роль сыграли знаменитые ученые Н. Абель, Ж. Лиувилл, Б. Риман, Х. Хольмгрен, А. Грюнвальд, А.В. Летников и др. Более подробную информацию об этих направлениях, а также о приложениях интегралов и производных дробного порядка, можно найти в [1], [2], [3].

Дробные интегро-дифференциальные операторы в смысле Римана-Лиувилля и Капуто и дифференциальные уравнения, в которых они участвуют, до сих пор изучались многими исследователями [4]-[8]. В настоящее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах [9], [10], [11].

В данной работе доказывается однозначная разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, содержащего интегральный оператор с функцией Бесселя в ядре.

II. Постановка задача

Рассмотрим уравнение

$$y''(x) + \lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) + \gamma^2 y(x) = f(x), \quad x \in (0,T), \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция, а $f(x)$ - заданная функция; $\alpha, \gamma, \lambda, T$ - заданные действительные числа, причем $\alpha > 0$, $T > 0$,

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1} \bar{J}_{(\alpha-1)/2} [\gamma(x-z)] \, y(z) \, dz$$

– обощенным дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка α, $\bar{J}_\nu(z)$-функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k}, \tag{2}$$

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [12], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [13].

Задача Коши. *Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям*

$$y(0) = A, \;\; y'(0) = B, \tag{3}$$

где A, B - заданные действительные числа.

III. Исследование задачи Коши

Применяем к уравнению (1) оператор $I_{0x}^{2,\gamma}$. Затем, учитывая равенство [11] $I_{0x}^{\alpha,\gamma} I_{0x}^{\beta,\gamma} = I_{0x}^{\alpha+\beta,\gamma}$, получим

$$I_{0x}^{2,\gamma} y''(x) + \lambda I_{0x}^{\alpha+2,\gamma} y(x) + \gamma^2 I_{0x}^{2,\gamma} y(x) = I_{0x}^{2,\gamma} f(x). \tag{4}$$

Принимая во внимание равенства $\overline{J}_{1/2}(z) = z^{-1} \sin z$, получим

$$I_{0x}^{2,\gamma} y''(x) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int\limits_0^x (x-z) \, \overline{J}_{1/2} [\gamma(x-z)] \, y''(z) \, dz = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^x \sin[\gamma(x-z)] \, y''(z) \, dz.$$

Далее, применяя правило интегрирования по частям два раза к интегралу, имеем

$$I_{0x}^{2,\gamma} y''(x) = y'(z) \frac{\sin[\gamma(x-z)]}{\gamma} \Bigg|_{z=0}^{z=x} + y(z) \cos[\gamma(x-z)]\big|_{z=0}^{z=x} - \gamma \int\limits_0^x \sin[\gamma(x-z)] \, y(z) \, dz.$$

Используя условие (3), получаем

$$I_{0x}^{2,\gamma} y''(x) = y(x) - B\frac{\sin(\gamma x)}{\gamma} - A\cos(\gamma x) - \gamma^2\ I_{0x}^{2,\gamma} y(x).$$

Подставляя это выражение в (4), образуем следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) + \lambda I_{0x}^{\beta,\gamma} y(x) = I_{0x}^{2,\gamma} f(x) + A\cos(\gamma x) + B\frac{\sin(\gamma x)}{\gamma}, \tag{5}$$

где $\beta = \alpha + 2$.

Для решения уравнения (5) применим метод последовательных приближений:

$$y_0(x) = I_{0x}^{2,\gamma} f(x) + A\cos(\gamma x) + B\frac{\sin(\gamma x)}{\gamma},\ \ y_m(x) = y_0(x) - \lambda I_{0x}^{\beta,\gamma} y_{m-1}(x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Используя формулу $I_{0x}^{\alpha,\gamma} I_{0x}^{\beta,\gamma} = I_{0x}^{\alpha+\beta,\gamma}$, вычисляем $y_m(x)$:

$$y_m(x) = y_0(x) - \lambda I_{0x}^{\beta,\gamma} y_0(x) + \lambda^2 I_{0x}^{2\beta,\gamma} y_0(x) - \lambda^3 I_{0x}^{3\beta,\gamma} y_0(x) + ... + (-\lambda)^m I_{0x}^{m\beta,\gamma} y_0(x). \tag{6}$$

Согласно теории интегральных уравнений, [14] если существует $\lim\limits_{m\to\infty} y_m(x)$ равномерно по x, то его предельная функция является решением интегрального уравнения (5).

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (6) и подставляя выражение $y_0(x)$, получим решение уравнения (5) в виде

$$y(x) = A\sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\beta n,\gamma} \cos(\gamma x) + \frac{B}{\gamma}\sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\beta n,\gamma} \sin(\gamma x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n I_{0x}^{\beta n+2,\gamma} f(x). \tag{7}$$

Используя формулы [15]

$$I_{0x}^{\beta n,\gamma} \cos(\gamma x) = \frac{x^{\beta n}}{\Gamma(\beta n + 1)} \overline{J}_{(\beta n-1)/2}(\gamma x), \tag{8}$$

$$I_{0x}^{\beta n,\gamma} \sin(\gamma x) = \frac{\gamma x^{\beta n+1}}{\Gamma(\beta n + 2)} \overline{J}_{(\alpha n+1)/2}(\gamma x), \tag{9}$$

$$I_{0x}^{\beta n+2,\gamma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta n + 2)} \int_0^x (x-z)^{\beta n+1} \overline{J}_{(\beta n+1)/2}[\gamma(x-z)] f(z)\, dz. \tag{10}$$

запишем (7) в виде

$$\begin{gathered} y(x) = A\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,(-1/2)}\left[-\lambda x^\beta; \gamma x\right] + Bx\mathbb{E}_{\beta,\,2,\,1/2}\left[-\lambda x^\beta; \gamma x\right] + \\ + \int_0^x (x-z)\mathbb{E}_{\beta,\,2,\,1/2}\left[-\lambda (x-z)^\beta; \gamma(x-z)\right] f(z)\, dz, \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[x;y\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\Gamma\left(\alpha n+\beta\right)}\overline{J}_{\alpha n/2+\theta}\left(y\right). \tag{12}$$

Очевидно, что (12) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [16]:

$$E_{\alpha,\beta}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}. \tag{13}$$

Пользуясь равномерной сходимостью рядов (2) и (13), а также неравенством $\left|\overline{J}_{\nu}\left(z\right)\right|\leq 1$, которое верно при $\nu\geq(-1/2)$, легко убедиться, что ряд (12) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty<x,\ y<+\infty$.

Для функции (12) справедливы следующие равенства

$$\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[x;0\right]=E_{\alpha,\beta}\left(x\right),\ \ \mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[0;y\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\overline{J}_{\theta}\left(y\right),\ \ \mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[0;0\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}$$

и следующие формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}\mathbb{E}_{\alpha,\,1,\,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]=-\lambda x^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]-\gamma^2x\mathbb{E}_{a,\,2,\,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right], \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]\right\}=x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta-1,\,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],\ \beta\neq 1. \tag{15}$$

Теорема 1. *Если $f(x)\in C\left[0,T\right]$, то решение задачи Коши $\{(1),(2)\}$ единственный, существует и определяется формулой (11).*

Доказательство. Сначала покажем, что функция (11) удовлетворяет условиям (3).

В силу $\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[0;0\right]=\Gamma^{-1}\left(\beta\right)$ и $f(x)\in C[0,T]$, из (11) следует, что $y(0)=A$.

Дифференцируем равенство (11). Тогда, согласно (14), (15), получим

$$y'\left(x\right)=-A\lambda x^{\beta-1}\mathbb{E}_{\beta,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]-A\gamma^2x\mathbb{E}_{\beta,2,1/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]+$$

$$+B\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,(-1/2\,)}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]+\int\limits_0^x\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,(-1/2)}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\left(x-z\right)\right]f\left(z\right)dz.$$

Отсюда, в силу $\mathbb{E}_{\alpha,\,\beta,\,\theta}\left[0;0\right]=\Gamma^{-1}\left(\beta\right)$, $\beta=\alpha+2$, $\alpha>0$ и $f(x)\in C[0,T]$, следует, что $y'(0)=B$.

Теперь покажем, что функция (11) удовлетворяет уравнению (1). С этой целью запишем её в виде $y\left(x\right)=y_1\left(x\right)+y_2\left(x\right)+y_3\left(x\right)$, где

$$y_1\left(x\right)=A\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,(-1/2\,)}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right], \tag{16}$$

$$y_2\left(x\right)=Bx\mathbb{E}_{\beta,\,2,\,1/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right], \tag{17}$$

$$y_3\left(x\right)=\int\limits_0^x(x-z)\mathbb{E}_{\beta,\,1,\,1/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\left(x-z\right)\right]f\left(z\right)dz. \tag{18}$$

Следовательно, теперь надо доказать, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют уравнению (1) при $f(x) \equiv 0$, а $y_3(x)$ - уравнению (1).

Рассмотрим функцию $y_1(x)$. Вычисляем $y_1''(x)$.

Используя формулы (14) и (15), находим $y_1''(x)$ в виде

$$y_1''(x) = -A\lambda x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\beta,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right] - A\gamma^2\mathbb{E}_{\beta,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]. \tag{19}$$

Используя (16) и (19), находим равенство

$$y_1''(x) + \gamma^2 y_1(x) = -A\lambda x^{\beta-2}\mathbb{E}_{\beta,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]. \tag{20}$$

Теперь вычисляем $I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_1(x)$:

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]y_1(z)\,dz =$$

$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\mathbb{E}_{\beta,1,(-1/2)}\left[-\lambda z^{\alpha};\gamma z\right]dz =$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\beta n+1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1}z^{\beta n}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\overline{J}_{(\beta n-1)/2}\left[\gamma z\right]dz.$$

Если ввести обозначение

$$H(\alpha,\beta,n,\gamma;x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta n+1)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-z)^{\alpha-1}z^{\beta n}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\overline{J}_{(\beta n-1)/2}\left[\gamma z\right]dz, \tag{21}$$

то последнее равенство запишется в виде:

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_1(x) = A\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n H(\alpha,\beta,n,\gamma;x). \tag{22}$$

Вычислим интеграл $H(\alpha,\beta,n,\gamma;x)$. С этой целью, заменяя функцию $\overline{J}_{\nu}(x)$ по формуле (2), получим

$$\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\overline{J}_{(\beta n-1)/2}\left[\gamma z\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}(x-z)^{2m}}{m!((\alpha+1)/2)_m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}z^{2k}}{k!((\beta n+1)/2)_k}.$$

Отсюда, применяя правило Коши умножения сходящихся рядов, имеем

$$\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-z)\right]\overline{J}_{(\beta n-1)/2}\left[\gamma z\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}z^{2k}}{k!((\beta n+1)/2)_k}\frac{(-1)^{m-k}(\gamma/2)^{2m-2k}(x-z)^{2m-2k}}{(m-k)!((\alpha+1)/2)_{m-k}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\gamma/2)^{2m} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^{2k}(x-z)^{2m-2k}}{((\beta n+1)/2)_k ((\alpha+1)/2)_{m-k} k!\,(m-k)!}.$$

Подставляя это в интеграл (21), находим

$$H(\alpha,\beta,n,\gamma;x) = \frac{1}{\Gamma(\beta n+1)\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} z^{\beta n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\gamma/2)^{2m} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^{2k}(x-z)^{2m-2k}}{((\beta n+1)/2)_k ((\alpha+1)/2)_{m-k} k!\,(m-k)!} dz.$$

Поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$H(\alpha,\beta,n,\gamma;x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\gamma/2)^{2m}}{\Gamma(\beta n+1)\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{m} \frac{H_1(\alpha,\beta,n,m,k;x)}{((\beta n+1)/2)_k ((\alpha+1)/2)_{m-k} k!\,(m-k)!}, \tag{23}$$

где

$$H_1(\alpha,\beta,n,m,k;x) = \int_0^x (x-z)^{2m-2k+\alpha-1} z^{\beta n+2k} dz.$$

В интеграле выполним замену переменной по формуле $z = xs$:

$$\int_0^x (x-z)^{2m-2k+\alpha-1}\, z^{\beta n+2k} dt = x^{\beta n+2m+\alpha} \int_0^1 (1-s)^{2m-2k+\alpha-1}\, s^{\beta n+2m} ds.$$

Принимая во внимание интегральное представление бета-функции и её связь с гамма-функцией, находим

$$\int_0^x (x-z)^{2m-2k+\alpha-1}\, z^{\beta n+2k} dt = x^{\beta n+2m+\alpha} B(2m-2k+\alpha, \beta n+2k+1) =$$

$$= x^{\beta n+2m+\alpha} \Gamma(2m-2k+\alpha)\Gamma(\beta n+2k+1)/\Gamma(\beta n+2m+\alpha+1).$$

Подставляя это в (23) и применяя последовательно следующие равенства

$$\Gamma(a+n) = (a)_n \Gamma(a), \quad (a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{a}{2}\right)_n \left(\frac{a+1}{2}\right)_n, \tag{24}$$

имеем

$$H(\alpha,\beta,n,\gamma;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \gamma^{2m} x^{\beta n+2m+\alpha}}{\Gamma(\beta n+2m+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{m} \frac{((\beta n+1)/2)_k ((\alpha+1)/2)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}.$$

Учитывая равенство, которое следует из следующей известной формулы

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(\delta)_k (\gamma)_{m-k}}{k!\,(m-k)!} = \frac{(\delta+\gamma)_m}{m!}, \tag{25}$$

из последнего равенства получим

$$H\left(\alpha,\beta,n,\gamma;x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\gamma^{2m}((\beta n+\alpha+2)\,/2)_m x^{\beta n+2m+\alpha}}{\Gamma\left(\beta n+2m+\alpha+1\right)m!}.$$

Отсюда, применяя последовательно равенства (24) к $\Gamma\left(\beta n+\alpha+2m+1\right)$, находим

$$H\left(\alpha,\beta,n,\gamma;x\right) = \frac{x^{\beta n+\alpha}}{\Gamma\left(\beta n+\alpha+1\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\gamma/2\right)^{2m} x^{2m}}{((\beta n+\alpha+1)\,/2)_m m!}.$$

Тогда, согласно обозначению (2), имеем

$$H\left(\alpha,\beta,n,\gamma;x\right) = \frac{x^{\beta n+\alpha}}{\Gamma\left(\beta n+\alpha+1\right)} \overline{J}_{(\beta n+\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right].$$

Подставляя это в (22), имеем

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma} y_1\left(x\right) = A x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda x^{\beta}\right)^n}{\Gamma\left(\beta n+\alpha+1\right)} \overline{J}_{(\beta n+\alpha-1)/2}\left[\gamma x\right].$$

Отсюда, принимая во внимание обозначения (12), находим

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma} y_1\left(x\right) = A x^{\alpha} \mathbb{E}_{\beta,\alpha+1,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\beta};\gamma x\right]. \tag{26}$$

Из (20), (26) и $\beta=\alpha+2$ следует, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x)\equiv 0$.

Аналогично можно доказать, что $y_2''\left(x\right)+\lambda I_{0x}^{\alpha,\gamma} y_2\left(x\right)+\gamma^2 y_2\left(x\right)=0$,

Теперь покажем, что $y_3\left(x\right)$ удовлетворяет уравнению (1).

Используя формулу (14), находим $y_3'(x)$:

$$y_3'\left(x\right) = \int_0^x \mathbb{E}_{\beta,1,(-1/2)}\left[-\lambda(x-z)^{\alpha};\gamma\left(x-z\right)\right] f\left(z\right) dz.$$

Используя $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}\left[0;0\right]=\Gamma^{-1}\left(\beta\right)$ и формулу (15), находим

$$y_3''\left(x\right) = f\left(x\right) - \lambda \int_0^x \left(x-z\right)^{\beta-1} \mathbb{E}_{\beta,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\left(x-z\right)\right] f\left(z\right) dz -$$

$$-\gamma^2 \int_0^x \left(x-z\right) \mathbb{E}_{\beta,2,1/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\left(x-z\right)\right] f\left(z\right) dz. \tag{27}$$

Используя (18) и (27), находим равенство

$$y_3''(x)+\gamma^2 y_3(x)=f(x)-\lambda\int\limits_0^x (x-z)^{\beta-1}\mathbb{E}_{\beta,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma(x-z)\right]f(z)\,dz. \quad (28)$$

Теперь вычисляем $I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_3(x)$:

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_3(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]y_3(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]dt\times$$

$$\times\int\limits_0^t (t-z)\mathbb{E}_{\beta,2,1/2}\left[-\lambda(t-z)^{\beta};\gamma(t-z)\right]f(t)\,dt.$$

В последнем равенстве меняем порядок интегрирования:

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_3(x)=$$

$$=\int\limits_0^x f(z)\,dz\int\limits_z^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-z)}{\Gamma(\alpha)}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\mathbb{E}_{\beta,2,1/2}\left[-\lambda(t-z)^{\alpha};\gamma(t-z)\right]dt.$$

Если ввести обозначение

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z)=$$

$$=\int\limits_z^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-z)}{\Gamma(\alpha)}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\mathbb{E}_{\beta,2,1/2}\left[-\lambda(t-z)^{\alpha};\gamma(t-z)\right]dt,$$

то последнее равенство запишется в виде:

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_3(x)=\int\limits_0^x f(z)\,G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z)\,dz. \quad (29)$$

Вычислим интеграл $G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z)$. С этой целью, заменяя функцию $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;y]$ по формуле (12), получим

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z)=$$

$$=\int\limits_z^x\frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-z)}{\Gamma(\alpha)}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma(x-t)\right]\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^n(t-z)^{\beta n}}{\Gamma(\beta n+2)}\overline{J}_{(\beta n+1)/2}\left[\gamma(t-z)\right]dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\beta n+2)\,\Gamma(\alpha)}\int\limits_z^x (x-t)^{\alpha-1}(t-z)^{\beta n+1}\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma\,(x-t)\right]\overline{J}_{(\beta n+1)/2}\left[\gamma\,(t-z)\right]dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\beta n+2)\,\Gamma(\alpha)}G_1\left(\alpha,\beta,\gamma,n;x,z\right),\tag{30}$$

где

$$G_1\left(\alpha,\beta,\gamma,n;x,z\right)=\int\limits_z^x (x-t)^{\alpha-1}(t-z)\overline{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma\,(x-t)\right]\overline{J}_{(\beta n+1)/2}\left[\gamma\,(t-z)\right]dt.\tag{31}$$

Заменяя функцию $\bar{J}_\nu(x)$ по формуле (2), получим

$$\bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma\,(x-t)\right]\;\bar{J}_{(\beta n+1)/2}\left[\gamma\,(t-z)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}(x-t)^{2k}}{\left((\alpha+1)/2\right)_k k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}(t-z)^{2m}}{\left((\beta n+3)/2\right)_m m!}.$$

Отсюда, применяя правило Коши умножения сходящихся рядов, имеем

$$\bar{J}_{(\alpha-1)/2}\left[\gamma\,(x-t)\right]\;\bar{J}_{(\beta n+1)/2}\left[\gamma\,(t-z)\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(\gamma/2)^{2k}(\gamma/2)^{2m-2k}(x-t)^{2k}(t-z)^{2m-2k}}{k!\,(m-k)!\left((\alpha+1)/2\right)_k\left((\beta n+3)/2\right)_{m-k}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-t)^{2k}(t-z)^{2m-2k}}{k!\,(m-k)!\left((\alpha+1)/2\right)_k\left((\beta n+3)/2\right)_{m-k}}.$$

Подставляя это в (31) и поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$G_1\left(\alpha,\beta,\gamma,n;x,z\right)=$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!\,(m-k)!\left((\alpha+1)/2\right)_k\left((\beta n+3)/2\right)_{m-k}}\times$$

$$\times\int\limits_z^x (x-t)^{2k+\alpha-1}(t-z)^{2m-2k+\beta n+1}dt.$$

В интеграле выполним замену переменной по формуле: $t=(x-z)\,s+z:$

$$G_1\left(\alpha,\beta,\gamma,n;x,z\right)=$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m(\gamma/2)^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1}}{k!\,(m-k)!\left((\alpha+1)/2\right)_k\left((\beta n+3)/2\right)_{m-k}}\times$$

$$\times \int_0^1 (1-s)^{2k+\alpha-1} s^{2m-2k+\beta n+1} ds.$$

Принимая во внимание интегральное представление бета-функции и её связь с гамма-функцией, имеем

$$G_1(\alpha,\beta,\gamma,n;x,z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m (\gamma/2)^{2m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1} \Gamma(2k+\alpha)\Gamma(2m-2k+\beta n+2)}{k!(m-k)!((\alpha+1)/2)_k((\beta n+3)/2)_{m-k}\Gamma(2m+\beta n+\alpha+2)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}(x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(2m+\beta n+\alpha+2)} \sum_{k=0}^{m} \frac{\Gamma(2k+\alpha)\Gamma(2m-2k+\beta n+2)}{k!(m-k)!((\alpha+1)/2)_k((\beta n+3)/2)_{m-k}}. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (30), получим

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\beta n+2)\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m(\gamma/2)^{2m}(x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(2m+\beta n+\alpha+2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m} \frac{\Gamma(2k+\alpha)\Gamma(2m-2k+\beta n+2)}{k!(m-k)!((\alpha+1)/2)_k((\beta n+3)/2)_{m-k}}.$$

Применяя формулы (24) к функциям $\Gamma(2k+\alpha)$ и $\Gamma(2m-2k+\beta n+2)$, имеем

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \gamma^{2m}(x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(2m+\beta n+\alpha+2)} \sum_{k=0}^{m} \frac{(\alpha/2)_k((\beta n+2)/2)_{m-k}}{k!(m-k)!}.$$

Отсюда, учитывая равенства (25) и (24), находим

$$G(\alpha,\beta,\gamma,\lambda;x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\lambda)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \gamma^{2m}((\beta n+\alpha+2)/2)_m (x-z)^{2m+\beta n+\alpha+1}}{m!\Gamma(2m+\beta n+\alpha+2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n (x-z)^{\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(\beta n+\alpha+2)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \gamma^{2m}((\beta n+\alpha+2)/2)_m (x-z)^{2m}}{m!(\beta n+\alpha+2)_{2m}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n (x-z)^{\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(\beta n+\alpha+2)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \gamma^{2m}((\beta n+\alpha+2)/2)_m (x-z)^{2m}}{2^{2m} m!((\beta n+\alpha+2)/2)_m((\beta n+\alpha+3)/2)_m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n (x-z)^{\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(\beta n+\alpha+2)} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (\gamma/2)^{2m}(x-z)^{2m}}{m!((\beta n+\alpha+3)/2)_m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n (x-z)^{\beta n+\alpha+1}}{\Gamma(\beta n+\alpha+2)} \overline{J}_{(\beta n+\alpha+1)/2}[\gamma(x-z)] =$$

$$= (x-z)^{\alpha+1}\,\mathbb{E}_{\beta,\,\alpha+2,\,(\alpha+1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\,(x-z)\right].$$

Подставляя это в (29), получим

$$I_{0x}^{\alpha,\gamma}y_3\,(x) = \int\limits_0^x (x-z)^{\alpha+1}\,\mathbb{E}_{\beta,\,\alpha+2,\,(\alpha+1)/2}\left[-\lambda(x-z)^{\beta};\gamma\,(x-z)\right] f\,(z)\,dz. \tag{32}$$

Из (28), (33) и $\beta = \alpha + 2$ следует, что функция $y_3(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Следовательно, функция (11) является решением задачи Коши $\{(1),(3)\}$. Единственность решения задачи исходит из теории интегральных уравнений. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Москва, Физматлит, 2003. – 272 с.

3. Kilba A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006.

4. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Изв. АН АрмССР. Mat. 3(1), 1968, с. 3-29.

5. Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма - Лиувилля. Изв. АН АрмССР. Mat. 5(2), 1970, с. 71-96.

6. Нахушев А. М. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Докл. АН СССР. 234(2), 1977, с. 308-311.

7. Алероев Т. С. К проблеме о нулях функции Миттага-Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка. Дифференц. уравнения. 36(9), 2000, с. 1278 – 1279.

8. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва, Наука, 2005. – 199 с.

9. Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel. 1969.

10. Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. Comparison theorems of tempered fractional differential equations. Eur. Phys. J. Spec. Top. 231, 2022, pp. 2477 – 2485.

11. Уринов А. К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувиляя с помощью функции Бесселя. Бюллетень Института математики. 5(1), 2022, с. 108 – 155.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва, Наука, 1965. 296 с.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. Москва, Наука, 1966. 296 с.

14. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва, Физматлит, 1959. 232 с.

15. Уринов А. К., Усмонов Д. А. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро - дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре. Бюллетень Института математики. 6(1), 2023, с. 138 – 154.

16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. Москва, Наука, 1967. 300 с.

REZYUME

Ushbu maqolada bir jinsli boʻlmagan yadrosida funksiyasi qatnashgan integral operatorni oʻz ichiga olgan integro-differensial tenglama uchun Koshi masalasi tadqiq etilgan. Qoʻyilgan masala ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga ekvivalent keltirilgan. Ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida integral tenglamaning yechimini topilgan. Topilgan yechim qoʻyilgan masalani shartlarini qanoatlantirishi isbotlangan. Masalaning yechim formulasini yozishda uchun yangi maxsus funksiya kiritilgan, xususiy holda undan Mittag – Leffler funksiyasi kelib chiqadi. Kiritilgan funksiyaning xossalari oʻrganilgan, xususan differensiallash formulalar keltirilgan.

Kalit soʻzlar: Bessel funksiyasi, integro–differensial tenglama, integral operator, Koshi masalasi.

RESUME

In this paper, we study the Cauchy problem for an inhomogeneous ordinary integro-differential equation, containing an integral operator with the Bessel function in the kernel. The problem posed is equivalently reduced to the integral equation Volterra of the second kind. A solution to the integral equation was found using the method of successive approximations. It has been proven that what was found the solution actually satisfies the conditions of the problem. When deriving the formula for solving the problem, a new one was derived a special function, which in a particular case follows the Mittag-Leffler function. The properties of the introduced function are studied, in particular, differentiation formulas have been written for it.

Key words: Bessel function, integro–differential equation, integral operator, the Cauchy problem.

УДК 517.95

Регуляризация краевой задачи для неоднородного уравнения параболического типа с одной линией вырождения

Хажиев И. О.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Туринский политехнический университет в городе Ташкенте
kh.ikrom04@gmail.com
Рузиматов Ж. А.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
rozimatovjakhongir@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется условная корректность краевой задачи для неоднородного уравнения параболического типа с одной линией вырождения. Для решения задачи доказаны теоремы единственности и условной устойчивости. Регуляризированное решение задачи построено на множестве корректности.

Ключевые слова: уравнения с одной линией вырождения, некорректная задача, условная устойчивость, множества корректности, регуляризованное решение.

Пусть $Q = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega, 0 < t < T\}$, $\Omega = \{(x, y) : |x| < l, 0 < y < l\}$. В области $Q \cap \{x \neq 0\}$ рассмотрим уравнения вида

$$u_t = sgn(x)u_{xx} + u_{yy} + cu + f(x, y, t), \tag{1}$$

где $f(x, y, t)$ - заданная функция источника, $c \in R$, $c < \infty$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, y, t)$ удовлетворяющую уравнению (1) в области $Q \cap \{x \neq 0\}$ и следующим условиям: начальном

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega} \tag{2}$$

краевым

$$\begin{aligned} &u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0,\ 0 \leq y \leq l, 0 \leq t \leq T, \\ &u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0, -l \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0},\ u_x|_{x=-0} = u_x|_{x=+0}, 0 \leq y \leq l, 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

где $\phi(x, y)$ заданная достаточно гладкая функция.

Исследования краевой задачи на условную корректность и построение ее приближенного решения для однородного уравнения, аналогичного уравнению (1), изучены в работах [1, 3]. Краевые задачи для систем уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени рассмотрены в работах [1, 2, 4, 9].

В данной работе исследуется некорректная задача для неоднородного уравнения с одной линией вырождения. Для решения задачи получена априорная оценка, доказаны теоремы единственности и условной устойчивости и построен регуляризованное решение на множестве корректности.

При исследовании данной задачи приходим к следующей спектральной задаче: Найти такие значения λ при котором задача

$$\begin{array}{l} sgn(x)\,\partial_x^2\phi(x,y)+\partial_y^2\phi(x,y)=\lambda\phi(x,y),\ (x,y)\in\Omega\cap\{x\neq 0\},\\ \phi(-l,y)=\phi(l,y)=0,\ y\in[0;\,l],\\ \phi(x,0)=\phi(x,l)=0,\ x\in[-l;\,l],\\ \phi(-0,y)=\phi(+0,y),\ \phi_x(-0,y)=\phi_x(+0,y),\ y\in[0;\,l]. \end{array} \tag{5}$$

имеет нетривиальные решения.

Задача (5) имеет $\bar{\lambda}_{k,j}=\mu_k^+-\left(\frac{\pi j}{l}\right)^2$, $\tilde{\lambda}_{k,j}=\mu_k^- -\left(\frac{\pi j}{l}\right)^2$, $\left\{\bar{\lambda}_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\left\{\tilde{\lambda}_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$ собственные значения и соответствующие им собственные функции $\left\{\bar{\phi}_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$, $\left\{\tilde{\phi}_{k,j}\right\}_{k,j=1}^{\infty}$, которые можно представить в виде:

$$\bar{\phi}_{k,j}(x,y)=X_k^+(x)\cdot Y_j(y),\ \ \tilde{\phi}_{k,j}(x,y)=X_k^-(x)\cdot Y_j(y),$$

и они обладают свойствами

$$\left(\bar{\phi}_{k,j}\cdot\bar{\phi}_{r,s}\right)=\begin{cases}1,\ k=r\ \wedge\ j=s,\\ 0,\ k\neq r\ \vee\ j\neq s,\end{cases}\quad \left(\tilde{\phi}_{k,j}\cdot\tilde{\phi}_{r,s}\right)=\begin{cases}-1,\ k=r\ \wedge\ j=s,\\ 0,\ \ k\neq r\ \vee\ j\neq s,\end{cases}\quad \left(\bar{\phi}_{k,j}\cdot\tilde{\phi}_{r,s}\right)=0,$$

$k,\ j,\ r,\ s\in N$, где

$$X_k^+(x)=\begin{cases}\frac{\sin\sqrt{\mu_k^+}(x+l)}{\sqrt{l}\cos\sqrt{\mu_k^+}l},-l\le x<0,\\ \frac{sh\sqrt{\mu_k^+}(x-l)}{\sqrt{l}ch\sqrt{\mu_k^+}l},0<x\le l,\end{cases}\qquad X_k^-(x)=\begin{cases}\frac{sh\sqrt{-\mu_k^-}(x+l)}{\sqrt{l}ch\sqrt{-\mu_k^-}l},\ -l\le x<0,\\ \frac{\sin\sqrt{-\mu_k^-}(x-l)}{\sqrt{l}\cos\sqrt{-\mu_k^-}l},\ 0<x\le l,\end{cases}$$

$Y_j(y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi j}{l}y$. Числа μ_k^+, $-\mu_k^-$ образуют неубывающие последовательности и являются решениями трансцендентного уравнения $tg\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}}l+th\sqrt{\pm\mu_k^{\pm}}l=0$.

Обозначим скалярное произведение $(u,v)=\int\limits_{\Omega}uv\,dxdy$ а норму $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$ в $L_2(\Omega)$. Согласно [2], имеем

$$\|u(x,y,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x)\,u(x,y,t),\,\bar{\phi}_{k,j}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(sgn(x)\,u(x,y,t),\,\tilde{\phi}_{k,j}\right)^2. \tag{6}$$

Из результатов работы [7] следует, что собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0,а норма в пространстве $L_2(\Omega)$, определенная равенством (6), эквивалентна исходной.

Лемма 1. Для решения задачи (1)-(4) при $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\|u(x,y,t)\|_0 \le \sqrt{2}(\|u(x,y,0)\|_0 + \alpha)^{\frac{T-t}{T}}(\|u(x,y,T)\|_0 + \alpha)^{\frac{t}{T}} + \alpha, \tag{7}$$

$\alpha = \left(\int\limits_0^T \|f(x,y,t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство леммы приведено в [9].

Введем множество корректности следующим образом

$$M = \left\{(u(x,y,t)) : \|u(x,y,T)\|_0 \le m,\, m < \infty\right\}.$$

Теоремы о единственности и условной устойчивости

Теорема 1. Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,y,t) \in M$. Тогда решение задачи (1)-(4) единственно.

Доказательство. Допустим, что пара функции $u_1(x,y,t)$ и $u_2(x,y,t)$ являются решением задачи (1)-(4), введем обозначение $u = u_1 - u_2$.Тогда функция $u(x,y,t)$удовлетворяет уравнению

$$u_t = sgn(x)u_{xx} + u_{yy} + c \cdot u \tag{8}$$

в области $Q_T \cap (x \ne 0)$ и следующим условиям: начальным

$$u|_{t=0} = 0, (x,y) \in \overline{Q}, \tag{9}$$

краевым (3) и условиям склеивания (4),что функции $f(x,y,t) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$. Тогда на основе Леммы 1 получим норма $\|u\|_0 \le 0$. Отсюда вытекает что $u(x,y,t) \equiv 0$ и следует $u_1 \equiv u_2$ для $\forall (x,y,t) \in \{Q \cap \{x \ne 0\}\}$.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1) - (4) существует, $u(x,y,t), u_\varepsilon(x,y,t) \in M$и $\|\varphi(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)\|_0 \le \varepsilon$, $\max\limits_{t\in[0;T]} \|f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \le \varepsilon$. Тогда имеет место неравенство

$$\|u(x,y,t) - u_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \le \left(\left(\sqrt{T} + 1\right)\varepsilon\right)^{\frac{T-t}{T}} (2m + \sqrt{T}\varepsilon)^{\frac{t}{T}} + \sqrt{T}\varepsilon,$$

где $u_\varepsilon(x,y,t)$ решение задачи (1)-(4) по приближенным данным $\varphi_\varepsilon(x,y)$, $f_\varepsilon(x,y,t)$.

Доказательство. Введем обозначение $v = u - u_\varepsilon$. Тогда функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t = sgn(x)v_{xx} + v_{yy} + c \cdot v + f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t) \tag{10}$$

в области $Q_t \cap (x \ne 0)$ и следующим условиям: начальным

$$v_{t=0} = \varphi(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega} \tag{11}$$

краевым (3) и условиям склеивания (4). Очевидно, что для решения задачи (10)-(11) верна оценка

$$\|v(x,y,t)\|_0 \le \sqrt{2}(\|v(x,y,0)\|_0 + \alpha)^{\frac{T-t}{T}}(\|v(x,y,T)\|_0 + \alpha)^{\frac{t}{T}} + \alpha$$

где $\alpha = \left(\int\limits_0^T \|f(x,y,t) - f_\varepsilon(x,y,t)\|_0^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Получим $\alpha \le \sqrt{T}\varepsilon$, $\|v(x,y,0)\|_0 \le \varepsilon$ и $\|v(x,y,T)\|_0 \le 2m$. Тогда

$$\|v(x,y,t)\|_0 \le \sqrt{2}\Big(\Big(1+\sqrt{T}\Big)\varepsilon\Big)^{\frac{T-t}{T}}\Big(2m+\sqrt{T}\varepsilon\Big)^{\frac{t}{T}} + \sqrt{T}\varepsilon.$$

Отсюда следует требуемое неравенство. Теорема была доказана.

Регуляризации

Пусть решение задачи (1)-(4) существует. Тогда его можно представить в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\varphi}_{k,n} e^{(\bar{\lambda}_{k,n}+c)t} + \int\limits_0^t e^{(\bar{\lambda}_{k,n}+c)(t-\tau)} \bar{f}_{k,n}(\tau)d\tau\right)\bar{\phi}_{k,n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{\varphi}_{k,n} e^{(\tilde{\lambda}_{k,n}+c)t} + \int\limits_0^t e^{(\tilde{\lambda}_{k,n}+c)(t-\tau)} \tilde{f}_{k,n}(\tau)d\tau\right)\tilde{\phi}_{k,n}, \tag{12}$$

где

$$\bar{\varphi}_{k,n} = \int\limits_{\Omega} sgnx\varphi(x,y)\bar{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy, \tilde{\varphi}_{k,n} = -\int\limits_{\Omega} sgnx\varphi(x,y)\tilde{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy,$$

$$\bar{f}_{k,n}(t) = \int\limits_{\Omega} sgnx\, f(x,y,t)\bar{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy, \tilde{f}_{k,n}(t) = -\int\limits_{\Omega} sgnx\, f(x,y,t)\tilde{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy.$$

В задаче (1)-(4) введем замену $u(x,y,t) = \nu(x,y,t)\cdot e^{c\cdot t}$. В результате приходим к задаче:

$$\nu_t(x,y,t) = \ sgn(x)\cdot \nu_{xx}(x,y,t) + \nu_{yy}(x,y,t) + g(x,y,t), \tag{13}$$

$$\nu|_{t=0} = \varphi(x,y), (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{14}$$

$$\begin{array}{c} \nu|_{x=-l} = \nu|_{x=l} = 0,\ 0\le y\le l,\, 0\le t\le T, \\ \nu|_{y=0} = \nu|_{y=l} = 0, -l\le x\le l,\, 0\le t\le T, \end{array} \tag{15}$$

$$\nu|_{x=-0} = \nu|_{x=+0},\ \ \nu_x|_{x=-0} = \nu_x|_{x=+0}, 0\le y\le l,\, 0\le t\le T, \tag{16}$$

где $g(x,y,t) = f(x,y,t)e^{-ct}$.

1. Пусть $f(x,y,t) = 0$, $u(x,y,T)\in M$, $\|\varphi(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)\|_0 \le \varepsilon$, то $g(x,y,t) = 0$, $\|\nu(x,y,T)\|_0 \le me^{-cT}$, где $\varphi_\varepsilon(x,y)$- задано приближенно. Тогда решение последней задачи будет следующим:

$$\nu(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{k,n}e^{\bar{\lambda}_{k,n}t}\bar{\phi}_{k,n} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_{k,n}e^{\tilde{\lambda}_{k,n}t}\tilde{\phi}_{k,n}.$$

В качестве приближенного решения по точным данным для задачи (13)- (16) рассмотрим последовательность функций в виде

$$\nu_N(x,y,t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{k,n}e^{\bar{\lambda}_{k,n}t}\bar{\phi}_{k,n} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_{k,n}e^{\tilde{\lambda}_{k,n}t}\tilde{\phi}_{k,n},$$

а приближенное решение по приближенным данным

$$\nu_{N\varepsilon}(x,y,t)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}}e^{\bar{\lambda}_{k,n}t}\bar{\phi}_{k,n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}}e^{\tilde{\lambda}_{k,n}t}\tilde{\phi}_{k,n},$$

где

$$\bar{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}}=\int_{\Omega} sgnx\varphi_{\varepsilon}(x,y)\bar{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy,$$

$$\tilde{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}}=-\int_{\Omega} sgnx\varphi_{\varepsilon}(x,y)\tilde{\phi}_{k,n}(x,y)dxdy,$$

здесь N- параметр регуляризации. Очевидно, что

$$\left\|\nu-\nu_{N\varepsilon}\right\|_0\le\left\|\nu-\nu_{N}\right\|_0+\left\|\nu_N-\nu_{N\varepsilon}\right\|_0. \tag{17}$$

Оценим

$$\left\|\nu_N-\nu_{N\varepsilon}\right\|_0^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar{\lambda}_{k,n}t}(\bar{\varphi}_{k,n}-\bar{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}})^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar{\lambda}_{k,n}t}(\tilde{\varphi}_{k,n}-\tilde{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}})^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}e^{2\mu_k^+t}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t}(\bar{\varphi}_{k,n}-\bar{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}})^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar{\lambda}_{k,n}t}(\tilde{\varphi}_{k,n}-\tilde{\varphi}_{\varepsilon_{k,n}})^2\le e^{2\mu_N^+t}\varepsilon^2.$$

Теперь оценим первый член в правой часть неравенства (17)

$$\left\|\nu-\nu_N\right\|_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar{\lambda}_{k,n}t}\bar{\varphi}_{k,n}^2 \tag{18}$$

при условии $\left\|\nu(x,y,T)\right\|_0\le me^{-cT}$, т.е.

$$\left\|\nu(x,y,T)\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{k,n}^2e^{2\bar{\lambda}_{k,n}T}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_{k,n}^2e^{2\bar{\lambda}_{k,n}T}\le m^2e^{-2cT}$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_{k,n}^2e^{2\bar{\lambda}_{k,n}T}\le m^2e^{-2cT}. \tag{19}$$

Легко видеть, что сумма в правой части (18) достигает при условии (19) максимального значения в случае, когда коэффициенты $\bar{\varphi}_{k,n}$ равны:

$$\bar{\varphi}_{k,n}=\begin{cases} m\cdot e^{-\bar{\lambda}_{k,n}T-cT}, k=N+1, n=1,\\ 0, \qquad\qquad\quad k\neq N+1, n\neq 1.\end{cases}$$

Тогда

$$\left\|\nu-\nu_N\right\|^2=m^2e^{-2cT}e^{2\bar{\lambda}_{N+1,1}(t-T)}.$$

Суммируя все соответствующие оценки, получим:

$$\|\nu-\nu_N^{\varepsilon}\|_0 \le e^{\mu_N^+ t}\varepsilon + me^{-cT}e^{\bar{\lambda}_{N+1,1}(t-T)}.$$

Если заменить $u(x,y,t)=\nu(x,y,t)\cdot e^{c\cdot t}$, то для задачи (1)-(4) будем имееть следующую оценку

$$\|u-u_{N\varepsilon}\|_0 \le e^{(\mu_N^+ +c)t}\varepsilon + me^{(\bar{\lambda}_{N+1,1}+c)(t-T)}$$

Минимизируя последнюю оценку при $\varepsilon>0$ по N, находим формулу для параметра регуляризации зависящую от ε, m, t и T.

2. Пусть $\varphi(x,y)=0$, $u(x,y,T)\in M$, $\max\limits_t \|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \le \varepsilon$, где $f_\varepsilon(x,y,t)$ - задано приближенно. Тогда решение последней задачи будет следующим:

$$\nu(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\bar{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\bar{f}_{k,n}d\tau\cdot\bar{\phi}_{k,n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\tilde{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\tilde{f}_{k,n}d\tau\cdot\tilde{\phi}_{k,n}$$

Рассмотрим следующую последовательность для регуляризованного приближенного решения на основе точных данных:

$$\nu_N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\bar{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\bar{f}_{k,n}d\tau\cdot\bar{\phi}_{k,n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\tilde{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\tilde{f}_{k,n}d\tau\cdot\tilde{\phi}_{k,n}$$

и еще на основе приближенных данных

$$\nu_N^{\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\bar{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\bar{f}_{\varepsilon,k,n}d\tau\cdot\bar{\phi}_{k,n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{\tilde{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}\tilde{f}_{\varepsilon,k,n}d\tau\cdot\tilde{\phi}_{k,n}.$$

Перейдем к оценке. Заметим, что

$$\|\nu-\nu_N^{\varepsilon}\|_0 \le \|\nu-\nu_N\|_0+\|\nu_N-\nu_N^{\varepsilon}\|_0.$$

Прежде, оценим

$$\|\nu_N-\nu_N^{\varepsilon}\|_0^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{\bar{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}(\bar{f}_{k,n}-\bar{f}_{\varepsilon,k,n})d\tau\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{\tilde{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}(\tilde{f}_{k,n}-\tilde{f}_{\varepsilon,k,n})d\tau\right)^2 \le$$

$$\le\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{2\bar{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}d\tau\int_0^t(\bar{f}_{k,n}-\bar{f}_{\varepsilon,k,n})^2d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{2\tilde{\lambda}_{k,n}(t-\tau)}d\tau\int_0^t(\tilde{f}_{k,n}-\tilde{f}_{\varepsilon,k,n})^2d\tau \le$$

$$\le\frac{e^{2\mu_N^+}}{\left|\bar{\lambda}_{1,1}\right|}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(\bar{f}_{k,n}-\bar{f}_{\varepsilon,k,n})^2d\tau+t\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(\tilde{f}_{k,n}-\tilde{f}_{\varepsilon,k,n})^2d\tau \le\left(\frac{e^{2\mu_N^+}}{\left|\bar{\lambda}_{1,1}\right|}+t\right)\int_0^t\|f-f_\varepsilon\|^2d\tau.$$

Учитывая условие $\max\limits_{t}\|f(x,y,t)-f_\varepsilon(x,y,t)\|_0 \le \varepsilon$ получим

$$\|\nu_N-\nu_N^\varepsilon\|_0 \le \left(\frac{te^{2\mu_N^+}}{\left|\bar\lambda_{1,1}\right|}+t^2\right)^{1/2}\varepsilon \tag{20}$$

Теперь, рассмотрим $\|\nu-\nu_N\|_0$. То

$$\|\nu-\nu_N\|_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t e^{\bar\lambda_{k,n}(t-\tau)}\bar f_{k,n}d\tau\right)^2. \tag{21}$$

Из условии $\|\nu(x,y,T)\|_0 \le me^{-cT}$, имеем

$$\|v(x,y,T)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^T e^{\bar\lambda_{k,n}(T-\tau)}\bar f_{k,n}d\tau\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^T e^{\tilde\lambda_{k,n}(T-\tau)}\tilde f_{k,n}d\tau\right)^2.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^T e^{\bar\lambda_{k,n}(T-\tau)}\bar f_{k,n}d\tau\right)^2 \le m^2e^{-2cT}.$$

Введем обозначение

$$\int\limits_0^T e^{-\bar\lambda_{k,n}\tau}\bar f_{k,n}d\tau=\bar g_{k,n}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar\lambda_{k,n}T}\bar g_{k,n}^2 \le m^2e^{-2cT} \tag{22}$$

Используя условие (22) оценим (21). При этом применив метод Лагранжа для нахождения условного экстремума и получим

$$\bar g_{k,n}=\begin{cases} m\cdot e^{-\bar\lambda_{k,n}T-cT}, k=N+1, n=1,\\ 0, \qquad\qquad\qquad k\ne N+1, n\ne 1.\end{cases}$$

Отсюда, и из (21) имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t e^{\bar\lambda_{k,n}(t-\tau)}\bar f_{k,n}d\tau\right)^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\bar\lambda_{k,n}t}\int\limits_0^t e^{-\bar\lambda_{k,n}\tau}\bar f_{k,n}d\tau\right)^2 \le$$
$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\bar\lambda_{k,n}t}\bar g_{k,n}^2 \le m^2\cdot e^{-2cT}e^{2\bar\lambda_{N+1,1}(t-T)}.$$

Отсюда и из (20) имеем

$$\|\nu-\nu_N^\varepsilon\|_0 \le \left(\left|\bar\lambda_{1,1}\right|^{-1}e^{2\mu_N^+}t+t^2\right)^{1/2}\varepsilon+me^{-cT}e^{\bar\lambda_{N+1,1}(t-T)}.$$

Минимизируем последнюю оценку при $\varepsilon>0$ по N, находим формулу для параметра регуляризации завиясящую от ε, m, t и T.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fayazov K.S., Khajiev I.O. Estimation of the conditional stability of a boundary value problem for a system of parabolic equations with changing direction of time. Reports on Mathematical Physics, Vol. 88, №3, 2021. P. 419-431

2. Fayazov K.S., Khudayberganov Y.K., Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.12, №3, 392–401, 2019.

3. Khajiev I.O., Fayazov K.S. The ill-posed boundary value problem for a high-order differential equation with the degeneration line. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2(39), 2022. P. 122-129.

4. Khajiev I.O., Khudayberganov Y.K. Conditional stability and regularizations of an initialboundary value problem for a system of parabolic type equations with two degeneration lines. AIP Conf. Proc. 3119, 030004-1-10 (2024)

5. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / Новосибирск: Наука, 2000. -336 с.

6. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. - Новосибирск: Наука, 1983.

7. Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения. Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. - Новосибирск, 1986. С. 65-84.

8. Фаязов К.С., Хажиев И.О. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с одной линией вырождения. Бюллетень Института математики, 2020, №1. С. 118-126.

9. Хажиев И.О. Условная устойчивость краевой задачи для системы уравнений смешанного типа высокого порядка. Научный вестник СамГУ, №1, 2022. С. 60-67.

REZYUME

Ushbu maqolada bitta chiziqda buzilishga ega bir jinsli bo‘lmagan parabolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalaning shartli korrektligi o‘rganilgan. Masala yechimi uchun yagonalik va shartli turg‘unlik teoremalari isbotlangan. Korrektlik to‘plamda masalaning regulyarlashgan yechimi qurilgan.

Kalit so‘zlar: bitta chiziqda buzilishga ega tenglama, nokorrekt masala, shartli turg‘unlik, korrektlik to‘plami, regulyarlashgan yechim.

RESUME

In this paper, we study the conditional correctness of a boundary value problem for a non-homogeneous parabolic equation with one degeneration line. Theorems of uniqueness and conditional stability of the solution to the problem are proved. A regularized solution of the problem is constructed on the set of correctness.

Key words: equation with one degeneration line, ill-posed problem, conditional stability, set of correctness, regularized solution.

УДК 517.55

СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ТРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Хусенова Ж. Т.
Бухарский государственный университет
j.t.husenova@buxdu.uz

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается модель Фридрихса H, соответствующая оператору энергии системы двух частиц на одномерной решетке. Сначала описан спектр модели Фридрихса H, и определена его верхняя грань (которая обозначена через M). Показано, что точка M является предельной точкой числовой области значений $\mathcal{W}(H)$ модели Фридрихса H, не принадлежащей $\mathcal{W}(H)$. Введены три вспомогательные модели Фридрихса H_k, $k = 1, 2, 3$ с одномерными возмущениями, и установлена связь между их числовыми областями значений. Показано, что если параметры функции удовлетворяют определенному условию, то существует такой индекс $k \in \{1, 2, 3\}$, что $\mathcal{W}(H_k) = \mathcal{W}(H)$.

Ключевые слова: модель Фридрихса, оператор энергии, числовая область значений, индекс, параметр функции, носитель функции, мера Лебега.

1. Введение.

Одним из классических методов изучения спектра линейного ограниченного оператора A в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является изучение его числовой области значений. Последнее множество определяется следующим образом:

$$\mathcal{W}(A) := \{(Ax, x) : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

Из определения видно, что множество $\mathcal{W}(A)$ является подмножеством комплексной плоскости, и геометрические свойства множества $\mathcal{W}(A)$ дают некоторые сведения об операторе A. Это понятие впервые введено в работе Теплица [1] для матриц, и доказано, что числовая область значений матрицы содержит все ее собственные значения, т.е. ее спектр (так как множество всех собственных значений матрицы совпадает со спектром этой матрицы). Далее, в работе Хаусдорфа [2] показано, что числовая область значений оператора является выпуклым множеством. Отметим, что выше указанные результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае для любого линейного ограниченного оператора. В работе Винтнера [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании числовой области значений этого оператора.

В последние годы во многих работах числовая область значений решетчатых моделей исследована методами теории пороговых явлений. Ниже мы остановимся на анализе трех таких работ. В работе [4] описана структура числовой области значений модели Фридрихса с двумерным возмущением, найдены условия, при которых числовая область значений становится замкнутым множеством и совпадает со спектром.

В работе [5] рассматривается 2×2 операторная матрица, так называемая обобщенная модель Фридрихса A, ассоциированная с системой не более чем двух квантовых частиц на d$-$мерной решетке. Структура замыкания числовой области значений $\mathcal{W}(A)$ обобщенной модели Фридрихса A подробно исследована в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора. Выделены случаи, когда множество $\mathcal{W}(A)$ замкнуто. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр обобщенной модели Фридрихса A совпадал с множеством $\mathcal{W}(A)$.

В работе [6] рассматривается ограниченная и самосопряженная модель Фридрихса $\mathcal{A}(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1,\mu_2>0$, и обсуждается одномерный случай с двумерным возмущением. Исследуется числовая область значения оператора $\mathcal{A}(\mu_1,\mu_2)$ относительно параметров μ_1 и μ_2. Найдено критическое значение параметра μ_α, $\alpha=1,2$, гарантирующее совпадаемость спектра и числовой области значений оператора $\mathcal{A}(\mu_1,\mu_2)$.

В данной работе рассматривается модель Фридрихса H с трехмерным возмущением, ассоциированная с системой двух квантовых частиц на одномерной решетке. Отметим, что вопросы, приводящие к изучению спектральных свойств таких моделей, обычно возникают в задачах статистической физики, гидродинамики и теории твердого тела. Изучено соотношение между числовой областью значений модели Фридрихса H и трех вспомогательных моделей Фридрихса с одномерными возмущениями.

Для удобства читателей перечислим основные свойства числовой области значений [7]. Пусть A - линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathcal{W}(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda|\le||A||\}$.

2) $\mathcal{W}(A^*)=\{\overline{\lambda}:\ \lambda\in\mathcal{W}(A)\}$.

3) $\mathcal{W}(I)=\{1\}$. Если α и β произвольные комплексные числа, тогда имеет место равенство $\mathcal{W}(\alpha A+\beta I)=\alpha\mathcal{W}(A)+\beta$. Здесь I - единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и

$$\alpha\Omega:=\{\alpha\lambda:\ \lambda\in\Omega\},\ \Omega+\beta:=\{\lambda+\beta:\ \lambda\in\Omega\}.$$

4) Для самосопряженного оператора A имеет место соотношение $\mathcal{W}(A)\subset\mathbb{R}$.

5) Если $\mathcal{H}$ конечномерное пространство, тогда множество $\mathcal{W}(A)$ является компактным.

6) Если $A,B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ унитарно эквивалентные операторы, тогда $\mathcal{W}(A)=\mathcal{W}(B)$.

Следующее утверждение устанавливает связь между точечным спектром $\sigma_{\rm p}(A)$, спектром $\sigma(A)$ и числовой областью значений $\mathcal{W}(A)$ оператора $A:$

7) $\sigma_{\rm p}(A)\subset\mathcal{W}(A)$; $\sigma(A)\subset\overline{\mathcal{W}(A)}$.

Последнее соотношение в современной математике известно как спектральное соотношение. Согласно свойствам 1) и 7) имеем

$$\sigma(A)\subset\overline{\mathcal{W}(A)}\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\le\|A\|\},$$

т.е. множество $\overline{\mathcal{W}(A)}$ меньше круга $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\le\|A\|\}$, содержащего спектр оператора A. Если A - линейный ограниченный самосопряженный оператор, то имеют место следующие "спектральные оценки":

$$\min \sigma(A) \geq \inf \mathcal{W}(A), \quad \max \sigma(A) \leq \sup \mathcal{W}(A).$$

Таким образом, числовая область значений линейного ограниченного самосопряженного оператора позволяет получить оценки нижней и верхней границ этого оператора.

2. Модель Фридрихса и его спектр.

Теперь введем оператор, который будет изучен в данной работе.

В гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$ квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на отрезке $[-\pi;\pi]$, рассмотрим оператор вида:

$$H := H_0 - V_1 - V_2 - V_3, \tag{1}$$

где H_0 - оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2[-\pi;\pi];$$

а V_α, $\alpha = 1, 2, 3$ - интегральные операторы вида:

$$(V_\alpha f)(x) = v_\alpha(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad f \in L_2[-\pi;\pi].$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2, 3$ – вещественнозначные непрерывные функции, определенные на отрезке $[-\pi;\pi]$. Причем функции $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ и $v_3(\cdot)$ - линейно независимы.

При этих предположениях на параметр функции, оператор H, определенный по формуле (1), ограничен и самосопряжен в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

Оператор H, определенный по формуле (1), обычно называется моделью Фридрихса. Поскольку параметр функции $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ и $v_3(\cdot)$ линейно независим, оператор $V := V_1 + V_2 + V_3$ является трехмерным. Следовательно, оператор H называется моделью Фридрихса с трехмерным возмущением.

Оператор возмущения V невозмущенного оператора H_0 является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр модели Фридрихса H совпадает с существенным спектром невозмущенного оператора H_0. Известно, что $\sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [m; M]$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m := \min_{x \in [-\pi;\pi]} u(x), \quad M := \max_{x \in [-\pi;\pi]} u(x).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [m; M].$$

Для определения собственных значений и числовой области значений модели Фридрихса H введем регулярную функцию в области $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ следующим образом:

$$I_{\alpha\beta}(z) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v_\alpha(t) v_\beta(t) dt}{u(t) - z}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Используя простые соображения, можно показать, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением модели Фридрихса H тогда и только тогда когда

$$\Delta(z) := \begin{vmatrix} 1 - I_{11}(z) & -I_{12}(z) & -I_{13}(z) \\ -I_{21}(z) & 1 - I_{22}(z) & -I_{23}(z) \\ -I_{31}(z) & -I_{32}(z) & 1 - I_{33}(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда для дискретного спектра оператора H имеем

$$\sigma_{\rm disc}(H) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \ \Delta(z) = 0\}.$$

Функция $\Delta(\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с моделью Фридрихса H.

Таким образом, для спектра модели Фридрихса H имеет место равенство:

$$\sigma(H) = [m; M] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \ \Delta(z) = 0\}.$$

Для любых $k \in \{1, 2, 3\}$ и $f \in L_2[-\pi; \pi]$ имеет место соотношение

$$(V_k f, f) = \left| \int_{-\pi}^{\pi} v_k(t) f(t) dt \right|^2 \geq 0,$$

поэтому оператор V_k является положительным. Следовательно, оператор V является положительным как сумма положительных операторов. Теперь из положительности оператора V следует, что модель Фридрихса H не имеет собственный значений, лежащих правее M и поэтому

$$\max \sigma(H) = \max \sigma_{\rm ess}(H) = M.$$

3. Основные результаты и схема доказательства.

Теперь сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. а) *Имеет место соотношение* $M \notin \mathcal{W}(H)$;

б) *Число* $z = M$ *является предельной точкой множества* $\mathcal{W}(H)$.

Схема доказательства теоремы 1. Для доказательства утверждения а) теоремы 1 предположим противное, т. е. пусть $M \in \mathcal{W}(H)$. Тогда существует элемент $f \in L_2[-\pi; \pi]$ такой, что $\|f\| = 1$ и $(Hf, f) = M$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - M)|f(x)|^2 dx = 0, \quad v_k \perp f = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

следовательно, $f \equiv 0$. Это утверждение противоречит условию нормировки $\|f\| = 1$. Значит, $M \notin \mathcal{W}(H)$.

Теперь докажем утверждение б) теоремы 1, т.е. число M является предельной точкой для множества $\mathcal{W}(H)$. Так как $M \in \sigma_{\rm ess}(H)$, в силу критерии Вейля существует ортонормальная система $\{g_n\} \in L_2[-\pi; \pi]$ такая, что

$$\varphi_n := Hg_n - Mg_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Из

$$(\varphi_n, g_n) = (Hg_n, g_n) - M \to 0$$

при $n \to \infty$ следует, что число M является предельной точкой множества $\mathcal{W}(H)$.

Теорема 1 доказана.

Чтобы использовать в дальнейших исследованиях наряду с моделью Фридрихса H, рассмотрим линейные, ограниченные и самосопряженные операторы

$$H_k := H_0 - V_k, \quad k = 1, 2, 3$$

в гильбертовом пространстве $L_2[-\pi; \pi]$. По определению модели Фридрихса H_1, H_2 и H_3 имеют одномерное возмущение. Простые рассуждения показывают, что

$$\sigma_{\text{ess}}(H_k) = [m; M], \quad \sigma_{\text{disc}}(H_k) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \, I_{kk}(z) = 1\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Более того, оператор H_k не имеет собственных значений, лежащих правее точки M.

Теорема 2. *Существуют индексы $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ такие, что*

$$\mathcal{W}(H_i) \subset \mathcal{W}(H_j) \subset \mathcal{W}(H_k).$$

Схема доказательства теоремы 2. Для любого $k \in \{1, 2, 3\}$ имеем

$$\overline{\mathcal{W}(H_k)} = [\min \sigma(H_k); M].$$

Обозначим через E_k собственное значение оператора H_k (если существует). Когда существует собственное значение имеем $\min \sigma(H_k) = E_k < m$. В противном случае $\min \sigma(H_k) = m$.

Возможны следующие типичные случаи:

Если для любого $k \in \{1, 2, 3\}$ оператор H_k имеет собственное значение, лежащее левее точки m и $E_3 \leq E_1 \leq E_2$, то $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$ и

$$\mathcal{W}(H_2) \subset \mathcal{W}(H_1) \subset \mathcal{W}(H_3).$$

Если оператор H_3 не имеет собственных значений, лежащих левее точки m, а операторы H_1 и H_2 имеют собственные значения, лежащие левее точки m, причем $E_2 \leq E_1 = m$, то $i = 3$, $j = 1$, $k = 2$ и

$$\mathcal{W}(H_3) \subset \mathcal{W}(H_1) \subset \mathcal{W}(H_2).$$

Если для любого $k \in \{1, 2, 3\}$ оператор H_k не имеет собственных значений, лежащих левее точки m, то $\min \sigma(H_k) = m$ и

$$\mathcal{W}(H_1) = \mathcal{W}(H_2) = \mathcal{W}(H_3).$$

Теорема 2 доказана.

Для формулировки следующего результата обозначим через $\text{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ носитель функции $v_\alpha(\cdot)$ и через $\mu(\Omega)$ меру Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Если для любых $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ выполняется условие*

$$\mu(\operatorname{supp}\{v_i(\cdot)\} \cap \operatorname{supp}\{v_j(\cdot)\}) = 0, \tag{2}$$

тогда существует индекс $k \in \{1, 2, 3\}$ такой, что $\mathcal{W}(H_k) = \mathcal{W}(H)$.

Схема доказательства теоремы 3. Если выполняется условие (2), тогда

$$\Delta(z) = (1 - I_{11}(z))(1 - I_{22}(z))(1 - I_{33}(z)).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_{\text{disc}}(H) = \sigma_{\text{disc}}(H_1) \cup \sigma_{\text{disc}}(H_2) \cup \sigma_{\text{disc}}(H_3).$$

из равенств

$$\min \sigma(H) = \min\{\min \sigma(H_1), \min \sigma(H_2), \min \sigma(H_3)\}$$

и $\overline{\mathcal{W}(H)} = [\min \sigma(H); M]$ получим искомое равенство.

Теорема 3 доказана.

4. Примеры.

Следует отметить, что класс функций $v_k(\cdot)$, $k = 1, 2, 3$ удовлетворяющих условию (2), не пуст. Например, параметрами функции вида:

$$v_1(x) = \begin{cases} \sin(2x), & \text{если } x \in [\pi/2; \pi]; \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi; \pi/2]; \end{cases}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} \sin(2x), & \text{если } x \in [0; \pi/2]; \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi; 0] \cup [\pi/2; \pi]; \end{cases}$$

$$v_3(x) = \begin{cases} \sin(2x), & \text{если } x \in [-\pi; 0]; \\ 0, & \text{если } x \in [0; \pi] \end{cases}$$

являются вещественнозначные, непрерывные, линейно независимые функции, определенные на отрезке $[-\pi; \pi]$, удовлетворяющие условию (2).

Приведем еще один пример. Рассмотрим разбиение отрезка $[-\pi; \pi]$:

$$[-\pi; \pi] = [-\pi; a] \cup [a; b] \cup [b; \pi], \quad -\pi < a < b < \pi.$$

Пусть функции $\widetilde{v}_1(\cdot)$, $\widetilde{v}_2(\cdot)$ и $\widetilde{v}_3(\cdot)$ определены, вещественнозначны и непрерывны на отрезке $[-\pi; a]$, $[a; b]$ и $[b; \pi]$, соответственно, причем

$$\widetilde{v}_1(-\pi) = \widetilde{v}_1(a) = \widetilde{v}_2(a) = \widetilde{v}_2(b) = \widetilde{v}_3(b) = \widetilde{v}_3(\pi) = 0.$$

Тогда параметрами функции вида:

$$v_1(x) = \begin{cases} \widetilde{v}_1(x), & \text{если } x \in [-\pi; a]; \\ 0, & \text{если } x \in [a; \pi]; \end{cases}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} \widetilde{v}_2(x), & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi; a] \cup [b; \pi]; \end{cases}$$

$$v_3(x) = \begin{cases} \widetilde{v}_3(x), & \text{если } x \in [b; \pi]; \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi; b] \end{cases}$$

являются вещественнозначные, непрерывные, линейно независимые функции, определенные на отрезке $[-\pi;\pi]$, удовлетворяющие условию (2).

Так как функции $I_{kk}(\cdot)$, $k=1,2,3$ монотонно возрастают на интервале $(-\infty;m)$, существуют конечные или бесконечные интегралы

$$I_{kk}(m)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v_k^2(t)dt}{u(t)-m}.$$

Если выполнено условие (2) и $I_{kk}(m)=+\infty$ для некоторого $k\in\{1,2,3\}$, то для нижней границы числовой области значений модели Фридрихса H справедлива следующая оценка:

$$\min\mathcal{W}(H)\le\min\mathcal{W}(H_k)=E_k<m.$$

Приведем пример функций $u(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$, для которых выполнено условие $I_{22}(m)=+\infty$:

$$u(x)=1-\cos x,\quad v_2(x)=\begin{cases}\cos(x), & \text{если } x\in[-\pi/2;\pi/2];\\ 0, & \text{если } x\in[-\pi;-\pi/2]\cup[\pi/2;\pi].\end{cases}$$

Действительно, пусть $\delta\in(0;\pi/2)$. Тогда $m=0$ и существует число $C>0$ такое, что

$$1-\cos(x)\le Cx^2,\quad |\cos(x)|\ge\cos(\delta)$$

при всех $x\in(-\delta;\delta)$. Поэтому

$$I_{22}(m)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{v_2^2(t)dt}{u(t)-m}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^2(t)dt}{1-\cos(t)}\ge\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\cos^2(t)dt}{1-\cos(t)}\ge\frac{\cos^2(\delta)}{C}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{dt}{t^2}+\infty.$$

Полученные в данной работе утверждения о собственных значениях модели Фридрихса H важны при определении существенного спектра, а также при определении числа и расположения компонентов существенного спектра модельного оператора, соответствующего системе трех частиц на решетке.

Заключение. В данной работе рассматривается ограниченная и самосопряженная модель Фридрихса H с трехмерным возмущением, которая соответствует оператору энергии системы двух частиц на одномерной решетке. Сначала описаны существенный и дискретный спектры модели Фридрихса H, и определена его верхняя грань (которая обозначена через M). Показано, что во-первых, точка M является предельной точкой числовой области значений $\mathcal{W}(H)$ модели Фридрихса H, во-вторых, эта точка не принадлежит множеству $\mathcal{W}(H)$. Введены три вспомогательные модели Фридрихса H_k, $k=1,2,3$ с одномерными возмущениями, и установлена связь между их числовыми областями значений. Показано, что если параметры функции удовлетворяют определенному условию, то существует такой индекс $k\in\{1,2,3\}$, что $\mathcal{W}(H_k)=\mathcal{W}(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., 1918, V. 2, no. 1-2, P. 187–197.

2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., 1919, V. 3, no. 1, P. 314–316.

3. Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., 1929, V. 30, no. 1, P. 228–281.

4. Bahronov B.I., Rasulov T.H. On the Numerical Range of a Friedrichs Model with Rank Two Perturbation: Threshold Analysis Technique. AIP Conf. Proc., **2764** (2023), P. 030007-1–030007-10.

5. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **35**:2 (2014), С. 50–63.

6. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Structure of the numerical range of Friedrichs model: 1D case with rank two perturbation. Bulletin of the Institute of Mathematics, №4 (2020), P. 21–28.

7. Gustafson K., Rao D.K.M. Numerical range: The field of values of linear operators and matrices. Berlin, Springer, 1997, 205 p.

REZYUME

Ushbu maqolada bir o‘lchamli panjaradagi ikkita zarrachalar sistemasi energiya operatoriga mos H Fridrixs modeli qaralgan. Avval H Fridrixs modelining spektri tavsiflangan va uning yuqori chegari aniqlangan (uni M orqali belgilaymiz). M soni H Fridrixs modeli $\mathcal{W}(H)$ sonli tasvirining unga tegishli bo‘lmagan limitik nuqtasi ekanligi ko‘rsatilgan. Bir o'lchamli qo'zg'alishga ega uchta yordamchi H_k, $k = 1, 2, 3$ Fridrixs modellari keltirilgan hamda ularni sonli tasvirlari orasida munosabat o'rnatilgan. Agar parametr funksiyalar aniq shartni qanoatlantirsa, u holda shunday $k \in \{1, 2, 3\}$ indeks topilib, $\mathcal{W}(H_k) = \mathcal{W}(H)$ tenglik bajarilishi ko'rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Fridrixs modeli, energiya operatori, sonli tasvir, indeks, parametr funksiya, funksiya tashuvchisi, Lebeg o‘lchovi.

RESUME

In this paper the Friedrichs model H corresponding to the operator energy of a two-particle system on the one-dimensional lattice is considered. Firstly the spectrum of the Friedrichs model H is described and its upper bound is defined (we denote it by M). It is shown that the number M is a limit point of the numerical range $\mathcal{W}(H)$ of the Friedrichs model H that does not belong to it. Three auxiliary Friedrichs models H_k, $k = 1, 2, 3$ with rank one perturbations is introduced and relation between its numerical ranges are established. It is shown that if the parameter functions satisfy the exact condition, then there exists an index $k \in \{1, 2, 3\}$ such that the equality $\mathcal{W}(H_k) = \mathcal{W}(H)$ holds.

Key words: Friedrichs modeli, operator energy, numerical range, index, parameter function, support of the function, Lebesque measure.

УДК 517.98

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ *-АВТОМОРФИЗМЫ РАВНОМЕРНО ГИПЕРФИНИТНОГО AW*-ФАКТОРА ТИПА II_1

Чепухалин С. А.
Ташкентский университет информационных технологий
sergey_rights@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В статье, по аналогии с работой А.Конна, рассматриваются периодические *-автоморфизмы равномерно гиперфинитных конечных AW*-факторов. Получены аналоги некоторых результатов для равномерно гиперфинитного AW*-фактора типа II_1.

Ключевые слова: *-автоморфизмы, периодические *-автоморфизмы, сопряженность, внешняя сопряженность, UHF-алгебра.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно автоморфизмы операторных алгебр, в частности алгебр фон Неймана, играют важную роль в изучении структур этих алгебр. Например, по классическим работам А.Конна мы знаем, что классификация W*-алгебр типа III, с помощью понятия скрещенного произведения, была сведена к классификации W*-алгебр типа II и их *-автоморфизмов с точностью до внешней сопряженности. В связи с этим, в конце 70-х годов прошлого столетия, появилась серия работ по исследованиям *-автоморфизмов W*-алгебр. В частности, в работе [1] А.Конн получил полную классификацию периодических *-автоморфизмов гиперфинитного фактора типа II_1, а в работе [2] он получил полное описание классов внешней сопряженности *-автоморфизмов факторов.

Известно, что AW*-алгебры являются обобщением W*-алгебр (алгебр фон Неймана), и, естественно, возникает вопрос об обобщении результатов, полученных для W*-алгебр, на AW*-алгебры, что является весьма актуальным. К настоящему времени, AW*-алгебры изучены относительно неплохо, так как эти алгебры обладают достаточным количеством проекторов. Однако, *-автоморфизмы AW*-алгебр еще не изучены. В данной статье, по аналогии с работой А.Конна, мы рассматриваем периодические *-автоморфизмы равномерно гиперфинитных конечных AW*-факторов. Получены аналоги некоторых результатов для равномерно гиперфинитного AW*-фактора типа II_1.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. [3] *Пусть A – банахова *-алгебра над полем $\mathbb{C}$. Алгебра называется C^*-алгеброй, если $||aa^*|| = ||a||^2$ для любого $a \in A$.*

Определение 2. [4] *C^*-алгебра M называется W^*-алгеброй, если существует банахово пространство M_* такое, что $(M_*)^* = M$. При этом пространство M_* называется предсопряженным пространством для M.*

Пусть $M \subset B(H)$ – *-подалгебра. Подмножество

$$M' = \{a \in B(H) : ba = ab, \forall b \in M\}$$

называется коммутантом алгебры M. Легко видеть, что

$$M \subset M'' = M^{(iv)} = M^{(vi)} = \ldots \text{ и } M' = M''' = M^{(v)} = \ldots,$$

где $M'' = (M')'$. При этом, если $M = M''$, то M называется алгеброй фон Неймана. Вышеприведенные понятия связаны друг с другом теоремой о бикоммутанте Поэтому W*-алгебры получили также название алгебр фон Неймана.

Пусть A - кольцо и S – непустое подмножество A, обозначим

$$R(S) = \{x \in A | sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$$

и назовем $R(S)$ правым аннулятором S. Аналогично, $L(S) = \{x \in A | xs = 0$ для всех $s \in S\}$ обозначает левый аннулятор S.

Определение 3. [5] *Бэрово *-кольцо – это кольцо A такое, что для каждого непустого подмножества S из A, $R(S) = gA$ для подходящего проектора g. (Отсюда следует, что $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$ для подходящего проектора h). AW^*-алгебра – это C^*-алгебра, который является Бэровским *-кольцом.*

Пусть, $M \subset B(H)$ – W*-алгебра. Совокупность всех элементов M, коммутирующих со всеми элементами из M, называется центром алгебры M и обозначается как $Z(M)$. Легко видеть, что $Z(M) = M \cap M$'. Элементы $Z(M)$ называются центральными.

Определение 4. [4] *Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda \cdot \mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, называют фактором.*

Определение 5. [6] *Квазислед τ на A – это функция $\tau : A \to \mathbb{C}$, которая удовлетворяет:*

(i) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \geq 0$ для всех $x \in A$,

(ii) $\tau(a + ib) = \tau(a) + i\tau(b)$ для $a, b \in A_{SA}$,

(iii) τ линейна на каждой абелевой C^*-подалгебре B алгебры A,

(iv) Существует функция $\tau_2 : M_2(A) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая (i), (ii), (iii) такая, что

$$\tau(x) = \tau_2(x \otimes e_{11}), x \in A$$

Квазислед нормализован, если $\tau(1) = 1$, а множество нормализованных квазиследов на A обозначается через $QT(A)$.

Лемма 1.[6] *Пусть τ – квазислед на A, и пусть*

$$\| x \|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}, x \in A.$$

Тогда

(1) $\tau(a + b)^{1/2} \leq \tau(a)^{1/2} + \tau(b)^{1/2}, a, b \in A_+$.

(2) $\| x+y \|_2^{2/3} \leq \| x \|_2^{2/3} + \| y \|_2^{2/3}, x, y \in A.$

(3) $\| xy \|_2 \leq \| x \| \| y \|_2$ *и* $\| xy \|_2 \leq \| x \|_2 \| y \|, x, y \in A.$

Определение 6. [6] *Если τ – точный квазислед на A, то положим*

$$\tau(x,y) = \| x-y \|_2^{2/3}, x, y \in A.$$

По лемме 1, d_τ – метрика на A.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть N – *-алгебра с единицей. Линейное взаимно-однозначное отображение $\alpha : N \to N$ называется *-автоморфизмом, если

(i) $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$;

(ii) $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), (\forall x, y \in N)$.

Обозначим через $Aut(N)$ группу всех *-автоморфизмов.

Говорят, что два *-автоморфизма α и β сопряжены, если $\alpha = \theta\beta\theta^{-1}$ для некоторого *-автоморфизма θ и обозначаются $\alpha \sim \beta$.

Определение 7. [1] *Пусть N – AW*-фактор и $\alpha \in Aut(N)$. Если для некоторого натурального число $p \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\alpha^p = id$, т.е. в p-ой степени автоморфизм становиться тождественным, то *-автоморфизм α называется периодическим, а число p называется периодом α.*

Определение 8. [1] *$\alpha, \beta \in Aut(N)$ называются внешне сопряженными, если существует $\sigma \in Aut(N)$ такой, что β и $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ имеют один и тот же образ в $Out(N) = Aut(N)/Int(N)$, т.е. $\exists\, W$ – унитарный, такой, что $\beta = AdW \cdot \sigma\alpha\sigma^{-1}$.*

Предложение 1. *Пусть N – AW^*-фактор, α - *-автоморфизм алгебры N, такой что $\alpha^p = AdU$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и U - унитарного из N. Тогда существует $\gamma \in \mathbb{C}$ с $|\gamma| = 1$, такое что $\alpha(U) = \gamma U$.*

Доказательство. Пусть $x \in N$. Очевидно, что $x = \alpha(\alpha^{-p}(\alpha^{p-1}(x)))$, отсюда $x = \alpha(U^*(\alpha^{p-1}(x))U)$, т.е. $x = \alpha(U^*)\alpha^p(x)\alpha(U)$. Тогда $\alpha(U)x = \alpha^p(x)\alpha(U)$. Из $\alpha^p = AdU$ имеем $\alpha(U)x = UxU^*\alpha(U)$, следовательно получим $U^*\alpha(U)x = xU^*\alpha(U)$.

Таким образом, элемент $U^*\alpha(U)$ коммутирует с произвольным элементом x, а значит элемент $U^*\alpha(U)$ лежит в центре алгебры, т.е. $U^*\alpha(U) \in Z(N)$. Так как N – AW*-фактор, то центр $Z(N)$ – тривиален, т.е. $Z(N) = \{\lambda \cdot \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C}\}$, следовательно, $\exists \gamma \in \mathbb{C}$ с $\gamma = U^*\alpha(U)$, т. е. $\alpha(U) = \gamma U$.

Далее докажем, что $|\gamma| = 1$. Имеем что $\alpha^p = AdU$ то есть $\alpha^p(x) = UxU$, и $\alpha(U) = \gamma U$, тогда

$$\alpha^{p+1} = \alpha\alpha^p(x) = \alpha(U)\alpha(x)\alpha(U^*) = \gamma U\alpha(x)\overline{\gamma}U^* = |\gamma|^2 U\alpha(x)U^*$$

С другой стороны $\alpha^p\alpha(x) = U\alpha(x)U^*$, значит $|\gamma|^2 U\alpha(x)U^* = U\alpha(x)U^*$ перенесем U и U^* из правой части равенства в левую $|\gamma|^2 U^*U\alpha(x)U^*U = \alpha(x)$, так как U – унитарный, то есть $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$ имеем $|\gamma|^2\alpha(x) = \alpha(x)$, следовательно $|\gamma|^2 = 1$, отсюда $|\gamma| = 1$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть N – AW^*-фактор. Если периодические *-автоморфизмы α и β – внешне сопряжены, то, числа p_0 и γ, называемые их внешними инвариантами, совпадают, т.е. $p_0(\alpha) = p_0(\beta), \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.*

Доказательство. Первое равенство $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$ – очевидно, и пусть $p_0 = p_0(\alpha) = p_0(\beta)$.

Для доказательства второго равенства, из вышесказанного, мы можем предположить, что $\beta = AdW \cdot \alpha$, для некоторого унитарного W, так как по условию, *-автоморфизмы α и β – внешне сопряжены. Пусть $\alpha^{p_0(\alpha)} = AdU$, $\alpha(U) = \gamma(\alpha)U$. Тогда мы имеем $\beta^{p_0} = Ad(W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)U)$. Обозначим: $V = W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)U$. Тогда $\beta^{p_0} = AdV$, и

$$\beta(W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)UWU^*\alpha(U)W^*.$$

Так как $\alpha(U) = \gamma(\alpha)U$, то

$$\beta(V) = \beta(W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W)...\alpha^{p-1}(W)U\gamma = \gamma(\alpha)V.$$

Из $\beta^{p_0} = AdV$ имеем $\beta(V) = \gamma(\beta)V$. Отсюда $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Теорема доказана.

Пусть $\alpha = AdU$ – периодический внутренний *-автоморфизм с периодом p. Тогда, очевидно, что $U^p = \lambda_0 \mathbb{1}$, λ_0 – некоторое число. Из этого следует, что U есть конечная линейная комбинация спектральных проекторов, т.е. $U = \sum_{j=1}^{p} a_j e_j$, где e_j – спектральный проектор унитарного U, соответствующий a_j. Определим внутренний инвариант $\varepsilon(\alpha)$ автоморфизма α. Это вероятностная мера $\sum \tau(e_j)\varepsilon_{a_j}$, которая определяется с точностью до поворота на $T = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, где ε_{a_j} – мера, сосредоточенная на a_j, то есть

$$\varepsilon_{a_j}(E) = \begin{cases} 1 & \text{если } a_j \in E \\ 0 & \text{если } a_j \notin E. \end{cases}$$

Тогда два внутренних автоморфизма α и β сопряжены тогда и только тогда, когда $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$ и все их вероятностные меры на T, которые имеют носитель, содержащийся в p-ых корнях некоторого $\lambda_0 \in T$, возникают как $\varepsilon(\alpha)$.

Теорема 2. *Пусть $\beta = AdV$, $\beta^p = id$. Тогда $V = \sum_{j=1}^{p} b_j f_j$. Положим $\varepsilon(\beta) = \sum_{j=1}^{p} \tau(f_j)\varepsilon_{b_j}$. Тогда $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$, т.е. $AdU \sim AdV$. Тогда существует автоморфизм θ такой что $\alpha(x) = \theta \circ \beta \circ \theta^{-1}(x)$. Отсюда $UxU^* = \theta(V\theta^{-1}(x)V^*) = \theta(V)x\theta(V^*)$. Тогда $\theta(V^*)Ux(\theta(V^*)U)^* = x$ и, следовательно для $W = \theta(V^*)U$ имеем $WxW^* = x$. Отсюда $xW = Wx$, т.е. $W \in Z(M)$. Так как M – фактор, то $W = \overline{\lambda}\mathbf{1}$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, т.е. $\theta(V^*)U = \overline{\lambda}\mathbf{1}$. Отсюда $\theta(V) = \lambda U$, и следовательно $\lambda \sum a_i e_i = \sum b_j \theta(f_j)$. Тогда $e_i = \theta(f_j)$, и отсюда имеем $e_i \sim f_j$. Тогда существует частичная изометрия v_i такая, что $e_i = v_i^* v_i$ и $f_i = v_i v_i^*$. По определению квазиследа имеем $\tau(e_i) = \tau(v_i^* v_i) = \tau(v_i v_i^*) = \tau(f_j)$, $\forall i$. Отсюда получаем $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$. Следуя обратным импликациям получим обратное утверждение. Теорема доказана.

Определение 9. [7] *UHF-алгебра (Uniformly hyperfinite algebra) – это C*-алгебра A с единицей, для которой существует последовательность $A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A$ *-подалгебр, содержащих единицу, такая, что*

- *каждая A_k *-изоморфна матричной алгебре $M_{m_k}(\mathbb{C})$;*
- *$A = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k}$.*

В силу [8, Proposition 2.2.7] всякая UHF-алгебра обладает единственным каноническим следом τ.

Далее, пусть в дальнейшем, A – UHF-алгебра с единственным каноническим следом τ. Для $p = 1$, пусть s_1^1 – тождественный автоморфизм алгебры A. Пусть $p \neq 1$. Представим A в виде бесконечного тензорного произведения $(F_p,\ tr_p)$, где F_p – алгебра всех комплексных $p \times p$-матриц, с матричной единицей $(e_{i,j})_{i,j=1,\dots,p}$ и tr_p – канонический след на F_p.

Для $q \in \mathbb{N}$, пусть π_q – канонический изоморфизм алгебры F_p на подфактор $F_p^q \subset A$, такой что

$$\pi_q(x) = \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \otimes x \otimes \mathbb{1} \dots$$

Пусть $e_{ij}^q = \pi_q(e_{ij})$ и θ – сдвиг: $\theta\pi_q(x) = \pi_{q+1}(x), x \in F_p$. Тогда сдвиг θ – изоморфизм из A на относительный коммутант $\left(F_p^1\right)' \cap A$.

Пусть $\gamma \in \mathbb{C},\ \gamma^p = 1$ и $U_\gamma \in F_p^1$ унитарный, определенный как

$$U_\gamma = \sum_{j=1}^{p} \gamma^j e_{jj}^1.$$

Унитарный $v_\gamma \in \overline{(F_p^1 \cup F_p^2)}^\tau$ определим как: $v_\gamma = e_{p1}^1 \theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1$. Здесь замыкание $\overline{}^\tau$ означает обычное замыкание по следовой норме $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$.

В следующей теореме заодно определим автоморфизм s_p^γ алгебры A.

Теорема 3. *Пусть A – UHF AW^*-фактор типа II_1 с единственным каноническим следом τ. Пусть даны числа p и γ как выше. Тогда, верны, следующие утверждения.*

(a) *последовательность внутренних *-автоморфизмов, определяемая как*

$$\alpha_n = Ad(v_\gamma\theta(v_\gamma)\theta^2(v_\gamma)\theta^3(v_\gamma)\dots\theta^n(v_\gamma))$$

*сходится, поточечно сильно, к некоторому *-автоморфизму A, обозначаемое как s_p^γ.*

(b) *p-тая степень $(s_p^\gamma)^p$ *-автоморфизма s_p^γ равна AdU_γ и $s_p^\gamma(U_\gamma) = \gamma U_\gamma$.*

(c) *внешние инварианты *-автоморфизма s_p^γ равны паре (p, γ), а его внутренний инвариант ε_1.*

Доказательство. (a) Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть $x \in F_p^{(1,m)} = \overline{(\bigcup_1^m F_p^q)}^\tau$.

Тогда при $n \geq m$ мы имеем $[\theta^n(v), x] = 0$ для любого $v \in R$. Отсюда следует, что

$$\alpha_n(x) = Ad(v_\gamma\theta(v_\gamma)\dots\theta^{m-1}(v_\gamma))(x) = \alpha_{m-1}(x).$$

Таким образом, последовательность $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ постоянна для $n \geq m$. Для каждого n, отображение α_n является изометрией в $\|.\|_2$ норме на A. Тогда из сильной плотности подалгебры $\bigcup_{m=1}^\infty F_p^{(1,m)}$ в A существует гомоморфизм $s_p^\gamma : A \to A$ такой что

$$s_p^\gamma(x) = lim_{n\to\infty}\alpha_n(x),\ x \in A, \qquad \alpha_n = Ad(v_\gamma\theta(v_\gamma)\dots\theta^n(v_\gamma))$$

Докажем теперь $(s_p^\gamma)^p = AdU_\gamma$. Это означает, что s_p^γ – сюръективен и является *-автоморфизмом на A.

(b) Используя равенство $s_p^\gamma(U_\gamma) = \alpha_0(U_\gamma)$ получим

$$s_p^\gamma(U_\gamma) = Adv_\gamma(U_\gamma) = Ad(\sum_{j=1}^{p} e_{j,j+1})(U_\gamma) =$$

$$= (\sum_{j=1}^{p} e_{j,j+1})(\sum_{k=1}^{p} \gamma^k e_{kk})(\sum_{i=1}^{p} e_{i+1,i}) = \sum_{j=1}^{p} \gamma^{j+1} e_{j,j} = \gamma U_\gamma$$

Завершим доказательство (b), показав индукцией по m, следующее утверждение:

$$(s_p^\gamma)^p(x) = U_\gamma x U_\gamma^*, \qquad \forall \gamma \in \mathbb{C},\ \gamma^p = 1,\ x \in F_p^{(1,m)} \tag{25}$$

Предположим, что утверждение верно для m, и докажем его для $m+1$, причем справедливость утверждение для $m = 1$ следует из этого вычисления.

Для $x \in A$, положим

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} Ad(\theta(v_\gamma)\theta^2(v_\gamma)\dots\theta^n(v_\gamma))(x)$$

Тогда, как сказано выше, β является гомоморфизмом A в A, который поточечно инвариантен в F_p^1 и удовлетворяет равенству:

$$\beta(\theta(x)) = \theta(s_p^\gamma(x)), x \in A \tag{26}$$

Берем $x \in F_p^{(1,m+1)}$, $x = \sum_{i,j} e_{ij}^1 \theta(x_{ij})$, где $x_{ij} \in F_p^{(1,m)}$. Из (26) и индукционному предположению мы заключаем что:

$$\beta^p\theta(x_{ij}) = \theta((s_p^\gamma)^p(x_{ij})) = \theta(U_\gamma)\theta(x_{ij})\theta(U_\gamma)^* \qquad i,j = 1,\dots,p$$

и отсюда используя равенство $\beta^p(e_{ij}^1) = e_{ij}^1$, для $i,j = 1,\dots,p$ получим

$$\beta^p(x) = \theta(U_\gamma)x\theta(U_\gamma)^* \tag{27}$$

Однако мы имеем $s_p^\gamma = Adv_\gamma \cdot \beta$. Отсюда (26) следует из равенства

$$v_\gamma\beta(v_\gamma)\dots\beta^{p-1}(v_\gamma) = U_\gamma\theta(U_\gamma^*) \tag{28}$$

Для доказательства (28), мы просто должны использовать равенство

$$\beta\theta(U_\gamma) = \theta(s_p^\gamma(U_\gamma))\theta(\gamma U_\gamma)$$

так что мы имеем:

$$\beta^k\theta(U_\gamma^*) = \gamma^{-k}\theta(U_\gamma^*)$$

Отсюда

$$\beta^k(v_\gamma) = \gamma^{-k} e_{p1}^1 \theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1$$

Тогда

$$v_\gamma(\beta^p(v_\gamma)\dots\beta^{-1}(v_\gamma) = \sum \gamma^j e_{jj}^1\theta(U_\gamma^*) = U_\gamma\theta(U_\gamma^*).$$

(c). Чтобы доказать утверждение, просто надо доказать, что s_p^γ является внешним для всех чисел $q \in \{1,...,p-1\}$. Для этого, отметим, что v_γ коммутирует с $\theta^j(U_{\gamma'})$ для $j \le 0, \gamma'^p = 1$. Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$v_{\gamma''}U_{\gamma'}v_{\gamma''}^* = \gamma' U_{\gamma'}$$

поэтому имеем

$$s_p^{\gamma}(\theta^n(U_{\gamma'})) = \gamma'\theta^n(U_{\gamma'}), \forall n \in A, \forall \gamma', \gamma'^p = 1$$

Это показывает, что для $q \in \{1, ..., p-1\}$ имеем

$$\|(s_p^{\gamma})^q\theta^n(U_{\gamma'}) - \theta^n(U_{\gamma'})\|_2 = |\gamma'^q - 1|$$

Действительно, используя определение d_τ-метрику:

$$||x||_2 = \tau(xx^*)^{1/2}$$

непосредственно получим:

$$\begin{aligned} ||(s_p^{\gamma})^q\theta^n(U_{\gamma'}) - \theta^n(U_{\gamma'})||_2 &= ||(\gamma'^q - 1)\theta^n(U_{\gamma'})||_2 = \\ &= |\gamma'^q - 1|(\theta^n(U_{\gamma'})\theta^n(U_{\gamma'})^*)^{1/2} = |\gamma'^q - 1|(\theta^n(U_{\gamma'}U_{\gamma'}^*)^{1/2} = \\ &= |\gamma'^q - 1|(\theta^n(\mathbb{1}))^{1/2} = \\ &= |\gamma'^q - 1|, \end{aligned}$$

следовательно, *-автоморфизм $(s_p^{\gamma})^q$ не может быть внутренним, так как последовательность

$$(\theta^n(U_{\gamma'}))_{n\in\mathbb{N}}$$

является центральной последовательностью в A. Теорема доказана.

Теперь мы можем сформулировать важное следствие теорем 1,2 и 3.

Следствие 1. *Пусть A – UHF AW^*-фактор типа II_1 с единственным каноническим следом τ. Пусть $p \in N, \gamma \in \mathbb{C}$ с $\gamma^p = 1$ и пусть ε – вероятностная мера на T с $support(\varepsilon) \subset \{n$-тые корни $\lambda_0\}$, для некоторого $\lambda_0 \in T$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует некоторый периодический *-автоморфизм α с инвариантами $p_0(\alpha) = p, \gamma(\alpha) = \gamma, \varepsilon(\alpha) = \varepsilon$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Connes A. Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II$_1$. Acta Sci. 1977. Math. N39, 39-66.

2. Connes A. Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 8, 1975, 383-420.

3. Ж. Диксмье "C*-алгебры и их представления перевод с фр. А. И. Штерна, под ред. А. А. Кириллова, М."Наука 1974 г., 400 стр.

4. Takesaki M. Theory of Operator Algebras. I, Springer-Verlag. - 1979. VIII. - 415p.

5. Berberian, Sterling K., Baer *-rings, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972, 2nd printing 2011, Vol. 195, e-ISBN 978-3-642-15071-5, p.301.

6. U. Haagerup, Quasitraces on exact C*-algebras are traces, arXiv: 1403.7653v1 [math.OA] 29 Mar (2014)

7. Ch. Hawthorne, UHF algebras by an example, April (2019)

8. J. P. G. do Carmo Paulos, The hiperfinite II_1 factor and Commes Embedding conjecture, Tecnico Lisboa, June 2015.

REZYUME

Ushbu maqolada A.Konn ishiga o'xshah holda, tekis giperfinit chekli AW*-faktorlarning davriy *-avtomorfizmlari ko'rilgan. II_1-tipidagi tekis giperfinit AW*-faktor uchun ba'zi natijalar olingan.

Kalit so'zlar: *-avtomorfizmlar, davriy *-avtomorfizmlar, qo'shmalik, tashqi qo'shmalik, UHF-algebra.

RESUME

In paper, by analogy with the work of A.Connes, periodic *-automorphisms of uniformly hyperfinite finite AW*-factors are consider. Analogues of some results for a uniformly hyperfinite AW*-factor of type II_1 are obtained.

Key words: *-automorphisms, periodic *-automorphisms, conjugacy, outer conjugacy, UHF-algebra.