



O'ZMU XABARLARI

ВЕСТНИК НУУЗ

АКТА NUUZ

**MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI**

**JURNAL 1997
YILDAN
CHIQA
BOSHLAGAN**

**2025
2/1/1
Aniq
fanlar**

Bosh muharrir:

MADJIDOV I. U. – t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

ERGASHOV Y. S. – f.-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

Ayupov Sh. A.	– f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi
Alimov Sh. A.	– f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi
<u>Sadullayev A.</u>	– f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi
Roziqov O'. A.	– f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi
Aripov M. M.	– f.-m.f.d., prof.
Zikirov O. S.	– f.-m.f.d., prof.
Abdushukurov A.A.	– f.-m.f.d., prof.
Aloyev R. J.	– f.-m.f.d., prof.
Ganixodjayev R. N.	– f.-m.f.d., prof.
Narmonov A. Y.	– f.-m.f.d., prof.
Raximov A. A.	– f.-m.f.d., prof.
Beshimov R. B.	– f.-m.f.d., prof.
Shoimqulov B. A.	– f.-m.f.d., prof.
Axmedov A.B.	– f.-m.f.d. prof.
Sharipov O.Sh.	– f.-m.f.d., prof.
Mamadaliyev N.A.	– f.-m.f.d., prof.
Xudoyberdiyev A.X.	– f.-m.f.d., prof.
Xudoyberganov G.	– f.-m.f.d., prof.
Matyakubov A. S.	– f.-m.f.d., prof.

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) dots. **G'aybullayev R.Q.**

TOSHKENT – 2025

◇ MUNDARIJA ◇ CONTENTS ◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇

Abdukaxorova Z. T. H_{A_2} -weakly periodic p -adic generalized gibbs measures for the ising model with an external field on the cayley tree of order two	3
Akhmedova Q., Yusupova Sh., Mirzoodilov J. Qashqadaryo turizmining turg'un rivojlanishida graflar nazariyasining qo'llanilishi	13
Buvayev Q. T., Davirova G. N. Furrye qatorlarining elliptik qisman yig'indilar ketma-ketligi uchun umumlashgan lokalizatsiya masalasi	19
Dusmatov O. M., Xodjabekov M. U., Kasimova F. U. Nomukammal elastik sterjenning chiziqlimas tebranishlari ustuvorligi	31
Gaybullaev R. K., Solijanov G. O., Usmonov J. B. 2D moore ca with new boundary conditions and its reversibility	39
Ibragimov H. H. Pifagor uchligining fraktal xossalari	50
Khusanbaev Ya. M., Toshkulov X. A. On the asymptotic of branching reduced processes ...	59
Lakaev Sh. S., Aktamova V. U. On the point spectrum of the Schrodinger operator for a system consisting of two identical infinitely heavy bosons and one light fermion on the three-dimensional lattice	66
Matanov M. Ch. Harmonic fundamental solutions and boundary integral equations for wave propagation in elastic, scalar and poroelastic media	80
Mukhamadiev F. G., Meyliev Sh. U. Some homotopy properties of n -fold symmetric product of the space X	88
Normatov E. P., Elboyev K. E. $\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki va uch o'lchamli evolyutsion algebralarning tasnifi	92
Ruzieva D. S. Strong law of large numbers for Banach space-valued random fields with weights	106
Safarov U. A. Some remark on the invariant measure of circle maps with break points	111
Sharipov O. Sh., Kobilov U. X. On stable type p Banach spaces	115
Sharipov O. Sh., Kushmurodov A. A. Strong law of large numbers for dependent random variables with values in Rademacher type p Banach spaces	120
Zhabborov N. M., Tuychiyev S. G., Eshdavlatova S. E. Estimating the unemployment rate using mathematical modeling	125
Ахмедов А. Б., Ибрагимова Н.И. Теория равновесия пластин в напряжениях	132
Давлатбеков А. А., Собирова М. Р. О нормальных формах и некоторых свойствах линейных квазигрупп и квазигрупп смешанного типа первого (второго) рода	142
Зупаров Т.М., Жовлиев А.И. Центральная предельная теорема и оценка остаточного члена в центральной предельной теореме (ц.п.т) для линейных процессов	147
Касимов Ш. Г., Коцанов А. П. Об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи для уравнения высокого порядка с дробной производной в смысле Миллера - Росса в классах Соболева	155
Мадрахимов Р. М., Омонов О. И. Свойства M -субгармонических функций	165
Мамадалиев Н. А., Васиева Х. Г. Управление пучками траекторий в квазилинейных дифференциально-разностных играх нейтрального типа	170
Мустапокулов Х. Я. Задачи преследования-убегания для дифференциальных игр второго порядка с импульсным управлением	178
Рахимов А. М., Имомназаров Б. Х., Искандаров И. К. Задача коши для динамической системы пороупругости описываемой неоднородными уравнениями с тремя параметрами упругости	185
Рахмонов Ф. Д., Холтураев Ф. С. Смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люк высокого порядка с вырожденным ядром	191
Рахмонов Ш. М. Геометрия многообразия Грассмана	200
Садуллаев А., Шарипов Р. Оценка гессианов ограниченных m -выпуклых функций	206
Файзиев А. А. Статистический анализ и прогнозирование динамики заготовленного хлопка Сирдарьинской области в Республике Узбекистан	213

UDC 517.55

H_{A_2} -WEAKLY PERIODIC p -ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURES FOR THE ISING MODEL WITH AN EXTERNAL FIELD ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO

ABDUKAXOROVA Z. T.

NAMANGAN STATE UNIVERSITY, NAMANGAN
zulxumorabdukaxorova@gmail.ru

RESUME

In this work, we study H_{A_2} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the Ising model with an external field on the Cayley tree of order two. In the case $|A| = 2$, we prove that at least one unbounded measure of this kind exists for the model. Moreover, we demonstrate that for any odd prime p , a phase transition occurs in the considered model.

Key words: p -adic number, Gibbs measure, Cayley tree, p -adic Ising model with an external field, H_{A_2} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure, phase transition.

Introduction

It is widely known that the set of Gibbs measures of a given model is the primary focus of research in classical (rigorous) statistical mechanics based on the measure-theoretical scheme [1]. Such a method relies on Kolmogorov's probability theory axioms [2]. p -adic probability, on the other hand, represents a distinct probability-like structure that has recently emerged in theoretical physics [4,5]. These probabilities naturally arise in p -adic physical models, such as the p -adic string proposed by Volovich [22].

This paper investigates weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the p -adic Ising model with an external field on a Cayley tree. This model is known to have wide-ranging applications in various fields of applied and theoretical sciences. However, this study uniquely focuses on the phase transition within weakly periodic (in particular, non-periodic) p -adic generalized Gibbs measures, an area that has not been previously explored. The existence of a phase transition in models on hierarchical trees is commonly analyzed using the renormalization group (RG) technique, which involves constructing hierarchical lattices and models governed by p -adic rational functions. For the p -adic Ising and Potts models, it has been shown in [8, 9, 11-13] that a significant relationship exists between the phase transition and the chaotic behavior of the RG transformation.

In this paper, we study weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures (associated with normal subgroups of index two, specifically when $|A| = 2$) of the Ising model with an external field on the Cayley tree of order two. Furthermore, we prove the existence of a phase transition for the model.

Preliminaries p -adic Numbers and p -adic Measure

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. For a fixed prime number p , any nonzero rational number $x \in \mathbb{Q}$ can be represented in the form

$$x = p^r \frac{n}{m},$$

where $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, and both n and m are integers not divisible by p . The p -adic norm of x is defined as

$$|x|_p = p^{-r}.$$

Additionally, the p -adic norm of zero is defined by

$$|0|_p = 0.$$

This norm is *non-Archimedean*, i.e., it satisfies the *strong triangle inequality*:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}, \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{Q}.$$

The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p -adic norm yields the p -adic number field, denoted by $\mathbb{Q}_p$.

Every nonzero element $x \in \mathbb{Q}_p$ has a unique canonical representation of the form:

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \cdots),$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the digits $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, with $x_0 \neq 0$. In this case, the p -adic norm is given by

$$|x|_p = p^{-\gamma(x)}.$$

For $a \in \mathbb{Q}_p$ and $r > 0$, define the open p -adic ball as

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

The p -adic exponential is also defined by

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

which converges for $x \in B(0, \frac{1}{2})$ if $p = 2$, and for $x \in B(0, 1)$ if $p \neq 2$.

Lemma 1 ([7,21]). Let $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Then the following equalities hold:

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p < 1.$$

In [14], the authors introduced a new symbol " o " to facilitate the computation of p -adic norms. This symbol generalizes the notation $\equiv \pmod{p^k}$, without explicitly referencing the exponent k . Let us recall the main idea behind this notation. Given a p -adic number x , the expression $o[x]$ denotes a p -adic number with norm strictly less than $p^{-\gamma(x)}$, i.e.,

$$|o(x)|_p < |x|_p.$$

Example. If $x = 1 - p + p^2$, then one can write $o[1] = x - 1$ or $o[p] = x - 1 + p$. Thus, the symbol $o[\cdot]$ provides a convenient tool to simplify calculations involving p -adic numbers.

Define the following subset of $\mathbb{Q}_p$

$$\mathcal{E}_p = \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\right\}.$$

We recall the definitions of p -adic integers and units:

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}, \quad \mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}.$$

The following result is a classical and widely used statement, known as Hensel's Lemma:

Lemma 2 (Hensel's Lemma [21]). Let $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ be a polynomial with coefficients in $\mathbb{Z}_p$. Let $f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1}$ denote its derivative. Suppose $a \in \mathbb{Z}_p$ satisfies the conditions

$$f(a) \equiv 0 \pmod{p}, \quad f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Then there exists a unique root $x \in \mathbb{Z}_p$ of $f(x)$ such that

$$x \equiv a \pmod{p}.$$

A more detailed exposition of p -adic analysis and its applications in mathematical physics can be found in [20,21].

Let $(X, \mathcal{B})$ be a measurable space, where $\mathcal{B}$ is an algebra of subsets of X . A function $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ is called a *p-adic measure* if for any finite collection $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ of pairwise disjoint sets, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ for $i \neq j$, the following additivity condition holds:

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

A *p*-adic measure μ is called a *probability measure* if $\mu(X) = 1$. One important property is *boundedness*: a *p*-adic measure μ is said to be bounded if

$$\sup\{|\mu(A)|_p : A \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

It is worth noting that *p*-adic probability measures are not necessarily bounded in general.

For more detailed information on *p*-adic measures, we refer the reader to [6,20].

Cayley Tree

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree in which each vertex is connected to exactly $k+1$ neighbors. A more detailed description of the Cayley tree Γ^k can be found in [19].

Fix a vertex $x_0 \in \Gamma^k$. Define the following sets (see [19]):

$$W_n = \{x \in V : d(x, x_0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m, \quad L_n = \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\},$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in V_n,$$

$$S_1(x) = \{y \in V : d(x, y) = 1\}, \quad x_{\downarrow} = S_1(x) \setminus S(x).$$

p-adic Gibbs measures for the Ising model with an external field

We consider the Ising model with an external field on the Cayley tree. Let $\Phi = \{-1, 1\}$. A configuration σ on $A \subset V$ is defined by the function $x \in A \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations on A is denoted by $\Omega_A = \Phi^A$, and $\Omega_V := \Omega$.

A *p*-adic Hamiltonian in V_n , i.e., a function $H_n : \Omega_{V_n} \rightarrow \mathbb{Q}_p$, for the Ising model with an external field is given by

$$H_n(\sigma_n) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V_n} \sigma(x), \quad (1)$$

where $J, \alpha \in B(0, p^{-1/(p-1)}) \setminus \{0\}$.

We define a function $\hat{h} : x \in V \rightarrow \hat{h}_x \in \mathbb{Q}_p$, and consider *p*-adic probability measure $\mu_{\hat{h}}^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_{\hat{h}}^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n^{(\hat{h})}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} \hat{h}_x^{\varphi(x)} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

where $Z_n^{(\hat{h})}$ is the normalizing constant

$$Z_n^{(\hat{h})} = \sum_{\sigma_n(x) \in \Omega_{V_n}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} \hat{h}_x^{\varphi(x)}. \quad (3)$$

A *p*-adic probability measure $\mu_{\hat{h}}^{(n)}$ is said to be computable if for all $n \in \mathbb{N}$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}} \mu_{\hat{h}}^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)}) = \mu_{\hat{h}}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (4)$$

In this case, by the p -adic analogue of the Kolmogorov theorem [15], there exists a unique splitting p -adic measure $\mu_{\hat{h}}$ on the set Ω such that $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$. Such a limiting p -adic measure generated by (2) is called a p -adic generalized Gibbs measure. We note that if $\hat{h}_x \in \mathcal{E}_p$ for all $x \in V$, then the corresponding measure is called a p -adic Gibbs measure (see [8,13]). Clearly, every p -adic Gibbs measure is a p -adic generalized Gibbs measure; however, there exist p -adic generalized Gibbs measures which are not p -adic Gibbs measures.

If there exist at least two distinct p -adic Gibbs measures, one of which is bounded and the other unbounded, then a *phase transition* is said to occur. Furthermore, a *quasi phase transition* is said to occur if there exist two different functions $\mathbf{s}$ and $\mathbf{h}$ such that the corresponding measures $\mu_{\mathbf{s}}$ and $\mu_{\mathbf{h}}$ exist and are either both bounded or both unbounded (see [10]).

The following statement describes the condition on h guaranteeing compatibility of the sequence of probability distributions $\{\mu_h^{(n)}\}_{n \geq 1}$.

Theorem 1. [16] *The sequence of p -adic probability distributions $\{\mu_h^{(n)}\}_{n \geq 1}$, determined by formula (2), is consistent if and only if for any $x \in V \setminus \{x_0\}$, the following equation holds:*

$$\hat{h}_x = \eta^{k+1} \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta \hat{h}_y + 1}{\hat{h}_y + \theta}, \quad (5)$$

where $\theta = \exp_p(2J)$, $\eta = \exp_p\left(\frac{2\alpha}{k+1}\right)$, and $\hat{h}_x = \eta \cdot \exp_p(2h_x)$.

Note that, based on this theorem, the task of characterizing p -adic Gibbs measures is simplified to finding the solutions of the functional equation (5).

H_A -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure

Let G_k^* be a normal subgroup with index $r \geq 1$ of the group G_k and $G_k/G_k^* = \{H_0, H_1, \dots, H_{r-1}\}$ be a quotient group (see [19]).

Definition 1. A set $h = \{h_x, x \in G_k\}$ of quantities is called G_k^* -periodic if $h_x = h_i$, for all $x \in H_i$. A G_k^* -periodic function is called translation-invariant.

Definition 2. A set of quantities $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called G_k^* -weakly periodic if $h_x = h_{ij}$, for any $x \in H_i$ and $x_{\downarrow} \in H_j$.

Definition 3. A p -adic generalized Gibbs measure μ_h is said to be G_k^* -(weakly) periodic if it corresponds to a G_k^* -(weakly) periodic h . A G_k -periodic p -adic generalized Gibbs measure is called a translation-invariant p -adic generalized Gibbs measure.

Note that any normal divisor of index two of the group G_k has the following form

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is an even number}\},$$

where $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x \in G_k$. The subgroup H_A is a normal subgroup of the group G_k (see [19]). It can be verified that the form of a weakly periodic Gibbs measure depends on the choice of the normal subgroup H_A of G_k . Note that when $|A| = k+1$, i.e., $A = N_k$, the notion of weakly periodicity coincides with that of the usual periodicity (here, $|A|$ denotes the cardinality of the set A). Therefore, we restrict our attention to the case where $A \subset N_k$ and $A \neq N_k$. Under this condition, an H_A -weakly periodic collection $\{h_x\}_{x \in G_k}$ takes the following form:

$$h_x = \begin{cases} h_{00}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ h_{01}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ h_{10}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ h_{11}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \end{cases} \quad (6)$$

i.e., $G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$, where $H_0 = H_A$ and $H_1 = G_k \setminus H_A$.

In [16], translation-invariant and $G_2^{(2)}$ -periodic p -adic generalized Gibbs measures for the Ising model with an external field on the Cayley tree were studied. It was shown that if $p \equiv 1 \pmod{4}$, then there exist three translation-invariant and two non-translation-invariant (i.e., $G_2^{(2)}$ -periodic) p -adic generalized Gibbs measures. In contrast, if $p \equiv 3 \pmod{4}$ with $p \neq 3$, then there exists a unique translation-invariant p -adic generalized Gibbs measure. In [17], we considered H_A -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the case $|A| = 1$, i.e., the normal subgroup of index two in the group G_k was of the following form:

$$H_{A_1} = \{x \in G_k : \omega_x(a_i) \equiv 0 \pmod{2}\}, i \in \{1, 2, 3\}$$

that is, the number of occurrences of the letter a_i in the word x is even.

In the present paper, we aim to investigate H_{A_2} -weakly periodic (in particular, non-periodic) p -adic generalized Gibbs measures for the Ising model with an external field on the Cayley tree of order two, specifically focusing on the case $|A| = 2$. In this case, the normal subgroup of index two in the group G_k is given by:

$$H_{A_2} = \{x \in G_k : (\omega_x(a_i) + \omega_x(a_j)) \equiv 0 \pmod{2}\}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j,$$

that is, the total number of letters a_i and a_j in the word x is even. By (5), we have

$$\begin{cases} \hat{h}_{00} = \eta^3 \left(\frac{\theta \hat{h}_{10} + 1}{\hat{h}_{10} + \theta} \right)^2, \\ \hat{h}_{01} = \eta^3 \frac{\theta \hat{h}_{00} + 1}{\hat{h}_{00} + \theta} \cdot \frac{\theta \hat{h}_{01} + 1}{\hat{h}_{01} + \theta}, \\ \hat{h}_{10} = \eta^3 \frac{\theta \hat{h}_{11} + 1}{\hat{h}_{11} + \theta} \cdot \frac{\theta \hat{h}_{10} + 1}{\hat{h}_{10} + \theta}, \\ \hat{h}_{11} = \eta^3 \left(\frac{\theta \hat{h}_{01} + 1}{\hat{h}_{01} + \theta} \right)^2. \end{cases} \quad (7)$$

It is easy to verify that the following sets are invariant under the mapping W , which is defined by the right-hand side of equation (7):

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(\hat{h}_{00}, \hat{h}_{01}, \hat{h}_{10}, \hat{h}_{11}) \in \mathbb{Q}_p^4 : \hat{h}_{00} = \hat{h}_{01} = \hat{h}_{10} = \hat{h}_{11}\}, \\ I_2 &= \{(\hat{h}_{00}, \hat{h}_{01}, \hat{h}_{10}, \hat{h}_{11}) \in \mathbb{Q}_p^4 : \hat{h}_{00} = \hat{h}_{11}, \hat{h}_{01} = \hat{h}_{10}\}. \end{aligned}$$

On the set I_1 , the solutions of equation (7) coincide with the translation-invariant solutions which are studied in [16].

On the set I_2 , the system of equations (7) can be rewritten as follows:

$$\begin{cases} \hat{h}_{00} = \eta^3 \left(\frac{\theta \hat{h}_{01} + 1}{\hat{h}_{01} + \theta} \right)^2, \\ \hat{h}_{01} = \eta^3 \frac{\theta \hat{h}_{00} + 1}{\hat{h}_{00} + \theta} \cdot \frac{\theta \hat{h}_{01} + 1}{\hat{h}_{01} + \theta}. \end{cases} \quad (8)$$

The system of equations, is similar to (8), was studied in [17]. In [17], it was shown that a similar system exists at least one H_{A_1} -weakly periodic (non-periodic) solution as follows:

$$\hat{h}_x = \begin{cases} -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ \frac{1}{\eta^3}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ \frac{1}{\eta^3}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_1. \end{cases} \quad (9)$$

Using similar methods as in [17], we obtain the following H_{A_2} -weakly periodic (in particular, non-periodic) solution of (8):

$$\hat{h}_x = \begin{cases} \frac{1}{\eta^3}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1}, & \text{if } x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ \frac{1}{\eta^3}, & \text{if } x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_1. \end{cases} \quad (10)$$

Remark 1. We note that, according to Appendix A, the H_{A_1} -weakly periodic solution and the H_{A_2} -weakly periodic solution are different. Hence, these solutions determine different weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures.

Using this solution, we get the following theorem:

Theorem 2. For the Ising model with an external field, there exist at least one H_{A_1} -weakly periodic (non-periodic) and one H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure on the Cayley tree of order two.

Proof. The proof of the existence of at least one H_{A_1} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure is given in [17]. Therefore, we provide the proof for the existence of an H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure.

The solution given in (10) is an H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) solution of the system (7). According to Definition 3, this implies the existence of an H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure for the p -adic Ising model with an external field on the Cayley tree of order two.

The theorem is proved.

Remark 2.

1. We note that the Gibbs measures depend on the choice of the normal subgroup H_A of G_k . This implies that selecting different values of $|A|$ corresponds to choosing different subgroups H_A , which in turn leads to different systems of equations and, consequently, to different types of H_A -weakly periodic Gibbs measures. The set of weakly periodic Gibbs measures also contains the set of periodic Gibbs measures, including, in particular, the translation-invariant Gibbs measures.

2. Translation-invariant p -adic generalized Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree of order two were studied in [16].

3. In particular, when $|A| = 1$, the corresponding H_{A_1} -weakly periodic Gibbs measures have been studied in [17]. In [17], we establish the existence of at least one H_{A_1} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure for the Ising model on the Cayley tree of order two.

4. If $|A| = k + 1$, then the $H_{A_{k+1}}$ -weakly periodic Gibbs measure coincides with the $G_k^{(2)}$ -periodic Gibbs measure. In [16], the authors studied $G_2^{(2)}$ -periodic Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree of order two.

Now we turn to the investigation of the boundedness of the above-established H_{A_2} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure.

Theorem 3. Let $p \geq 3$. For the Ising model with an external field on the Cayley tree of order two, there exists at least one unbounded H_{A_1} -weakly periodic (non-periodic) and at least one unbounded H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure μ_{h_x} .

Proof. Assume $p \geq 3$. In [17], we proved the existence of at least one unbounded H_{A_1} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure. Hence, we will show at least one unbounded H_{A_2} -weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measure. Using (2), we get

$$|\mu_{\hat{h}_x}^{(n)}(\sigma_n)|_p = \left| \frac{1}{Z_n^{(\hat{h}_x)}} \right|_p \cdot \left| \exp_p \{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} \hat{h}_x^{\varphi^{(n)}(x)} \right|_p.$$

According to Lemma 1, we have $|\exp_p \{H_n(\sigma_n)\}|_p = 1$. Since $\theta \in \mathcal{E}_p$ and $\eta \in \mathcal{E}_p$, we obtain $\left| \frac{1}{\eta^3} \right|_p = \left| -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1} \right|_p = 1$. Using these results and the equality (22) in [17] we rewrite the p -adic norm of the measure as follow:

$$|\mu_{\hat{h}_x}^{(n)}(\sigma_n)|_p = \left| \frac{(\theta \hat{h}_{00} + 1)(\hat{h}_{00} + \theta)}{\theta \hat{h}_{00}} \right|_p^{2-2^n} \cdot \left| \frac{(\theta \hat{h}_{01} + 1)(\hat{h}_{01} + \theta)}{\theta \hat{h}_{01}} \right|_p^{1-2^{n-1}} \cdot \left| \frac{1}{Z_1^{(\hat{h}_x)}} \right|_p. \quad (11)$$

It is easy to check that

$$0 < \left| Z_1^{(\hat{h}_x)} \right|_p \leq 1,$$

$$\begin{aligned} |\theta \widehat{h}_{01} + 1|_p &= \left| \frac{1 - \theta^2}{\theta \eta^3 + 1} \right|_p < 1, \\ |\widehat{h}_{01} + \theta|_p &= \left| \frac{\eta^3(\theta^2 - 1)}{\theta \eta^3 + 1} \right|_p < 1, \quad |\theta \widehat{h}_{01}|_p = 1, \\ |\theta \widehat{h}_{00} + 1|_p &= \left| \frac{\theta + \eta^3}{\eta^3} \right|_p \leq 1, \\ |\widehat{h}_{00} + \theta|_p &= \left| \frac{\theta \eta^3 + 1}{\eta^3} \right|_p \leq 1, \quad |\theta \widehat{h}_{00}|_p = 1. \end{aligned}$$

From last results we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_{h_x}^{(n)}(\sigma_n)|_p = \infty. \quad (12)$$

This completes the proof.

We remark that the following statements are known for the Ising model with an external field:

1. In [16], the author showed that for any odd prime p , there exists a unique bounded translation-invariant p -adic generalized Gibbs measure.
2. In [17], it was shown that for any prime p , there exists at least one unbounded H_{A_1} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure.
3. According to Theorem 3, there exists at least one unbounded H_{A_2} -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measure.

Using these facts we get the following result:

Theorem 4. *For any odd number p , a phase transition occurs in the Ising model with an external field on the Cayley tree of order two.*

Appendix A

In this section, we prove that the measures defined by (9) and (10) are distinct.

Proposition 1. *The measures corresponding to (10) and (9) are distinct.*

Proof. To this end, let $\mu_n^{(1)}$ and $\mu_n^{(2)}$ denote the sequences of p -adic probability distributions corresponding to (10) and (9), respectively. Assume that $\mu_n^{(1)} \rightarrow \mu$ as $n \rightarrow \infty$, which implies $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n^{(1)} - \mu|_p \rightarrow 0$. Our objective is to demonstrate that $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n^{(2)} - \mu|_p \neq 0$. By the strong triangle inequality, we have:

$$|\mu_n^{(2)} - \mu|_p = |\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)} + \mu_n^{(1)} - \mu|_p \leq \max\{|\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}|_p, |\mu_n^{(1)} - \mu|_p\}.$$

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n^{(1)} - \mu|_p \rightarrow 0$, the proof reduces to showing that $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}|_p \neq 0$.

Let

$$h_0 = -\frac{\theta + \eta^3}{\theta \eta^3 + 1} \quad \text{and} \quad h_1 = \frac{1}{\eta^3}. \quad (13)$$

According to equation (11) and equation (22) in [17], the sequences of p -adic probability distributions corresponding to (10) and (9) can be expressed as:

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1)} &= \left(\frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{\theta h_0} \right)^{2-2^n} \cdot \left(\frac{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)}{\theta h_1} \right)^{1-2^{n-1}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{Z_1^{(h_x)}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} (h_0)^{\alpha_n + \delta_n} (h_1)^{\beta_n + \gamma_n}, \\ \mu_n^{(2)} &= \left(\frac{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)}{\theta h_1} \right)^{2-2^n} \cdot \left(\frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{\theta h_0} \right)^{1-2^{n-1}}. \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1}{Z_1^{(h_x)}} \exp_p \{H_n(\sigma_n)\} (h_1)^{\alpha_n + \delta_n} (h_1)^{\beta_n + \gamma_n},$$

where $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ represent the counts of $h_{00}, h_{01}, h_{10}, h_{11}$ on W_n , respectively. From Lemma 2.15 in [18], we have $\alpha_n + \delta_n = 2^n$ and $\beta_n + \gamma_n = 2^{n-1}$. The p -adic norm of the difference between $\mu_n^{(2)}$ and $\mu_n^{(1)}$ is given by:

$$|\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}|_p = \left| \frac{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)}{\theta h_1} \right|_p^{1-2^{n-1}} \cdot \left| \frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{\theta h_0} \right|_p^{2-2^n} \frac{|h_0|_p^{2^n} |h_1|_p^{2^{n-1}} |\exp_p \{H_n(\sigma_n)\}|_p}{|Z_1^{(h_x)}|_p} \cdot \left| \left(\frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)} \right)^{2^{n-1}-1} \cdot \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{2^{n-1}} - 1 \right|_p.$$

It follows from the results in the proof of Theorem 3 that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)}{\theta h_1} \right|_p^{1-2^{n-1}} \cdot \left| \frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{\theta h_0} \right|_p^{2-2^n} \cdot \frac{|h_0|_p^{2^n} |h_1|_p^{2^{n-1}} |\exp_p \{H_n(\sigma_n)\}|_p}{|Z_1^{(h_x)}|_p} = \infty. \quad (14)$$

Applying the strong triangle inequality, we deduce that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)} \right)^{2^{n-1}-1} \cdot \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{2^{n-1}} - 1 \right|_p \leq \leq \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)} \right)^{2^{n-1}-1} \cdot \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{2^{n-1}} \right|_p, 1 \right\} = 1. \quad (15)$$

Since $\eta, \theta \in \mathcal{E}_p$ and by (13) we have

$$\left| \frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)} \right|_p^{2^{n-1}-1} \cdot \left| \frac{h_1}{h_0} \right|_p^{2^{n-1}} = \left| \frac{\eta^9 (\theta^2 - 1)^2}{(\theta \eta^3 + 1)^3 (\theta + \eta^3)} \right|_p^{2^{n-1}-1}.$$

Consequently, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\theta h_0 + 1)(h_0 + \theta)}{(\theta h_1 + 1)(h_1 + \theta)} \right|_p^{2^{n-1}-1} \cdot \left| \frac{h_1}{h_0} \right|_p^{2^{n-1}} = 0.$$

Equations (14) and (15) together imply that

$$|\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}|_p = \infty.$$

This result shows that $\mu_n^{(2)} \not\rightarrow \mu$. Therefore, the measures corresponding to (10) and (9) do not coincide; that is, they are distinct measures. This concludes the proof.

REFERENCES

1. H. O. Georgii: *Gibbs Measures and Phase Transitions*, De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 9, De Gruyter, Berlin (1988).
2. A. N. Kolmogorov: *Foundations of the Probability Theory*, Chelsey, New York (1956).
3. O. N. Khakimov, On a Generalized p -adic Gibbs Measure for Ising Model on Trees, *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.* 6(3), 207-217, (2014).
4. A. Khrennikov: p -Adic stochastics and Dirac quantization with negative probabilities, *Inter. J. Theor. Phys.*, **34**, 2423-2433 (1995).

5. A. Yu. Khrennikov: On the extension of the von Mises frequency approach and Kolmogorov axiomatic approach to the p -adic probability theory, *Theor. Prob. Appl.*, **40**, 371-376 (1995).
6. A. Yu. Khrennikov, S. Yamada and A. van Rooij: Measure-theoretical approach to p -adic probability theory, *Annals Math. Blaise Pascal*, **6**, 21-32 (1999)
7. N. Koblitz, *p -Adic Numbers, p -Adic Analysis, and Zeta-Functions* (Springer, Berlin, 1977).
8. F. Mukhamedov, On dynamical systems and phase transitions for $q + 1$ -state p -adic Potts model on the Cayley tree, *Math. Phys. Anal. Geom.* **16** (2013) 49-87.
9. F. Mukhamedov: Renormalization method in p -adic λ -model on the Cayley tree, *Inter. J. Theor. Phys.*, **54**, 3577-3595 (2015).
10. F. Mukhamedov, O. Khakimov: Translation-invariant generalized p -adic Gibbs measures for the Ising model on Cayley trees, *Math. Meth. Appl. Scie.* **44**, 12302-12316 (2021).
11. F. Mukhamedov and O. Khakimov: On Julia set and chaos in p -adic Ising model on the Cayley tree, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **20**, 14 (2017).
12. F. Mukhamedov and O. Khakimov: Phase transition and chaos: p -adic Potts model on a Cayley tree, *Chaos Solitons Fractals*, **87**, 190-196 (2016).
13. F. Mukhamedov and O. Khakimov: Chaotic behavior of the p -adic Potts–Bethe mapping, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **38**, 231-245 (2018).
14. F. Mukhamedov, O. Khakimov, On equation $x^k = a$ over Q_p and its applications, *Izves. Math.* **84**, 348–360 (2020).
15. F. Mukhamedov, O. Khakimov, Chaos in p -adic Statistical lattice models: Potts model, in book: W. A. Zuniniga-Galindo, B. Toni (Eds), *Adv. Non-Arch. Anal. Appl.- The p -adic Methodology in STEAM-H* Springer Nature, 2022, pp. 113-164.
16. F. Mukhamedov, M. Rahmatullaev, A. Tukhtabaev, R. Mamadjonov, On p -adic Ising model with external field on a Cayley tree: Periodic Gibbs measures, *Teor. Math. Phys.*, (2023), Vol.216, Num.2, pp. 383-400.
17. Rahmatullaev M.M., Abdukaxorova Z.T., On H_A -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the p -adic Ising model with an external field on the Cayley tree of order two, *Rep. Math. Phys.*, 2025, 95(1), 93-106.
18. Rahmatullaev M.M., Abdukaxorova Z.T., H_A -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the p -adic Ising model with an external field on the Cayley tree of order two, *p -adic numbers Ult.Anal.*, 2024, 16(3), 233-263.
19. U. A. Rozikov: *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci. Publ., Singapore, 2013.
20. W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
21. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. V. Zelenov, *p -Adic Analysis and Mathematical Physics* (World Sci. Publ., Singapore, 1994)
22. I. V. Volovich: p -Adic string, *Class. Quan. Grav.*, **4**, L83-L87 (1987).
23. W. A. Zuniga-Galindo, S. M. Torba, Non-Archimedean Coulomb gases, *J. Math. Phys.* **61**(2020), 013504.

REZYUME

Ushbu ishda biz ikkinchi tartibli Keli daraxtidagi tashqi maydonli Izing modeli uchun H_{A_2} -kuchsiz davriy p -adik umumlashgan Gibbs o'lvohlarini o'rganamiz. $|A| = 2$ bo'lgan holatda, ushbu model uchun hech bo'lmaganda bitta chegaralanmagan H_{A_2} -kuchsiz davriy p -adik umumlashgan Gibbs o'lvohi mavjudligini isbotlaymiz. Bundan tashqari, ushbu ishda qaralayotgan modelda ixtiyoriy p

toq tub son uchun faza o'tishi sodir bo'lishini ko'rsatamiz.

Kalit so'zlar: p -adik son, Gibbs o'lchovi, Keli daraxti, tashqi maydonli Ising modeli, H_{A_2} -kuchsiz davriy p -adik umumlashgan Gibbs o'lchovi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе мы изучаем H_{A_2} -слабо периодические p -адические обобщённые меры Гиббса для модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли второго порядка. В случае $|A| = 2$ доказывается, что для данной модели существует по крайней мере одна неограниченная мера такого типа. Кроме того, мы показываем, что при любом нечётном простом числе p в рассматриваемой модели происходит фазовый переход.

Ключевые слова: p -адическое число, мера Гиббса, дерево Кэли, модель Изинга с внешним полем, H_{A_2} -слабо периодическая p -адическая обобщённая мера Гиббса, фазовый переход.

UDC 519.86 519.172.3

**QASHQADARYO TURIZMINING TURG'UN RIVOJLANISHIDA GRAFLAR
NAZARIYASINING QO'LLANILISHI****AKHMEDOVA Q.**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT
qunduzakhmedova6@gmail.com**YUSUPOVA SH.**BELARUS-UZBEKISTON TARMOQLARARO AMALIY TEXNIK KVALIFIKASIYALAR QO'SHMA INSTITUTI,
TOSHKENT
shaxlo.yusupova@gmail.com**MIRZODILOV J.**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT
mirzoodilov@bk.ru**REZYUME**

Turizm jahon iqtisodiyotining eng jadal rivojlanayotgan tarmoqlaridan biridir. Xalqaro turizmni rivojlantirish qonuniyatlarini bilish, uning jahon sayyohlik bozorida munosib o'rin egallashi uchun zarurdir. Ushbu maqolada graflar nazariyasi yordamida Qashqadaryo viloyatidagi ayrim diqqatga sazovor joylarni sayohat qilishning optimal xaritasini keltirishga harakat qildik.

Kalit so'zlar: Turizm, graflar, optimal xarita, turizm modeli, matematik modellashirish.

Kirish. O'zbekiston boy turistik salohiyatga va turizmni rivojlantirishning barcha imkoniyatlariga ega, shu tufayli mamlakatimizda turizm sohasini rivojlantirish uchun turli chora tadbirlar, Prezidentimiz qaror va farmonlari ishlab chiqilib amalga oshirilmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti SH.M.Mirziyoyevning 2018-yil 3-fevraldagi "O'zbekiston Respublikasining sayyohlik salohiyatini rivojlantirish uchun qulay shart-sharoitlar yaratish bo'yicha qo'shimcha tashkiliy chora-tadbirlar to'g'risida"5326-sonli farmoni, "Turizm yo'nalishidagi islohatlarni yanada jadallashtirish va sohada davlat boshqaruvi tizimini samarali tashkil qilish chora-tadbirlari to'g'risidagi"O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 27.07.2023 yilgi PQ-238 qarori turizmning rivojlanishi postindustrial jamiyat iqtisodiyotining shakllanishida muhim rol o'ynaydi. [[2],4-9].

Matematik model. Matematik muammolarni hal qilish, matematik bilimlar bilan ishlash qobiliyati - turlarni tanlashda, marshrutni tuzishda va sayyohlik biznesini yuritishda yordam beradi. Biz matematikaning turizm bilan o'zaro bog'liqligini va matematika bilimlari turizm sohasidagi parametrlarni rivojlantirishda qanday foydali bo'lishi mumkinligini ko'rsatmoqchimiz. Modellashirish jarayonining asosi matematik usullardir. Ba'zi bir tizimlarni ko'rib chiqayotganda, fikrlash natijasida ma'lum bir formula, diagramma, grafik, chizma, jadval, algoritmi olinadi, boshqacha qilib aytganda, matematik modelni yaratish tartibi amalga oshiriladi. Keng ma'noda matematik model – bu obyektlar va ular o'rtasidagi munosabatlarning matematik vositalaridan, shu jumladan harflar, belgilar, mantiqiy belgilar, nuqtalar, chiziqlar va boshqalardan tashkil topgan model. Matematik fanlarning mazmunini "matematik modellashirish"mazmuniga e'tibor qaratgan holda, tuzish jarayonida turizm sohasi uchun mutaxassislarni tayyorlashda uzluksizlikni ta'minlash besh bosqichda ajralib turadi: propedevtik, motivatsion, nazariy, amaliy va professional.

Adabiyotlar tahlili. Graflar nazariyasining ayrim tushunchalari [1, 3]. Ehtimol, birinchi sayyohlarga bo'g'liq masala, matematika fanining yangi turi - graflar nazariyasiga asos solgandir. Bu Konigsberg ko'priklari bilan bog'liq masala edi.

$G(V, E)$ – graf deyiladi agarda u ikki bo'sh bo'lmagan chekli to'plam birikishidan iborat obyekt bo'lsa, V -to'plam grafning uchi (tuguni, nuqtasi) va V -to'plamdan olingan elementlarning bir necha jufti $E \subseteq V \times V$ to'plamning qirrasini deb ataladi, agar juftlik tartiblanmagan elementdan iborat bo'lsa, agar juftlik tartiblangan elementdan iborat bo'lsa, u yoy deyiladi. Birinchi holda to'plam manfiy yo'nalishga ega bo'lsa, ikkinchi holda musbat yo'naltirilgan bo'ladi. Agar $e = (v_1, v_2)$ bo'lib $e \in E$ bo'lsa u holda v_1 va v_2 larni tutashtruvchi qirra

(yoy) deyiladi. Agarda $e = (v_1, v_2)$ bo'lib v_1 va v_2 larni tutashtruvchi e qirra (yoy) uchun $v_1 = v_2$ bo'lsa e qirra (yoy) sirtmoq deb ataladi.

Sirtmoq, odatda, yo'naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo'lgan graf psevdograf deyiladi. Agar ikki v_1 va v_2 uchlarni tutashtruvchi qirra (yoy) mavjud bo'lsa, u holda v_1 va v_2 uchlar qo'shni deyiladi. Xuddi shunday, ikki har xil qirra (yoy) qo'shni deyiladi, agarda umumiy uchga ega bo'lsa.

Ikki uch v_1 va v_2 agar ularni birlashtiruvchi chekka bo'lsa, qo'shni deyiladi. Xuddi shunday, ikkita alohida chekka qo'shni bo'ladi, agarda ular umumiy cho'qqiga ega bo'lsa. Graf yoyi uchun uning chetki uchlarini ko'rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a, b) va (b, a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a, b) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda a uning boshlang'ich uchi, b oxirgi uchi deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a, b) ko'rinishda yozilsa, u haqida a uchdan chiquvchi (boshlanuvchi) va b uchga kiruvchi (uchda tugovchi) yoy deb aytish ham odat tusiga kirgan. Qirra uchun uning (a, b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol o'ynamaydi va elementlar qirraning uchlari yoki chetlari deb ataladi. Agar grafda yo (a, b) qirra, yo (a, b) yoy, yoki (b, a) yoy topilsa, u holda a va b uchlar tutashtirilgan deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki yoy bor bo'lsa, u holda ular qo'shni uchlar deb, aks holda esa, qo'shni bo'lmagan uchlar deb aytiladi. Grafning ikkita uchi qo'shni bo'lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi qirraga (yoyga) insident, o'z navbatida, qirra yoki yoy bu uchlarga insident deyiladi. Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo'lsa, ular qo'shni qirralar (yoylar) deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, qo'shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba'zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya'ni uchlar soni m va qirralar (yoylar) soniga n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m, n) - graf deb ataydilar. Agar $G = (V, U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo'lsa, u holda yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) va faqat yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirralardan (ya'ni, yoylardan) tashkil topgan bo'lsa, u holda u yo'naltirilgan (oriyentirlangan) graf deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, orgraf deb ham ataladi. Ko'p hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham bo'lgan graflar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday graflar aralash graflar deb ataladi. Agar $G = (V, U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V \times V$ to'plamdan olingan takrorlanuvchi elementlar bo'lsa, u holda ular karrali yoki parallel qirralar (yoylar) deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo'lgan graf multigraf deyiladi.

Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala [1, 3]. Berilgan bog'lamli grafning har bir qirrasiga (agar berilgan graf oriyentirlangan bo'lsa-yoyiga) qandaydir haqiqiy son mos qo'yib, bu sonni qirraning (yoyning) uzunligi, deb ataymiz. Qirraning (yoyning) uzunligi additivlik xossasiga ega deb faraz qilamiz, ya'ni qirralar (yoylar) yordamida tuzilgan zanjirning (yo'lining) uzunligi shu zanjimi (yo'lni) tashkil etuvchi qirralar (yoylar) uzunliklari yig'indisiga tengdir.

Tabiiyki, qirraning yoki yoyning uzunligi tushunchasi yechilayotgan masalaning mohiyatiga qarab, muayyan bir ma'noga ega bo'lishi mumkin. Masalan, ikki shahar orasidagi masofa, qandaydir operatsiyani bajarish uchun zarur mablag' (xarajatlar) yoki vaqt va boshqalar. Shu nuqtayi nazardan, umuman olganda, bu yerda manfiy uzunlikka ega yoki uzunligi nolga teng qirra (yoy) ham ma'noga ega deb hisoblanadi.

Amaliyotda uchraydigan ko'plab masalalarda marshrut uzunligi maksimallashtirilishi yoki minimallashtirilishi talab etiladi.

$G = (V, U)$ oriyentirlangan graf berilgan bo'lsin, bu yerda $V = \{1, 2, \dots, m\}$ G grafning biron $s \in E$ uchidan boshqa $t \in E$ uchiga boruvchi yo'llar orasida uzunligi eng kichik bo'lganini topish masalasi bilan shug'ullanamiz. Bu masalani minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masala, deb ataymiz. Quyida bu masalaning umumlashmasi hisoblangan masalani qarab, uni ham o'sha nom bilan ataymiz. Grafdagi (i, j) yoyning uzunligini c_{ij} bilan belgilab, $C = (c_{ij})$, $i, j = \overline{1, m}$, matritsa berilgan deb hisoblaymiz. Yuqorida ta'kidlaganlarimizga ko'ra, S matritsaning c_{ij} elementlari orasida manfiylari yoki nolga tenglari ham bo'lishi mumkin. Agar grafda biron i uchdan chiqib, j uchga kiruvchi yoy mavjud bo'lmasa, u holda bu yoyning uzunligini cheksiz katta deb qabul qilamiz ($c_{ij} = \infty$). Bundan tashqari, G grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud emas, deb hisoblaymiz, chunki aks holda uzunligi eng kichik bo'lgan yo'l mavjud emas. Minimal uzunlikka ega yo'l haqidagi masalani hal etish usullari orasida Deykstra Edsger Vayb (Dijkstra Wybe, 1930-2002) tomonidan taklif etilgan algoritm ko'p qo'llaniladi. Quyida grafning 1 belgisi uchidan chiqib (bu uchni manba deb qabul qilamiz), grafdagi k uchgacha (bu oxirgi uch deb hisoblaymiz) eng qisqa uzunlikka ega yo'lni topish imkonini beruvchi Deykstra algoritmi keltirilgan. Agar grafda umumiy uzunligi manfiy bo'lgan sikl mavjud bo'lsa u holda grafning qandaydir s uchidan shu siklning biron i uchiga o'tib, keyin esa sikl bo'ylab harakatlanib, i uchga istagancha marta qaytish mumkin bo'lganligidan, istagancha kichik uzunlikka ega yo'l tuzish mumkin. Bunda eski ε_j qiymat aniqlangan paytda ajratilgan yoyni ajratilmagan deb hisoblaymiz. Uchlarga qiymat mos qo'yish jarayonini oxirgi (k belgisi)

uchga qiymat mos qo'yilguncha davom ettiramiz. Grafning 1 belgisi uchidan (manbadan) chiqib, uning ixtiyoriy k uchigacha (oxirgi uchigacha) eng qisqa yo'l uzunligi ε_k bo'ladi.

Tadqiqot metodologiyasi. Turizmga graflar nazariyasining ayrim tadbirlari. Sayyohlikda yo'lni va vaqtni tejash bu mablag'ni tejashga olib keladi, bu esa sayohatchilarning eng muhim hayotiy qonunidan iborat. Biz ham sayyohlarga yordam berish maqsadida Qashqadaryo viloyatining ba'zi diqqatga sazovor joylarini graflar nazariyasining minimal uzunlikka ega yo'l masalasiga olib kelishga harakat qilmoqchimiz. Yandexda xaritalar va boshqa global xaritalash xizmatlari yer yuzasidagi ikki nuqta orasidagi masofani yerning sferik geometriyasini hisobga olgan formulalar yordamida hisoblanadi. Bunday formulalardan biri Gaversin (Haversine) formulasidir, bu ularning kengligi va uzunligi bilan berilgan sharda ikkita nuqta orasidagi eng qisqa masofani (katta aylana yoyi) hisoblash uchun ishlatiladi. Gaversin (Haversine) formulasi, (φ_1, λ_1) , (φ_2, λ_2) koordinata nuqtalari bilan berilgan bo'lsin. Bu yerda φ_1, φ_2 radianda berilgan kengliklar, λ_1, λ_2 lar radianda berilgan uzunliklardir. Ikki nuqta berilgan masofa d quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$d = 2R \arcsin \left[\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)} \right].$$

Bu yerda R yer radiusi, $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Gaversin (Haversine) formulasi yerning sharsimon tabiatini hisobga oladi va ayniqsa uzoq masofalar uchun aniq natijalar beradi.

Tahlil va natijalar. Qashqadaryo viloyati O'zbekistonning ekologik jihatdan eng toza hududlaridan biri bo'lib, mamlakatning janubida, Qashqadaryo daryosi vodiysida, Pamir-Alay tog'larining g'arbiy yonbag'irlarida joylashgan. Toshkent shahrigacha masofasi 400 km ga yaqin. Viloyatning eng mashhur joylari bo'lgan baland tog'lar observatoriyasi, Kitob qo'riqxonasi, birinchi agroturizm qishlog'i bo'ylab sayohat qilishdan oldin, sayohatchilarga O'zbekistonning noyob dunyosini kashf etishda yordam berish uchun yaratilgan yangi maxsus loyihamizni keltirib o'tamiz.

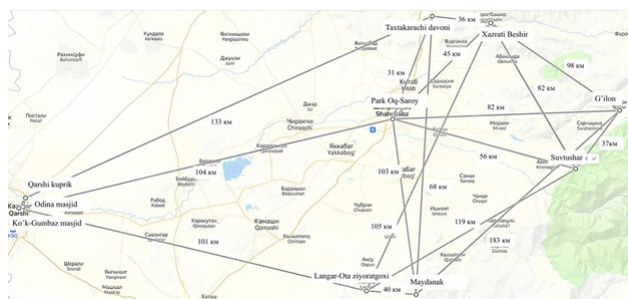
1-jadval

Qashqadaryo viloyatidagi madaniy meros obyektlari						
T/r	Tuman (shahar)	Umumiy soni	Arxeologiya	Arxitektura	Monumental	Diqqatga sazovor
1	Qarshi shahar	58	26	25	6	1
2	Shahrisabz shahar	61	28	28	5	0
3	Qarshi tuman	124	105	15	0	4
4	Shahrisabz tuman	174	150	22	0	2
5	Kitob tuman	305	281	16	3	5
6	Yakkabog' tuman	237	195	38	2	2
7	Chiroqchi tuman	49	36	8	3	2
8	Qamashi tuman	66	59	3	1	3
9	Dehqonobod tuman	38	32	4	1	1
10	Muborak tuman	8	2	3	2	1
11	Nishon tuman	7	3	1	3	0
12	Mirishkor tuman	17	9	6	1	1
13	G'uzor tuman	109	94	9	3	3
14	Koson tuman	90	76	11	2	1
15	Ko'kdala tuman	30	22	8	0	0
16	Kasbi tuman	95	79	11	3	2
	Jami:	1468	1197	208	35	28

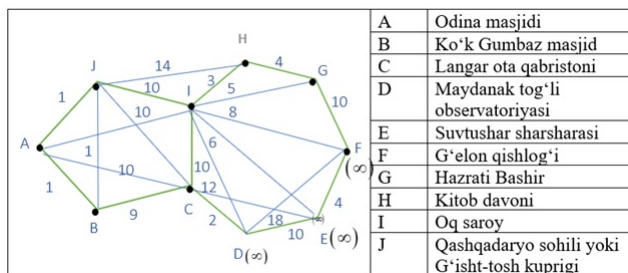
Ma'lumot: 1-jadval Qashqadaryo viloyati hokimligi turizm boshqarmasidan olindi. Qashqadaryo viloyatidagi ayrim diqqatga sazovor joylarni keltiramiz

2-jadval

	Diqqatga sazovor joy nomi	Joylashgan kengligi	Joylashgan uzoqligi
1	Odina masjidi va madrasasi	38.86804437927726	65.80354502847449
2	Qashqadaryo sohili yoki G'isht-tosh kuprik	38.89112533986972	65.81007673847897
3	Ko'k- Gumbaz masjidi	38.86395311836226	65.79243399766575
4	Abu Ubayda ibn al-Jarroh mavzaleyi	38.881900734382704	65.82638273390437
5	Al-Nasafiy ziyoratgohi	38.82678118099882	65.52956035176209
6	Langar Ota ziyoratgohi	38.68174872591029	66.75842018597375
7	Maydanak observatoriyasi	38.68493969542907	66.94369243443217
8	Oq Saroy	39.058989597396526	66.83004185719831
9	Hazrati Bashir ziyoratgohi	39.27127070974837	67.10432550796715
10	Hazrati Sulton ziyoratgohi	39.06222076871807	66.8302180804815
11	Suv tushar sharsharasi	38.95038974619961	67.34106731910228
12	G'elon qishlog'i	39.08130544344419	67.45809314089759
13	Kitob davlat geologik qo'riqxonasi	39.19172891736008	67.2444009804881
14	Shamshod kulol	39.05390788689151	66.82096108973568
15	Textakorachi dovoni (Kitob davoni)	39.28558942932864	66.92598341726843
16	Sulton Mirhaydar ota masjidi	38.95073183278398	65.38980358232678

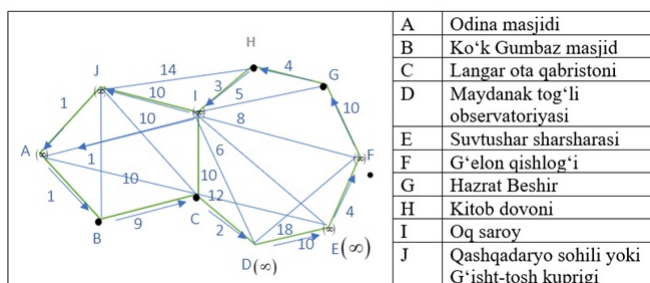


1-chizma

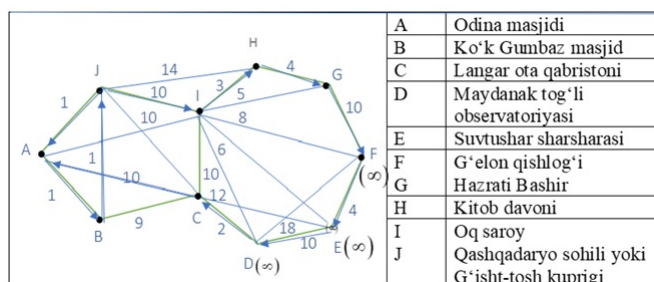


2-chizma

Biz ziyoratgohlar orasidagi masofani yandeks masofasida o'lchadik, bundan tashqari agar masofa 10 km dan kam bo'lsa 1 qo'ydik, agar 10 km dan oshiq bo'lsa yaxlitladik. Agar uchta qo'shni ziyoratgoh orasidagi masofa ikki ziyoratgoh orasidagi masofa bilan teng bo'lsa biz yaqin sifatida uchta orasidagi masofani taklif qildik. Ziyoratgohlarga sayohat qilishning yo'l xaritasini 2 xil ko'rinishda ifodaladik. [chizma-3,4]



3-chizma



4-chizma

Xulosa va takliflar. O'zbekistonda turizmni rivojlantirish uchun zarur shart-sharoitlar mavjud: tabiiy resurslarning noyob kombinatsiyasi, tarixiy madaniy xilma-xillik. Shu bilan birga, turizm infratuzilmasining sifatini oshirish va sohani rivojlantirish bo'yicha kompleks davlat siyosati mavjud, bu esa kelajakda O'zbekiston turizm bozorining mehmondo'stlik sohasidagi jahonda yetakchilaridan biri bo'lishiga olib keladi.

Qashqadaryo viloyati O'zbekistonning eng go'zal mintaqasi hisoblanadi va atmosfera sayohatlari uchun juda ko'p qiziqarli yo'nalishlarga ega. Bu yerda sarguzasht izlovchilarga yoqadigan barcha narsalar mavjud: tog' yo'llari, ulkan tarixiy diqqatga sazovor joylar, mahalliy madaniyatga to'liq kirib borish, mazali milliy va xorijiy ta'omlar va boshqalar.

Ushbu maqolada graflar nazariyasi yordamida Qashqadaryo viloyatidagi ayrim diqqatga sazovor joylarini sayohat qilishning optimal xaritasini keltirishga harakat qildik. Biz nafaqat tashqi sayyohlikni, balki O'zbekiston Respublikasi Prezidentining tashabbuslari bilan boshlangan ichki turizmni rivojlantirish zarurligini sezdik, sababi Respublikamizning diqqatga sazovor joylari haqida xalqimizda yetarlicha ma'lumot mavjud emas. Bu esa joylardagi mutassaddi shaxslarning o'z ishiga sovuqqonlik bilan qarayotganini yoki vazifasini to'liq tushunmaganini bildiradi, bu masalalarga jiddiy e'tibor qaratilsa maqsadga muvofiq bo'lardi.

ADABIYOTLAR

1. М.Р. Павлова, Н.Г. Никулина Некоторые применения теории графов в туризме // труды томского государственного университета // актуальные вопросы географии и геологии Материалы Всероссийской молодёжной научной конференции 10-13 октября 2010 г. Том 277. С. 241-242 издательство томского университета 2010
2. Светуных С.Г., Заграновская А.В., Светуных И.С. Комплекснозначный анализ и моделирование неравномерности социально-экономического развития регионов Россия.-СПб.: <http://sergey.svetunkov.ru/economics/complex/MD2012>, 2012, 129 с.
3. Jo'rayev H., Azizov I., Otaqulov S. // Kombinatorika va graflar nazariyasi, Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma Toshkent – "ILM ZIYO"2009, 256 b.

4. Хазова, Д.С. Моделирование развития устойчивого туризма в Республике Алтай с помощью качественных методов / Д.С. Хазова, И.Г. Шандра Прикладная математика: новые задачи и традиционные приложения. Сборник исследовательских и реферативных работ молодых ученых: Сборник статей. Выпуск 1. - М.: Академинновация, 2014. - С. 68-78. (0,61/0,4 пл.).
5. Джумаев Б.А., Рубцов В.А. Повышение эффективности Взаимосвязи туристской отрасли Узбекистан посредством системного анализа ее основных компонентов // Вестник Академии наук Республики Башкортостан 2022. Том 44 3 (107) с.65-74.
6. Левченко К.К. Оценка результативности развития внутреннего туризма региона // Теоретические и прикладные аспекты развития сферы рекреации и туризма. DOI: 10.18572/2686-858X-2023-17-1-20-29.
7. Нарзиев М. М. Сезонность спроса на туристические услуги и пути минимизации сезонного характера в туристической индустрии узбекистана . //Труды ученых ИГУ. 2009. 23. С. 61-66.
8. Муминов Ж. К. Перспективы развития туристической индустрии в Узбекистане //Синергия Наук. 2017. No. 8. С. 117-122.
9. Расулова Н. Н. Туризм в Узбекистане: оценка состояния и перспективы развития //А43 Актуальные вопросы развития территорий:теоретические и. 2016. С. 50.
10. Q.Ahmedova, Sh. Yusupova, B. Mirzoodilov Qashqadaryo viloyatida turizm o'sishi turg'unligini ta'minlashning matematik modeli // "QarDU xabarlar"ilmiy-nazariy, uslubiy jurnali, 2024 (2) 2, b. 62-68.
11. Yusupova Sh. B. Toshkent shahri turizmi rivojlanishining matematik modellar orqali tahlili // Journal of Theory, Mathematics and Physics, Vol 3. No. 04, 2024, <https://jtmp.innovascience.uz/index.php/journal/article/view/133> b.36-39.
12. Nasriddinov X. Qarshi shahrining me'moriy yodgorliklari: / Nasriddinov, Xujayarov - Toshkent: Yangi asr avlodi, 2011. // ISBN 978-9943-08-629-6.
13. O'zbekiston milliy ensiklopediyasi 2000 yildan 2005 yilgacha Toshkentda "O'zbekiston milliy ensiklopediyasi"davlat ilmiy nashriyoti tomonidan nashr etilgan.
14. Qashqadaryo viloyati (Wayback Machine saytida 21-iyul 2022-yil sanasida arxivlangan). 21-iyul 2022-yil.

РЕЗЮМЕ

Туризм является одной из наиболее быстро развивающихся отраслей мировой экономики. Знание законов развития международного туризма необходимо для того, чтобы он занял достойное место на мировом туристском рынке. В этой статье мы попытались с помощью теории графов предоставить оптимальную карту некоторых достопримечательностей Кашкадарьинской области.

Ключевые слова: Туризм, графы, оптимальная карта, модель туризма, математическое моделирование.

RESUME

Tourism is one of the most rapidly developing sectors of the world economy. Knowledge of the laws of international tourism development is necessary for it to take its rightful place in the world tourism market. In this article, we have tried to create an optimal map of traveling to some attractions in the Kashkadarya region using graph theory.

Key words: Tourism, graphs, optimal map, tourism model, mathematical modeling.

UDK 517.95

FURYE QATORLARINING ELLIPTIK QISMIY YIG'INDILAR KETMA-KETLIGI UCHUN UMUMLASHGAN LOKALIZATSIYA MASALASI

BUVAYEV Q. T.

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT
buvayev@mail.ru

DAVIROVA G. N.

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT
gulhayodaveroval@gmail.com

REZYUME

Ushbu ishda, yoyiluvchi funksiyaning tashuvchisi biror sohadan tashqarida bo'lsin degan shart asosida, aynan shu sohada ikki karrali Furye qatorlarining elliptik qisman yig'indilar ketma-ketligini deyarli yaqinlashish masalasi o'rganilgan. Bunday masalaga odatda umumlashgan lokalizatsiya masalasi deb ataladi.

Kalit so'zlar: Furye qatori, elliptik qisman yig'indi, umumlashgan lokalizatsiya, maksimal operator.

Quyidagi

$$\sum_{n \in Z^2} f_n e^{inx} \quad (1)$$

ikki karrali Furye qatorini qaraymiz. Bu yerda Z^2 - tekislikdagi butun koordinatali vektorlar to'plami, $f_n = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} f(y) e^{-iny} dy$ - Furye koeffitsientlari, $T^2 = (-\pi, \pi]^2$, bunda $(-\pi, \pi]^2 = (-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$ - dekart ko'paytma, $nx = n_1 x_1 + n_2 x_2$ -skalyar ko'paytma.

Ihtiyoriy $\lambda > 0$ son uchun $S_\lambda f(x)$ orqali (1) qatorning elliptik soha bo'yicha qisman yig'indisini belgilaymiz, ya'ni:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{A(n) < \lambda} f_n e^{inx}, \quad (2)$$

bu yerda, $A(\xi) = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ - ikkinchi tartibli bir jinsli ko'phad. Agar ihtiyoriy $\xi \neq 0$ vektor uchun ushbu $A(\xi) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $A(\xi)$ ko'phad elliptik ko'phad deyiladi (yoki ushbu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ tengsizlik bajarilsa).

$L_2(T^2)$ - T^2 da kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar sinfi bo'lsin. Bu sinfdagi normani quyidagicha kiritish mumkin: $\|f\|_{L_2(T^2)} = \left(\int_{T^2} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

V.A. Il'in [1] ishida xos funksiyalar bo'yicha ihtiyoriy yoyilma uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi tushunchasini kiritdi. Il'in tushunchasidan kelib chiqib, biz $L_2(T^2)$ da $S_\lambda f(x)$ uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi o'rinli deb aytamiz, agar ihtiyoriy $f \in L_2(T^2)$ funksiya uchun ushbu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda f(x) = 0 \quad (3)$$

tenglik $T^2 \setminus \text{supp} f$ da deyarli bajarilsa.

Ko'rinib turibdiki, klassik lokalizatsiya prinsipidan farqli o'laroq bu yerda (3) tenglikni $T^2 \setminus \text{supp} f$ da deyarli bajarilishi yetarli (hamma joyda emas). Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teorema hisoblanadi.

1-teorema. $\Omega \subset T^2$ biror ochiq soha, $A(\xi)$ ihtiyoriy ikkinchi tartibli bir jinsli elliptik ko'phad, $f(x) \in L_2(T^2)$ funksiya har bir argumentlari bo'yicha davriy va davri 2π ga teng bo'lsin. Agar ihtiyoriy $x \in \Omega$ da $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda (3) tenglik Ω ning deyarli hamma yerida bajariladi.

Eslatib o'tamiz, n karrali Furye qatorlarining shar bo'yicha qisman yig'indisi uchun umumlashgan lokalizatsiya masalasini birinchi bo'lib R.R. Ashurov tomonidan [2] ishda o'rganilgan.

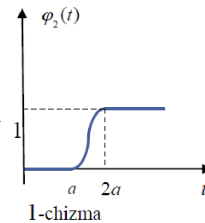
Deyarli yaqinlashish masalalarini o'rganishda quyidagi maksimal operatorini kiritish maqsadga muvofiq: $S_*f(x) = \sup_{\lambda>0} |S_\lambda f(x)|$. 1- teorema isboti maksimal operatorining quyidagi bahosiga asoslangan:

2-teorema. $K_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$ - doira, $A(\xi)$ ixtiyoriy elliptik ko'phad, $f(x) \in L_2(T^2)$ funksiya har bir argumentlari bo'yicha davriy va davri 2π ga teng bo'lsin. Agar istalgan $x \in K_R$ da $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $r(r < R)$ uchun shunday $C = C(R, r)$ o'zgarmas son mavjudki, quyidagi

$$\int_{K_r} [S_*f(x)]^2 dx \leq C \int_{T^2} [f(x)]^2 dx \quad (4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Biror $K_R \subset T^2$ doirada $f(x) = 0$ bo'lsin va ixtiyoriy $r < R$ sonini tayinlaymiz. $\chi_b(t)$, $t \geq 0$ $[0, b]$ segmentning xarakteristik funksiyasi bo'lsin. $\varphi_1(t)$ orqali quyidagi $\chi_{\frac{R-r}{3}}(t) \leq \varphi_1(t) \leq \chi_{\frac{2(R-r)}{3}}(t)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi silliq funksiyaning belgilaylik. $\varphi_1(t)$ funksiya orqali ifodalangan $\varphi_2(t)$ funksiyaning ushbu $\varphi_2(t) = 1 - \varphi_1(t)$ ko'rinishida aniqlaylik (1-chizma, $a = \frac{R-r}{3}$).



Endi quyidagi yangi funksiyaning aniqlaymiz: $\psi(x) = \varphi_2(|x|)$, $x \in T^2$ va bu funksiyaning butun tekislikka davriy davom ettiramiz.

Quyidagi belgilashni kiritamiz: $\theta(x, \lambda) = (2\pi)^{-2} \sum_{A(n) < \lambda} e^{inx}$. U holda tushunarlik: $S_\lambda f(x) = \int_{T^2} \theta(x - y, \lambda) f(y) dy$.

Endi quyidagicha $\theta_\lambda(x) = \theta(x, \lambda)\psi(x)$ almashtirish kiritamiz.

1-xulosa. Ixtiyoriy $x \in K_r$ uchun quyidagi

$$S_\lambda f(x) = \int_{T^2} \theta_\lambda(x - y) f(y) dy \quad (5)$$

tenglik o'rinli.

Isbot.

$$\begin{aligned} S_\lambda f(x) &= \int_{T^2} \theta_\lambda(x - y) f(y) dy = \int_{T^2} \theta(x - y) \psi(x - y) f(y) dy = \int_{T^2} \theta(x - y) f(y) [1 - \varphi_1(|x - y|)] dy = \\ &= \int_{T^2} \theta(x - y) f(y) dy - \int_{T^2} \theta(x - y) f(y) \varphi_1(|x - y|) dy = S_\lambda f(x) - I, \end{aligned}$$

bu yerda $I = \int_{T^2} \theta(x - y) f(y) \varphi_1(|x - y|) dy$.

Shunday qilib, yuqoridagi tenglikka ko'ra $I = 0$ ekanligini ko'rsatsak xulosa isbot bo'ladi. Buning uchun ixtiyoriy $x \in K_r$ larda quyidagi

$$\text{supp} \varphi_1(|x - y|) \cap \text{supp} f(y) = \emptyset \quad (6)$$

munosabatni o'rinli ekanligini ko'rsatish yetarli.

Shartga ko'ra: $\text{supp} \varphi_1(|x - y|) = \{x - y \in T^2 : |x - y| < 2a, |x| < r\}$, bunda $a = \frac{R-r}{3}$ va $\text{supp} f(y) = \{y \in T^2 : |y| \geq R\}$.

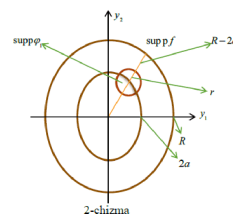
2-chizmaga ko'ra, 1-xulosani to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish uchun $R - 2a \geq r$ ekanligini ko'rsatish yetarli. Haqiqatan ham:

$$R - 2a = R - \frac{2(R-r)}{3} = \frac{R+2a}{3} \geq \frac{3r}{3} = r.$$

Shunday qilib 1-xulosa isbot bo'ldi. ♦

$0 < r < R$, $0 < 2a = \frac{2(R-r)}{3} < \frac{2R}{3} < R$ bo'lgani uchun markazi koordinata boshida va radiusi $2a$ ga teng bo'lgan doira, markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo'lgan doiraning ichida yotadi.

Boshqa tomondan, (6) ni ko'rsatish uchun, markazi x bo'lgan nuqtani ushbu $\{y : |y| \leq 2a\}$ doiraning ixtiyoriy nuqtasidan olib, r radiusli doira chizilganda bu doira quyidagi $\{y : |y| \geq R\}$ to'plam bilan kesishmasligini ko'rsatish yetarli (2- chizma).



Quyidagi $a(n) = [A(n)]^{\frac{1}{2}}$ belgilashni kiritamiz. Bu belgilashga ko'ra $\theta(x, \lambda)$ ni quyidagi ko'rinishida yozib olamiz:

$$\theta(x, \lambda) = (2\pi)^{-2} \sum_{a(n) < \sqrt{\lambda}} e^{inx}. \quad (7)$$

$A(n)$ elliptik ko'phad bo'lgani uchun, shunday a_1 va a_2 musbat o'zgarmas sonlari mavjudki, ushbu

$$a_1|n| \leq a(n) \leq a_2|n|, \forall n \in \mathbb{Z}^2 \quad (8)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini osongina ko'rish mumkin.

O'rama ta'rifidan foydalanib (5) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$S_\lambda f(x) = \int_{T^2} \theta_\lambda(x-y) f(y) dy = (\theta_\lambda * f)(x) = \theta_\lambda * f.$$

Oxirgi tenglikka ko'ra:

$$S_* f(x) = \sup_{\lambda > 0} |S_\lambda f(x)| = \sup_{\lambda > 0} |\theta_\lambda * f|. \quad (9)$$

$$U \text{ holda } (9) \text{ ga asosan quyidagi } \int_{T^2} [S_* f(x)]^2 dx = \int_{T^2} \left[\sup_{\lambda > 0} |\theta_\lambda * f| \right]^2 dx = \int_{T^2} \sup_{\lambda > 0} [\theta_\lambda * f]^2 dx$$

tenglikni yozish mumkin.

Shunday qilib, (4) ni isbot qilish uchun oxirgi tenglikka ko'ra, ushbu

$$\int_{T^2} \sup_{k > 0} [\theta_k * f]^2 dx \leq C \int_{T^2} [f(x)]^2 dx \quad (10)$$

tengsizlikni isbotlash yetarli, bu yerda supremum barcha natural sonlar bo'yicha olinadi. Shuni e'tiboringizga havola qilish lozimki, bu yerda jamlash (2) tenglikka ko'ra ushbu $\{n \in \mathbb{Z}^2 : A(n) < \lambda\}$ to'plam bo'yicha olib borilayotganligi sababli, (10) tenglikda supremumni faqat barcha natural sonlar bo'yicha olishni o'zi yetarli bo'ladi.

$$(\theta_k)_n \text{ orqali } \theta_k(x) \text{ funksiyaning Furre koefitsientlarini belgilaymiz, ya'ni: } (\theta_k)_n = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \theta_k(x) e^{-inx} dx.$$

Bu Furre koefitsientlari uchun quyidagi xulosa o'rinli.

1-lemma. Shunday $\varepsilon > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $k > 0$ butun son va ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}^2$ uchun quyidagi

$$|(\theta_k)_n| \leq \sum_{\varepsilon|a(n) - \sqrt{k}| < |j|} |\psi_j| \quad (11)$$

tengsizlik o'rinli, bu yerda $\psi_j = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \psi(y) e^{-ijy} dy$ - $\psi(x)$ funksiyaning Furre koefitsientlari.

Isbot.

$$\begin{aligned} (\theta_k)_n &= (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \theta_k(y) e^{-iny} dy = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \theta(y, k) \psi(y) e^{-iny} dy = \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \left((2\pi)^{-2} \sum_{a(j) < \sqrt{k}} e^{ijy} \right) \psi(y) e^{-iny} dy = (2\pi)^{-4} \sum_{a(j) < \sqrt{k}} \int_{T^2} \psi(y) e^{-iy(n-j)} dy = \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-2} \sum_{a(j) < \sqrt{k}} \psi_{n-j} = (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) < \sqrt{k}} \psi_j.$$

Shunday qilib, oxirgi tenglikdan, ushbu

$$|(\theta_k)_n| \leq (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) < \sqrt{k}} |\psi_j| \quad (12)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Dastlab $a(n) > \sqrt{k}$ holni qaraylik. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$M = \left\{ j \in Z^2 : a(n-j) < \sqrt{k} \right\}, \quad N = \left\{ j \in Z^2 : |j| > \varepsilon_1 \left(a(n) - \sqrt{k} \right) \right\}.$$

(12) tengsizlikka ko'ra (11) tengsizlikni isbotlash uchun quyidagi xulosani isbotlash yetarli:

2-xulosa. *Biror $\varepsilon_1 > 0$ son uchun, quyidagi*

$$M \subset N \quad (13)$$

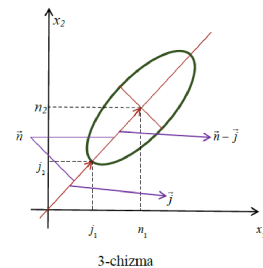
munosabat o'rinli.

Isbot. O'z navbatida (13) munosabatning o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun, quyidagi

$$d_n = \min_{a(n-j) = \sqrt{k}} |j| = \varepsilon_1 \left(a(n) - \sqrt{k} \right) \quad (14)$$

tenglikni o'rinli ekanligini ko'rsatish yetarli, o'z navbatida $A(\xi)$ elliptik ko'phad bo'lganligi sababli (14) tenglik koordinata boshidan markazi $n = (n_1, n_2)$ nuqtada bo'lgan $a(n-j) = \sqrt{k}$ ellipsigacha bo'lgan eng qisqa masofani topish masalasiga ekvivalentdir.

Faraz qilaylik $a(n-j) = \sqrt{k}$ tenglikni qanoatlantiruvchi (j_1, j_2) vektor $\omega = \frac{n}{|n|}$ vektoriga paralel bo'lsin. U holda tushinarliki, $\frac{n}{|n|} = \frac{n-j}{|n-j|}$ boladi (3-chizma).



Bundan tashqari, yuqoridagi mulohazalarga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$a \left(\frac{n-j}{|n-j|} \right) = a(\omega), \quad (15)$$

bu yerda $a(n) = [A(n)]^{\frac{1}{2}}$, $A(n) = a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2$.

Endi $a(n-j) = \sqrt{k}$ ekanligidan, quyidagilar

$$|n-j| = \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)}, \quad (16)$$

$$d_k(n) = |j| = |n| - \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)} = \frac{1}{a(\omega)} \left(a(n) - \sqrt{k} \right) \quad (17)$$

kelib chiqishini ko'rsatamiz. Xaqiqatan ham:

$$\sqrt{k} = a(n-j) = a \left(\frac{n-j}{|n-j|} |n-j| \right) = |n-j| a \left(\frac{n-j}{|n-j|} \right) = |n-j| a(\omega) \Rightarrow |n-j| = \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)}.$$

$$d_k(n) = |j| = |n| - |n-j| = |n| - \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)} = \frac{1}{a(\omega)} \left(a \left(\frac{n}{|n|} \right) |n| - \sqrt{k} \right) = \frac{1}{a(\omega)} \left(a(n) - \sqrt{k} \right).$$

Endi $j = (j_1, j_2)$ uchun, ushbu

$$d_k(n) \geq a_2^{-1} (a(n) - \sqrt{k}) \quad (18)$$

tengsizlikni o'rinli ekanligini ko'rsatamiz, bu yerda $a_2 > 0$ son (8) tengsizlik orqali aniqlangan.

(8) ga ko'ra ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}^2$ uchun:

$$\begin{aligned} a_1|n| \leq a(n) \leq a_2|n| \Rightarrow a_1|n| \leq a\left(\frac{n}{|n|}|n|\right) \leq a_2|n| \Rightarrow a_1|n| \leq |n|a\left(\frac{n}{|n|}\right) \leq a_2|n| \Rightarrow \\ \Rightarrow^{(16)} a_1 \leq a(\omega) \leq a_2 \Rightarrow a(\omega) \geq a_2^{-1}, \end{aligned}$$

bu yerda (16) tengsizlik $|n| \neq 0$ ekanligini ta'minlab beradi.

Oxirgi va (17) tengsizliklardan (18) tengsizlik kelib chiqadi:

$$d_k(n) = \frac{1}{a(\omega)} (a(n) - \sqrt{k}) \geq a_2^{-1} (a(n) - \sqrt{k}).$$

Endi $(j_1, j_2) \parallel \omega\left(\frac{n}{|n|}\right)$ bo'lsa, u holda ushbu

$$d_k(n) = \min_{a(n-j)=k} |j| = a_2^{-1} (|n| - \sqrt{k}) \quad (19)$$

munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

(16) tenglik va ushbu $|n - j| \geq |n| - |j|$ tengsizlikka ko'ra:

$$\begin{aligned} |n| - |j| \leq |n - j| = \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)} \Rightarrow |j| \geq |n| - \frac{\sqrt{k}}{a(\omega)} = \frac{1}{a(\omega)} (a(n) - \sqrt{k}) \geq a_2^{-1} (a(n) - \sqrt{k}) \Rightarrow \\ \Rightarrow d_k(n) = \min_{a(n-j)=k} |j| = a_2^{-1} (a(n) - \sqrt{k}). \end{aligned}$$

Shunday qilib, biz (19) tenglikni bajarilishini ko'rsatdik, o'z navbatida $(j_1, j_2) \parallel \omega\left(\frac{n}{|n|}\right)$ hol uchun (18) va (19) ko'ra (14) tengsizlikni o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi j ixtiyoriy va k tayinlangan son bo'lsin. $d_k(n) = (d_k^1, d_k^2) \in \{a(n - j) = \sqrt{k}\}$ orqali j ga minimum beradigan ixtiyoriy nuqtani belgilaylik. Oshkormas funksiyani mavjudligi haqidagi teorema ko'ra $a(n) = \sqrt{k}$ ni qanoatlantiruvchi n lar uchun $a(n - j) = \sqrt{k}$ dan $j_2 = f_k(j_1) \Rightarrow d_k^2 = f_k(d_k^1)$ ni hosil qilamiz (bizning holimizda, $A(\xi)$ elliptik ko'phad bo'lgani uchun, ushbu $a(\xi) = \sqrt{k}$ tenglik bilan aniqlangan $\xi_2 = f_k(\xi_1)$ oshkormas funksiya yuqoridagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha (ξ_1, ξ_2) nuqtalarning yetarlicha kichik atrofida mavjud va yagonadir). Oxirgi tenglikni hisobga olib, koordinata boshidan ellipsigacha bo'lgan masofa uchun, quyidagini hosil qilamiz: $|d_k(n)| = \sqrt{(d_k^1)^2 + (d_k^2)^2} \leq \sqrt{|d_k^1|^2 + (f_k(d_k^1) + \delta)^2}$, bu yerda $\delta > a_2^{-1} (a(n) - \sqrt{k})$. Agar $|d_k^1| > l\delta$ bo'lsa, u holda $|d_k(n)| \geq |d_k^1| > l\delta$. Boshqa tomondan, agar $|d_k^1| \leq l\delta$ va l yetarlicha kichik bo'lsa, u holda bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasiga ko'ra:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (\Delta x)^m + R_{m+1}(x), \quad (20)$$

bu yerda $R_{m+1}(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(m+1)!} (\Delta x)^{m+1}$ - Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had, $0 < \theta < 1$, $m \geq 0$ butun son, $\Delta x = x - x_0$, $f(x)$ funksiya $x_0 \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $m + 1$ marta differensiallanuvchi funksiya. (20) formula $m = 0$ da quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (21)$$

Yoki $\Delta x = x - x_0$ ekanligini hisobga olib, (21) formulani $x_0 = 0$ uchun, ya'ni Makloren qatorini yozsak: $f(x) = f(0) + x f'(\theta x)$. Oxirgi tenglikni biz qarayotgan $j_2 = f_k(j_1)$ funksiya uchun qo'llasak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$f_k(j_1) = f_k(0) + j_1 f'_k(\theta j_1). \quad (22)$$

$a(n) = \sqrt{k}$ ni qanoatlantiruvchi barcha n lar uchun $f_k(0) = 0$ bo'lgani uchun (22) formula ushbu ko'rinishida bo'ladi:

$$f_k(j_1) = j_1 f'_k(\theta j_1).$$

yoki

$$f_k(d_k^1) = d_k^1 f'_k(\theta d_k^1). \quad (23)$$

l yetarlicha kichik bo'lgani uchun (23) tenglikka ko'ra quyidagini xosil qilamiz:

$$|d_k(n)| = \sqrt{|d_k^1|^2 + (f_k(d_k^1) + \delta)^2} \geq |f_k(d_k^1)| + \delta = |d_k^1| |f'_k(\theta d_k^1)| + \delta.$$

d_k yetarlicha kichik va $f'_k(\theta d_k^1)$ chegaranlangan bo'lganligi uchun, oxirgi tenglikdan quyidagini olamiz: $|d_k(n)| \geq c\delta$, $c > 0$. Shunday qilib, 2-xulosa o'z navbatida $a(n) > \sqrt{k}$ hol uchun 1-lemma isbotlandi.

Endi $a(n) < \sqrt{k}$ bo'lsin. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$M = \left\{ j \in Z^2 : a(n-j) < \sqrt{k} \right\}, \quad N_1 = \left\{ j \in Z^2 : |j| \leq \varepsilon_2 \left(\sqrt{k} - a(n) \right) \right\}.$$

Shunday $\varepsilon_2 > 0$ soni mavjudki, ushbu $M \supset N_1$ munosabatni o'rinli ekanligini yuqoridagiga o'xshash ko'rsatish mumkin.

$\psi(x)$ cheksiz marta differensiallanuvchi va davriy funksiya bo'lgani uchun, uni Furiye qatoriga yoyishimiz mumkin, ya'ni $\psi(x) = (2\pi)^{-2} \sum_{j \in Z^2} \psi_j e^{ijx} \Rightarrow \psi(0) = (2\pi)^{-2} \sum_{j \in Z^2} \psi_j$.

$\psi(0) = 0$ bo'lgani uchun:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} \sum_{j \in Z^2} \psi_j = 0 &\Rightarrow (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) < \sqrt{k}} \psi_j + (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) \geq \sqrt{k}} \psi_j = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) < \sqrt{k}} \psi_j = -(2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) \geq \sqrt{k}} \psi_j. \end{aligned}$$

Shunday qilib, bu holda oxirgi tenglikdan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} \left| \sum_{a(n-j) < \sqrt{k}} \psi_j \right| &= (2\pi)^{-2} \left| - \sum_{a(n-j) \geq \sqrt{k}} \psi_j \right| \leq (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j) \geq \sqrt{k}} |\psi_j| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-2} \sum_{|j| \geq \varepsilon_2 (\sqrt{k} - a(n))} |\psi_j|. \end{aligned} \quad (24)$$

Agar ε sifatida ε_1 va ε_2 larni minimumini olsak, u holda $|(\theta_k)_n| \leq \sum_{\varepsilon | a(n) - \sqrt{k}| < |j|} |\psi_j|$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Shunday qilib 1-lemma to'liq isbotlandi. ♦

2-lemma. *Ixtiyoriy $l \in N$ son uchun l , r va R larga bog'liq bo'lgan shunday C o'zgarmas son mavjudki, barcha $k \geq 0$ butun va $n \in Z^2$ lar uchun ushbu*

$$|(\theta_k)_n| \leq \frac{C}{\left(1 + \varepsilon \left| a(n) - \sqrt{k} \right| \right)^l}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $h \geq 0$ son uchun $R - r$ ga bog'liq bo'lgan shunday c_h o'zgarmas son mavjudki, quyidagi

$$|\psi_j| \leq \frac{c_h}{(1 + |j|)^h} \quad (25)$$

tengsizlik o'rinli.

1-lemma va (25) tengizlikka ko'ra:

$$\begin{aligned} |(\theta_k)_n| &\leq \sum_{\varepsilon|a(n)-\sqrt{k}|<|j|} |\psi_j| \leq \sum_{\varepsilon|a(n)-\sqrt{k}|<|j|} \frac{c_h}{(1+|j|)^h} \leq \\ &\leq \sum_{\varepsilon|a(n)-\sqrt{k}|<|j|} \frac{c_h}{\left(1+\varepsilon\left|a(n)-\sqrt{k}\right|\right)^h} \leq \frac{c_l}{\left(1+\varepsilon\left|a(n)-\sqrt{k}\right|\right)^l}. \end{aligned}$$

2- lemma isbotlandi. ♦

2-lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. *Quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(\theta_k)_n|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j \leq \sqrt{k} < j+1} |(\theta_k)_n|^2 \leq ca(n).$$

Endi quyidagicha belgilashni kiritamiz: $(\Delta_k)_n = (\theta_{k+1})_n - (\theta_k)_n$. Bu belgilashga ko'ra, $(\Delta_k)_n$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$(\Delta_k)_n = \int_{T^2} \theta_{k+1}(x) e^{-inx} dx - \int_{T^2} \theta_k(x) e^{-inx} dx = \int_{T^2} [\theta_{k+1}(x) - \theta_k(x)] e^{-inx} dx. \quad (26)$$

$$\theta_{k+1}(x) - \theta_k(x) = [\theta(x, k+1) - \theta(x, k)] \psi(x). \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \theta(x, k+1) - \theta(x, k) &= (2\pi)^{-2} \sum_{A(j) < k+1} e^{ijx} - (2\pi)^{-2} \sum_{A(j) < k} e^{ijx} = \\ &= (2\pi)^{-2} \left\{ \sum_{A(j) < k} e^{ijx} + \sum_{A(j)=k} e^{ijx} - \sum_{A(j) < k} e^{ijx} \right\} = (2\pi)^{-2} \sum_{A(j)=k} e^{ijx} = \\ &= (2\pi)^{-2} \sum_{a(j)=\sqrt{k}} e^{ijx}. \end{aligned} \quad (28)$$

(28) ni (27) ga qo'yib:

$$\theta_{k+1}(x) - \theta_k(x) = (2\pi)^{-2} \sum_{a(j)=\sqrt{k}} e^{ijx} \psi(x). \quad (29)$$

(29) ni (26) ga qo'yib:

$$(\Delta_k)_n = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} \sum_{a(j)=\sqrt{k}} e^{-i(n-j)x} \psi(x) dx = (2\pi)^{-2} \sum_{a(n-j)=\sqrt{k}} \int_{T^2} \psi(x) e^{-ijx} dx = \sum_{a(n-j)=\sqrt{k}} \psi_j.$$

Shunday qilib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$(\Delta_k)_n = \sum_{a(n-j)=\sqrt{k}} \psi_j. \quad (30)$$

Agar $a(n-j) = \sqrt{k}$ tenglama yechimga ega bo'lmasa, u holda $(\Delta_k)_n = 0$ deb olamiz.

1-natijadan ko'rinib turibdiki, $(\theta_k)_n$ ni bahosi $a(n)$ bo'yicha tekis bajarilmaydi. Bu holatni kompensatsiya qilish uchun $(\Delta_k)_n$ son uchun yaxshi baho olish zarur. Buning uchun $A^j = \{k : j \leq \sqrt{k} < j+1\}$ sonli to'plamni quyidagicha $Q^j = \{k : k = j^2 + p, p = 0, 1, 2, \dots, 2j\}$ yozib olishimiz mumkin. Haqiqatan ham:

$$j \leq \sqrt{k} < j+1 \Rightarrow j^2 \leq k < j^2 + 2j + 1 \Rightarrow k = j^2 + p, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 2j.$$

Endi yuqorida kiritilgan Q^k to'plamga asoslanib $|(\Delta_k)_n|^2$ ni k bo'yicha quyidagicha yig'amiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(\Delta_k)_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} |(\Delta_{k^2+p})_n|^2. \quad (31)$$

3-lemma. $n \in Z^2$ bo'yicha quyidagi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} |(\Delta_{k^2+p})_n|^2 \leq C$$

tengsizlik tekis bajariladi.

Agar $(\Delta_{k^2+p})_n$ sonlarini p parametr bo'yicha mos tarzda guruhlansa, u holda yana ham kuchliroq natija olish mumkin. Bizning keyingi vazifamiz shu guruhlashni o'tkazishdan iborat.

x_0 orqali ushbu $\{x \in R^2 : a(x-n) \leq k+1\}$ to'plamning koordinata boshiga yaqin nuqtasini belgilaylik. $T_{x_0} - \{x \in R^2 : a(x-n) \leq k+1\}$ to'plamning x_0 nuqtasiga o'tkazilgan urinma bo'lsin. l orqali x_0 nuqtadan o'tuvchi va T_{x_0} urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni belgilaylik.

Quyidagi to'plamlarni tuzamiz:

$B_0 = \{x \in T_{x_0} : |x - x_0| < 1\}$ va $B_j = \{x \in T_{x_0} : \sqrt{j} \leq |x - x_0| < \sqrt{j+1}\}$ bu yerda $j = 1, 2, \dots, 2k-1$. C_j^k , $j = 1, 2, \dots, 2k-1$ asosi B_j hamda balandligi l to'g'ri chiziqqa parallel va uzunligi $|n|$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak bo'lsin. Ushbu $K = \{x \in R^2 : k \leq a(x-n) < k+1\}$ xalqani qaraylik va uni quyidagi to'plamlarga ajratamiz: $P_j^k = K \cap C_j^k$, $j = 0, 1, \dots, 2k-1$.

Q_q^k , $q = 0, 1, \dots, 2k-1$ to'plamini quyidagicha aniqlaymiz. Q_q^k shunday butun p , $0 \leq p \leq 2k-1$, sonlari to'plamiki, qaysiki $A(n-j) = k^2 + p$ tenglama P_q^k to'plamida yechimga ega. Agar biror p uchun P_n^k to'plam $A(n-j) = k^2 + p$ tenglamaning yechimlarini o'z ichiga olmasa, u holda Q_q^k to'plamiga bitta ixtiyoriy p sonini qo'shamiz, qaysiki oldingi Q_j^k , $j = 0, 1, \dots, q-1$ to'plamlariga kirmagan. Agar bunday p mavjud bo'lmasa, u holda Q_j^k , $j = q, q+1, \dots, 2k-1$ to'plamlarini bo'sh deb xisoblaymiz.

Bunday tanlashda Q_q^k to'plam ko'pi bilan $4\sqrt{q+1}$ elementlarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bunga ishonch xosil qilish uchun P_q^k to'plamning Ox_1 o'qiga proeksiyasini uzunligi $2\sqrt{q+1}$ dan oshib ketmasligini ko'rsatish yetarli. O'z navbatida, agar $j \in P_q^k$ da har bir tayinlangan p uchun $A(n-j) = k^2 + p$ tenglamaning yechimi mavjud bo'lsa, qaysiki j ning birinchi koordinatasi j_1 , $[2\sqrt{q+1}]$ dan kichik bo'lgan turli qiymatlar qabul qiladi ($[a]$ - a butun qismi). Agarda p , 0 dan $2k-1$ gacha o'zgarsa, har bir j_1 soni uchun bu hol ko'pi bilan 2 marta takrorlanishi mumkin. O'z navbatida, har bir p parametr uchun Q_q^k to'plam ko'pi bilan $4[\sqrt{q+1}]$ ta elementlarga ega bo'lishi mumkin.

Q_q^k to'plamni bunday tanlashda biz quyidagi xulosaga ega bo'lamiz.

4-lemma. $q = 0, 1, \dots, 2k-1$ va $S_p = \{j \in Z^2 : A(n-j) = k^2 + p\}$ bo'lsin, bunda $p = 0, 1, \dots, 2k$.

Agar:

1) $a(n) \geq k+1$ bo'lsa, u holda

$$\min_{j \in S_p, p \in Q_q^k} |j| \geq \sqrt{(a(n) - k - 1)^2 + q} \quad (32)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi;

2) $k < a(n) < k+1$ bo'lsa, u holda

$$\min_{j \in S_p, p \in Q_q^k} |j| = \sqrt{q} \quad (33)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi;

3) $a(n) \leq k$ bo'lsa, u holda

$$\min_{j \in S_p, p \in Q_q^k} |j| \geq \frac{1}{2} \sqrt{(a(n) - k)^2 + q} \quad (34)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Lemmani isbot qilish, ushbu $f(j) = |j|$ butun koordinatali funksiyaning P_q^k to'plamida eng kichik qiymatini topish bilan bir xil. Buning uchun P_q^k to'plamining koordinata boshiga eng yaqin nuqtasini topib, $f(j)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini topish yetarli.

1) $a(n) \geq k+1$ bo'lsin. Bu holda kordinata boshidan B_q to'plamgacha bo'lgan masofa ga teng bo'lishini osongina ko'rish mumkin.

2) $k < a(n) < k+1$ bo'lsin. Bu holda, koordinata boshidan P_q^k to'plamigacha bo'lgan eng qisqa masofa bu koordinata boshidan C_q^k to'g'ri to'rtburchakkacha bo'lgan masofadir, vaholanki, bu masofa $\sqrt{q}$ ga tengdir. Shunday qilib, bu hol uchun ham 4-lemma o'rinlidir.

3) $a(n) \leq k$ bo'lsin. Bu holda koordinata boshidan P_q^k to'plamigacha bo'lgan eng qisqa masofa, C_q^k bilan $a(n-j) = k$ sirtning kesishish nuqtasigacha bo'lgan masofadir. Bu holda ham isbot 1) qismi kabi isbotlanadi. Shunday qilib, 4-lemma to'liq isbotlandi. ♦

5-lemma. *Ihtiyoriy l natural son uchun shunday c_l o'zgarmas son mavjudki, quyidagi*

$$\sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})_n|^2 \leq \frac{c_l}{(1 + |a(n) - k|)^l} \quad (35)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $a(n) \geq k+1$ bo'lsin. $(\Delta_j)_n$ ni (30) tenglik bilan aniqlangan ta'rifga ko'ra quyidagini xosil qilamiz:

$$\sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})|^2 \leq c \sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})| = c \sum_{p \in Q_q^k} \left| \sum_{a(n-j)=k^2+p} \psi_j \right| \leq c \sum_{p \in Q_q^k} \sum_{a(n-j)=k^2+p} |\psi_j|. \quad (36)$$

4-lemmaning 1) qismiga ko'ra, quyidagi baho

$$\sum_{p \in Q_q^k} \sum_{a(n-j)=k^2+p} |\psi_j| \leq \sum_{|j| \geq \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}} |\psi_j| \quad (37)$$

o'rinli. (37) da ψ_j uchun o'rinli bo'lgan (25) tengsizlikdan foydalanib, ushbu tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})_n|^2 \leq c \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} \sum_{a(n-j)=k^2+p} |\psi_j| \leq \\ & \leq c \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{|j| \geq \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}} |\psi_j| \leq c \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{|j| \geq \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}} \frac{c_l}{(1 + |j|)^l} \leq \\ & \leq c \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{|j| \geq \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}} \frac{c_l}{\left(1 + \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}\right)^l} \leq \\ & \leq c \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{|j| \geq \sqrt{(a(n)-k-1)^2+q}} \frac{c_l}{(1 + a(n) - (k+1))^l} \leq \frac{c_l}{(1 + a(n) - k)^l}. \end{aligned}$$

Boshqa hollarda ham 5-lemma xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. 5-lemma isbotlandi. ♦

5-lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi:

2-natija. *Quyidagi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})_n|^2 \leq c \quad (38)$$

tengsizlik n bo'yicha tekis bajariladi.

Endi $(\theta_j)_n$ Furje koeffitsientlariga qaytamiz. 1-lemmadan quyidagi bahoni olamiz.

6-lemma. *Ushbu*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leq c \quad (39)$$

tengsizlik n bo'yicha tekis bajariladi.

Isbot. Yuqorida Q_q^k to'plamning elementlari soni $4 \lfloor \sqrt{q+1} \rfloor$ dan oshib ketmasligi aytilgan edi. Ushbu mulohaza va 1-lemmaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_l}{(1 + |a(n) - k|)^l} \sum_{q=0}^{2k-1} \frac{4 \lfloor \sqrt{q+1} \rfloor}{(q+1)^2} \leq c.$$

6-lemma isbotlandi. ♦

2-teoremani isboti

Endi $\Delta_j(x) = \theta_{j+1}(x) - \theta_j(x)$ bo'lsin. Bu tenglikni har ikkala tomoniga $2\theta_j(x)$ ni qo'shamiz:

$$\theta_{j+1}(x) + \theta_j(x) = \Delta_j(x) + 2\theta_j(x)$$

yoki

$$\theta_{j+1} * f + \theta_j * f = \Delta_j * f + 2\theta_j * f. \quad (40)$$

Tushinarlikli $\{a_q\}$ ketma-ketlik uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sum_{j=0}^{q-1} (a_{j+1}^2 - a_j^2) = a_q^2 - a_0^2 = a_q^2. \quad (41)$$

Bu yerda $a_0 = 0$ deb qabul qilamiz (bizning holda bu bajariladi $a_0 = \theta_0 * f = (\theta(0, x) \cdot \psi(x)) * f = [\theta(0, x) = 0] = 0$).

(40) ni har ikkala tomonini $\Delta_j * f = \theta_{j+1} * f - \theta_j * f$ ga ko'paytiramiz:

$$[\theta_{j+1} * f]^2 - [\theta_j * f]^2 = [\Delta_j * f]^2 + 2[\Delta_j * f][\theta_j * f].$$

Oxirgi tenglikni j bo'yicha 0 dan $q-1$ gacha yig'ib va chap tomonida (41) tenglikdan foydalanib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$[\theta_q * f]^2 = \sum_{j=0}^{q-1} [\Delta_j * f]^2 + 2 \sum_{j=0}^{q-1} [\Delta_j * f][\theta_j * f]. \quad (42)$$

(42) tenglikka ko'ra, ushbu tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |\theta_q * f|^2 &\leq \sum_{j=0}^{q-1} |\Delta_j * f|^2 + 2 \sum_{j=0}^{q-1} |\Delta_j * f| |\theta_j * f| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j * f|^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j * f| |\theta_j * f| = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j * f|^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} \sum_{p \in Q_q^k} |\Delta_{k^2+p} * f| (q+1) \times |\theta_{k^2+p} * f| (q+1)^{-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

(43) tengsizlikni har ikkala tomonidan supremum olib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\sup_{q>0} |\theta_q * f|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Delta_j * f|^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} \sum_{p \in Q_q^k} |\Delta_{k^2+p} * f| (q+1) \times |\theta_{k^2+p} * f| (q+1)^{-1}. \quad (44)$$

(44) tenglikni T^2 bo'yicha integrallab va Parseval tenglidani foydalanib, 1- qo'shiluvchining yig'indi ostidagi ifoda uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\int_{T^2} |(\Delta_j * f)(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (\Delta_j * f)_n^2 \leq [(\Delta_j * f)_n \leq (\Delta_j)_n \cdot f_n] \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |(\Delta_j)_n|^2 \cdot |f_n|^2. \quad (45)$$

Ikkinchi qo'shiluvchida esa dastlab, ushbu $2ab \leq a^2 + b^2$ tengsizlikni qo'llab:

$$2 |\Delta_{k^2+p} * f| (q+1) \times |\theta_{k^2+p} * f| (q+1)^{-1} \leq (q+1)^2 |\Delta_{k^2+p} * f|^2 + (q+1)^{-2} |\theta_{k^2+p} * f|^2,$$

so'ngra bu tengsizlikni ham har ikkala tomonini T^2 bo'yicha integrallab va yuqoridagiga o'xshash baholab, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{T^2} |(\Delta_{k^2+p} * f)(x)| (q+1) \times |(\theta_{k^2+p} * f)(x)| (q+1)^{-1} dx \leq \\ & \leq \sum_{n \in Z^2} f_n^2 (q+1)^2 |(\Delta_{k^2+p})_n|^2 + \sum_{n \in Z^2} f_n^2 (q+1)^{-2} |(\theta_{k^2+p})_n|^2. \end{aligned} \quad (46)$$

(45) va (46) larga ko'ra (44) ni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \sup_{q>0} |(\theta_q * f)(x)|^2 dx & \leq \sum_{n \in Z^2} f_n^2 \sum_{j=1}^{\infty} |(\Delta_j)_n|^2 + \sum_{n \in Z^2} f_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Delta_{k^2+p})_n| + \\ & + \sum_{n \in Z^2} f_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\theta_{k^2+p})_n|. \end{aligned} \quad (47)$$

(47) ni o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi uchun 3-lemmani ikkinchi qo'shiluvchi uchun 5-lemmani va uchinchi qo'shiluvchi uchun 6-lemmani qo'llab va yana Parseval tengligidan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\int_{T^2} \sup_{q>0} |(\theta_q * f)(x)|^2 dx \leq c \|f\|_{L_2(T^2)}.$$

2- teorema isbotlandi. ♦

1-teoremani isboti

$x \in \Omega$ da $f(x) = 0$ bo'lsin, bu yerda $\Omega \subset T^2$ biror ochiq to'plam. $f(x) \in C_0^\infty(T^2)$ bo'lsin, u holda ushbu $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda f(x) = f(x)$ tenglik $x \in T^2$ bo'yicha tekis bajariladi. Endi $f(x) \in L_2(T^2)$ bo'lsin. Ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini tayinlaymiz. $C_0^\infty(T^2)$ fazosi $L_2(T^2)$ da zich, u holda shunday $g \in C_0^\infty(T^2)$ mavjudki, ushbu $\|f - g\|_{L_2(T^2)} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $S_\lambda g$ ni $g(x)$ ga T^2 da tekis yaqinlashishiga ko'ra shunday $M = M(\varepsilon)$ soni mavjudki, barcha $\lambda > M$ lar uchun quyidagi

$$|S_\lambda g(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad x \in T^2$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

U holda, $\lambda > M$ lar uchun quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$|S_\lambda f - f| \leq |S_\lambda(f - g)| + |S_\lambda g - g| + |f - g| \leq S_*(f - g) + \varepsilon + |f - g|.$$

(4) tengsizlikdan foydalanib, quyidagi

$$\| \sup_{\lambda > M} |S_\lambda f - f| \|_{L_2(\Omega)} = \| \sup_{\lambda > M} |S_\lambda f| \|_{L_2(\Omega)} \leq c \|f - g\|_{L_2(T^2)} + \varepsilon_1 + \|f - g\|_{L_2(T^2)} < \varepsilon$$

tengsizlikni xosil qilamiz.

O'z navbatida, oxirgi tengsizlikdan T^2 dagi ihtiyoriy Ω uchun ushbu

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \| \sup_{\lambda > M} |S_\lambda f| \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

munosabat o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Oxirgi munosabat $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda f(x) = 0$ tenglikni Ω da deyarli bajarilishini anglatadi. Shunday qilib, 1-teorema isbotlandi. ♦

ADABIYOTLAR

1. V. A. Il'in. Generalized interpretation of the principle of localization for Fourier series in fundamental function systems, Siberian Math. J., 9:5 (1968), 812-820.
2. R. R. Ashurov. Generalized Localization and Summability Almost Everywhere of Multiple Fourier Series and Integrals, J Math Sci, 278:3 (2024), 408-425.

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучается задача почти всюду сходимости последовательности эллиптических частичных сумм рядов Фурье в заданной области, исходя из условия, что носитель разлагаемой функции лежит вне этой области. Эту проблему обычно называют задачей обобщенной локализации.

Ключевые слова: Ряды Фурье, эллиптических частичных суммы, обобщенная локализация, максимальный оператор.

RESUME

In this paper, we study the problem of almost everywhere convergence of a sequence of elliptic partial sums of Fourier series in a given domain, based on the condition that the support of the function being expanded lies outside this domain. This problem is usually called the problem of generalized localization.

Key words: Fourier series, elliptic partial sums, generalized localization, maximal operator.

UDC 531:621-752:681

**NOMUKAMMAL ELASTIK STERJENNING CHIZIQLIMAS TEBRANISHLARI
USTUVORLIGI****DUSMATOV O. M.**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI, SAMARQAND
dusmatov62@bk.ru**XODJABEKOV M. U.**SAMARQAND DAVLAT ARXITEKTURA-QURILISH UNIVERSITETI, SAMARQAND
uzedu@inbox.ru**KASIMOVA F. U.**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI, SAMARQAND,
fkasimova988@gmail.com

REZYUME

Ushbu ishda kinematik qo'zg'alishlarda gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjenning chiziqlimas tebranishlari ustuvorligini tekshirish masalasi qaralgan. Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidan foydalanilib, ustuvorlik shartlari analitik ko'rinishda aniqlangan, hamda ustuvorlik sohalari va chegaralari tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: nomukammal, elastik, sterjen, gisterezis, tebranish, amplituda-chastota xarakteristikasi, ustuvorlik sharti.

Kirish. Zamonaviy texnika va texnologiyalardagi: mashinalar, mexanizmlar, qurilmalar va ularning elementlari materiallaridagi chiziqlimas dissipativ xarakteristikalarini hisobga olgan holda tebranishlarini o'rganish va ustuvorligini tekshirish natijasida dinamik xarakteristikalarini aniqlash uzoq muddat samarali ishlashini ta'minlash nuqtai nazaridan dolzarb muammolardan hisoblanadi.

Taqsimlangan parametrli sistemalarning chiziqlimas xarakteristikalarini hisobga olgan holda ularning tebranishlarini matematik modellashtirish va ustuvorligini tekshirishga oid ko'plab ilmiy tadqiqod ishlari mavjud.

[1]-ishda bir uchidan boshlab qalinligi bir xilda kamayib boradigan sterjenning ko'ndalang tebranishlari ko'rib chiqilgan. Tebranishlar tezligi tahlil qilingan. Olingan differensial tenglamalar aniq yechimga ega ekanligi ko'rsatilgan. Bu yechimlar asosida qalinligi o'zgarishi parabolik bo'lmaganda sterjen tenglamasini yechish uchun yangi usul taklif etilgan, xulosalar berilgan.

[2]-ishda o'zgaruvchan ko'ndalang kesimli sterjenlarning tebranishlarini tahlil qilishning sonli usullari keltirilgan. Ostrogradskiy - Gamilton printsipi sterjen bo'ylama, buralma va ko'ndalang tebranishlari tenglamalarini olish uchun qo'llanilgan. Turli xil chegaraviy shartlarda differensial hisoblashlar usullari bilan berilgan chegaraviy masalalar yechilgan, tahlil qilingan.

[3]-ishda diskret va uzluksiz sistemalarning chiziqli bo'lmagan erkin va majburiy tebranishlari o'rganilgan. Sistemalar Lagranj tenglamalari yordamida matematik modellashtirilgan, yechish metodikalari ishlab chiqilgan.

[4]-ishda chiziqli bo'lmagan sistemalarning harakat ustuvorligi parametrlarining o'zgarishiga bog'liq holda nazariy o'rganilgan. Sistema harakatining ustuvor va ustuvor bo'lmagan sohalari ajratishga doir teoremlar keltirilgan. Harakati davriy koeffisientli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar bilan ifodalangan sistemalarning harakat ustuvorligi tahlil qilingan.

[5]-ishda chiziqli bo'lmagan sistemalarni tebranma harakatlarini tekshirishda qo'llaniladigan garmonik balans usuli haqida nazariy ma'lumotlar berilgan. Sistema harakat differensial tenglamasidagi chiziqli bo'lmagan koeffisientlarning xarakteri tahlil qilingan. Bundan tashqari gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikaga ega bo'lgan sistemalar uchun ularning xarakteristik tenglamasini aniqlash usuli ko'rsatilgan, asoslab berilgan.

[6-13]-ishlarda turli xil qo'zg'alishlar ta'siridagi chiziqli bo'lmagan sistemalar harakat ustuvorligini tekshirishning nazariy asoslari va qo'llanilishi keltirilgan, chiziqlimas xarakteristikalarini chiziqlashtirish masalalari qarang.

Nomukammal elastik - gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjenni kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi tebranishlarini matematik modellashirish va statsionar harakatlari ustuvorligini turli chegaraviy shartlarda tekshirish yechilishni talab etadigan dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Masalaning qo'yilishi va yechish metodikasi. Ushbu ishda ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjenning kinematik qo'zg'alishlardagi ko'ndalang tebranishlarini ustuvorligini tekshirish masalasini qaraymiz.

Gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali elastik sterjenning kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi ko'ndalang tebranishlarining keltirilgan harakat differensial tenglamasi asos tezlanishini $W_0 = -\varepsilon p_0 \cos \omega t$ ifodasini hisobga olganda quyidagicha bo'ladi (εp_0 va ω - mos ravishda asos tezlanishining amplitudaviy qiymati va chastotasi) [14]:

$$\ddot{q}_i + \{1 + N_* + jN_{**}\} p_i^2 q_i = d_i \varepsilon p_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

bunda

$$\begin{aligned} N_* = & -\eta_1 C_0 - \frac{3E\eta_1}{\rho F d_{2i} p_i^2} \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \int_0^l I(x) u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx + \\ & + \frac{E}{\rho F d_{2i} p_i^2} \int_0^l \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left[1 - \eta_1 C_0 - 3\eta_1 \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right] dx + \\ & + \frac{2E}{\rho F d_{2i} p_i^2} \int_0^l \frac{\partial I(x)}{\partial x} u_i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} [1 - \eta_1 C_0 - 3\eta_1 \times \right. \\ & \times \left. \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k] \right] dx; \\ N_{**} = & C_0 \eta_2 + \frac{3E\eta_2}{\rho F d_{2i} p_i^2} \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \int_0^l I(x) u_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right) dx + \\ & + \frac{E}{\rho F d_{2i} p_i^2} \int_0^l \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left[C_0 \eta_2 + 3\eta_2 \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right] dx + \\ & + \frac{2E}{\rho F d_{2i} p_i^2} \int_0^l \frac{\partial I(x)}{\partial x} u_i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \left[C_0 \eta_2 + 3\eta_2 \sum_{k=1}^n C_k q_{ia}^k \frac{h^k}{2^k(k+3)} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right|^k \right] \right] dx; \end{aligned}$$

$q_i(t)$ - vaqt funksiyasi; $j^2 = -1$; E - elastiklik moduli; $\eta_1, \eta_2 = \eta_{22} \text{sign}(\omega)$; lar sterjen materialining elastik dissipativlik xossalriga bog'liq bo'lgan doimiy koeffitsientlar bo'lib, gisterezis sirtmog'idan aniqlanadi; $C_0, C_1, \dots, C_n$ - gisterezis tugunining tajribadan aniqlanadigan parametrlari bo'lib, sterjen materialining dempferlovchi xossalriga bog'liq [11]; $l = \text{const}$, $b = b(x)$ va $h = \text{const}$ - mos ravishda sterjenning uzunligi, eni va qalinligi; ρ, F - mos ravishda sterjen materialining zichligi va ko'ndalang kesim yuzi; p_i, u_i - sterjenning xususiy chastotalar va tebranish formalari; $I = \frac{bh^3}{12}$; $d_i = \frac{d_{1i}}{d_{2i}}$; $d_{1i} = \int_0^l u_i dx$; $d_{2i} = \int_0^l u_i^2 dx$; $q_{ia} = |q_i|$.

(1) differensial tenglamaning yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$q_i = D e^{-j\omega t} + P e^{-j\omega t}, \quad (2)$$

bu yerda $D = D(t)$; $P = P(t)$.

(2) ko'rinishda izlanayotgan yechimlarning amplitudaviy qiymatlari $q_{ia} = 2\sqrt{DP}$ shartni qanoatlantiradi.

(1) harakat differensial tenglamani (2) yechimni hisobga olib, standart ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\begin{aligned}\dot{D} &= \frac{1}{2j\omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon p_0 d_i (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) - (N_* + jN_{**}) p_i^2 q_i - (p_i^2 - \omega^2) q_i \right) e^{-j\omega t}; \\ \dot{P} &= -\frac{1}{2j\omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon p_0 d_i (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + (-N_* + jN_{**}) p_i^2 q_i - (p_i^2 - \omega^2) q_i \right) e^{j\omega t}.\end{aligned}\quad (3)$$

(3) differensial tenglamalarni o'rtalashtiramiz. U holda

$$\begin{aligned}\dot{D} &= \frac{1}{2j\omega} \left[\frac{1}{2} \varepsilon p_0 d_i - (N_* + jN_{**}) p_i^2 D - (p_i^2 - \omega^2) D \right]; \\ \dot{P} &= -\frac{1}{2j\omega} \left[\frac{1}{2} \varepsilon p_0 d_i + (-N_* + jN_{**}) p_i^2 P - (p_i^2 - \omega^2) P \right].\end{aligned}\quad (4)$$

$\dot{D} = \dot{P} = 0$ shart asosida (4) differensial tenglamalardan D_0 va P_0 statsionar yechimlarni aniqlanadi va ularga mos keladigan amplitudalarning qiymatlari quyidagicha ifodalanadi:

$$q_{ia} = \frac{\varepsilon p_0 d_i}{\sqrt{[(1 + N_*) p_i^2 - \omega^2]^2 + [N_{**} p_i^2]^2}}. \quad (5)$$

Aniqlangan yechimlar ustuvorligini tekshirish maqsadida (4) differensial tenglamalarni variatsialaymiz. Natijada quyidagi xarakteristik tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\lambda^2 + l_1 \lambda + l_0 = 0, \quad (6)$$

bunda

$$l_1 = 2(p_i^2 - \omega^2) + \left(2N_* + q_{ia} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} \right) p_i^2; \quad (6')$$

$$l_0 = N_* \left(N_* + q_{ia} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} \right) p_i^4 + \left(2N_* + q_{ia} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} \right) p_i^2 (p_i^2 - \omega^2) + (p_i^2 - \omega^2)^2. \quad (6'')$$

Sterjenning chiziqlimas statsionar tebranishlari ustuvor bo'lishi uchun (6) xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi yetarli bo'ladi. Gurvis kriteriysiga asosan (6) xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishini ko'rsatamiz.

$$l_1 > 0; \quad l_0 > 0. \quad (7)$$

(7) tengsizliklarning birinchi tengsizligini tahlil qilamiz. Buning uchun uni (6') ifodasini qo'yidagicha yozamiz:

$$1 + N_* + \frac{q_{ia}}{2} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} > \frac{\omega^2}{p_i^2}. \quad (8)$$

(8) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda musbatligidan, chap tomonidagi ifoda ham musbatligi kelib chiqadi, ya'ni

$$1 + N_* + \frac{q_{ia}}{2} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} > 0. \quad (9)$$

(7) tengsizliklarning ikkinchi tengsizligi tahlil qilsak, u quyidagi shart bajarilganda o'rinli bo'ladi.

$$\left(2N_* + q_{ia} \frac{\partial N_*}{\partial q_{ia}} \right)^2 - 4 \left(N_* \frac{\partial q_{ia} N_*}{\partial q_{ia}} + N_{**} \frac{\partial q_{ia} N_{**}}{\partial q_{ia}} \right) > 0. \quad (10)$$

(10) shart gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjenning kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi chiziqlimas stasionar tebranma harakatlarining ustuvorlik sharti hisoblanadi. Bu ifoda sistema parametrlarining turli qiymatlarida ustuvorlik sohalari hamda chegaralarini aniqlash imkonini beradi.

Sterjenning chap uchi qistirib mahkamlangan va bir uchi erkin bo'lgan holni qaraymiz. Bu hol uchun sterjenning ko'chishini quyidagicha olingan:

$$w_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) q_i(t). \quad (11)$$

Xususiy tebranishlar formalari quyidagicha olamiz:

$$u_i(x) = \Delta_1 K_1(k_i x) + \Delta_2 K_2(k_i x) + \Delta_3 K_3(k_i x) + \Delta_4 K_4(k_i x), \quad (12)$$

bunda $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ - chegaraviy shartlardan aniqlanuvchi koeffitsiyentlar; $K_1(k_i x), K_2(k_i x), K_3(k_i x), K_4(k_i x)$ - Krilov funksiyalari, ya'ni

$$\begin{aligned} K_1(k_i x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_i x) + \cos(k_i x)); K_2(k_i x) = \frac{1}{2} (\sinh(k_i x) + \sin(k_i x)); \\ K_3(k_i x) &= \frac{1}{2} (\cosh(k_i x) - \cos(k_i x)); K_4(k_i x) = \frac{1}{2} (\sinh(k_i x) - \sin(k_i x)); \end{aligned} \quad (13)$$

$$k_i = \left(\frac{\rho F}{EI} p_i^2 \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Qaralayotgan masala uchun chegaraviy shartlarni yozamiz.
 $x = 0$ bo'lgan sterjen uchi uchun:

$$w_i = w_0; \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

bunda w_0 - asosning ko'chishi.
 $x = l$ bo'lgan sterjen uchi uchun:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI(x) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (15)$$

Bu chegaraviy shartlarga asosan chastota tenglamasini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$1 + \cosh(k_i l) \cos(k_i l) = 0. \quad (16)$$

1-rasmda (16) chastota tenglamasining grafigi (a) va uning birinchi (b) va ikkinchi (c) nollari keltirilgan. Bu grafiklardan $k_1 = 7.500416275$ va $k_2 = 18.77635$ ekanligini aniqlash mumkin.

Natijada tebranishlarning birinchi va ikkinchi xususiy formalari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 999.668759(\cosh(7.500416275x) - \cos(7.500416275x)) - \\ &\quad - 773.8523515(\sinh(7.500416275x) - \sin(7.500416275x)); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= -2.81762557 \cdot 10^5 (\cosh(18.7764x) - \cos(18.7764x)) + \\ &\quad + 2.869669872 \cdot 10^5 (\sinh(18.7764x) - \sin(18.7764x)). \end{aligned} \quad (18)$$

$k_1 = 7.500416275$ va $k_2 = 18.77635$ qiymatlar asosida sterjenning xususiy chastotalarini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik sterjen 40X markali po'lat materialli bo'lsin. U holda

$$E = 2.08 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}; \rho = 7810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

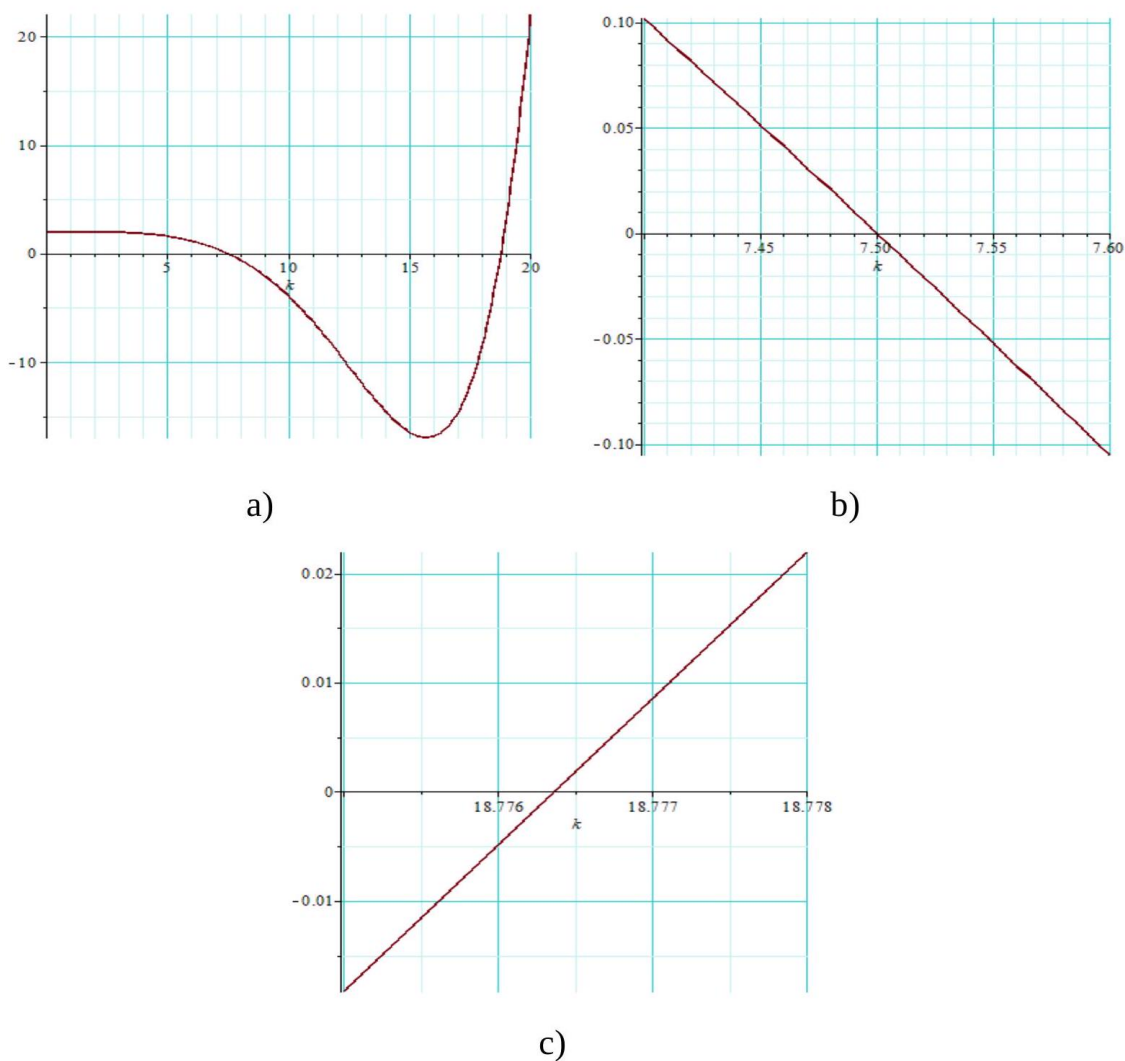


Рис. 1: (16) tenglamani aniqlovchi funksiyaning grafigi.

Birinchi va ikkinchi tebranishlar formalariga mos keladigan xususiy chastotalar quyidagicha bo'ladi:

$$p_1 = 167.6163034 \frac{1}{s},$$

$$p_2 = 1050.431816 \frac{1}{s}.$$

40X markali po'lat material uchun dissipativ xarakteristikalarini ifodalovchi parametrlarni quyidagicha olamiz [11]:

$$C_0 = 0; \eta_1 = \frac{3}{4}; \eta_2 = \frac{1}{\pi};$$

$$K = 4.805 \cdot 10^{-3} q_{1a} + 2.2787 \cdot q_{1a}^2 + 95.934 \cdot q_{1a}^3.$$

Sterjen eni va balandligi quyidagicha bo'lsin:
 Ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan hol uchun:

$$\begin{aligned}
 b &= b_* + b_{*1} \sin(n_* x) = 0.02 + 0.01 \sin(80x) m; h = 2 \cdot 10^{-3} m. \\
 I_{1l} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{(b_* + b_{*1} \sin(n_* x)) h^3}{12} = \frac{(0.02 + 0.01 \sin(20)) \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{12} = \\
 &= \frac{0.02912945251 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 1.941963501 \cdot 10^{-11} m^4;
 \end{aligned}$$

Asoslari $b_* + b_{*1} \sin(n_* x)$ qonuniyat bilan o'zgarayotgan S_l yuzini hisoblasak,

$$\begin{aligned}
 S_l &= 2 \int_0^l (b_* + b_{*1} \sin(n_* x)) dx = 2 \int_0^{0.25} (0.02 + 0.01 \sin(80x)) dx = \\
 &= 2 \left(0.02x - \frac{0.01}{80} \cos(80x) \right) \Big|_0^{0.25} = 2(0.02 \cdot 0.25 - \\
 &\quad - \frac{0.01}{80} \cdot \cos(20) + 0.01) = 0.02989797948 m^2.
 \end{aligned}$$

Ko'ndalang kesimi o'zgarmas bo'lgan hol uchun:

$$I_{2l} = \frac{b_0 h^3}{12} = \frac{0.02 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 1.333333333 \cdot 10^{-11} m^4.$$

Parametrlarning keltirilgan qiymatlari asosida kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan elastik sterjen ko'ndalang tebranishlarida olingan (5) amplituda chastota xarakteristikasi va (10) ustuvorlik chegarasi ifodalarining grafiklarini chizamiz ($\varepsilon p_0 = 0.0001 m$).

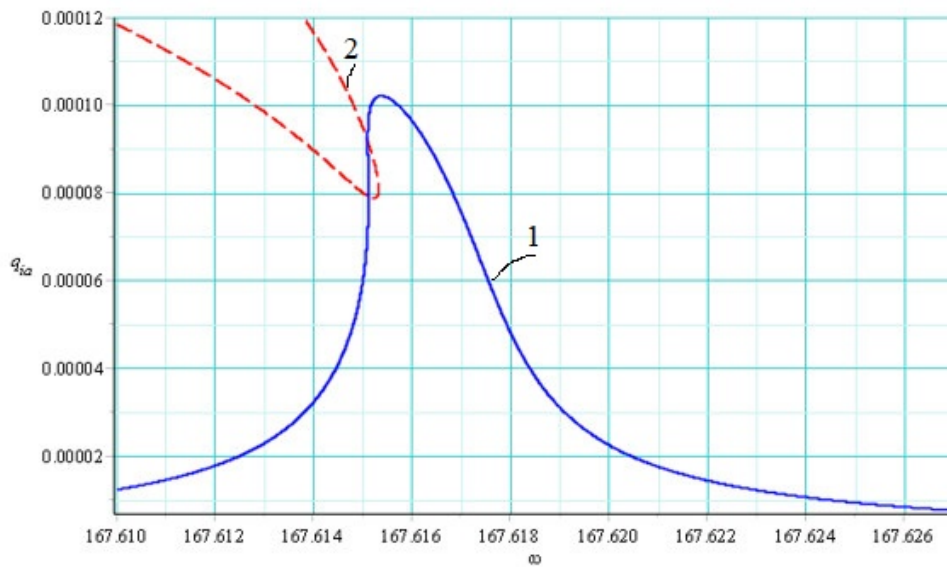


Рис. 2: Ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjen uchun (5) amplituda chastota xarakteristikasi (1-chiziq) va (10) ustuvorlik chegarasi (2-chiziq) ifodalarining grafiklari

2-rasmda ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjen uchun (5) amplituda chastota xarakteristikasi (1-chiziq) va (5) ustuvorlik chegarasi (2-chiziq) ifodalarining chastotaga bog'liq holda o'zgarish grafiklari keltirilgan. Bunda ustuvorlik chegarasi bilan chegaralangan ichki soha noustuvor, tashqi soha uchuvor soha hisoblanadi. $q_{ia} \in [0.00008; 0.00009]$ amplitudalar sohasida rezonans chastotasi atrofida tebranishlar noustuvor bo'ladi.

Parametrlarning keltirilgan qiymatlari asosida kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi gisterezis tipidagi dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgarmas elastik sterjen ko'ndalang tebranishlari uchun (5) amplituda chastota xarakteristikasi va (10) ustuvorlik chegarasi ifodalarining grafiklarini chizamiz ($\varepsilon p_0 = 0.0001 \text{ m}$).

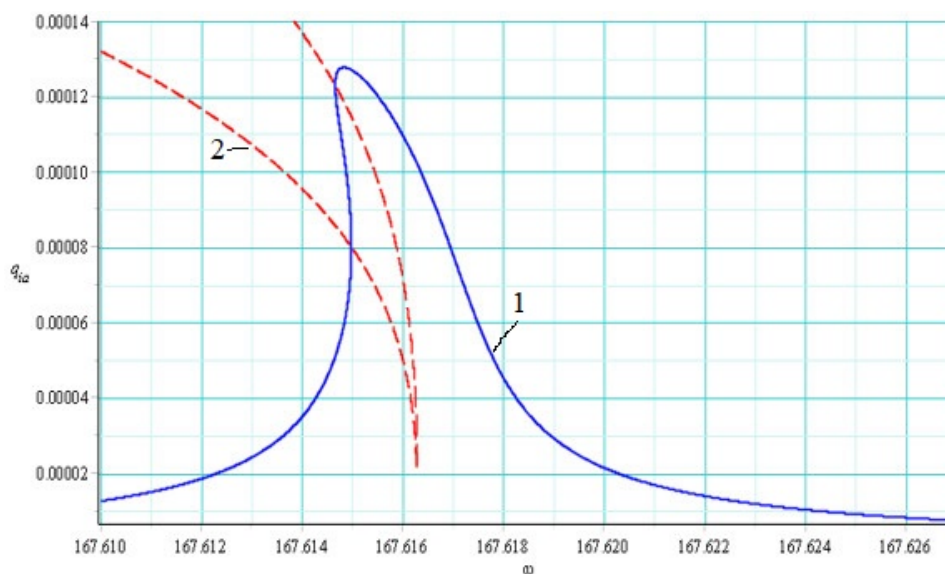


Рис. 3: Ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjen uchun (5) amplituda chastota xarakteristikasi (1-chiziq) va (10) ustuvorlik chegarasi (2-chiziq) ifodalarining grafiklari

3-rasmda ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjen uchun (5) amplituda chastota xarakteristikasi (1-chiziq) va (5) ustuvorlik chegarasi (2-chiziq) ifodalarining chastotaga bog'liq holda o'zgarish grafiklari keltirilgan. Bunda ustuvorlik chegarasi bilan chegaralangan ichki soha noustuvor, tashqi soha uchuvor soha hisoblanadi. $q_{ia} \in [0.00008; 0.00012]$ amplitudalar sohasida rezonans chastotasi atrofida tebranishlar noustuvor bo'ladi. 2 va 3 - rasmlarni taqqoslab, ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning noustuvor sohalari ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'ladi. Ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning amplituda-chastota xarakteristikalarining vertikalidan og'ishi ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'ladi. Ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning rezonans chastotasi atrofidagi amplitudalar ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'ladi.

Xulosa. Kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan sterjenning ko'ndalang tebranishlari ustuvorligi tekshirildi. Ustuvorlik shartlari, sohalari va chegaralari sistema parametrlariga bog'liq holda aniqlanib, sonli hisoblashlar asosida tahlil qilindi.

Ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning noustuvor sohalari ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'lishi, ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning amplituda-chastota xarakteristikalarining vertikalidan og'ishi ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'lishi hamda ko'ndalang kesimi o'zgarmas sterjenning rezonans chastotasi atrofidagi amplitudalar ko'ndalang kesimi o'zgaruvchi bo'lgan holga nisbatan katta bo'lishi ko'rsatildi.

ADABIYOTLAR

1. М.А. Миронов. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения. Акустический Журнал, 2017, том 63 № 1, с. 3-8.
2. A.T. Zhakash, E.A. Dzhakashova, O.M. Tursynbay. Numerical methods for calculating vibrations of straight rods of variable cross-section. International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. Volume 75, 2019, pp.64-66.

3. Kelly S.G. Mechanical vibrations: Theory and applications, Global Engineering press, USA, 2012, p.898.
4. Migdalovici M., Baran D. Theoretical research regarding any stability theorems with applications, Proceedings of the 14th international congress on sound and vibration, July 9-12, 2007, Cairns, Australia, pp.575-581.
5. Ramon H., Siller E. Nonlinear modal analysis methods for engineering structures. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, Imperial University of London, August 2004, p. 121.
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.:Гостехиздат, 1950. с. - 473.
7. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, - 1971. с. - 312.
8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. с. - 352.
9. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. - М.: АН СССР, 1962. с. - 176.
10. Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U. Exploration of stability of hysteresis type dynamic systems which are protected from vibrations// Proceedings of International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2011 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society // Samarkand city, JUNE 2011.- pp.114-117.
11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. - Киев: Наук.думка, 1971. с.- 327.
12. Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. - К.: Техника, 1997. с. - 204.
13. Павловский М.А., Рыжков Л.М., Дусматов О.М., Осипчук С.Н. Исследование устойчивости стационарных колебаний систем с несовершенной упругостью материала// Рассеяние энергии при колеб. мех. систем. - К.: Наук. Думка, 1989. с. 51-57.
14. Dusmatov O.M., Kasimova F.U. Vibration of hysteresis-type elastic dissipative characteristic of beam with variable cross section. Science and innovation international scientific journal. Volume 2, issue 11, 2023. pp. 220-225.

РЕЗЮМЕ

В этой работе рассмотрена задача исследованию устойчивости нелинейных колебаний стержня переменного поперечного сечения с диссипативными характеристиками гистерезисного типа при кинематических воздействиях. Используя метода Ляпунова по первому приближению определены условия устойчивости в аналитическом виде, а также проанализированы области и границы устойчивости.

Ключевые слова: несовершенный, упругий, стержень, гистерезис, колебание, амплитудно - частотная характеристика, условие устойчивости.

RESUME

In this paper, the problem of studying the stability of nonlinear vibrations of a beam of variable cross-section with dissipative characteristics of hysteresis type under kinematic excitations is considered. Using the Lyapunov method, the stability conditions are determined in analytical form as a first approximation, and the stability regions and boundaries are analyzed.

Key words: imperfect, elastic, beam, hysteresis, vibration, amplitude-frequency characteristic, stability condition.

UDC 004.94

2D MOORE CA WITH NEW BOUNDARY CONDITIONS AND ITS REVERSIBILITY

GAYBULLAEV R. K.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT

r.gaybullaev@nuu.uz

SOLIJANOVA G. O.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT

gulhayo.solijonova@mail.ru

USMONOV J. B.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT

javohir0107@mail.ru

Abstract

In this paper, we examine two-dimensional cellular automata with the Moore neighborhood under specific conditions. Specifically, we delve into the characterization of 2D linear cellular automata defined by the Moore neighborhood, considering mixed boundary conditions over the field $\mathbb{Z}_p$. Lastly, we present the conditions that lead to the reversibility of the obtained rule matrices for 2D finite CAs.

Key words: cellular automata, boundary conditions, rule matrix, reversibility.

Introduction

It is understood that a cellular automaton (CA) comprises a collection of cells organized in a grid with a specific shape. Each cell undergoes state changes over time according to predetermined rules influenced by the states of neighboring cells. Cellular automata (CAs) have been suggested for various applications including public-key cryptography, as well as in disciplines such as geography, anthropology, political science, sociology, physics, and others (see references [1], [2], [3]).

A system's configuration entails assigning states to all its cells. Each configuration dictates the subsequent one through a transition rule that operates locally, meaning a cell's state at time $(t + 1)$ is solely influenced by the states of certain neighboring cells at time t . Under certain boundary conditions and with a linear transition rule, various outcomes emerge (refer to [13]). Typically, 2D cellular automata are explored within triangular, square, hexagonal, and pentagonal lattices (see [4], [8], [10], [11], [12]).

The mathematical representation of 2D finite cellular automata enables the description of these studied systems. Of crucial importance is determining the reversibility or irreversibility of these automata. Reversibility is a critical characteristic signifying the absence of Gardens of Eden in cellular automata. A reversible cellular automaton ensures that each configuration possesses a unique predecessor. It has been established that determining the reversibility of cellular automata for dimensions equal to or greater than two is undecidable (see [8], [9], [10], [11], [13]). This indicates that, in general, deriving the inverse of a given cellular automaton for higher dimensions via an algorithm is unattainable due to its intricate structure. Consequently, it is evident that determining inverses or instances of reversibility for 2D finite cellular automata presents a formidable challenge in the broader context ([5]).

In this paper, we continue to study 2D CA for Moore neighbors on the square lattice with mixing boundary conditions in [7]. These CA are investigated under new types of boundary conditions with the p-state spin value case, i.e., over the field $\mathbb{Z}_p$. We obtain the transition rule matrices of the Moore finite CA over some mixed boundary conditions. Then, we give the conditions under which the obtained rule matrices of 2D finite CAs are reversible.

Preliminary

The 2D finite CA consists of $m \times n$ cells arranged in m rows and n columns, where each cell takes one of the values of the field $\mathbb{Z}_p$. From now on, we will denote 2D finite CA order to $m \times n$ by 2D CA _{$m \times n$} . A configuration of the system is an assignment of the states to all cells. Every configuration determines a next configuration via a linear transition rule that is local in the sense that the state of a cell at time $(t+1)$ depends only on the states of some of its neighbors at the time t using modulo p algebra.

The von Neumann and Moore neighborhood on CA lattice.

In 2D CA's theory, there are some classic types of neighborhoods, but in this paper we only restrict ourselves to the Moore neighborhood. This neighborhood was used in the well known Conway's Game of Life. It is similar to the notion of 8-connected pixels in computer graphics. In Figure 4, we illustrate the von Neumann and Moore neighborhoods. The von Neumann neighborhood the center cell is surrounded by four square cells (see Figure 4 (left)). The Moore neighborhood comprises eight square cells which surround the center cell $x_{(i;j)}$ (see Figure 4 (right)). From now on, we deal only with Moore neighborhood. Then the state $x_{i,j}^{(t+1)}$ of the cell $(i;j)$ th at time $(t+1)$ is defined by the local rule function $\psi : \mathbb{Z}_p^8 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ as follows:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(t+1)} &= \psi(x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j}, x_{i-1,j+1}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j-1}, x_{i,j-1}) \\ &= ax_{i-1,j-1}^{(t)} + bx_{i-1,j}^{(t)} + cx_{i-1,j+1}^{(t)} + dx_{i,j+1}^{(t)} + ex_{i+1,j+1}^{(t)} + fx_{i+1,j}^{(t)} \\ &\quad + gx_{i+1,j-1}^{(t)} + hx_{i,j-1}^{(t)} \pmod{p} \end{aligned} \quad (1)$$

where $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

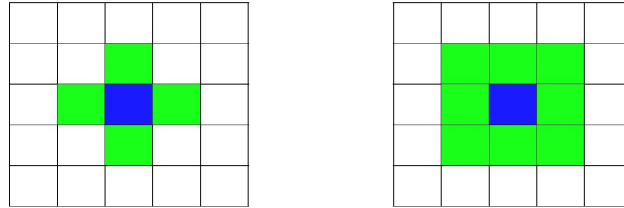


Рис. 4: von Neumann and Moore neighborhoods

The value of each cell for the next state may not depend upon all eight neighbors.

Remark 1. If we assume $a = c = e = g = 0$, then all obtained above results hold for von Neumann neighborhood.

Note that it is impossible to simulate a truly infinite lattice on a computer (unless the active region always remains finite). Therefore, we have to prescribe some boundary conditions (BC). Regarding the neighborhood of the boundary cells, four approaches exist:

- If the boundary cells are connected to 0-state, then CA is called *null boundary (NB) CA* (see Table 2A).
- If the boundary cells are adjacent to each other, then CA is called *periodic boundary (PB) CA* (see Table 2B).
- An *Adiabatic Boundary (AB) CA* is duplicating the value of the cell in an extra virtual neighbor (see Table 2C).
- A *Reflexive Boundary (RB) CA* is designed for the value of the left and right neighbors to be equal concerning the boundary cell (see Table 2D).

The rule matrix of Moore CA and mixed boundary condition

Now, we can characterize the rule matrix T_R under null boundary conditions. In order to characterize the corresponding rule, first we represent each state matrix of size $m \times n$ as a column vector of size $mn \times 1$. If the

0	0	0	0	0		$x(i+1,j+1)$	$x(i+1,j-1)$	$x(i+1,j)$	$x(i+1,j+1)$	$x(i+1,j-1)$
0				0		$x(i-1,j+1)$				$x(i-1,j-1)$
0		$\mathcal{CA}_{3 \times 3}$		0		$x(i,j+1)$		$\mathcal{CA}_{3 \times 3}$		$x(i,j-1)$
0	0	0	0	0		$x(i+1,j+1)$				$x(i+1,j-1)$
					(A)	$x(i-1,j+1)$	$x(i-1,j-1)$	$x(i-1,j)$	$x(i-1,j+1)$	$x(i-1,j-1)$
$x(i-1,j-1)$	$x(i-1,j-1)$	$x(i-1,j)$	$x(i-1,j+1)$	$x(i-1,j+1)$		$x(i,j)$	$x(i,j-1)$	$x(i,j)$	$x(i,j+1)$	$x(i,j)$
$x(i-1,j-1)$				$x(i-1,j+1)$		$x(i-1,j)$				$x(i-1,j)$
$x(i,j-1)$		$\mathcal{CA}_{3 \times 3}$		$x(i,j+1)$		$x(i,j)$		$\mathcal{CA}_{3 \times 3}$		$x(i,j)$
$x(i+1,j-1)$				$x(i+1,j+1)$		$x(i+1,j)$				$x(i+1,j)$
$x(i+1,j-1)$	$x(i+1,j-1)$	$x(i+1,j)$	$x(i+1,j+1)$	$x(i+1,j+1)$		$x(i,j)$	$x(i,j-1)$	$x(i,j)$	$x(i,j+1)$	$x(i,j)$
					(C)					

 Таблица 2: Boundary conditions on a 2D finite $\mathcal{CA}_{3 \times 3}$: (A) – null; (B) – periodic; (C) – adiabatic; (D) – reflexive.

same rule is applied to all the cells in each evaluation, then those CA is called *uniform or regular*. Throughout the paper we deal with uniform CA.

Thus, the problem of finding a rule matrix of the corresponding rule is taken from the space of $m \times n$ matrices to the space of $\mathbb{Z}_p^{mn}$. In order to describe this problem more details we define the following map:

$$\varphi: \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathbf{M}_{mn \times 1}(\mathbb{Z}_p)$$

which takes the t -th state $X^{(t)}$ given by

$$C(t) := \begin{pmatrix} x_{11}^{(t)} & x_{12}^{(t)} & \dots & x_{1n}^{(t)} \\ x_{21}^{(t)} & x_{22}^{(t)} & \dots & x_{2n}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1}^{(t)} & x_{m2}^{(t)} & \dots & x_{mn}^{(t)} \end{pmatrix} \longrightarrow X^{(t)} := (x_{11}^{(t)}, x_{12}^{(t)}, \dots, x_{1n}^{(t)}, \dots, x_{m1}^{(t)}, \dots, x_{mn}^{(t)})^T. \quad (2)$$

where the superscript T denotes the transpose and $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$ is the set of matrices with entries $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Thus, local rules will be assumed to act on $\mathbb{Z}_p^{mn}$ rather than $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$. The matrix $C(t)$ is called *the configuration matrix (or information matrix)* of the 2-D finite CA at the time t and $C(0)$ is the initial information matrix of the 2-D finite CA. Therefore, one can conclude that $\varphi(C(t)) = X^{(t)}$.

Using the identification (2), we can define

$$T \cdot X^{(t)} = X^{(t+1)} \pmod{p}.$$

Let $e_{i,j} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p^*)$ be the matrix units. Consider the following two sets:

$$X = \{e_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, \quad Y = \{e_{0,i}, e_{m+1,i}, e_{j,0}, e_{j,n+1}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

We define $\alpha, \eta, \pi, \rho: Y \rightarrow X$ mappings by the boundary conditions in the Table 2. Namely, α is adiabatic BC, η is null BC, π is periodic BC and ρ is reflexive BC.

Now consider a mapping $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ where $\Gamma = \{\alpha, \eta, \pi, \rho\}$. Then we study the CA under boundary conditions that depends on the mapping φ . In other words, the boundary cells are evaluated depending upon $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$ (see Figure 5). A mixed boundary condition is defined when the boundary sides of the lattice are not in the same boundary condition, that is, as in Figure 6. I, II, III, and IV type boundary conditions in Figure 6 are described one of the boundary conditions from the set Γ .

In the paper [6] for the bijective function φ (i.e. the boundary condition as the form (A) in Figure 6) the characterization problem of 2D finite von Neumann CA is completely solved. We divide the other forms of mixed boundary conditions into two groups. The first group of mixed boundary condition consists two elements of the set Γ . The second one contains three elements of Γ . As showed in Figure 6, the first group of mixed boundary condition is illustrated in three appearances, i.e. (D), (E) and (F). In this paper we shall plan to research CA with boundary conditions of forms (E) and (F).

The characterization of CA with boundary condition of the form (E)

$$\begin{array}{c}
 \varphi(\alpha) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\
 \hline
 x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & \cdots & x_{mn} \\
 \hline
 \end{array} \\
 \varphi(\rho) \quad \varphi(\eta) \\
 \varphi(\pi)
 \end{array}$$

Рис. 5: Mixed boundary conditions

Considering that Γ has four elements and the form (E), then 12 types of mixing boundary conditions can be present. First, we give the rule matrices of 2D CA under the boundary conditions of all possible cases in the form (E).

Let us define ψ_E is non-bijective maps on Γ as

$$\psi_E(\alpha) = \psi_E(\pi) = \eta, \quad \psi_E(\rho) = \psi_E(\eta) = \rho, \quad (3)$$

If we study Moore neighborhood under the condition (3) there is ambiguity with setting boundary condition in the cells $x_{0,0}$, $x_{0,n+1}$, $x_{m+1,0}$, $x_{m+1,n+1}$. In order to distinguish this unclearness on the condition (3) we fix null boundary conditions for those cells.

First, we use some denotations. By T we refer to the rule matrix 2D $\mathcal{CA}_{m \times n}$ under the null boundary condition and this matrix T with the order $mn \times mn$ is

$$T = \begin{pmatrix} A & B & O & O & \cdots & O & O & O \\ C & A & B & O & \cdots & O & O & O \\ O & C & A & B & \cdots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \cdots & C & A & B \\ O & O & O & O & \cdots & O & C & A \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned}
 A &= d \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i,i+1} + h \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i+1,i}, & B &= f \sum_{i=1}^n \epsilon_{i,i} + e \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i,i+1} + g \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i+1,i}, \\
 C &= b \sum_{i=1}^n \epsilon_{i,i} + c \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i,i+1} + a \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i+1,i},
 \end{aligned}$$

$\epsilon_{i,j} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$ are the unit matrices and $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

To establish the transition rule matrix T_ψ^E structure under the boundary conditions defined by (3), it is needed to specify the action of T_ψ^E on the basis matrices $e_{i,j}$, respectively. Firstly, let us take the linear transition T_ψ^E from $m \times n$ matrix space structure to itself. The images $T_\psi^E(e_{i,j})$ of $e_{i,j}$ are connected to the four nearest neighbor elements considering the Moore neighborhood. Note that the boundary condition ψ does not play role for non-border cells. Hence, $T_\psi^E(e_{i,j})$ elements are equal to a linear sum of its eight neighbor elements. Thus, for non-border elements we have

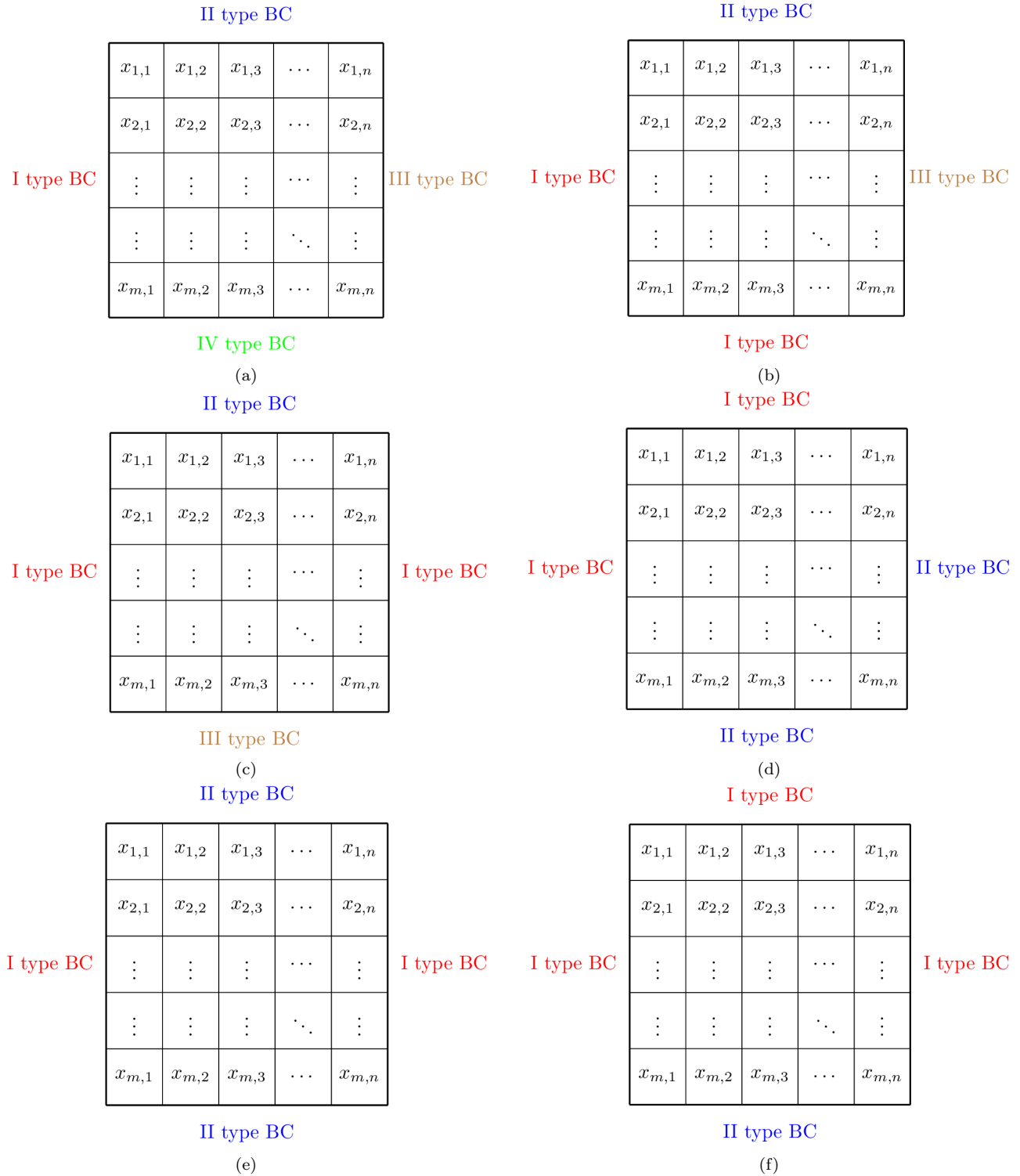


Рис. 6: Mixed boundary conditions: (A) all sides of the lattice have different types of boundary conditions; (B)-(C) three types of boundary conditions on the sides of the lattice; (D)-(E)-(F) two types of boundary conditions on the sides of the lattice.

$$T_{\psi}^E(e_{i,j}) = T(e_{i,j}) = ae_{i-1,j-1} + be_{i-1,j} + ce_{i-1,j+1} + de_{i,j+1} + ee_{i+1,j+1} + fe_{i+1,j} + ge_{i+1,j-1} + he_{i,j-1}. \quad (5)$$

Now, we define the action of T_ψ^E on the border elements. Border cells $e_{1,1}, e_{1,n}, e_{m,1}, e_{m,n}$ have five neighbors out of the configuration and cells $x_{0,0}, x_{0,n+1}, x_{m+1,0}, x_{m+1,n+1}$ are under null boundary conditions in mentioned above. Then we obtain

$$\begin{aligned} T_\psi^E(e_{1,1}) &= T(e_{1,1}) + b\psi(e_{0,1}) + c\psi(e_{0,2}) + h\psi(e_{1,0}) + g\psi(e_{0,2}), \\ T_\psi^E(e_{1,n}) &= T(e_{1,n}) + a\psi(e_{0,n-1}) + b\psi(e_{0,n}) + d\psi(e_{1,n+1}) + e\psi(e_{2,n+1}), \\ T_\psi^E(e_{m,1}) &= T(e_{m,1}) + a\psi(e_{m-1,0}) + d\psi(e_{m,0}) + f\psi(e_{m+1,1}) + e\psi(e_{m+1,2}), \\ T_\psi^E(e_{m,n}) &= T(e_{m,n}) + c\psi(e_{m-1,n+1}) + d\psi(e_{m,n+1}) + f\psi(e_{m+1,n}) + g\psi(e_{m+1,n-1}), \end{aligned}$$

where $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

Moreover, the border elements excepting $e_{1,1}, e_{1,n}, e_{m,1}, e_{m,n}$ have three neighbors out of the configuration. Thus, we get the following:

$$\begin{aligned} T_\psi^E(e_{1,i}) &= T(e_{1,i}) + a\psi(e_{0,i-1}) + b\psi(e_{0,i}) + c\psi(e_{0,i+1}), \\ T_\psi^E(e_{m,i}) &= T(e_{m,i}) + g\psi(e_{m+1,i-1}) + f\psi(e_{m+1,i}) + e\psi(e_{m+1,i+1}), 2 \leq i \leq n-1 \\ T_\psi^E(e_{j,1}) &= T(e_{j,1}) + a\psi(e_{j-1,0}) + h\psi(e_{j,0}) + g\psi(e_{j+1,0}), \\ T_\psi^E(e_{j,n}) &= T(e_{j,n}) + c\psi(e_{j-1,n+1}) + d\psi(e_{j,n+1}) + e\psi(e_{j+1,n+1}), 2 \leq j \leq m-1, \end{aligned}$$

where $2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq m-1$ and $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$.

If we consider the function ψ in (3) and the boundary conditions in Table 2, then the following result is true.

Theorem 1. Let $T_\psi^E: \mathbb{Z}_p^{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{mn}$ be the rule matrix which takes the finite Moore CA over the configuration $C(t)$ of order $m \times n$ to the configuration $C(t+1)$ under the boundary condition of ψ_E . Then T_ψ^E has the following matrix form:

$$T_\psi^E = T + \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where $A_1 = h\epsilon_{1,2} + d\epsilon_{n,n-1}$, $B_1 = g\epsilon_{1,2} + e\epsilon_{n,n-1}$, $C_1 = a\epsilon_{1,2} + c\epsilon_{n,n-1}$, $O, \epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1}$ are unit matrices.

Доказательство. Firstly, let us take the linear transition $T_\psi^E: \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$. The image $T_\psi^E(e_{i,j})$ of $e_{i,j}$ is connected to the four nearest neighbor elements considering the von Neumann neighborhood. Hence $T_\psi^E(e_{i,j})$ elements are equal to a linear sum of its five neighbor elements.

Let us denote by $E_{(i-1)n+j} = e_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, the row vector $1 \times mn$ whose has the $((i-1)n+j)$ -th (or (i,j) -th in matrix form) entry equals to 1 and the others are equal to zero. Then we have

$$T_\psi^E \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \\ \vdots \\ E_{mn} \end{pmatrix} = T_\psi^E \cdot \begin{pmatrix} e_{1,1} \\ \vdots \\ e_{1,n} \\ \vdots \\ e_{i,j} \\ \vdots \\ e_{m,1} \\ \vdots \\ e_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_\psi^E(e_{1,1}) \\ \vdots \\ T_\psi^E(e_{1,n}) \\ \vdots \\ T_\psi^E(e_{i,j}) \\ \vdots \\ T_\psi^E(e_{m,1}) \\ \vdots \\ T_\psi^E(e_{m,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d+h)e_{1,2} + (e+g)e_{2,2} + fe_{2,1} \\ \vdots \\ (d+h)e_{1,n-1} + (e+g)e_{2,n-1} + fe_{2,n} \\ \vdots \\ ae_{i-1,j-1} + be_{i-1,j} + ce_{i-1,j+1} + de_{i,j+1} + ee_{i+1,j+1} + fe_{i+1,j} + ge_{i+1,j-1} + he_{i,j-1} \\ \vdots \\ (a+c)e_{m-1,2} + be_{m-1,1} + (d+h)e_{m,2} \\ \vdots \\ (a+c)e_{m-1,n-1} + be_{m-1,n} + (d+h)e_{m,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_1 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hence, the transition of the representation of matrix related to the equations above presented in () is obtained. So, the proof is complete. $\square$

The matrix in Theorem 1 is described null-reflexive the boundary condition as the type (E). Now we give the rule matrices for null-periodic, null-adiabatic, periodic-reflexive, adiabatic-reflexive, adiabatic-periodic cases as the type (E). Let us formulate these boundary conditions accordingly using the following functions:

$$\begin{aligned} \mu_E(\alpha) &= \mu_E(\pi) = \eta, & \mu_E(\rho) &= \mu_E(\eta) = \pi, \\ \nu_E(\alpha) &= \nu_E(\pi) = \eta, & \nu_E(\rho) &= \nu_E(\eta) = \alpha, \\ \omega_E(\alpha) &= \omega_E(\pi) = \pi, & \omega_E(\rho) &= \omega_E(\eta) = \rho, \\ \tau_E(\alpha) &= \tau_E(\pi) = \alpha, & \tau_E(\rho) &= \tau_E(\eta) = \rho, \\ \gamma_E(\alpha) &= \gamma_E(\pi) = \alpha, & \gamma_E(\rho) &= \gamma_E(\eta) = \pi. \end{aligned}$$

Then the following theorem gives the rule matrices of 2D CA under the boundary conditions $\mu_E, \nu_E, \omega_E, \tau_E, \gamma_E$.

Theorem 2. Let $T: \mathbb{Z}_p^{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{mn}$ be the rule matrices which takes the finite Moore CA over the configuration $C(t)$ of order $m \times n$ to the configuration $C(t+1)$ under the boundary conditions of $\mu_E, \nu_E, \omega_E, \tau_E, \gamma_E$. Then T_R have the following matrix forms:

$$T_\mu^E = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_2 & A_2 & B_2 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_2 & A_2 & B_2 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_2 & A_2 & B_2 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_2 & A_2 \end{pmatrix}, \quad T_\nu^E = \begin{pmatrix} A_3 & B_3 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_3 & A_3 & B_3 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_3 & A_3 & B_3 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_3 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$T_\omega^E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O & \dots & O & O & C_2 \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ B_2 & O & O & O & \dots & O & C_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad T_\tau^E = \begin{pmatrix} A_1 + C_3 & B_1 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_1 & A_1 + B_3 \end{pmatrix}$$

$$T_\gamma^E = \begin{pmatrix} A_2 + C_3 & B_2 & O & O & \dots & O & O & O \\ C_2 & A_2 & B_2 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_2 & A_2 & B_2 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_2 & A_2 & B_2 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_2 & A_2 + B_3 \end{pmatrix},$$

where $A_2 = A + h\epsilon_{1,n} + d\epsilon_{n,1}$, $B_2 = B + g\epsilon_{1,n} + e\epsilon_{n,1}$, $C_2 = C + a\epsilon_{1,n} + c\epsilon_{n,1}$,
 $A_3 = A + h\epsilon_{1,1} + d\epsilon_{n,n}$, $B_3 = B + g\epsilon_{1,1} + e\epsilon_{n,n}$, $C_3 = C + a\epsilon_{1,1} + c\epsilon_{n,n}$,
 $O, \epsilon_{1,1}, \epsilon_{n,n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1}$ are unit matrices.

In the beginning of the section, we refer that the number of all possible cases as the form (E) is 12. Above we gave rule matrices for 6 cases. The remaining 6 cases are generated by permutating the previous pairing boundary conditions with each other. Next theorem gives the rule matrices 2D CA under the boundary conditions $\psi_E, \mu_E, \nu_E, \omega_E, \tau_E, \gamma_E$ by rotating 180° degree in the lattice. We denote this boundary conditions by $\psi'_E, \mu'_E, \nu'_E, \omega'_E, \tau'_E, \gamma'_E$.

Theorem 3. Let $T: \mathbb{Z}_p^{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{mn}$ be the rule matrices which takes the finite Moore CA over the configuration $C(t)$ of order $m \times n$ to the configuration $C(t+1)$ under the boundary conditions of $\psi'_E, \mu'_E, \nu'_E, \omega'_E, \tau'_E, \gamma'_E$. Then T have the following matrix forms:

$$\begin{aligned}
 T_{\psi'_E}^E &= \begin{pmatrix} A & B+C & O & O & \dots & O & O & O \\ C & A & B & O & \dots & O & O & O \\ O & C & A & B & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C & A & B \\ O & O & O & O & \dots & O & B+C & A \end{pmatrix}, \quad T_{\mu'_E}^E = \begin{pmatrix} A & B & O & O & \dots & O & O & C \\ C & A & B & O & \dots & O & O & O \\ O & C & A & B & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C & A & B \\ B & O & O & O & \dots & O & C & A \end{pmatrix}, \\
 T_{\nu'_E}^E &= \begin{pmatrix} A+C & B & O & O & \dots & O & O & O \\ C & A & B & O & \dots & O & O & O \\ O & C & A & B & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C & A & B \\ O & O & O & O & \dots & O & C & A+B \end{pmatrix}, \quad T_{\omega'_E}^E = \begin{pmatrix} A_2 & B_2+C & O & O & \dots & O & O & B_4 \\ C_2 & A_2 & B_2 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_2 & A_2 & B_2 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_2 & A_2 & B_2 \\ C_4 & O & O & O & \dots & O & C_2+B & A_2 \end{pmatrix}, \\
 T_{\tau'_E}^E &= \begin{pmatrix} A_4 & B_3+C & O & O & \dots & O & O & O \\ C_3 & A_3 & B_3 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_3 & A_3 & B_3 \\ O & O & O & O & \dots & O & C_3+B & A_5 \end{pmatrix}, \quad T_{\gamma'_E}^E = \begin{pmatrix} A_4 & B_3 & O & O & \dots & O & O & C \\ C_3 & A_3 & B_3 & O & \dots & O & O & O \\ O & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & C_3 & A_3 & B_3 \\ B & O & O & O & \dots & O & C_3 & A_5 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A + h\epsilon_{1,n} + d\epsilon_{n,1}, & B_2 &= B + g\epsilon_{1,n} + e\epsilon_{n,1}, & C_2 &= C + a\epsilon_{1,n} + c\epsilon_{n,1}, \\
 A_3 &= A + h\epsilon_{1,1} + d\epsilon_{n,n}, & B_3 &= B + g\epsilon_{1,1} + e\epsilon_{n,n}, & C_3 &= C + a\epsilon_{1,1} + c\epsilon_{n,n}, \\
 A_4 &= A_3 + a\epsilon_{1,1} + c\epsilon_{n,n}, & B_4 &= a\epsilon_{1,n} + c\epsilon_{n,1}, & C_4 &= g\epsilon_{1,n} + e\epsilon_{n,1}, \\
 A_5 &= A_3 + g\epsilon_{1,1} + e\epsilon_{n,n},
 \end{aligned}$$

$O, \epsilon_{1,1}, \epsilon_{n,n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$, O is the zero matrix and $\epsilon_{1,2}, \epsilon_{n,n-1}$ are unit matrices.

Reversibility of the rule matrices

In this section, we will outline an algorithm to determine the reversibility of the 2D (linear) cellular automaton defined by the Moore rule under non-bijective boundary conditions represented by the function ϕ . Given that we have already derived the rule matrix T_R^ϕ corresponding to the 2D finite cellular automaton with the function ϕ , we can express the relationship between the column vectors $X(t)$ and the rule matrix T_R^ϕ as follows:

$$X^{(t+1)} = T_R^\phi \cdot X^{(t)} \pmod{p}.$$

If the rule matrix T_R is non-singular, then we can express:

$$X^{(t)} = (T_R^\phi)^{-1} \cdot X^{(t+1)} \pmod{p}.$$

Hence, our primary objective is to investigate whether the rule matrices T_R^ϕ in Theorem 1, Theorem 2 and Theorem 3 are invertible or not. It is widely recognized that the 2D finite cellular automaton is reversible if and only if its rule matrix T_R^ϕ is non-singular. If the rule matrix T_R^ϕ achieves full rank, indicating it is invertible, then the 2D finite cellular automaton is reversible; otherwise, it is irreversible.

For solve the problem of reversibility we give the following lemma in [7].

Lemma 1. Let $T \in \mathbf{M}_{mn \times mn}(\mathbb{Z}_p)$ be a matrix of the following form:

$$\begin{pmatrix} A_m & X & O & \dots & O & O \\ B_{m-1} & A_{m-1} & X & \dots & O & O \\ O & B_{m-2} & A_{m-2} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_2 & X \\ O & O & O & \dots & B_1 & A_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

where all submatrices are $n \times n$, O is the zero matrix. If the submatrix X has full rank, then

$$\text{rank}(T) = (m-1)n + \text{rank}(P_m),$$

with $P_1 = A_1$, $P_2 = -B_1 - A_1X^{-1}A_2$, $P_k = -P_{k-2}X^{-1}B_{k-1} - P_{k-1}X^{-1}A_k$, $k \in \{3, \dots, m\}$.

Remark 1. Since the rank of the transpose of the matrix is equal to rank of itself, then we can prove similar result to Lemma 1 for matrices $T \in \mathbf{M}_{mn \times mn}(\mathbb{Z}_p)$ of the following form:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & \dots & O & O \\ X & A_2 & B_2 & \dots & O & O \\ O & X & A_3 & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{m-1} & B_{m-1} \\ O & O & O & \dots & X & A_m \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where all submatrices are $n \times n$, O is the zero matrix, I is the identity matrix. If the submatrix X has full rank, then

$$\text{rank}(T) = (m-1)n + \text{rank}(P_m),$$

where $P_1 = A_1$, $P_2 = -A_1X^{-1}B_2$, $P_k = -P_{k-2}X^{-1}B_{k-1} - P_{k-1}X^{-1}A_k$, $k \in \{3, \dots, m\}$.

By Lemma 1 we can give the following result.

Proposition 1. Consider the rule matrices T_ψ^E , T_μ^E , T_ν^E , T_τ^E , T_γ^E and $T_{\nu'}^E$. These matrices is being as the form in Lemma 1 or Remark 1, then it can be calculated their ranks by the formula in Lemma 1 or Remark 1.

Remark 2. According to the condition in Lemma 1, it was required that X has full rank. It should be considered B , C , B_1 , C_1 , B_2 , C_2 , B_3 , C_3 as X .

Note that the determinant of all matrices are mentioned in the last remark comes to calculate the following matrix

$$X = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ z & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z & x \end{pmatrix}.$$

By using methods of evaluating higher-order determinants, for the determinant of X we obtain the following result.

Proposition 2. Let X be a matrix $n \times n$. Then

$$\det(X) = \Delta_n = x\Delta_{n-1} - yz\Delta_{n-2}$$

where $\Delta_n = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2k+1}(x)^{n-2k}(x^2-4yz)^k}{2^n}$ and $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ is the integer part of $\frac{n}{2}$. Moreover, we can simplify this determinant under some conditions:

- if $yz = 0$, then $\det(X) = x^n$;
- if $x = 0$, then $\det(X) = \begin{cases} 0, & n - \text{odd}; \\ (-yz)^{\frac{n}{2}}, & n - \text{even}, \end{cases}$
- if $yz \neq 0$, $y + z = x$, and $z \neq y$ then $\det(X) = \frac{y^{n+1} - z^{n+1}}{y - z}$;
- if $yz \neq 0$, $y + z = x$ and $z = y$, then $\det(X) = (n+1)y^n$.

Theorem 4. Let T be the rule matrix T_ψ^E in Theorems 1. If the matrix B_1 and C_1 have the full rank, then

$$\text{rank}(T) = (m-1)n + \text{rank}(P_m),$$

where the submatrix P_m is computed as in Remark 1.

Remark 3. It can be calculated the rank of the rule matrices T_μ^E , T_ν^E , T_τ^E , T_γ^E and $T_{\nu'}^E$ in Theorems 2, 3 in the method of Theorem 4.

Example. In order to illustrate the previous theorem, we take $m = 4$ and $n = 3$ and consider the rule matrix T_ψ^E with over the ternary field $\mathbb{Z}_3$. Thanks to Theorem 1 we have

$$T_\psi^E = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & O & O \\ C_1 & A_1 & B_1 & O \\ O & C_1 & A_1 & B_1 \\ O & O & C_1 & A_1 \end{pmatrix},$$

where O is the zero matrix and

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & h+d & 0 \\ h & 0 & d \\ 0 & h+d & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} f & g+e & 0 \\ g & f & e \\ 0 & g+e & f \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} b & a+c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a+c & b \end{pmatrix},$$

with $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_3$.

Now, let $a = c = 0$, $b = d = e = f = g = h = 1$. Then,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since C_1 has the full rank (i.e. $\det C_1 = 1$) we find the matrix P_4 in Remark 1. According to the recurrence relation in Lemma 1, we get the following matrices:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, by applying the algorithm for computing the rank of the rule matrix T_ψ^E (see Theorem 4) we have

$$\text{rank}(T_R^\phi) = (4 - 1) \cdot 3 + \text{rank}(P_4) = 9 + 1 = 10.$$

Hence, the rule matrix T_ψ^E does not have full rank. This implies that it is not reversible. In other words the mapping T_ψ^E is not surjective.

REFERENCES

1. Adamatzky, A.I. *Identification Of Cellular Automata (1st ed.)* (CRC Press), 1995.
2. Adamatzky, A. "Nonconstructible blocks in 1D cellular automata: minimal generators and natural systems," *Appl. Math. Comput.* **99**, 1999, 77–91.
3. Adamatzky, A. *Game of life cellular automata*; (Springer, London), 2010.
4. Bays, C. [2009] "Cellular Automata in Triangular, Pentagonal and Hexagonal Tessellations," *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, ed. Meyers, R. (Springer, New York).
5. Durand, B. "Inversion of 2D cellular automata: some complexity results," *Theoret. Comput. Sci.* **134** 387–401.
6. Jumaniyozov, D., Omirov, B., Redjepov, Sh., Uguz, S. [2023a] "Irreversibility of 2D Linear CA and Garden of Eden *Intern. J. Bifur. and Chaos*, **33**(06), 2350065.
7. Jumaniyozov, D., Casas, J.M., Ladra, M., Omirov, B., Redjepov, Sh. [2023b] "2D Linear CA with Mixing Boundary Conditions and Reversibility *Intern. J. Bifur. and Chaos*, **33**(08), 2350094.

8. Kari, J. [1990] "Reversibility of 2D cellular automata is undecidable," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **45**, 379–385.
9. Kari, J. [1994] "Reversibility and surjectivity problems of cellular automata," *Journal of Computer and System Sciences*, **48**, 149–182.
10. Siap, I., Akin, H., Uguz, S. [2011] "Structure and reversibility of 2D hexagonal cellular automata," *Comput. Math. Applications*, **62**, 4161–4169.
11. Uguz, S., Akin, H., Siap, I. [2013] "Reversibility algorithms for 3-state hexagonal cellular automata with periodic boundaries," *Intern. J. Bifur. and Chaos*, **23**, 1350101-1-15.
12. Uguz, S., Acar, E., Redjepov, Sh. [2019] "2D Triangular von Neumann Cellular Automata with Periodic Boundary," *Intern. J. Bifur. and Chaos*, **29**(03), 1950029.
13. Uguz, S., Redjepov, S., Acar, E., Akin, H. [2017] "Structure and Reversibility of 2D von Neumann Cellular Automata Over Triangular Lattice," *Intern. J. Bifur. and Chaos*, **27** 1750083.

Аннотация

Ushbu maqolada ba'zi shartlar ostida ikki o'lchamli Mur kletkali avtomatlari o'rganilgan. Xususan, $\mathbb{Z}_p$ maydonida aralash chegaraviy shartli Mur qo'shnilarili 2D chiziqli kletkali avtomatlarning tavsifini ko'rib chiqamiz. So'nggida, biz 2D chekli KA uchun olingan qoida matritsalarining teskarilantuvchanlik shartlari topilgan.

Калит so'zlar: kletkali avtomatlar, chegaraviy shartlar, qoida matritsasi, teskarilantuvchanlik.

Аннотация

В этой статье мы исследуем двумерные клеточные автоматы с окрестностью Мура при определенных условиях. В частности, мы углубляемся в характеристику двумерных линейных клеточных автоматов, определяемых окрестностью Мура, рассматривая смешанные граничные условия над полем $\mathbb{Z}_p$. Наконец, мы представляем условия, которые приводят к обратимости полученных матриц правил для двумерных конечных КА.

Ключевые слова: клеточные автоматы, граничные условия, матрица правил, обратимость.

UDC 514.18

PIFAGOR UCHLIGINING FRAKTAL XOSSALARI

IBRAGIMOV H. H.

DENOV TADBIRKORLIK VA PEDAGOGIKA INSTITUTI, SURXONDARYO, DENOV
husniddinhikmatovich@gmail.com

REZYUME

To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasida katetlari yordamida ajratilgan kesmalar bilan teng yonli uchburchak orasidagi bog'lanishlar, teng yonli uchburchak va $\mathbb{R}^n$ fazoda n o'lchamli Pifagor g'ishti orasidagi bog'lanishlar ko'rsatilgan. Hamda bu ishda teng yonli va to'g'ri burchakli uchburchaklar orasidagi fraktal bog'lanishlar chizma hamda sxemalarda aks ettirilgan. Eyler g'ishtining qirralari va diagonalini hosil qiluvchi qo'shimcha $r \in \mathbb{Z}$ parametrlri tenglama keltirilgan.

Kalit so'zlar: Pifagor soni, Pifagor taxtasi, Pifagor g'ishti, Eyler uchligii, Eyler g'ishti, diagonal, to'g'ri burchakli uchburchak, teng yonli uchburchak, parametrlri tenglama.

Agar butun musbat a , b va c sonlari uchun $a^2 + b^2 = c^2$ tenglik o'rinli bo'lsa, (a, b, c) uchlikka Pifagor uchligi deyiladi.

Bizga, ABC to'g'ri burchakli uchburchak berilgan bo'lsin (1-chizma).

Agar $AC = b$, $BC = a$ va $AB = c$ ga teng bo'lsin. A nuqtani aylana markazi deb $AC = AE = b$ ni, B nuqtani aylana markazi deb $BC = BD = a$ ni chizamiz. Demak:

$$AC = AE = b, BC = BD = a, AD = AB - DB = c - a, BE = AB - AE = c - b,$$

$$DE = AB - AD - BE = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c,$$

$$AD + BE = c - a + c - b = 2c - a - b$$

larga ega bo'lamiz.

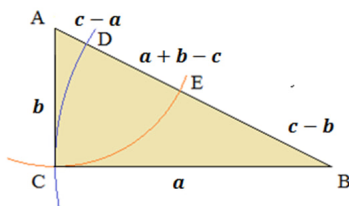


Рис. 7: 1-chizma

Demak, to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasini (1-chizma) $c - a$, $c - b$ va $a + b - c$ kabi kesmalarga ajratamiz, gipotenuzadagi ikki chetki $c - a$ va $c - b$ kesmalar yig'indisi $2c - a - b$ uchun:

$$(c - a)^2 + (a + b - c)^2 + (c - b)^2 = (2c - a - b)^2$$

tenglik o'rinli. Bu tenglik quyida 1-teoremada $n = 3$ desak kelib chiqadi.

1-teorema. Agar a , b va c Pifagor sonlari bo'lsa, u holda ixtiyoriy n uchun quyidagi

$$(n - 2)(c - a)^2 + (b - (n - 2)(c - a))^2 + \\ + \left(\frac{(n - 1)(n - 2)}{2}(c - a) + a - (n - 2)b\right)^2 = \left(\frac{(n - 1)(n - 2)}{2}(c - a) + c - (n - 2)b\right)^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyida 1-teoremadan n ning ba'zi qiymatlari uchun natijalar olamiz

$$n = 2 \text{ uchun, } b^2 + a^2 = c^2$$

$$n = 3 \text{ uchun, } (c-a)^2 + (a+b-c)^2 + (c-b)^2 = (2c-a-b)^2$$

$$n = 4 \text{ uchun, } (c-a)^2 + (c-a)^2 + (b+2a-2c)^2 + (3c-2a-2b)^2 = (4c-3a-2b)^2$$

$n = 5$ uchun, $(c-a)^2 + (c-a)^2 + (c-a)^2 + (b+3a-3c)^2 + (6c-5a-3b)^2 = (7c-6a-3b)^2$ kabi natijalarga ega bo'lamiz.

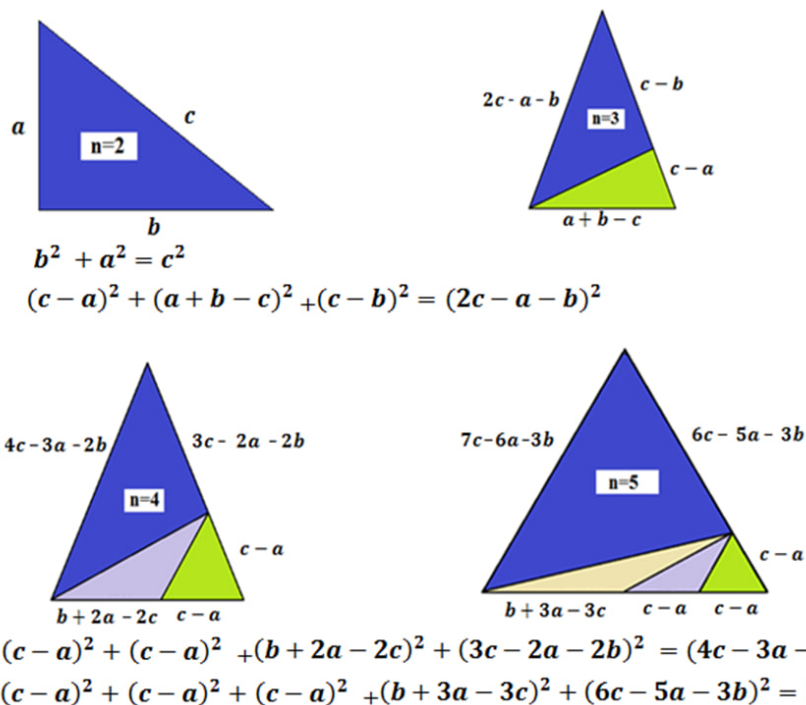


Рис. 8: 2-чизма

1-teoremadagi formuladan n ning $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ va $n = 5$ qiymatlari uchun olingan natijalarning 2-chizmada tasvirlaymiz.

Endi 1-teoremadagi formuladan $n = 3$ holatdan foydalanib $n = 2$ holga o'tishni chizmada ko'rsatamiz:

$n = 3$ uchun, $(c-a)^2 + (a+b-c)^2 + (c-b)^2 = (2c-a-b)^2$ dan foydalanib

$$a + b - c + c - a = a$$

$$a + b - c + c - b = b$$

$$a + b - c + 2c - a - b = c$$

a , b va c ni topdik, va bulardan

$n = 2$ dagi $b^2 + a^2 = c^2$ kelib chiqadi (3-chizma).

Endi 1-teoremadagi formuladan $n = 5$ holdan $n = 4$ holga o'tishni 3-chizmada ko'rsatamiz.

$n = 5$ uchun, $(c-a)^2 + (c-a)^2 + (c-a)^2 + (b+3a-3c)^2 + (6c-5a-3b)^2 = (7c-6a-3b)^2$ dan foydalanib

$$b + 3a - 3c + c - a = b + 2a - 2c$$

$$b + 3a - 3c + 6c - 5a - 3b = 3c + 2a - 2b$$

$$b + 3a - 3c + 7c - 6a - 3b = 4c - 3a - 2b$$

$c - a$ larning ikkitasi o'z-o'ziga o'tadi. $b + 2a - 2c$, $3c - 2a - 2b$ va $4c - 3a - 2b$ ni topdik, va bulardan

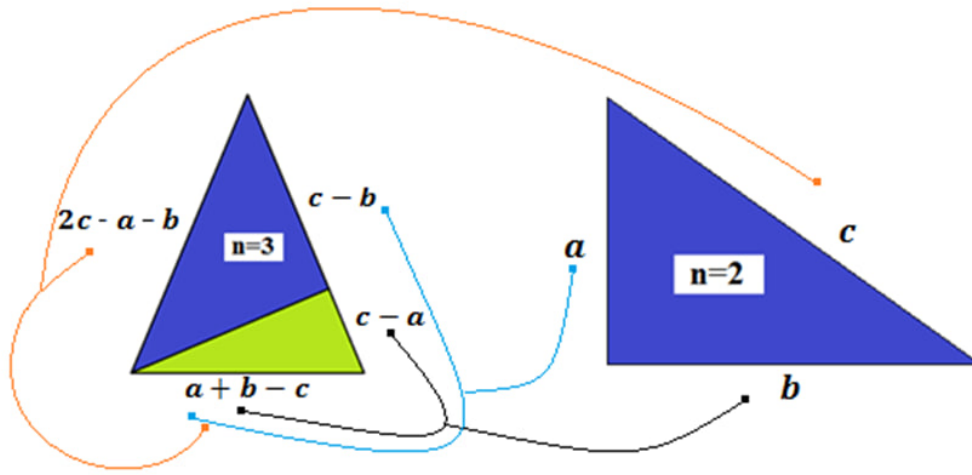


Рис. 9: 3-chizma

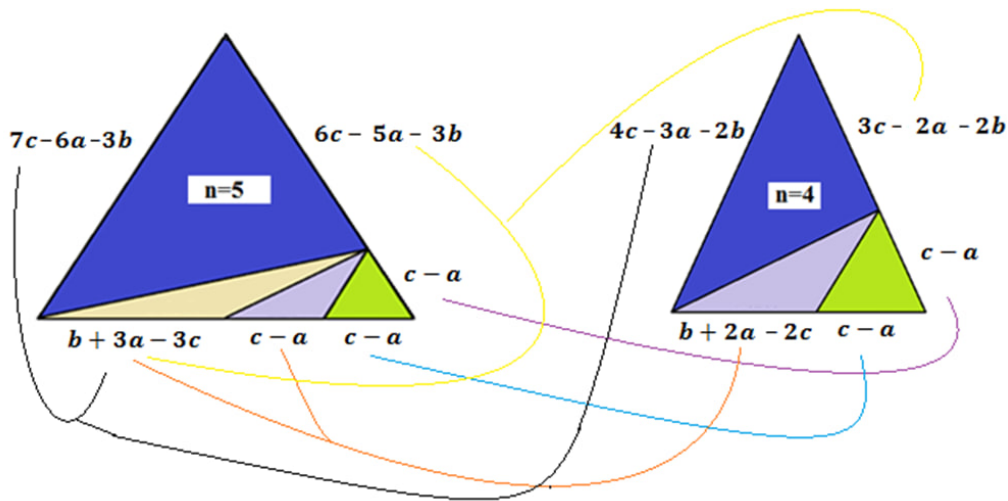


Рис. 10: 4-chizma

$n = 4$ uchun, $(c - a)^2 + (c - a)^2 + (b + 2a - 2c)^2 + (3c - 2a - 2b)^2 = (4c - 3a - 2b)^2$ kelib chiqadi (4- chizma).

2-teorema. Agar a , b va c Pifagor sonlari bo'lsa, u holda ixtiyoriy n uchun quyidagi

$$\begin{aligned} & (n - 2)(c + a)^2 + (b + (n - 2)(c + a))^2 + \\ & + \left(\frac{(n - 1)(n - 2)}{2}(c + a) - a + (n - 2)b\right)^2 = \\ & = \left(\frac{(n - 1)(n - 2)}{2}(c + a) + c + (n - 2)b\right)^2 \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi 2-teoremadan n ning ba'zi qiymatlari uchun natijalar yozamiz

$n = 2$ uchun, $b^2 + a^2 = c^2$ Pifagor teoremasi.

$n = 3$ uchun, $(c + a)^2 + (a + b + c)^2 + (c + b)^2 = (2c + a + b)^2$

$n = 4$ uchun, $(c + a)^2 + (c + a)^2 + (b + 2a - 2c)^2 + (3c - 2a - 2b)^2 = (4c + 3a + 2b)^2$

$n = 5$ uchun, $(c+a)^2 + (c+a)^2 + (c+a)^2 + (b+3a+3c)^2 + (3b+5a+6c)^2 = (7c+6a+3b)^2$

Endi 2-teoremadan foydalanib $(3, 4; 5)$ va $(4, 3; 5)$ Pifagor uchliklari yordamida qurish mumkin bo'lgan ikki seriya Pifagor g'ishtlari qirralari hamda diagonalini 1- jadvalda keltiramiz [2-17 bet]:

P.G'	2-teorema yordamida qurilgan Pifagor g'ishtlari $(3, 4; 5)$		2-teorema yordamida qurilgan Pifagor g'ishtlari $(4, 3; 5)$	
$\mathbb{R}^n$	Qirralari	Diagonali	Qirralari	Diagonali
$\mathbb{R}^3$	(8, 12, 9)	17	(9, 12, 8)	17
$\mathbb{R}^4$	(8, 8, 20, 29)	37	(9, 9, 21, 29)	38
$\mathbb{R}^5$	(8, 8, 8, 28, 57)	65	(9, 9, 9, 30, 59)	68
$\mathbb{R}^6$	(8, 8, 8, 8, 36, 93)	101	(9, 9, 9, 9, 39, 98)	107
$\mathbb{R}^7$	(8, 8, 8, 8, 8, 44, 137)	145	(9, 9, 9, 9, 9, 48, 149)	155

1-jadval.

Endi 2-teoremadagi formuladan n ning $n = 2, n = 3, n = 4$ va $n = 5$ qiymatlari uchun olingan natijalarning 5-chizma bilan ko'rsatamiz [2-20 bet].

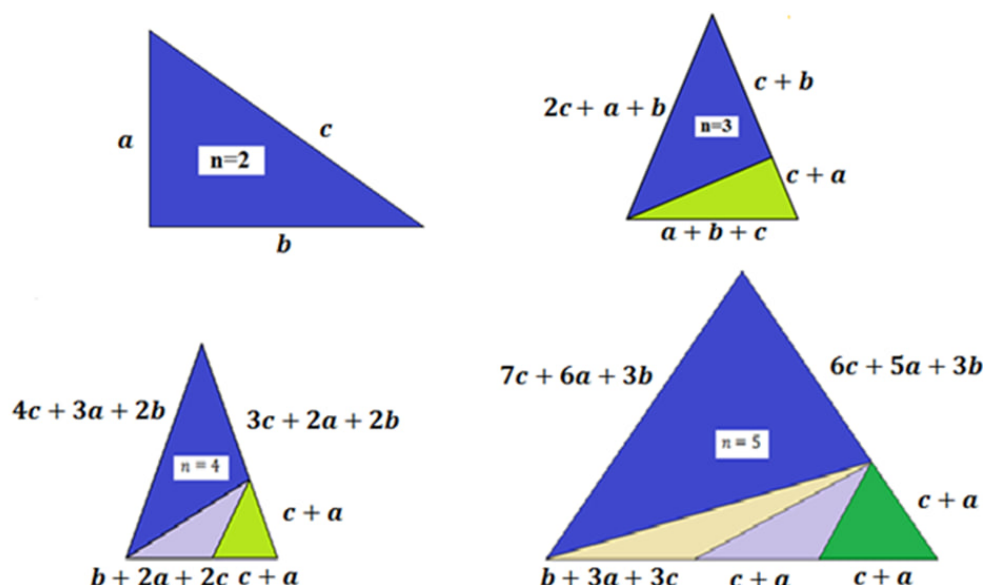


Рис. 11: 5-chizma

Xulosa.

Endi 2-teoremadan n ning ba'zi qiymatlari uchun:

$n = 2$ uchun, $b^2 + a^2 = c^2$ ($a, b; c$) - Pifagor uchligini,

$n = 3$ dan $(c+a)^2 + (a+b+c)^2 + (c+b)^2 = (2c+a+b)^2$

$(c+a, a+b+c, c+b; 2c+a+b)$ - Pifagor to'rtligini,

$n = 4$ dan $(c+a)^2 + (c+a)^2 + (b+2a+2c)^2 + (3c+2a+2b)^2 = (4c+3a+2b)^2$

$(c+a, c+a, b+2a+2c, 3c+2a+2b; 4c+3a+2b)$ - Pifagor beshligini hamda

$$\underbrace{(c-a, c-a, \dots, c-a)}_{(n-3)ta}, b + (n-2)(c+a),$$

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}(c+a) - a + (n-2)b; \frac{(n-1)(n-2)}{2}(c+a) + c + (n-2)b$ - Pifagor n ligini yozishimiz mumkin. Demak, bitta Pifagor uchligidan qirralari butun musbat Pifagor n ligini, ya'ni n olchamli Pifagor gishtlatini qurish

mumkin. Misol uchun, 2-teoremadan $n = 3$ uchun olingan,

$$(c+a)^2 + (a+b+c)^2 + (c+b)^2 = (2c+a+b)^2$$

natija teng yonli ABC uchburchak va $TNKODHFS$ to'g'ri parallelepiped, ya'ni "Pifagor g'ishti" orasidagi boglanish 6-chizmada quyidagicha ko'rsatish mumkin [2-20 bet].

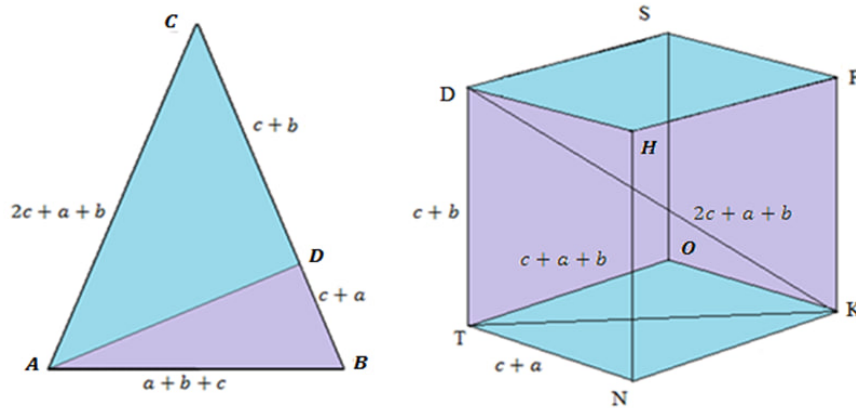


Рис. 12: 6-chizma

Bizga α tekislikda teng yonli CTD uchburchak berilgan bo'lsin,

$AB = a + b + c$, $BD = c + a$, $DC = c + b$ va $AC = 2c + a + b$ ni biz $TNKODHFS$ to'g'ri parallelepipedning

$$OT = SD = FH = KN = a + b + c$$

$$TN = OK = SF = DH = c + a,$$

$$TD = NH = KF = OS = c + b$$

$DK = 2c + a + b$ ekanligidan $\mathbb{R}^3$ ga taaluqli "Pifagor g'ishti" qirralari va diagonali bo'lardi.

3-teorema. Agar $(a, b; c)$ Pifagor uchligi bo'lsa, u orqali bir juft Pifagor uchligi $(a_{11}, b_{11}; c_{11})$ va $(a_{12}, b_{12}; c_{12})$ ni ushbu:

$$a_{11} = 2a + b + 2c, \quad b_{11} = a + 2b + 2c, \quad c_{11} = 2a + 2b + 3c$$

$$a_{12} = 2a - b + 2c, \quad b_{12} = a - 2b + 2c, \quad c_{12} = 2a - 2b + 3c$$

qoida yordamida hosil qilish mumkin.

Buni quyidagicha 1-sxemada tasvirlaymiz (izoh: $\vec{+}$ ushbu belgi, o'rniga qo'yishda qo'shishdan, $\vec{-}$ ushbu belgi o'rniga qo'yishda ayirishdan kelib chiqqan ma'nosi o'rnida):

$$(a, b; c) \xrightarrow{(2a \pm b + 2c, \quad a \pm 2b + 2c, \quad 2a \pm 2b + 3c)} \begin{cases} \vec{+} (a_{11}, b_{11}; c_{11}) \\ \vec{-} (a_{12}, b_{12}; c_{12}) \end{cases}$$

1-sxema.

Xuddi shuningdek, olingan $(a_{11}, b_{11}; c_{11})$ va $(a_{12}, b_{12}; c_{12})$ larni har biriga 3-teoremadan foydalanib:

$$\begin{cases} (a_{11}, b_{11}; c_{11}) \xrightarrow{(2a_{11} \pm b_{11} + 2c_{11}, \quad a_{11} \pm 2b_{11} + 2c_{11}, \quad 2a_{11} \pm 2b_{11} + 3c_{11})} \begin{cases} \vec{+} (a_{21}, b_{21}; c_{21}) \dots \\ \vec{-} (a_{22}, b_{22}; c_{22}) \dots \end{cases} \\ (a_{12}, b_{12}; c_{12}) \xrightarrow{(2a_{12} \pm b_{12} + 2c_{12}, \quad a_{12} \pm 2b_{12} + 2c_{12}, \quad 2a_{12} \pm 2b_{12} + 3c_{12})} \begin{cases} \vec{+} (a_{23}, b_{23}; c_{23}) \dots \\ \vec{-} (a_{24}, b_{24}; c_{24}) \dots \end{cases} \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz.

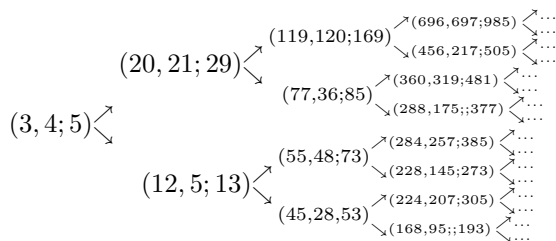
Agar $(a_{21}, b_{21}; c_{21})$, $(a_{22}, b_{22}; c_{22})$, $(a_{23}, b_{23}; c_{23})$ va $(a_{24}, b_{24}; c_{24})$ larni har biriga 3-teoremadan foydalanib:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{21}, b_{21}; c_{21})^{(2a_{21} \pm b_{21} + 2c_{21}, \quad a_{21} \pm 2\overrightarrow{b_{21}} + 2c_{21}, \quad 2a_{21} \pm 2b_{21} + 3c_{21})} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{+} (a_{31}, b_{31}; c_{31}) \dots \\ \overrightarrow{-} (a_{32}, b_{32}; c_{32}) \dots \end{array} \right. \\ (a_{22}, b_{22}; c_{22})^{(2a_{22} \pm b_{22} + 2c_{22}, \quad a_{22} \pm 2\overrightarrow{b_{22}} + 2c_{22}, \quad 2a_{22} \pm 2b_{22} + 3c_{22})} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{+} (a_{33}, b_{33}; c_{33}) \dots \\ \overrightarrow{-} (a_{34}, b_{34}; c_{34}) \dots \end{array} \right. \\ (a_{23}, b_{23}; c_{23})^{(2a_{23} \pm b_{23} + 2c_{23}, \quad a_{23} \pm 2\overrightarrow{b_{23}} + 2c_{23}, \quad 2a_{23} \pm 2b_{23} + 3c_{23})} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{+} (a_{35}, b_{35}; c_{35}) \dots \\ \overrightarrow{-} (a_{36}, b_{36}; c_{36}) \dots \end{array} \right. \\ (a_{24}, b_{24}; c_{24})^{(2a_{24} \pm b_{24} + 2c_{24}, \quad a_{24} \pm 2\overrightarrow{b_{24}} + 2c_{24}, \quad 2a_{24} \pm 2b_{24} + 3c_{24})} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{+} (a_{37}, b_{37}; c_{37}) \dots \\ \overrightarrow{-} (a_{38}, b_{38}; c_{38}) \dots \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, ushbu fraktal jarayonni 3-teoremadan foydalanib cheksiz davom ettirish mumkinligi ko'rinib qoldi.

Misol uchun $(3, 4; 5)$ Pifagor uchligi yordamida uch bo'g'in fractal jarayonni 2-sxemada korsatamiz:



2-sxema.

Endi quyida hajmi eng kichik Eyler g'ishtini keltiramiz [1,3-15 bet].

$$\left\{ \begin{array}{l} 44^2 + 117^2 = 125^2 \\ 117^2 + 240^2 = 267^2 \\ 240^2 + 44^2 = 244^2 \end{array} \right.$$

4-teorema. Agar $(a, b; c)$ Pifagor uchligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $r \in Z$ uchun

$$\begin{aligned} x &= a \left[(br)^2 - c^2 \right] \cdot \left\{ \left(2b \left[(br)^2 - c^2 (2r - 1) \right] \right)^2 - \left(c \left[c^2 + (r^2 - 2r) b^2 \right] \right)^2 \right\}, \\ y &= b \left[(br)^2 - c^2 (2r - 1) \right] \cdot \left\{ \left(2a \left[(br)^2 - c^2 \right] \right)^2 - \left(c \left[c^2 + (r^2 - 2r) b^2 \right] \right)^2 \right\}, \\ z &= 4abc \left[(br)^2 - c^2 \right] \cdot \left[(br)^2 - c^2 (2r - 1) \right] \cdot \left[c^2 + (r^2 - 2r) b^2 \right] \end{aligned}$$

noldan farqli x , y va z sonlari Eyler uchligi bo'ladi.

Isbot. Teoremaning isboti quyidagi

$$x^2 + y^2 = d_{xy}^2$$

$$x^2 + z^2 = d_{xz}^2$$

$$y^2 + z^2 = d_{yz}^2$$

tengliklarni tekshirish orqali amalga oshiriladi.

Bunda, Eyler g'ishtining yon yoqlarining diagonallari quyidagilar bo'ladi:

$$d_{xy} = (c[c^2 + (r^2 - 2r)b^2])^3,$$

$$d_{xz} = a \left[(br)^2 - c^2 \right] \cdot \left\{ \left(2b \left[(br)^2 - c^2 (2r - 1) \right] \right)^2 + \left(c \left[c^2 + (r^2 - 2r) b^2 \right] \right)^2 \right\},$$

$$d_{yz} = (b \left[(br)^2 - c^2 (2r - 1) \right] \cdot \left\{ \left(2a \left[(br)^2 - c^2 \right] \right)^2 + \left(c \left[c^2 + (r^2 - 2r) b^2 \right] \right)^2 \right\}.$$

Eyler uchliklarini beruvchi formulada $r \in Z$ ga qiymatlar berib Eyler uchliklari beruvchi cheksiz ko'p parametrik tenglamalarni hosil qilamiz.

Agar parametrik tenglamada $r = 1$ ga mos keluvchi parametrik tenglamani topsak

$$x = a \left[b^2 - c^2 \right] \cdot \left\{ \left(2b \left[b^2 - c^2 \right] \right)^2 - \left(c \left[c^2 - b^2 \right] \right)^2 \right\},$$

$$y = b \left[b^2 - c^2 \right] \cdot \left\{ \left(2a \left[b^2 - c^2 \right] \right)^2 - \left(c \left[c^2 - b^2 \right] \right)^2 \right\},$$

$$z = 4abc \left[b^2 - c^2 \right] \cdot \left[b^2 - c^2 \right] \cdot \left[c^2 - b^2 \right].$$

Hosil qilingan x , y , z sonlarni ularning umumiy bo'luvchisi $(b^2 - c^2)^3$ ga qisqartirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x = a(4b^2 - c^2), \quad y = b(4a^2 - c^2), \quad z = 4abc.$$

Bu esa Eylerning birinchi parametrik tenglamasi formulasi bilan ustma-ust tushadi.

Agar parametrik tenglamada $r = 2$ desak, Eyler g'ishtining qirralari:

$$x = a \left[4b^2 - c^2 \right] \left\{ \left(2b \left[4b^2 - 3c^2 \right] \right)^2 - c^6 \right\},$$

$$y = b \left[4b^2 - 3c^2 \right] \left\{ \left(2a \left[4b^2 - c^2 \right] \right)^2 - c^6 \right\},$$

$$z = 4abc^3 \left[4b^2 - c^2 \right] \cdot (4b^2 - 3c^2).$$

Endi $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ Pifagor uchliklariga mos Eyler g'ishtining qirralarini hisoblaymiz.

$$x = 3 \cdot 39 \cdot \left\{ (2 \cdot 4 \cdot 11)^2 - (125)^2 \right\},$$

$$y = 4 \cdot 11 \cdot \left\{ (2 \cdot 3 \cdot 39)^2 - (125)^2 \right\},$$

$$z = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 39 \cdot 11,$$

bundan esa

$$x = 3 \cdot 39 (88^2 - 125^2),$$

$$y = 4 \cdot 11 (234^2 - 125^2),$$

$$z = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 39 \cdot 11.$$

Natijada

$$x = 922077, \quad y = 1721764, \quad z = 2574000$$

Eyler uchligini olamiz.

Tekshirish:

$$922077^2 + 1721764^2 = 1953125^2,$$

$$922077^2 + 2574000^2 = 2734173^2,$$

$$1721764^2 + 2574000^2 = 3096764^2,$$

Qirralari (922077, 1721764, 2574000) bo'lgan, Eyler g'ishtining yon tomonining diagonallari bo'lib 1953125, 2734173, 3096764 sonlar xizmat qiladi

[5-20-bet, 4-33,34-betlar].

Demak, 4-teoremadan ko'rish mumkinki $(a, b; c)$ Pifagor uchligidan, har bir

$r \in Z$ uchun, uchta $(x, y; d_{xy})$, $(x, z; d_{xz})$ va $(y, z; d_{yz})$ Pifagor uchligi hosil bo'ladi

va bu fraktal jarayonni cheksiz davom ettirish mumkin(3-sxema).

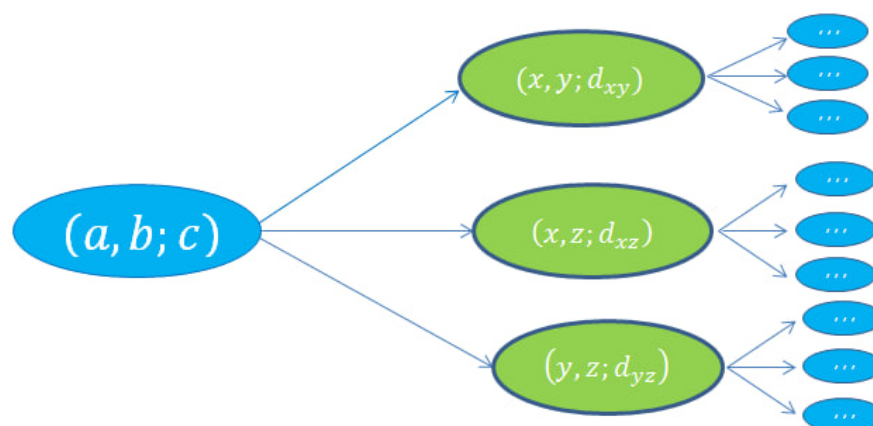


Рис. 13: 3-схема

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. A. A'zamov. *Eyler g'ishtlari*. Fizika, matematika va informatika. 2012. No 1, 52-56.
2. Abdullayev J.I., Ibragimov H. H. *Pifagor taxtasi yordamida Pifagor g'ishtlarini qurish*. Ilmiy axborotnoma. Samarqand, 1-son(119), 2020. 15-21.
3. Abdullayev J.I., Ibragimov H. H. *Pifagor va Eyler g'ishtlari*. Buxoro davlat universiteti Ilmiy axboroti. Buxoro, 2022/6(94). 10-15.
4. Abdullayev J.I., Ibragimov H. H. *Pifagor va Eyler g'ishtlari uchun parametrik tenglamalar*. Ilmiy axborotnoma. Samarqand, No 3/(139) 2023.29-34.
5. H.H.Ibragimov. Pifagor sonlari va Eyler g'ishti. Tadbirkorlik va pedagogika. Ilmiy-uslubiy jurnal. 2023-yil, 1-son, 198-207 betlar.
6. By Samuel Bonaya Buya end Whiteeagle Joshua Daddah. A method of Finding Perfect Euler Bricks. 07.01.2017. 1-15.
7. Oliver Knill. *Treasure Hunting Perfect Eyler bricks*. 24.02.2009. 1-5.
8. Е.А.Горин, Степени простых чисел в составе пифагоровых троекб Матем. просв., 2008, выпуск 12. 25.02. 2023 г. 106-107 ст.
9. Ворон А.В. Способ получения эйлеровых параллелепипедов на основе значений котангенса пифагоровых троек. 24.03.2024.
10. Dickson L.E. History of the theory of numbers. Volume II: Diophantine analysis. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
11. Long, Calvin T. Elementary Introduction to Number Theory. 2nd ed. – Lexington: D. C. Heath and Company, LCCN 77-171950, 1972. – 46 p.
12. Leech J. The rational cuboid revisited // American Mathematical Monthly, 1977. Vol. 84, No. 7. PP. 518–533.
13. Pocklington H.C. Some Diophantine impossibilities // Proceedings Cambridge Philosophical Society, 18, 1912, PP. 110–118.
14. Spohn W. On the integral cuboid // American Mathematical Monthly, 1972. Vol. 79, No 1. PP. 57–59.
15. Buya S. B. Simple algebraic proofs of Fermat's last theorem // Advances in Applied science research, 2017. Vol. 8, No. 3. PP. 60–64.
16. Edgar T. Euler Bricks // Mathematics Magazine, 2022. Vol. 95 No. 4. PP. 401–402.

РЕЗЮМЕ

Показаны связи между гипотенузой прямоугольного треугольника и равносторонним треугольником, связи между равносторонним треугольником и n -мерным кирпичиком Пифагора в

пространстве $\mathbb{R}^n$. В данной работе показаны равносторонние и фрактальные связи между прямоугольными треугольниками на рисунках и схемах. Приведено уравнение с дополнительным параметром $r \in \mathbb{Z}$, порождающее ребра и диагонали кирпича Эйлера, и приведен один пример.

Ключевые слова: число Пифагора, доска Пифагора, кирпич Пифагора, треугольник Эйлера, кирпич Эйлера, диагональ, прямоугольный треугольник, равносторонний треугольник, параметрическое уравнение.

RESUME

The paper shows the relationships between the hypotenuse of a right triangle and an equilateral triangle, the relationships between an equilateral triangle and an n-dimensional Pythagorean brick in the space R^n . This paper shows equilateral and fractal relationships between right triangles in figures and diagrams. An equation with an additional parameter $r \in \mathbb{Z}$ generating the edges and diagonals of the Euler brick is given, and one example is given.

Key words: Pythagorean number, Pythagorean board, Pythagorean brick, Euler triangle, Euler brick, diagonal, right triangle, equilateral triangle, parametric equation.

UDC 519.21

ON THE ASYMPTOTIC OF BRANCHING REDUCED PROCESSES

KHUSANBAEV YA. M.

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS OF UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES, TASHKENT
yakubjank@mail.ru

TOSHKULOV X. A.

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV, SAMARKAND
kh.toshkulov@mathinst.uz

RESUME

In this paper we investigate the subcritical and critical reduced processes generated by the Gal'ton-Watson branching processes. The limit theorems for such processes in the case when in the population at the initial moment there are a large number of particles are obtained.

Key words: branching process, reduced process, limit theorem.

Introduction

Let $\{Z(k), k \geq 0\}$ - random Gal'ton-Watson branching process starting with one particle, in which the number of immediate descendants of one particle has a generating function

$$f(s) = Es^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Let $A = f'(1) < \infty$. Branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$ called subcritical, critical or supercritical if $A < 1$, $A = 1$ or $A > 1$ respectively.

Let us denote by $Z(m, n)$ number of particles at moment m ($m \leq n$) in process $\{Z(k), k \geq 0\}$, whose descendants exist at the moment n . Random process $\{Z(m, n), 0 \leq m \leq n\}$ called the reduced process generated by the Gal'ton-Watson branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$. Reduced process $\{Z(m, n), 0 \leq m \leq n\}$ called subcritical, critical or supercritical if the corresponding Gal'ton-Watson branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$ is accordingly. Reduced processes for Gal'ton-Watson processes were introduced by Fleischmann and Prehn [1]. Fleischmann and Sigmund-Schulze [2] proved a functional limit theorem (under the assumption $Z(0) = 1, Z(n) > 0$) in which the convergence in Skorokhod space of critical reduced processes to the Yule process (with a modified time scale) has been established. Liu and Vatutin [3] proved conditional limit theorems (under conditions $0 < Z(n) \leq \tau(n)$) for critical reduced processes starting with one particle ($Z(0) = 1$) and with a finite variance in the number of immediate descendants of one particle, where $\tau(n) = O(n)$, or $\tau(n) = o(n)$ as $n \rightarrow \infty$.

In this paper the conditional limit theorems for subcritical and critical reduced processes are proved.

Let us denote by $f_n(s)$ n -th iteration $f(s)$:

$$f_0(s) = s, f_1(s) = f(s), \dots, f_n(s) = f_{n-1}(f(s)).$$

If

$$A = f'(1) = E\xi = 1, \quad \sigma^2 = f''(1) = \text{var}\xi \in (0, \infty), \quad (1)$$

then it is known (see, for example, [4]Chapter I, paragraph 9) that

$$P(Z(n) > 0 / Z(0) = 1) = 1 - f_n(0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

and Yaglom's conditional limit theorem also holds:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{2Z(n)}{\sigma^2 n} < y \middle| Z(0) = 1, Z(n) > 0 \right) = 1 - e^{-y}, \quad y \geq 0. \quad (3)$$

Fleischmann and Sigmund-Schulze [2] proved for critical reduced processes that for $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[s^{Z([nt], n)} \middle| Z(0) = 1, Z(n) > 0 \right] = \frac{(1-t)s}{1-ts}, \quad (4)$$

where is the sign $[a]$, hereinafter, denotes the integer part of the number a .

If

$$A = f'(1) = E\xi < 1, \quad \sum_{k=2}^{\infty} p_k k \log k < \infty, \quad (5)$$

that is known (see for example, [4], Ch. I, paragraph 9), that there is a finite number $K > 0$ such that

$$P \left(Z(n) > 0 \middle| Z(0) = 1 \right) = 1 - f_n(0) \sim KA^n + o(A^n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

and Yaglom's conditional limit theorem also holds: there are limits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z(n) = k \middle| Z(0) = 1, Z(n) > 0) = b_k, \quad (7)$$

and $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, and the generating function

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1$$

satisfies the functional equation

$$1 - g(f(s)) = A(1 - g(s)), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad 8$$

Joffe and Spitzer [5] proved that if $A < 1$ and $\sum_{k=1}^{\infty} p_k k \log k < \infty$, then for anyone $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ there are limits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z(n) = k \middle| Z(0) = cA^{-n} + o(A^{-n})) = d_k(c),$$

where $c > 0$ is constant,

$$d_k(c) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_k(c) = 1$$

and

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(c) s^k = e^{-Kc(1-g(s))},$$

where $K > 0$ from the relation (6), and the function $g(s)$ the same as in (8).

In what follows we need the following lemmas.

Lemma 1. The following formula hold

$$E[Z(m, n) \middle| Z(0) = k, Z(n) > 0] = \frac{k(1 - f_{n-m}(0))}{1 - f_n^k(0)} A^m. \quad (9)$$

Lemma 2. The following formula hold

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(m, n) \middle| Z(0) = k, Z(n) > 0] &= \frac{k(1 - f_{n-m}(0))^2 \text{var} Z(m)}{1 - f_n^k(0)} + \\ &+ \frac{k f_{n-m}(0)(1 - f_{n-m}(0)) A^m}{1 - f_n^k(0)} - \frac{k^2 f_n^k(0)(1 - f_{n-m}(0))^2 A^{2m}}{(1 - f_n^k(0))^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

Proof of Lemma 1. It is easy to verify that

$$\begin{aligned} E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = 1 \right] &= E \left[E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = 1, Z(m) \right] \right] = \\ &= E \left[[f_{n-m}(0) + (1 - f_{n-m}(0))s]^{Z(m)} / Z(0) = 1 \right] = \\ &= f_m(f_{n-m}(0) + (1 - f_{n-m}(0))s) = f_m(\varphi_{n-m}(s)), \end{aligned}$$

where $\varphi_k(s) = f_k(0) + (1 - f_k(0))s$.

Now, according to the additivity property of branching processes, we have

$$E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = k \right] = \left\{ E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = 1 \right] \right\}^k = f_m^k(\varphi_{n-m}(s)). \quad (11)$$

In the last relation we take the left derivative at the point $s = 1$:

$$\begin{aligned} E[Z(m,n) / Z(0) = k] &= \left[E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = k \right] \right]_{s=1}' = [f_m^k(\varphi_{n-m}(s))]_{s=1}' = \\ &= k f_m^{k-1}(\varphi_{n-m}(s)) f_m'(\varphi_{n-m}(s))|_{s=1} (1 - f_{n-m}(0)) = \\ &= k f_m'(1) (1 - f_{n-m}(0)) = k A^m (1 - f_{n-m}(0)). \end{aligned}$$

Now, taking into account (11), we have

$$E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = k, Z(n) > 0 \right] = \frac{[f_m(\varphi_{n-m}(s))]^k - f_n^k(0)}{1 - f_n^k(0)}. \quad (12)$$

Here $I(A)$ denotes indicator of the event A . Taking left derivatives from both sides of the last relation at the point $s = 1$, we have

$$\begin{aligned} E[Z(m,n) / Z(0) = k, Z(n) > 0] &= \left[E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = k, Z(n) > 0 \right] \right]_{s=1}' = \\ &= \frac{k [f_m(1)]^{k-1} f_m'(1) (1 - f_{n-m}(0))}{1 - f_n^k(0)} = \frac{k (1 - f_{n-m}(0))}{1 - f_n^k(0)} A^m, \end{aligned}$$

that proves the validity of the relationship (9).

Proof of Lemma 1 is complete.

Proof of Lemma 2. By virtue of (12) we have

$$\begin{aligned} \left\{ E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = k, Z(n) > 0 \right] \right\}'' &= \frac{k(k-1) [f_m(\varphi_{n-m}(s))]^{k-2} [f_m'(\varphi_{n-m}(s))]^2 (1 - f_{n-m}(0))^2}{1 - f_n^k(0)} + \\ &+ \frac{k [f_m(\varphi_{n-m}(s))]^{k-1} f_m''(\varphi_{n-m}(s)) (1 - f_{n-m}(0))^2}{1 - f_n^k(0)}. \end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned} E[Z(m,n)(Z(m,n) - 1) / Z(0) = k, Z(n) > 0] &= \frac{k(1 - f_{n-m}(0))^2}{1 - f_n^k(0)} f_m''(1) + \\ &+ \frac{k(k-1)(1 - f_{n-m}(0))^2}{1 - f_n^k(0)} A^{2m}. \end{aligned}$$

Now, substituting the last expression and (9) into the formula

$$\begin{aligned} \text{var}[Z(m,n) / Z(0) = k, Z(n) > 0] &= \\ &= E[Z(m,n)(Z(m,n) - 1) / Z(0) = k, Z(n) > 0] + E[Z(m,n) / Z(0) = k, Z(n) > 0] - \\ &- [E[Z(m,n) / Z(0) = k, Z(n) > 0]]^2 \end{aligned}$$

we arrive at relation (10).

The proof of Lemma 2 is complete.

Formulation of the results.

Theorem 1. Let the condition (5) be satisfied. Then for $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$E \left[s^{Z([nt], n)} / Z(0) = 1, Z(n) > 0 \right] \rightarrow s \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Corollary 1. Let condition (5) is satisfied. Then for anyone $t \in [0, 1]$

$$P(Z([nt], n) = 1 / Z(0) = 1, Z(n) > 0) \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Theorem 2. Let condition (1) is satisfied and $Z(0) = \psi(n)$ with probability 1, where $\psi(n) = o(n)$ as $n \rightarrow \infty$. Then for $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$E \left[s^{Z([nt], n)} / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0 \right] \rightarrow \frac{(1-t)s}{1-ts} \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Corollary 2. Under the conditions of the theorem 2

$$P(Z([nt], n) = k / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0) \rightarrow (1-t)t^k, \quad k \in N. \quad (14)$$

Theorem 3. Let $A < 1$, $\sum p_k k \log k < \infty$ and $Z(0) = \psi(n)$ with probability 1, where $\psi(n)$ such that $A^n \psi(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then for $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$E \left[s^{Z([nt], n)} / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0 \right] \rightarrow s \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Corollary 3. Under the conditions of the theorem 3

$$P(Z([nt], n) = 1 / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0) \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Theorem 4. Let $A < 1$, $\sum p_k k \log k < \infty$ and $Z(0) = \psi(n)$ with probability 1, where $A^n \psi(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then for $m \in N$, $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$E \left[s^{Z(n-m, n)} / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0 \right] \rightarrow 1 - A^{-m} (1 - g(\varphi_m(s))) \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

where $g(s)$ satisfies equation (8), $\varphi_m(s) = f_m(0) + (1 - f_m(0))s$.

Remark 1. From Corollary 1 it follows that if it is known that the population has not degenerated by the moment n , then at the moment nt there is almost certainly only one particle whose descendants will survive until the moment n . It should be noted that the number of particles at the moment nt in the branching process $\{Z(k), k \geq 0\}$ itself differs significantly from the degenerate distribution law in unity.

Remark 2. Comparison of statement (4) with the result of Theorem 2 leads to the conclusion that if at the beginning of the development of the population there are $\varphi(n) = o(n)$ particles, then the number of particles at the moment nt that have descendants at the moment n , have in the asymptotic such a distribution as a process starting with one particle.

Proof of the results.

Proof of Theorem 1. According to Taylor's formula

$$f_{[nt]}(\varphi_{n-[nt]}(s)) = f_{[nt]}(1) - f'_{[nt]}(\theta(n, s)) \left(K(1-s)A^{n-[nt]} + o(A^{n-[nt]}) \right), \quad (15)$$

where $\theta(n, s)$ such that $1 - KA^{n-[nt]} \leq \theta(n, s) \leq 1$.

From (15), according the fact that $f'_{[nt]}(1) = A^{[nt]}$, we get

$$f_{[nt]}(\varphi_{n-[nt]}(s)) = 1 - K(1-s)A^n + o(A^n). \quad (16)$$

By virtue of (12) and (16), we have

$$\begin{aligned} E \left[s^{Z([nt],n)} / Z(0) = 1, Z(n) > 0 \right] &= \frac{f_{[nt]} (f_{n-[nt]}(0) + (1 - f_{n-[nt]}(0)) s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)} \sim \\ &\sim \frac{1 - K(1-s)A^n + o(A^n) - 1 + KA^n + o(A^n)}{KA^n + o(A^n)} \rightarrow s \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$, which completes the proof of the theorem 1.

Proof of Theorem 2. By virtue of (11), we have

$$E \left[s^{Z(m,n)} / Z(0) = \psi(n) \right] = [f_m(\varphi_{n-m}(s))]^{\psi(n)}. \quad (17)$$

Since the critical Galton–Watson process degenerates with probability 1, then

$$f_n(0) \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Therefore uniformly converges for $s \in [0, 1]$ and for anyone $t \in [0, 1]$

$$\varphi_{n-[nt]}(s) \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

By virtue of (18) and (19), we can choose a natural number $r = r(t, s)$ so that the chain of inequalities holds

$$f_r(0) \leq \varphi_{n-[nt]}(s) \leq f_{r+1}(0). \quad (20)$$

taking into account relation (2) we have

$$\varphi_{n-[nt]}(s) \sim 1 - \frac{2(1-s)}{\sigma^2(1-t)n} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Now relations (2), (20) and (21) allow us to conclude that

$$\frac{1}{r+1} \leq \frac{1-s}{n(1-t)} \leq \frac{1}{r}.$$

Hence,

$$r \sim \frac{n(1-t)}{1-s} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

From here and from (20) we obtain

$$f_{[nt]+r}(0) = f_{[nt]}(f_r(0)) \leq f_{[nt]}(\varphi_{n-[nt]}(s)) \leq f_{[nt]}(f_{r+1}(0)) = f_{[nt]+r+1}(0)$$

which in turn allows us to conclude

$$f_{[nt]}(\varphi_{n-[nt]}(s)) \sim f_{[nt]+r}(0) \quad (23)$$

Therefore, from (12), (22)-(23) and (2), using the asymptotic relation

$$e^{-x} \sim 1 - x, \quad x \rightarrow 0, \quad (24)$$

we get

$$\begin{aligned} E \left[s^{Z([nt],n)} / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0 \right] &= \frac{e^{-\frac{\psi(n)}{n} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{1-s}{1-st}} - e^{-\frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi(n)}{n}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi(n)}{n}}} + o(1) \sim \\ &\sim \frac{1 - \frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi(n)}{n} \cdot \frac{1-s}{1-st} - 1 + \frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi(n)}{n}}{\frac{2}{\sigma^2} \cdot \frac{\psi(n)}{n}} 1 - \frac{1-s}{1-st} = \frac{s(1-t)}{1-st} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

The proof of Theorem 2 is complete.

Proof of Theorem 3. Taking (6) into account and applying relation (24) we have

$$\begin{aligned} E[Z([nt], n)/Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0] &= \frac{\psi(n)(1 - f_{n-[nt]}(0))}{1 - f_n^{\psi(n)}(0)} A^{[nt]} = \\ &= \frac{\psi(n)(KA^{n-[nt]} + o(A^{n-[nt]}))}{1 - (1 - KA^n + o(A^n))^{\psi(n)}} A^{[nt]} \sim \frac{\psi(n)(KA^n + o(A^n))}{\psi(n)KA^n + o(\psi(n)A^n)} \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (25)$$

as $n \rightarrow \infty$. Further, according to (10), (6), (24) we have

$$\begin{aligned} \text{var}[Z([nt], n)/Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0] &= \frac{\psi(n)(1 - f_{n-[nt]}(0))^2 \text{var}Z([nt])}{1 - f_n^{\psi(n)}(0)} + \\ &+ \frac{\psi(n)f_{n-[nt]}(0)(1 - f_{n-[nt]}(0))A^{[nt]}}{1 - f_n^{\psi(n)}(0)} - \frac{\psi^2(n)f_n^{\psi(n)}(0)(1 - f_{n-[nt]}(0))^2 A^{2[nt]}}{(1 - f_n^{\psi(n)}(0))^2} \sim \\ &\sim \frac{\sigma^2 KA^{n-[nt]}}{A(1 - A)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (26)$$

as $n \rightarrow \infty$. Now from (25) and (26) as well as from Chebyshev's inequality the statement of Theorem 3 follows.

Proof of Theorem 4. According (6), (12) and (16) we have for any $m \in N$

$$\begin{aligned} E[s^{Z(n-m, n)} / Z(0) = \psi(n), Z(n) > 0] &= \frac{f_{n-m}^{\psi(n)}(\varphi_m(s)) - f_n^{\psi(n)}(0)}{1 - f_n^{\psi(n)}(0)} \sim \\ &\sim \frac{(1 - K(1 - g(\varphi_m(s)))A^{n-m} + o(A^n))^{\psi(n)} - (1 - KA^n + o(A^n))^{\psi(n)}}{1 - (1 - KA^n + o(A^n))^{\psi(n)}} \sim \\ &\sim \frac{1 - K(1 - g(\varphi_m(s)))\psi(n)A^{n-m} + o(\psi(n)A^n) - 1 + K\psi(n)A^n + o(\psi(n)A^n)}{K\psi(n)A^n + o(\psi(n)A^n)} \sim \\ &\sim 1 - A^{-m}(1 - g(\varphi_m(s))) \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$, which completes the proof of the theorem 4.

The proofs of the corollary follows immediately from the continuity theorem for generating functions.

REFERENCES

1. Fleischmann K., Prehn U. Ein Grenzfesatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen // Math. Nachr., 64 (1974), 233-241.
2. Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton-Watson processes// Math. Nachr., 79 (1977), 357-362.
3. Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton-Watson processes// Math. Nachr., 79 (1977), 357-362.
4. Liu M., Vatutin V. Reduced processes for small populations// Theory Probab. Appl., 63:4 (2018).
5. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin, Germany: Springer-Verlag. 1972.287p.
6. Joffe A., Spitzer F. On multitype branching processes with // Journal of Math. Analysis and Applications.v.19(1967), 409-430.
7. Harris T. Theory of branching random processes. M.Mir.1966. 355c. (in Russian).

8. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Theory of random processes. volume 1. From “Science”, 1971, 664 pp. (in Russian).

REZYUME

Ushbu maqolada biz Gal'ton-Votson tarmoqlanuvchi jarayonlarining subkritik va kritik bo'lgan hollarini o'rganamiz. Bunday jarayonlar uchun populyatsiyada boshlang'ich momentda juda ko'p zarrachalar mavjud bo'lganda limit teoremlar olingan.

Kalit so'zlar: tarmoqlanish jarayon, qisqartirilgan jarayon, limit teorema.

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуются докритические и критические редуцированные процессы, порождаемые ветвящимися процессами Гальтона-Уотсона. Получены предельные теоремы для таких процессов в случае, когда в популяции в начальный момент имеется большое число частиц.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, предельная теорема.

UDC UDC 517.55

ON THE POINT SPECTRUM OF THE SCHRODINGER OPERATOR FOR A SYSTEM CONSISTING OF TWO IDENTICAL INFINITELY HEAVY BOSONS AND ONE LIGHT FERMION ON THE THREE-DIMENSIONAL LATTICE

LAKAEV SH. S.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT

shlakaev@mail.ru

AKTAMOVA V. U.

SAMARKAND INSTITUTE OF VETERINARY MEDICINE, SAMARKAND

vaktamova@mail.ru

RESUME

We consider the Hamiltonian of a system of three quantum mechanical particles (two identical bosons and a fermion) on the one-dimensional lattice interacting by means of zero-range attractive or repulsive potentials. We investigate the point spectrum of the three-particle discrete Schrodinger operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ which possesses infinitely many eigenvalues depending on repulsive or attractive interactions, under the assumption that the bosons in the system have infinite mass.

Key words: Discrete Schrödinger operator, Point spectrum, Threshold resonance, Zero-range pair potentials, Threshold eigenvalues, Fredholm' determinant

INTRODUCTION

In physics, stable composite objects often form due to attractive forces, allowing constituents to lower their energy by binding together. While repulsive forces typically cause particles to scatter in free space, within structured environments such as periodic potentials, and in the absence of dissipation, stable composite objects can exist even with repulsive interactions due to the lattice band structure [1]. The Bose-Hubbard model, which describes repulsive pairs, serves as the theoretical foundation for various applications.

The work [1] highlights the critical connection between the Bose-Hubbard model [2],[3] and atoms in optical lattices, paving the way for numerous interesting developments and applications, as discussed in [4]. In cold atom lattice physics, stable repulsively bound objects are expected to be common, potentially leading to composites with fermions [5] or Bose-Fermi mixtures [6], and can even form with more than two particles in a similar manner.

The Efimov effect, first discovered by V. Efimov in 1970 [7], is one of the most fascinating phenomena in physics. It occurs in three-body systems in three-dimensional space that interact through short-range pairwise potentials. It is possible to adjust the couplings of the interactions so that none of the particle pairs have a negative energy bound state, but at least two pairs exhibit a resonance at zero energy. The existence of this effect for a three-particle Schrodinger operator was discovered by Yafaev [8] and in the discrete case by others [9,10,11,12,13,14]. This asymptotics problem was reduced to studying the asymptotics of the number of eigenvalues of Faddeev-type compact integral operators.

Recently, the authors [15,16,17] considered perturbations of the system of three arbitrary quantum particles on lattices $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, interacting through attractive zero-range pairwise potentials. They established that the three-particle Schrödinger operators possess infinitely many negative eigenvalues for all positive non-zero point interactions, under the assumption that two particles in the system have infinite mass. Also, note that the author of [17] obtained asymptotics for these eigenvalues.

The main goal of the paper is to investigate the existence of infinite number of bound states of the three-particle discrete Schrödinger operator associated to a system of two identical bosons and a fermion, where the bosons have infinite mass and the fermion has a finite mass. This investigation is conducted on

the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$ and involves repulsive or attractive zero-range pairwise interactions. We show that infinitely many eigenvalues may arise from threshold eigenvalues and threshold resonances or only from threshold eigenvalues depending on the interaction energies.

It should be noted that, unlike the last three articles [15,16,17], we study eigenvalues below and above the essential spectrum of the unperturbed operator for all repulsive or attractive zero-range pairwise interactions.

The paper is organized as follows. In Section 1, we introduce the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$ and the two-particle discrete Schrödinger operators associated with subsystems of the system of two identical bosons and a fermion. In Section 2, we study the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H(K)$. The eigenvalues of $H(K)$ below and above the spectrum of the non-perturbed operator $H_0(K)$ are investigated in Section 3. Section 4 is devoted to showing main result, Theorem 1. Section 5 is devoted to the description of the threshold resonance. The last section is conclusion.

Throughout the paper we adopt the following notations: $\mathbb{Z}^3$ is the three-dimensional lattice, $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/(2\pi\mathbb{Z})^3 = (-\pi, \pi]^3$ is the three-dimensional torus (the first Brillouin zone, i.e., the dual group of $\mathbb{Z}^3$) equipped with the Haar measure, the subscripts $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ are pairwise different numbers.

THREE-PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR ON THE LATTICE $\mathbb{Z}^3$

Let us consider the discrete Schrödinger operator $H(K)$, where $K \in \mathbb{T}^3$, associated with a system consisting of two identical bosons and a fermion moving on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$ (see [15,17]).

$$H(K) = H_0(K) - V$$

with zero-range attractive potentials

$$V = V_1 + V_2 + V_3,$$

where

$$\begin{aligned} (V_1 f)(p, q) &= \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, t) dt, \quad (V_2 f)(p, q) = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(t, q) dt \\ (V_3 f)(p, q) &= \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(t, p + q - t) dt, \quad f \in L_s^2((\mathbb{T}^3)^2), p, q \in \mathbb{T}^3, \end{aligned} \quad (1)$$

and numbers λ and μ serve as the parameters of boson-fermion interaction and boson-boson interaction, respectively.

Here the numbers λ and μ indicate repulsive pair-wise interaction when $\lambda < 0$ and $\mu < 0$, and attractive pair-wise interaction when $\lambda > 0$ and $\mu > 0$. The operator $H_0(K)$ is defined on the Hilbert space $L_s^2((\mathbb{T}^3)^2)$ by

$$(H_0(K)f)(p, q) = E(K; p, q)f(p, q), \quad f \in L_s^2((\mathbb{T}^3)^2),$$

and

$$E(K; p, q) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_b(q) + \varepsilon_f(K - p - q), \quad p, q \in \mathbb{T}^3.$$

Here, the real-valued continuous function $\varepsilon_b(\cdot)$ and $\varepsilon_f(\cdot)$, referred to as *the dispersion relation* associated with the free boson and fermion is defined as

$$\varepsilon_b(p) = \frac{1}{m} \varepsilon(p), \quad \varepsilon_f(p) = \frac{1}{\mathfrak{m}} \varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos p_j), \quad p \in \mathbb{T}^3, \quad (2)$$

respectively, and m and $\mathfrak{m}$ represents the mass of the boson and fermion, respectively.

Let $k \in \mathbb{T}^3$ and $L_k^2(\mathbb{T}^3)$ be a linear subspace of the Hilbert space $L^2(\mathbb{T}^3)$ defined by

$$L_k^2(\mathbb{T}^3) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^3) | f(p) = f(k - p)\}.$$

A two-particle discrete Schrödinger operator corresponding to the subsystem {boson, fermion} and {boson, boson}, of the three-particle system acts on the Hilbert space $L^2(\mathbb{T}^3)$ and $L_k^2(\mathbb{T}^3)$ as

$$h_1(k) = h_1^0(k) - v_1, \quad \text{and} \quad h_2(k) = h_2^0(k) - v_2, \quad k \in \mathbb{T}^3, \quad (3)$$

respectively.

Here, the operators $h_\alpha^0(k)$

$$(h_1^0(k)f)(p) = E_k^{(1)}(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3),$$

and

$$(h_2^0(k)f)(p) = E_k^{(2)}(p)f(p), \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}^3),$$

where

$$E_k^{(1)}(p) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_f(k-p), \quad E_k^{(2)}(p) = \varepsilon_b(p) + \varepsilon_b(k-p), \quad p \in \mathbb{T}^3. \quad (4)$$

The operators v_1 and v_2 are defined as

$$(v_1f)(p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

and

$$(v_2f)(p) = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(q) dq, \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}^3), \quad p \in \mathbb{T}^3,$$

respectively.

SPECTRAL PROPERTIES OF THE TWO-PARTICLE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS WHEN $m = \infty$ AND $0 < m < \infty$

With $m = \infty$ and $0 < m < \infty$ and the equality (2), the functions (4) can be written as

$$E_k^{(1)}(p) = \varepsilon_f(k-p) = \varepsilon(k-p)/m, \quad E_k^{(2)}(p) = 0, \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

Consequently, since the potentials v_α , $\alpha = 1, 2$ have a convolution-type property, all three two-particle Schrödinger operators do not depend on the quasi-momentum $k \in \mathbb{T}^3$,

$$h_1 := h_1(k), \quad \text{and} \quad h_2 = h_2(k).$$

Then, the operators $h_1(k)$ and $h_2(k)$ act as

$$h_1(k)f(p) = \varepsilon_f(p)f(p) - (v_1f)(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3) \quad \text{and} \quad h_2(k)f(p) = -(v_2f)(p), \quad f \in L_k^2(\mathbb{T}^3).$$

As v_1 is a finite rank operator, according to the Weyl theorem, the essential spectrum $\sigma_{ess}(h_1(k))$ of the operator $h_1(k)$ in (3) coincides with the spectrum $\sigma(h_1^0(k))$ of the non-perturbed operator $h_1^0(k)$. More specifically,

$$\sigma_{ess}(h_1(k)) = [E_{\min}^{(1)}(k), E_{\max}^{(1)}(k)],$$

where

$$E_{\min}^{(1)}(k) \equiv \min_{p \in \mathbb{T}^3} E_k^{(1)}(p), \quad E_{\max}^{(1)}(k) \equiv \max_{p \in \mathbb{T}^3} E_k^{(1)}(p).$$

Therefore, in our case we have

$$\sigma_{ess}(h_1(k)) = [0, 6/m] \quad \text{and} \quad \sigma_{ess}(h_2(k)) = \{0\}.$$

The Fredholm determinants associated with the operators $h_1(k)$ are defined as

$$\Delta(\lambda; z) = 1 - \lambda d_0(z), \quad d_0(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon_f(s) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6/m] \quad (5)$$

Lemma 1. *The number $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6/m]$ is an eigenvalue of $h_1(k)$ if and only if $\Delta(\lambda; z) = 0$.*

Proof. The equation

$$h_1(k)f = zf \quad \text{i.e.,} \quad f = \lambda(h_1^0(k) - z)^{-1}vf$$

has a non-trivial solution if and only if

$$\Delta(\lambda; z)C = 0, \quad C \in \mathbb{C},$$

has a non-trivial solution.

Therein, the solutions $C \in \mathbb{C}$ and $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ are connected by the following relations

$$C = vf \quad \text{and} \quad f = \lambda(h_1^0(k) - z)^{-1}C.$$

Set

$$\lambda_0 = \frac{1}{d_0(0)} \quad \text{and} \quad \lambda_0^* = \frac{1}{d_0(6/\mathfrak{m})},$$

where $d_0(0)$ and $d_0(6/\mathfrak{m})$ are continuation of $d_0(z)$ at the edges of the essential spectrum of $h_1(k)$. One may see that $\lambda_0^* = -\lambda_0$.

Lemma 2. (a) If $\lambda < -\lambda_0$ (resp. $\lambda > \lambda_0$), then there exists a unique simple eigenvalue $z = z_1^0$ of $h_1(k)$ in the interval $(6/\mathfrak{m}, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$). Moreover, z_1^0 does not depend on $k \in \mathbb{T}^3$.

(b) If $\lambda = -\lambda_0$ (resp. $\lambda = \lambda_0$), then the operator $h_\alpha(k)$ has a threshold resonance at $6/\mathfrak{m}$ (resp. at 0).

(c) If $-\lambda_0 \leq \lambda < 0$ (resp. $0 < \lambda \leq \lambda_0$), then $h_\alpha(k)$ has no eigenvalues in the interval $(6/\mathfrak{m}, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$).

Proof. We prove (a) and (c) when $\lambda < 0$. These assertions can be proven in a similar way when $\lambda > 0$.

The function $\Delta(\lambda; z)$ is monotonic increasing in $(6/\mathfrak{m}, \infty)$ and $\Delta(\lambda; z) > 1$ in $(-\infty, 0)$. Since

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta(\lambda; z) = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{z \rightarrow 6/\mathfrak{m}+} \Delta(\lambda; z) = 1 + \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

the intermediate-value theorem implies the existence of a unique simple zero $z = z_1^0$, $z_1^0 \in (6/\mathfrak{m}, \infty)$ of the function $\Delta(\lambda; \cdot)$, for $\lambda < -\lambda_0$, and $\Delta(\lambda; z)$ has no zeros in $(-\infty, 0) \cup (6/\mathfrak{m}, \infty)$ for $-\lambda_0 \leq \lambda < 0$.

(b) The equation

$$h_1(k)f = 6/\mathfrak{m}f$$

has a non-trivial solution if

$$\Delta(\lambda; 6/\mathfrak{m})C = 0, \quad C \in \mathbb{C}, \quad \text{that is} \quad \lambda = -\lambda_0,$$

and the solution

$$f = \lambda(h_1^0(k) - 6/\mathfrak{m})^{-1}\varphi, \quad \text{that is} \quad f(p) = \frac{\varphi(p)}{\varepsilon_f(p) - 6/\mathfrak{m}},$$

where

$$\varphi(p) = vf = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(t)dt \equiv \text{constant}$$

As $\varepsilon_f(p)$ has a unique nondegenerate maximum at the point (π, π, π) , the function f belongs in the Banach space $L^1(\mathbb{T}^3)$, but not in $L^2(\mathbb{T}^3)$, and it means $6/\mathfrak{m}$ is a threshold resonance.

Now we can summarize the results of this section in the following lemma.

Lemma 3.

$$\sigma_{\text{disc}}(h_1(k)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } 0 < \lambda \leq \lambda_0, \\ \{z_1^0\}, & \text{if } \lambda > \lambda_0, \end{cases}$$

$$\sigma(h_1(k)) = \begin{cases} [0, 6/\mathfrak{m}], & \text{if } -\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \\ \{z_1^0\} \cup [0, 6/\mathfrak{m}], & \text{if } |\lambda| > \lambda_0 \end{cases}$$

and

$$\sigma_{\text{disc}}(h_2(k)) = \{-\mu\}, \quad \sigma(h_2(k)) = \{-\mu\} \cup \{0\}$$

hold.

ESSENTIAL SPECTRUM OF $H(K)$

One of the notable outcomes in the spectral theory of multi-particle continuous Schrödinger operators involves characterizing the essential spectrum of the Schrödinger operators in terms of cluster operators (the HVZ-theorem. See Refs. [18,19,20,21,22] for the discrete case and [23] for a pseudo-relativistic operator).

Lemma 4. *The essential spectrum of $H(K)$ satisfies the relation*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \left\{ \sigma(h_1(K - k)) + \varepsilon_b(k) \right\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \left\{ \sigma(h_2(K - k)) + \varepsilon_f(k) \right\}.$$

Proof. *The proof can be found in [17,20].*

THE ESSENTIAL SPECTRUM OF $H(K)$ with $m = \infty$ AND $\mathfrak{m} < \infty$

Due to Lemma 3 and the relations $\varepsilon_b(p) = 0$ and $\varepsilon_f(p) = \varepsilon(p)/\mathfrak{m}$, we obtain

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \left\{ \sigma(h_1(K - k)) + \varepsilon_b(k) \right\} &= \sigma(h_1(k)), \\ \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \left\{ \sigma(h_2(K - k)) + \varepsilon_f(k) \right\} &= \bigcup_{k \in \mathbb{T}^3} \left\{ \{-\mu\} \cup \{0\} + \varepsilon_f(k) \right\} = [-\mu, 6/\mathfrak{m} - \mu] \cup [0, 6/\mathfrak{m}]. \end{aligned}$$

According the last two relations and Lemmas 3, 4 we have

Lemma 5. *For the essential spectrum of the main operator $H(K)$, we have*

$$\sigma_{ess}(H(K)) = [0, 6/\mathfrak{m}] \cup (\Lambda \cup [-\mu, 6/\mathfrak{m} - \mu]),$$

where

$$\Lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0], \\ \{z_1^0\} & \text{if } \lambda \in \mathbb{R} \setminus [-\lambda_0, \lambda_0]. \end{cases}$$

THE POINT SPECTRUM OF $H(K)$ FOR $m = \infty$ AND $\mathfrak{m} < \infty$

One can show easily that the subspace

$$\mathcal{A}_0 = \{f \in L_s^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) | f(p, q) = g(p + q), g \in L^2(\mathbb{T}^3)\}$$

is invariant under the operator $H(K)$, and so is $\mathcal{A}_0^\perp = L_s^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) \ominus \mathcal{A}_0$.

Therefore, we have

$$\sigma_{pp}(H(K)) = \sigma_{pp}(A_0(K)) \cup \sigma_{pp}(A_1(K)),$$

where $A_0(K)$ and $A_1(K)$ are restrictions of $H(K)$ on the linear subspaces $\mathcal{A}_0$ and $\mathcal{A}_0^\perp$, respectively.

Since $\mathcal{A}_0$ and $L^2(\mathbb{T}^3)$ are isomorphic, the operator $A_0(K)$ is unitarily equivalent to the operator B_0 on $L^2(\mathbb{T}^3)$, where

$$B_0 = E_0(K) - \mu I - 2\lambda v, \quad (6)$$

$E_0(K)$ denotes the multiplication by the function $\varepsilon_f(K - p)$, I is the identity operator, and v is an integral operator defined by

$$(vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} f(q) dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3), p \in \mathbb{T}^3.$$

The operator $A_1(K)$ takes the form

$$A_1(K) = H_0(K) - \lambda V_1 - \lambda V_2.$$

Let $U_K : L_s^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) \rightarrow L_s^2(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3)$ be a unitary operator defined as

$$(U_K f)(p, q) = f(-K/2 + p, -K/2 + q). \quad (7)$$

It establishes a unitary equivalence between $H(K)$ and $H(0)$, and so we can proof the coming statements for $H(0)$.

SPECTRUM OF $A_0(K)$. The following lemma describes the behaviour of the eigenvector of $A_0(K)$ in the linear space $\mathcal{H}_0$.

Lemma 6. (a) If $\lambda < -\lambda_0/2$, then $A_0(K)$ has a unique eigenfunction in the space $\mathcal{H}_0$ with an eigenvalue $\eta \in (6/\mathfrak{m} - \mu, \infty)$.

(b) If $\lambda > \lambda_0/2$, then $A_0(K)$ has a unique eigenfunction in the space $\mathcal{H}_0$ with an eigenvalue $\eta \in (-\infty, -\mu)$.

(c) If $-\lambda_0/2 \leq \lambda \leq \lambda_0/2$, then $A_0(K)$ has no eigenfunctions in the space $\mathcal{H}_0$.

(d) If $2\lambda = -\lambda_0/2$ (resp. $\lambda = \lambda_0/2$), then $A_0(K)$ has a resonance energy at $-\mu$ (resp. $6/\mathfrak{m} - \mu$) (see. Definition 1).

Proof. Recall that

$$\mathcal{H}_0 = \{f(p, q) = g(p + q) | g \in L^2(\mathbb{T}^3)\}.$$

Again, we prove the theorem for $A_0(0)$, using unitary equivalence of $A_0(0)$ and $A_0(K)$.

The equation

$$A_0(0)f = zf, \quad f \in \mathcal{H}_0,$$

has a solution if and only if the equation

$$c(1 - 2\lambda d_0(\mu + z)) = 0, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

has one, and their solutions are related by

$$f(p, q) := g(p + q) = \frac{2\lambda}{\varepsilon_f(-p - q) - z} c, \quad (9)$$

where

$$c = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} g(t) dt.$$

Equation (8) has a nontrivial solution if and only if

$$\Delta(2\lambda; \mu + z) = 1 - 2\lambda d_0(\mu + z) = 0.$$

According to Lemma 1, if $2\lambda < -\lambda_0$ (resp. $2\lambda > -\lambda_0$), then $\Delta(2\lambda; \mu + z)$ has a unique eigenvalue η in $(-6/\mathfrak{m}, \infty)$ (resp. in $(-\infty, -\mu)$).

(b) Lemma 1 gives that $\Delta(2\lambda; \mu + z)$ has no zeros in $(-\infty, \infty)$.

(c) If $2\lambda = \pm\lambda_0$, then the solution given in (9) lies in $L^1((\mathbb{T}^3)^2) \setminus L^2((\mathbb{T}^3)^2)$, that is, $A_0(0)$ has a resonance energy at $-\mu$ or $6/\mathfrak{m} - \mu$.

SPECTRUM OF $A_1(K)$. As the operator $A_1(K)$ does not contain the parameter μ , Lemma 5 implies that

$$\sigma_{ess}(A_1(K)) = \{z_1^0\} \cup [0, 6/\mathfrak{m}].$$

In order to study we define the following integral depending on $n \in \mathbb{Z}$:

$$d_n(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{e^{i(n,t)}}{\varepsilon_f(t) - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6/\mathfrak{m}]. \quad (10)$$

Lemma 7. (a) For any fixed $n \in \mathbb{Z}^3$, the function $d_n(z)$ is positive and monotonically increasing in the interval $(-\infty, 0)$ as a function of z .

(b) The following limit exists

$$d_n(0) = \lim_{z \rightarrow 0^-} d_n(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{e^{i(n,t)}}{\varepsilon_f(t) - 0} dt. \quad (11)$$

Additionally, for any $z \in \mathbb{R} \setminus [0, 6/\mathfrak{m}]$, the relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(z) = 0 \quad (12)$$

holds.

Proof. The first part of the lemma easily follows from the conditionally negative definiteness of the function $\varepsilon_f(\cdot)$ (see [24, Lemma 4]).

(b) The asymptotic relation $\varepsilon_f(q) - 0 \approx \frac{1}{2}q^2$ near the origin implies the existence of the relation 11.

We represent the operators V_1 and V_2 in (1) as $V_1 = \lambda \Phi_1^* \Phi_1$ and $V_2 = \lambda \Phi_2^* \Phi_2$, respectively, where the operators $\Phi_1, \Phi_2 : L^2((\mathbb{T}^3)^2) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^3)$ are defined as

$$(\Phi_1 f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} f(p, t) dt \quad \text{and} \quad (\Phi_2 f)(q) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} f(t, q) dt. \quad (13)$$

Lemma 8. The number $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_1(K))$ is an eigenvalue of the operator $A_1(K)$ if and only if $D(z) = 0$, where

$$D(z) = \frac{1}{\Delta^2(\lambda; z)} \prod_{n \in \mathbb{Z}^3} \delta_n^+(\lambda; z), \quad (14)$$

with

$$\delta_n^+(\lambda; z) = 1 - \lambda(d_0(z) + d_n(z)). \quad (15)$$

If $z_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_1(K))$ is an eigenvalue of $A_1(K)$ and $\delta_n^+(\lambda; z_n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}^3$, then the corresponding eigenfunction is of the form

$$f_n(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_f(K - p - q) - z_n} \left[\cos(n, (-K/2 + p)) + \cos(n, (-K/2 + q)) \right]. \quad (16)$$

Proof. Given the unitary equivalence of $H(K)$ and $A_1(K)$ to $H(0)$ and $A_1(0)$, respectively, we first establish the claim for the latter operators.

Let $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A_1(0))$ be an eigenvalue of $A_1(0)$, and let f be the corresponding eigenfunction, then

$$f = R_0(z)[\lambda V_1 + \lambda V_2]f, \quad (17)$$

where $R_0(z) = (H_0(0) - zI)^{-1}$ is a resolvent of $H_0(0)$.

The last equation has a non-trivial solution if and only if the system of two linear equations

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \Phi_\alpha(R_0(z)[\lambda \Phi_1^* \tilde{\varphi}_1 + \lambda \Phi_2^* \tilde{\varphi}_2]), \quad \alpha = 1, 2, \quad \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in L^2(\mathbb{T}^3) \quad (18)$$

on the space $L^2(\mathbb{T}^3) \oplus L^2(\mathbb{T}^3)$ has a non-zero solution.

Solutions of the equations (17) and (18) are related by

$$f(p, q) = R_0(z)[\lambda \Phi_1^* \tilde{\varphi}_1 + \lambda \Phi_2^* \tilde{\varphi}_2], \quad (19)$$

and

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \Phi_\alpha f, \quad \alpha = 1, 2. \quad (20)$$

Since f is a symmetric function, $\tilde{\varphi}_1$ and $\tilde{\varphi}_2$ are same function, and only there arguments are different, that is, the argument of $\tilde{\varphi}_1$ is the variable p , while q is an independent variable of $\tilde{\varphi}_1$:

$$\tilde{\varphi}_2(p) = \tilde{\varphi}_1(p). \quad (21)$$

We note that the functions

$$\Delta_\alpha := I - \lambda \Phi_\alpha R_0(z) \Phi_\alpha^*, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_0), \quad \alpha = 1, 2,$$

are nonzero for any $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A_1(0))$, and they are multiplication operator by a number or by the Fredholm determinant $\Delta(\lambda; z)$ in (5), and due to Lemma 5 the inequality $\Delta(\lambda; z) \neq 0$ holds, and hence Δ^{-1} exist and it is a multiplication operator by a number

$$1/\Delta(\lambda; z).$$

Then, the solutions $\tilde{\varphi}_\alpha, \alpha = 1, 2$, of the equation (18) satisfy the following system of integral equations

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1 = \lambda \Delta^{-1} \mathcal{Q} \tilde{\varphi}_2, \\ \tilde{\varphi}_2 = \lambda \Delta^{-1} \mathcal{Q}^* \tilde{\varphi}_1, \end{cases} \quad (22)$$

where

$$\mathcal{Q} = \Phi_1 R_0(z) \Phi_2^* \quad (23)$$

is the integral operator on $L^2(\mathbb{T}^3)$ defined as

$$(\mathcal{Q}g)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{g(t)dt}{\varepsilon_{\mathfrak{f}}(-p-t) - z}, \quad g \in L^2(\mathbb{T}^3) \quad (24)$$

and $\mathcal{Q}^*$ is the adjoint of $\mathcal{Q}$.

Using the substitution method, the system (22) can be reduced into the form

$$\tilde{\varphi}_1 = Q(z) \tilde{\varphi}_1, \quad \text{i.e.,} \quad Q(z) = \lambda^2 \Delta^{-1} \Delta^{-1} \mathcal{Q} \mathcal{Q}^*. \quad (25)$$

Moreover, if $\varphi = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ is a solution to (22), then $\tilde{\varphi}_1$ is an eigenfunction of $Q(z)$ corresponding to the eigenvalue 1. Conversely, suppose that $\tilde{\varphi}_1$ is an eigenfunction corresponding to the eigenvalue 1 of the operator $Q(z)$. Then $\varphi = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$, with $\tilde{\varphi}_2 = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda; z)} \mathcal{Q} \tilde{\varphi}_1$ is a solution to (22) (i.e. (18)). Notice that the multiplicities of the linearly independent eigenvectors $\tilde{\varphi}_1$ and φ coincide.

We also note that the function f defined in (19) is an eigenfunction of $A_1(0)$ corresponding to an eigenvalue $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A_1(0))$. Moreover, the multiplicity of the eigenvalues z of $A_1(0)$ is the same as the multiplicity of the eigenvalue $\kappa = 1$ of $Q(z)$.

The operator $Q(z)$ is a convolution-type trace-class integral operator. The standard Fourier transform $\mathcal{F}_1 : L^2(\mathbb{T}^3) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^3)$,

$$(\mathcal{F}_1 g)(n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(n,p)} g(p) dp, \quad g \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad n \in \mathbb{Z}^3,$$

establishes that $\hat{Q}(z) := \mathcal{F}_1 Q(z) \mathcal{F}_1^*$ acts as a multiplication operator on the space $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ by the function

$$\kappa_n(z) = \frac{\lambda^2}{\Delta^2(\lambda; z)} d_n(z) d_{-n}(z), \quad n \in \mathbb{Z}^3. \quad (26)$$

Thus, the spectrum of $\hat{Q}(z)$ consists of the following union

$$\sigma(\hat{Q}(z)) = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} \{\kappa_n(z)\},$$

with the space of eigenfunctions

$$\hat{\varphi}_n(m) = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^3,$$

where $\delta_{\cdot, \cdot}$ is the Kroneker delta function on $\mathbb{Z}^3$.

Note that the compact operator $Q(z)$ has eigenvalues $\kappa_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}^3$ with the corresponding eigenfunctions

$$\psi_n(p) = e^{i(n,p)}, \quad n \in \mathbb{Z}^3, \quad p \in \mathbb{T}^3. \quad (27)$$

Therefore, the determinant of the operator $I - Q(z)$ can be written as the following product

$$\det(I - Q(z)) = \prod_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 - \kappa_n(z)), \quad (28)$$

which takes the form (14), since $d_{-n}(z) = d_n(z)$ and (26).

Let $\kappa_n(z_n) = 1$ be an eigenvalue of $Q(z_n)$, then ψ_n is the first component of the solution $\varphi_n = (\psi_n, \tilde{\psi}_n)$ of equation (18), and the second component is defined as

$$\tilde{\psi}_n(q) := \tilde{\varphi}_2(q) = \lambda \Delta_2^{-1} Q^* \psi_n(q) = \frac{\lambda d_n(z_n)}{\Delta(\lambda; z_n)} \tilde{\psi}_{-n}(q). \quad (29)$$

Using the equality (21) in the last relation, we get

$$e^{i(n,q)} = \lambda \Delta_2^{-1} Q^* \psi_n(q) = \frac{\lambda d_n(z_n)}{\Delta(\lambda; z_n)} e^{-i(n,q)},$$

which is contradiction.

However, if $\vartheta_n(p) = (e^{i(n,p)} + e^{-i(n,p)})/2 = \cos((n,p))$, it satisfies (21) and (29) if and only if

$$\frac{\lambda d_n(z_n)}{\Delta(\lambda; z_n)} = 1, \quad \text{i.e.} \quad \delta_n^+(\lambda; z) = 1 - \lambda(d_0(z_n) + d_n(z_n)) = 0.$$

However, for the functions $\theta_n(p) = (e^{i(n,p)} - e^{-i(n,p)})/2i = \sin((n,p))$ the relation

$$\theta_n = \lambda \Delta_2^{-1} Q^* \theta_n = -\frac{\lambda d_n(z_n)}{\Delta(\lambda; z_n)} \theta_n,$$

holds, which contradicts with (21). It implies

$$-\frac{\lambda d_n(z_n)}{\Delta(\lambda; z_n)} = 1, \quad \text{i.e.} \quad \delta_n^-(\lambda; z) = 1 - \lambda(d_0(z_n) - d_n(z_n)) = 0.$$

Since the system $\{\vartheta_n, \theta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^3$ is complete in $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$, the last three relations and (26) allow us to use the Fredholm determinant (14) instead of (28).

Accordingly, the number z_n is an eigenvalue of $A_1(0)$ and the corresponding eigenfunction can be found by (19) as

$$f_n^0(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_{\mathfrak{f}}(-p - q) - z} [\vartheta_n(p) + \vartheta_n(q)].$$

According to the relation $H(0) = U_K^* H(K) U_K$, the number z_n is also an eigenvalue of $H(K)$ with the eigenfunction $f_n = U_K f_n^0$, i.e., (16), where the unitary operator U_K is defined in (7).

EIGENVALUES OF $H(K)$ BELOW AND ABOVE THE SPECTRUM OF $H_0(K)$

First, we study the function $\delta_n^+(\lambda; z)$ in () for any $n \in \mathbb{Z}^3$.

Lemma 9. For any fixed $n \in \mathbb{Z}^3$, the function $d_0(z) + d_n(z)$ is positive and monotonically increasing in the interval $(-\infty, 0)$ as a function of z . Additionally,

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (d_0(z) + d_n(z)) = d_0(0) + d_n(0), \quad (30)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (d_0(z) + d_n(z)) = 0. \quad (31)$$

and for any $z \in (-\infty, 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_0(z) + d_n(z)) = d_0(z) \quad (32)$$

hold.

Proof. The equality

$$d_0(z) + d_n(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1 + \cos(n, t)}{\varepsilon_{\mathfrak{f}}(t) - z} dt$$

and Lemma 7 imply the positivity and monotonicity of $d_0(z) + d_n(z)$ in $(-\infty, 0)$. The limits (30), (31) and (12) follow from Lemma 7.

Let z_1^0 be a zero of $\Delta_\alpha(\cdot) = 0$, i.e. an eigenvalues of $h_1(k)$ in the interval $\mathbb{R} \setminus [0, 6/\mathfrak{m}]$ (see 2). Note that z_1^0 exists iff $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-\lambda_0, \lambda_0]$.

The number defined by

$$\lambda_n^+ = \frac{1}{d_0(0) + d_n(0)},$$

satisfies

$$0 < \lambda_0^+ < \lambda_n^+ < \lambda_0, \quad n \in \mathbf{Z}^3, \quad \text{and} \quad \lambda_0^+ = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (33)$$

Lemma 10. Let $n \in \mathbf{Z}^3$. (a) If $\lambda \leq \lambda_n^+$, then $\delta_n^+(\lambda, z)$ has no zeros in the interval $(-\infty, 0)$.

(b) If $\lambda_n^+ < \lambda$, then $\delta_n^+(\lambda, z)$ has a unique zero $z_n \in (-\infty, 0)$, and it satisfies $z_n < z_1^0$.

Proof. Due to Lemma 9 the functions $d_0(z) + d_n(z)$ are positive and monotonically increasing in the interval $(-\infty, 0)$, and so the proof of the existence of z_n is quite similar to the proof of the existence of z_1^0 in Lemma 2.

Let $\lambda > 0$. The inequalities $z_n < z_1^0$ follow the inequalities

$$\delta_n^+(\lambda; z) < \Delta(\lambda; z)$$

and the monotonicity of the last three functions.

EIGENVALUES OF $H(K)$ ABOVE $[0, 6/\mathfrak{m}]$

The unitary operator $U_{\pi/2}$ in (7) is used to establish the equalities

$$U_{\pi/2}H_0(K)U_{\pi/2} = \frac{6}{\mathfrak{m}} - H_0(K) \quad \text{and} \quad U_{\pi/2}VU_{\pi/2} = V$$

which implies the relation

$$U_{\pi/2}(H_0(K) - V)U_{\pi/2} = \frac{6}{\mathfrak{m}} - (H_0(K) + V). \quad (34)$$

The final relationship enables us to shift the investigation of the eigenvalues of $H(K)$ from above the interval $[0, 6/\mathfrak{m}]$ to below it.

Lemma 11. Let $n \in \mathbf{Z}^3$. (a) If $-\lambda_n^+ \geq \lambda$, then $\delta_n^+(\lambda, z)$ has no zeros in the interval $(6/\mathfrak{m}, \infty)$.

(b) If $\lambda < -\lambda_n^+$, then $\delta_n^+(\lambda, z)$ has a unique zero $z_n \in (6/\mathfrak{m}, \infty)$, and it satisfies $6/\mathfrak{m} < z_1^0 < z_n$.

Proof. The proof is a consequence of Lemma 10 and the identity 34.

MAIN THEOREM

Recall that z_1^0 be a zero of $\Delta(\lambda; \cdot) = 0$, i.e. an eigenvalues of $h_1(k)$, and $z_1^0 < 0$ if $\lambda > 0$ and $6/\mathfrak{m} < z_1^0$ if $\lambda < 0$. Let η be an eigenvalue of $H(K)$ mentioned in Lemma 6.

Now, we are ready to formulate the main result of the paper.

Theorem 1. Assume $\mu \in \mathbb{R}$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Let $|\lambda| \leq |\lambda_0/2|$. Then

$$\sigma_{pp}(H(K)) = \emptyset.$$

(b) Let $|\lambda_0/2| < |\lambda| < |\lambda_0|$. Then

$$\sigma_{pp}(H(K)) = \bigcup_{|n| \leq n_0} \{z_n\} \cup \{\eta\},$$

and $6/\mathfrak{m} < z_1^0 < z_n$ if $\lambda < 0$; $z_n < z_1^0 < 0$ if $\lambda > 0$. Here n_0 is a positive integer number depending on λ .

(c) Let $|\lambda_0| \leq |\lambda|$. Then

$$\sigma_{pp}(H(K)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^3} \{z_n\} \cup \{\eta\},$$

and $6/\mathfrak{m} < z_1^0 < z_n$ if $\lambda < 0$; $z_n < z_1^0 < 0$ if $\lambda > 0$.

Proof. Lemmas 6, 10 and 11 provide the proof. For example, by combining the assertions (a) in Lemma 6, (b) in Lemma 10, we get the proof of the part (a) of the theorem.

Remark 1. According to Lemma 5

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \{z_1^0\} \cup \left([-\mu, 6/\mathfrak{m} - \mu] \cup [0, 6/\mathfrak{m}] \right).$$

Theorem 1 demonstrates that z_n , ζ_n , or η could be within $\sigma_{ess}(H(K))$ or within a gap of the essential spectrum.

Theorem 2. Let $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_1^0.$$

Proof. Due to Theorem 1, there exists a sequence $\{z_n\}$ of eigenvalues of $H(K)$ below z_1^0 .

As $\delta_n^+(\lambda; z_n) = 0$ and $\Delta_1(\lambda; z_1^0) = 0$, using the intermediate theorem we get

$$\begin{aligned} \delta_n^+(\lambda; z_1^0) &= \frac{d}{dz} \delta_n^+(\lambda; \xi_n)(z_1 - z_n), \quad z_n < \xi_n < z_1^0, \\ \delta_n^+(\lambda; z_1^0) &= \delta_n^+(\lambda; z_1^0) - \Delta_1(\lambda; z_1^0) = -\lambda d_n(z_1^0) \end{aligned}$$

and hence

$$|z_n - z_1^0| = d_n(z_1^0) \left| \frac{\lambda}{\frac{d}{dz}(\delta_n^+(\lambda; \xi_n))} \right|$$

Since $0 < C < \left| \frac{d}{dz}(\delta_n^+(\lambda; \xi_n)) \right|$ for some $C > 0$ and $n \in \mathbb{Z}^d$ we get

$$|z_n - z_1^0| < C |d_n(z_1^0)|$$

which together the limit (12) we get the first limit of the theorem.

THRESHOLD RESONANCES

In this section, we investigate how η or z_n arises from or are absorbed into the essential spectrum $\sigma_{ess}(H(K))$

Let $\nu = -\mu$ or $\nu = 0$ or $\nu = 6/\mathfrak{m} - \mu$ or $\nu = 6/\mathfrak{m}$.

Definition 1. (Threshold eigenvalue and threshold resonance). Let f be a solution of $H(K)f = \nu f$.

- (1) If $f \in L_s^2((\mathbb{T}^3)^2)$, ν is called a lower threshold eigenvalue of $H(K)$.
- (2) If $f \in L_s^1((\mathbb{T}^3)^2) \setminus L_s^2((\mathbb{T}^3)^2)$, ν is called a lower threshold resonance of $H(K)$.

From the continuity of $d_n(z)$ at 0 and $6/\mathfrak{m}$, the function $D(z)$ can be defined at 0 and $6/\mathfrak{m}$. Let us denote it by $D(\nu)$.

Lemma 12. (a) The number ν is a threshold eigenvalue (threshold resonance) of the operator $A_1(K)$ if and only if $D(\nu) = 0$, where $D(z)$ is defined by (14).

If $D_n(\nu) = 0$ for some $n \in \mathbb{Z}^3$, the solution of the equation $A_1(K)f = \nu f$ can be written as

$$f_n(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_{\mathfrak{f}}(K - p - q) - \nu} \left(\cos(n, (-K/2 + p)) + \cos(n, (-K/2 + q)) \right)$$

and $f \in L_s^1((\mathbb{T}^3)^2) \setminus L_s^2((\mathbb{T}^3)^2)$.

Proof. We prove the lemma for $K = 0$.

(a) The proof of the part (a) is similar to the proof of Lemma 8.

The continuation of the operators $Q(z)$ in (23) and $\mathcal{Q}(z)$ in (18) at $z = \nu$ are defined by

$$Q(\nu) = \lambda \Delta^{-1}(\nu) \Phi_1(H_0 - \nu)^{-1} \Phi_2^*$$

and

$$\mathcal{Q}(\nu) = \lambda^2 \Delta^{-2}(\nu) \Phi_1(H_0 - \nu)^{-1} \Phi_2^* \Phi_2(H_0 - \nu)^{-1} \Phi_1^*,$$

respectively.

The equation $A_1(K)f = \nu f$, $f \in L_s^1((\mathbb{T}^3)^2)$, has a solution if and only if the equation

$$Q(\nu)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{T}^3), \quad (35)$$

has a solution and

$$\mathcal{Q}(\nu)\varphi = \varphi. \quad (36)$$

Here the solutions are connected by the relations

$$f(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_f(-p - q) - \nu} (\varphi(p) + \varphi(q)) \quad (37)$$

and

$$\varphi = \Phi_1 f. \quad (38)$$

Since $\mathcal{Q}(\nu)$ is a Hilbert-Schmidt operator, and it has eigenvalues $\kappa_n(\nu) = \lambda^2 d_n^2(\nu) / \Delta^2(\lambda; \nu)$, $n \in \mathbb{Z}^3$ with the corresponding eigenfunctions

$$\psi_n(p) = e^{i(n,p)}, \quad n \in \mathbb{Z}^3, \quad p \in \mathbb{T}^3. \quad (39)$$

Since $\mathcal{Q}(\nu)\psi_n = \psi_{-n}$, which is contradiction with (36), the function $\vartheta_n = (\psi_n + \psi_{-n})/2 = \cos((n, \cdot))$ satisfies (36), i.e.

$$\vartheta_n = \frac{\lambda d_n(\nu)}{\Delta(\lambda; \nu)} \vartheta_n.$$

and hence

$$\delta_n^+(\lambda; \nu) = 1 - \lambda(d_0(\nu) + d_n(\nu)) = 0.$$

Since the system $\{\vartheta_n, \theta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^3$ is complete in $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$, the last three relations and (14) allow us to use the Fredholm determinant (14) instead of (28).

Accordingly, the number z_n is an eigenvalue of $A_1(0)$ and the corresponding eigenfunction can be found by (19) as

$$f_n^0(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_f(-p - q) - \nu} [\vartheta_n(p) + \vartheta_n(q)].$$

According to the relation $H(0) = U_K^* H(K) U_K$, the equation $H(K)f = \nu f$ has a solution of the form

$$f_n(p, q) = \frac{\lambda}{\varepsilon_f(K - p - q) - \nu} [\vartheta_n(-K/2 + p) + \vartheta_n(-K/2 + q)].$$

(b) As the function $1/\varepsilon_f(p)$ is integrable on $\mathbb{T}^3$, the inclusion $f^0 \in L_s^1((\mathbb{T}^3)^2)$ is obvious.

Consider the relation

$$\int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |f_n^0(p, q)|^2 dp dq = 4 \int_{\mathbb{T}^3} \sin^2(n, q) dq \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2(n, t/2)}{\varepsilon_f^2(t)} dt. \quad (40)$$

As $\varepsilon_f(p) \approx p^2$ near the origin and $\varepsilon_f(p) > c$ for some $c > 0$ when p is not close to 0, the last integral satisfies the conditions

$$\int_{\mathbb{T}^3} \int_{\mathbb{T}^3} |f_n^0(p, q)|^2 dp dq = \infty.$$

Thus $f \in L^1((\mathbb{T}^3)^2) \setminus L^2((\mathbb{T}^3)^2)$.

For any $n \in \mathbb{Z}^3$, define

$$T_n = \{m \in \mathbb{Z}^3 | d_m(0) = d_n(0)\} \quad \text{and} \quad \tau_n = |T_n|.$$

As $d_n(0) < d_0(0)$ and the function $\varepsilon_f(p)$ is invariant with respect to the permutations of its arguments $p^{(j)}$ and $p^{(k)}$, $j, k = 1, 2, 3$, the set T_n is singleton only for $n = 0$.

Notice that $\lambda_0/2 \leq \lambda_n^+ < \lambda_0$ and $\lambda_n^+ \rightarrow \lambda_0$ as $n \rightarrow \infty$.

Theorem 3. Let $n \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Let $|\lambda| = \lambda_0/2$, then the operator $H(K)$ has a threshold resonance of multiplicity one at 0 if $\lambda = \lambda_0/2$; at $6\mathbf{m}$ if $\lambda = -\lambda_0/2$. Moreover $\sigma_p(H(K)) = \emptyset$.

Moreover, if $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$), then $H(K)$ has a threshold resonance at the left edge (resp. the right edge) of the two-particle branch $[-\mu, 6/\mathbf{m} - \mu]$ of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H(K))$.

(b) Let $|\lambda| = \lambda_n^+$, $n \neq 0$. Then, the operator $H(K)$ has a threshold resonance of multiplicity one and threshold eigenvalue of multiplicity $\tau_n - 1$ at 0 if $\lambda > 0$; at $6\mathbf{m}$ if $\lambda < 0$.

(c) If $|\lambda| \neq \lambda_n^+$ the operator $H(K)$ has neither threshold resonance nor threshold eigenvalues at the thresholds of the essential spectrum.

Proof. Due to Lemma 5, the interval $[-\mu, 6/\mathbf{m} - \mu]$ is a component of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H(K))$, and hence Lemmas 6 and 12 imply the proof of the statement (a).

The proof of the remaining statements follows from Lemma 12.

CONCLUSION

The discrete Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of three quantum mechanical particles (two identical bosons and a fermion) with masses $m = \infty$ and $\mathbf{m} < \infty$, respectively, is considered on the three-dimensional lattice for all non-zero point interactions. The point spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator, which may possess infinitely many eigenvalues, has been studied for all non-zero point interactions.

Moreover, we showed the conditions for the appearance of threshold resonances and threshold eigenvalues. The dependence of their multiplicities on the parameters was explicitly derived.

REFERENCES

- [1] Winkler K. et al. “Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. *Nature*. 2006. **441**. 853–856.
- [2] Bloch I. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nat. Phys.* 2005. **1**. 23–30.
- [3] Jaksch D. and Zoller P. The cold atom Hubbard toolbox. *Ann. of Phys.* 2005. **315**(1). 52–79.
- [4] Thalhammer G. et al. Inducing an optical Feshbach resonance via stimulated Raman coupling. *Phys. Rev. A*. 2005. **71**. 033403.
- [5] Hofstadter W. et al., “High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* 2002. **89**. 220407.
- [6] Lewenstein M. et al. Atomic Bose-Fermi mixtures in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.* 2004. **92**. 050401.
- [7] Efimov V.N. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Physics Letters*. 1970. **33**(8). 563–564.
- [8] Yafaev D. On the theory of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator. *Math. USSR-Sb.* 1974. **23** 535–559.
- [9] Lakaev S.N. The Efimov’s effect of a system of three identical quantum lattice particles. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1993. **27**. 15–28.
- [10] Lakaev S.N. and Muminov Z.I. The Asymptotics of the Number of Eigenvalues of a Three-Particle Lattice Schrödinger Operator. *Funct. Anal. Appl.* 2003. **37**. 228–231.
- [11] Abdullaev Zh.I. and Lakaev S.N. Asymptotics of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Difference Operator on a Lattice. *Theor. Math. Phys.* **136**. 1096–1109.

- [12] Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. “Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.* (2004). **5**. 743–772.
- [13] Dell’Antonio G., Muminov Z. I., Shermatova Y. M., On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three-particles on lattices. *J. Phys. A: Math. Theor.* , 2011. **44**. 315302.
- [14] Khalkhuzhaev A. M., Abdullaev J. I., Boymurodov J. K. The Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrödinger Operator on Three Dimensional Lattice. *Lob. J. Math.* 2022. **43**(12). 3486–3495.
- [15] Muminov M., Aliev N. Discrete spectrum of a noncompact perturbation of a three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Theor. Math. Phys.* 2015. **1823**(3). 381–396.
- [16] Muminov Z. I., Aliev N. M., Radjabov T. On the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator on a two-dimensional lattice. *Lob. J. Math.* 2022. **43**(11). 3239–3251.
- [17] Aliev N. M. Asymptotic of the Discrete Spectrum of the Three-Particle Schrödinger Operator on a One-Dimensional Lattice. *Lob. J. Math.* 2023. **44**(2). 491–501.
- [18] Rabinovich V. S., Roch S. The essential spectrum of Schrödinger operators on lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. **39**. 8377.
- [19] Albeverio S., Lakaev S., Muminov Z. “On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices. *Math. Nachr.* 2007. **280**. 699–716.
- [20] Kholmatorov Sh. Yu., Muminov Z. I. The essential spectrum and bound states of N -body problem in an optical lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2018. **51**. 265202.
- [21] Muminov Z., Lakaev Sh. Aliev N. “On the Essential Spectrum of Three-Particle Discrete Schrödinger Operators with Short-Range Potentials. *Lob. J. Math.* 2021. **42**(6). 1304–1316.
- [22] Lakaev S. N., Boltaev A. T. “The Essential Spectrum of a Three Particle Schrödinger Operator on Lattices. *Lob. J. Math.* 2023. **44**(3). 1176–1187.
- [23] Jakubaba-Amundsen D. H. The HVZ Theorem for a Pseudo-Relativistic Operator . *Ann. Henri Poincaré*. 2007. **8**. 337–360.
- [24] Z. I. Muminov, Sh. Alladustov, Sh. Lakaev, “Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete Laplacian”, *J. Math. Anal. Appl.*, **496** (2021) 124827.

REZYUME

Biz uchta kvant mexanik zarrachalardan (ikki bir xil bozon va bitta fermiondan) iborat sistemaning Hamiltonianini ko‘rib chiqamiz. Bu zarrachalar bir o‘lchamli panjarada nuqtada tortuvchi yoki itaruvchi potentsiallar orqali o‘zaro ta’sirlashadi.

Bozonlarning massasi cheksiz deb faraz qilingan holda, biz uch zarrachali diskret Shredinger operatori $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$ ning nuqtali spektrini o‘rganamiz. Bu operator, o‘zaro tortuvchi yoki itaruvchi ta’sir kuchlariga bog‘liq holda, cheksiz ko‘p xos qiymatlarga ega bo‘ladi.

Kalit so‘zlar: diskret Shro’dinger operatori, nuqtali spektr, bo’sag’a rezonasi, kontakt potentsial, bo’sag’a xos qiymat, Fredgolm determinant

Аннотация

Мы рассматриваем гамильтониан системы трех квантово-механических частиц (два идентичных бозона и фермион) на одномерной решетке, взаимодействующих посредством притягивающих или отталкивающих потенциалов нулевого радиуса действия.

Мы исследуем точечный спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера $H(K)$, $K \in \mathbb{T}$, который обладает бесконечным числом собственных значений, зависящих от отталкивающих или притягивающих взаимодействий, в предположении, что бозоны в системе имеют бесконечную массу.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, точечный спектр, пороговый резонанс, контактный потенциал, пороговое собственное значение, определитель Фредгольма

UDC 519.218.2

HARMONIC FUNDAMENTAL SOLUTIONS AND BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR WAVE PROPAGATION IN ELASTIC, SCALAR AND POROELASTIC MEDIA

MATANOV M. CH.

KARSHI STATE UNIVERSITY, KARSHI
mm939011166@gmail.com

Abstract

This study explores integral formulations and harmonic fundamental solutions for various media, including elastodynamic, scalar, and poroelastic media. The integral formulations are expressed in terms of boundary variables linking the variables in the internal domain with the boundary conditions. The work highlights the significance of fundamental solutions in solving boundary integral equations, enabling numerical solutions using the Boundary Element Method (BEM). Detailed derivations and applications for each medium are presented, emphasizing methods to address singularities and reduce computational complexity. The results offer foundational insights for engineers and researchers applying BEM to complex media.

Key words: Integral equations, harmonic solutions, Boundary Element Method, wave equations, poroelastics, elastodynamics, scalar media, computational mechanics.

Introduction

The boundary integral formulation for each of the three media is presented below. Using data derived from the governing equations, it links the fundamental variables at internal points to their values and derivatives at the boundary. These equations connect the actual field variables with those from a simplified, well-known “fundamental solution”. Together, the formulation and fundamental solutions form the basis for solving the problem numerically using the Boundary Element Method (BEM).

Literature Review

Fundamental solutions to elastodynamic integral equations—developed by Stokes, Cruse-Rizzo, and Kupradze—enable modeling of elastic media, including half-spaces and point source problems, for practical engineering use. In scalar media, wave propagation governed by the Helmholtz equation facilitates pressure modeling, with modified fundamental solutions easing boundary computations and reducing computational demands, particularly in fluid environments. For poroelastic media, integral formulations describe solid matrix displacements and fluid stresses, with detailed coupling of phases as outlined by Dominguez and Aznarez. The Boundary Element Method (BEM) connects these theoretical models with numerical solutions, efficiently handling singularities and solving for internal variables using boundary data.

Research Methodology

Integral formulation in harmonic elastodynamics: In the absence of body forces, the displacement field in a reduced elastodynamic state of a bounded domain Ω with boundary Γ is given by:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} t_{ji}^* t_i d\Gamma \quad (1)$$

Here, u_j^k is the displacement in direction j at point k , where the external force is applied. u_i and t_i are the displacement and stress components in direction i of the actual problem. u_{ji}^* and t_{ji}^* represent the displacement

and stress components of the fundamental solution due to a unit point load in direction j , satisfying the Navier equation in the frequency domain: $\mu \nabla^2 u_{ji}^* + (\lambda + \mu) \nabla e_{j,i}^* - \rho \omega^2 u_{ji}^* + \delta(x - x_k) \delta_{ij}$. The Dirac delta function models the point nature of the excitation.

Integral formulation in harmonic scalar problems: The equation equivalent to the previous one in the case of scalar media that relates the pressure at a point k belonging to the domain Ω with the variables pressure and its derivative in the contour Γ , is [1, 2]:

$$p^k + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^n p d\Gamma = \int_{\Gamma} p^* \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \quad (2)$$

where p^k is the value of the pressure at the internal point k , n the normal to the contour and p^* is the fundamental solution that satisfies Ω the Helmholtz equation for a point source k pulsating in an infinite medium with frequency ω :

$$\nabla^2 p^* + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 p^* + \delta(x - x_k) = 0 \quad (3)$$

Analysis and results

Comprehensive formulation in harmonic poroelasticity: The integral formulation for the case of poroelastic media is given by the following four equations [2,3-4]:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{nj}^* \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_j^* U_n d\Gamma \quad (4)$$

$$-J\tau^k + \int_{\Gamma} t_{oi}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (U_{no}^* - JX_i'^* n_i) \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{oi}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_o^* U_n d\Gamma \quad (5)$$

$$\text{where } J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$$

Equations (4) relate displacement in directions $j = 1, 2, 3$ at an internal point k in the domain Ω to displacements u_i, U_n and stresses t_i, τ in the porous medium along the boundary Γ , where U_n is the normal displacement of the fluid phase. The terms u_{ji}^* and t_{ji}^* are the fundamental displacements and tractions of the solution in the solid matrix due to a point load in the direction j .

For the same load, τ_j^* and U_{nj}^* represent the equivalent stress and normal fluid displacement at the boundary. These known values form the fundamental solution when the load acts in the solid phase. Equation (5) provides an integral representation of the equivalent stress at an internal fluid-phase point k in Ω . This stress is related to boundary displacements u_i, U_n and stresses t_i, τ . Here, u_{oi}^* and t_{oi}^* are the displacement and traction components of the solid skeleton caused by a point source applied in the fluid phase (subscript o , with $j = 4$). Consequently, τ_o^* and U_{no}^* are the response of the fluid to stress and normal displacement. These four terms define the fundamental solution when the load is applied in the fluid phase [3,5].

Harmonic fundamental solution: In the previous section's integral formulation, several terms involve the fundamental solution a known solution to simplified problems with few restrictions. These allow the formulation of boundary integral equations, solvable approximately via the Boundary Element Method (BEM), as discussed next. The relevant problems and their solutions for each medium described in this chapter are presented below.

Fundamental elastodynamic solution: In this case the problem consists of a point load applied at a point in an infinite, homogeneous, elastic, linear and isotropic medium. The resulting stresses and displacements constitute a classical problem that was solved by Stokes in the time domain, by Cruse-Rizzo in the Laplace transformed domain and some years earlier by Kupradze for harmonic problems. For a point x that is a distance r from the point of application ξ , the displacement in direction k for a load applied in direction l is given by [3,6]:

$$u_{lk}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} (\psi \delta_{lk} - \chi r_l r_k) \quad (6)$$

where:

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{m=1}^2 \left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{m1} \right] \left(\frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m2} \right) E_m \\ \chi &= \sum_{m=1}^2 \left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{m1} \right] \left(\frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right) E_m\end{aligned}\quad (7)$$

In these expressions $E_m = \frac{1}{r} e^{-ik_m r}$, $r = |x - \xi|$, $z_1 = -ik_1$, $z_2 = -ik_2$

Starting from the solution in displacements (7) and using the law of material behavior, the stresses for a surface of normal n are:

$$t_{lk}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (A\delta_{lk} + Br_l r_k) + (Ar_l n_l + Cr_l n_k) \right] \quad (8)$$

where:

$$A = \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r}; \quad B = 2 \left(2\frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right); \quad C = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2\frac{\chi}{r} \right) - 2\frac{\chi}{r} \quad (9)$$

Fundamental solution in scalar wave propagation problems: The pressure at any point x in a scalar medium as a result of the application of a point source is ξ given by the expression:

$$p^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (10)$$

Where $r = |x - \xi|$ and $k = \frac{\omega}{c}$, where c is the speed of wave propagation in the medium. The derived variable, that is, the pressure flux on a surface with normal n is given by:

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (11)$$

In this type of medium, equation (2) enables the exclusion of certain boundaries if the fundamental solution satisfies the boundary conditions of the real problem. This applies to water in the presented models, where the free surface boundary can be omitted. Consequently, the Boundary Element Method (BEM) reduces the number of degrees of freedom, enhancing computational efficiency.

The modified fundamental solution is derived by introducing two point sources: a positive source at the domain point ξ , where the integral equation is evaluated, and a negative source at its mirror image with respect to the free surface. Figure 1 illustrates the placement of these sources.

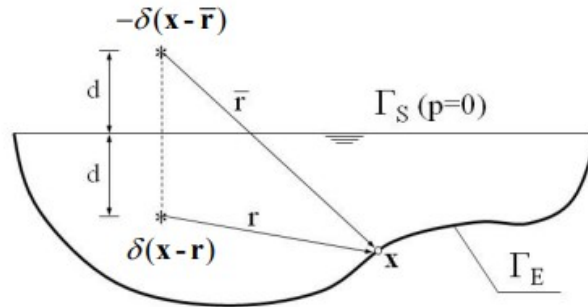


Рис. 14: Position of the charges for obtaining the fundamental source-image solution in scalar problems.

By making this double placement of the source we arrive at the following fundamental solution, which obviously leads to zero pressures at the points of the free surface of the medium.

$$\hat{p}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} e^{-ikr} - \frac{1}{\bar{r}} e^{-ik\bar{r}} \right) \quad (12)$$

Where $\bar{r} = |x - \bar{\xi}|$. As already indicated, using $\hat{p}^*$ only it is necessary to apply the integral equation to the part of the contour that in the figure appears with the designation Γ_E .

Fundamental poroelastic solution: The basic solution for poroelastic media is presented below. In this case, the load can be applied both to the solid matrix and to the fluid phase of the porous medium, which leads, depending on the response considered, to the values contained in tables 1 and 2.

Load applied in l direction on the solid matrix. Displacement response of the solid matrix in direction k .

$$u_{lk}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} (\psi\delta_{lk} - \tilde{\chi}r_l r_k) \quad (13)$$

Load applied in l direction on the solid matrix. Equivalent stress response of the fluid phase.

$$\tau_l^*(x, \xi, \omega) = \frac{i\omega\eta}{4\pi\mu} \tilde{\phi}_l r_l \quad (14)$$

Point source in the fluid phase. Response to solid displacements in the direction k .

$$u_{0k}^*(x, \xi, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \tilde{\phi}_k \quad (15)$$

Point source in the fluid phase. Equivalent stress response of the fluid phase.

$$\tau_o^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \tilde{\kappa} \quad (16)$$

Auxiliary expressions:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{m=1}^2 (-1)^m \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)z_{21}} \left(\frac{i\omega}{K} - z_m^2 \right) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \left[\left(\frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m3} \right) E_m \right] \\ \chi &= \sum_{m=1}^2 (-1)^m \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)z_{21}} \left(\frac{i\omega}{K} - z_m^2 \right) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \left[\left(\frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + 1 \right) E_m \right] \\ \tilde{\phi} &= \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{(\lambda + 2\mu)z_{21}} z_m \left(\frac{1}{z_m r} - 1 \right) E_m \\ \tilde{\kappa} &= \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{z_{21}} \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} z_3^2 - z_m^2 \right) E_m \end{aligned} \quad (17)$$

Table 1. Fundamental poroelastic solution in terms of the fundamental variables: Solid matrix displacements and equivalent stress in the fluid phase.

Load applied in l direction on the solid matrix. Stress vector in the solid matrix in direction k .

$$t_{lk}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left(\tilde{A}\delta_{lk} + \tilde{B}_l r_k \right) + \left(\tilde{A}r_k n_l + \tilde{C}r_l n_k \right) \right] \quad (18)$$

Point source in the fluid phase. Stress vector in the solid matrix in direction k .

$$\tau_{ok}^*(x, \xi, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \tilde{F}_k + \tilde{G}_k \right) \quad (19)$$

Load applied in l direction on the solid matrix. Displacement response in the fluid phase.

$$U_{nl}^*(x, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \tilde{D}r_l + \tilde{E}\eta_l \right) \quad (20)$$

Point source in the fluid phase. Displacement response in the fluid phase.

$$U_{no}^* - JX'_j\eta_l = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \tilde{H} \quad (21)$$

Auxiliary expressions:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{d\tilde{\psi}}{dr} - \frac{\tilde{\chi}}{r}, & \tilde{B} &= 2 \left(\frac{2\tilde{\chi}}{r} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr} \right) \\ \tilde{C} &= \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{d\tilde{\psi}}{dr} + \frac{d\tilde{\chi}}{dr} - 2\frac{\tilde{\chi}}{r} \right) - 2\frac{\tilde{\chi}}{r} + \frac{Q}{R} i\omega\tilde{\phi} \\ \tilde{D} &= i\omega\eta J \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - \frac{Z}{\mu} \tilde{\chi} \\ \tilde{E} &= i\omega\eta J \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Z}{\mu} \tilde{\psi}, & \tilde{F} &= 2\mu \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) \\ \tilde{G} &= \lambda \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dr} + 2\frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - 2\mu \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Q}{R\gamma} \tilde{\kappa}, & \tilde{H} &= J \frac{d\tilde{\kappa}}{dr} + Z\tilde{\phi} \end{aligned} \quad (22)$$

Table 2. Fundamental poroelastic solution in terms of the derived variables: Stress vector in the solid matrix and normal displacement in the fluid phase associated with a surface with exterior normal n .

In all the above equations $\bar{r} = |x - \bar{\xi}|$, $E_m = \frac{1}{r} e^{z_m r}$, $z_m = -ik_m$ ($m = 1, 2, 3$) and $z_{21} = z_2^2 - z_1^2$.

Comprehensive Contour Formulation: The application of the BEM to problems in viscoelastic, scalar, and poroelastic media requires that the integral formulations in equations [(1), (2), (4), (5)] involve only boundary variables. These equations link internal fundamental variables to their values and derivatives on the boundary. To ensure consistency, placement points must lie on the boundary. However, this introduces challenges, as the integrands become singular at these points [8,3].

The usual way to overcome this fact is by means of a process of passing to the limit, replacing the real contour Γ by an approximate one that avoids the singularity, composed of two contours, $(\Gamma - \Gamma_\varepsilon)$ and Γ_ε , where Γ_ε is an infinitesimal spherical volume of radius $\varepsilon \rightarrow 0$ with center at the placement point (figure 2). With this technique each of the contour integrals can be decomposed into two others extended to the contours $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ and Γ_ε .

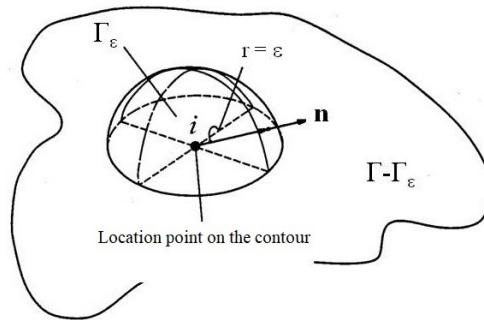


Рис. 15: Contour decomposition $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ and Γ_ε “avoiding” the singularity.

To describe the process, this procedure will be applied to the case of viscoelastic regions. Starting from the integral equation (1) we have:

$$u_l^i + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l^* t_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_l^* t_k d\Gamma \quad (23)$$

In order to achieve our goal of having variables appear only on the contour, it is necessary to study the behavior of these integrals when $\varepsilon \rightarrow 0$. Thus, the integrals on $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ do not present problems since the contour on which they extend does not include the singularity and in the limit they must be understood in the sense of the Cauchy Principal Value (CPV) [4, 5p].

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \text{CPV} \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = \text{CPV} \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (24)$$

If limits are taken on the integrals along Γ_ε :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = 0, \quad u_l^i + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = c_{lk}^i u_k^i. \quad (25)$$

Where c_{lk}^i , called the free term, with a value equal to that appearing in elastostatics, is a constant that depends on the geometry of the contour at the point of application of the load ξ and ν . Taking into account (24) and (25) (23) can be written, omitting for convenience the acronym "CPV" from the expressions (24), as follows:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (26)$$

Or in a more compact matrix notation in which the placement in the three directions is recorded together [6, 4p]:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad (27)$$

where u and p will be the vectors of the field variables, u^* and p^* the tensors of the fundamental solution and c^i the tensor of the elastostatic free term at the collocation point (as is obvious i $c^i = I$ (These are internal points) [5, 7p]:

$$c^i = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i & c_{23}^i \\ c_{31}^i & c_{32}^i & c_{33}^i \end{pmatrix} \quad (28)$$

Following an analogous procedure for scalar wave propagation problems starting from equation (2), the integral formulation on the contour in this case becomes [9,3]:

$$c^i p^i + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^* p d\Gamma = \int_{\Gamma} p^* \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma \quad (29)$$

where the free term takes the value $c^i = \frac{\theta}{4\pi}$ (θ is the solid angle of the contour at the point).

In the case of poroelastic media, carrying out the limit step of equations (4) and (5), a matrix equation of the type (27) is obtained where the tensor corresponding to the free term has an expression of the type [7, 3p]:

$$c^i = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i & 0 \\ c_{21}^i & c_{22}^i & c_{23}^i & 0 \\ c_{31}^i & c_{32}^i & c_{33}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Jc^i \end{pmatrix} \quad (30)$$

In this case c depends on the geometry of the contour in i x , the Poisson ratio of the drained material and the value of $J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}$ [10, 5p].

Conclusion/Recommendations

This article has detailed the integral formulations and fundamental solutions for elastodynamic, scalar, and poroelastic media, emphasizing their application in Boundary Element Methods. By addressing challenges such as singularities and computational complexity, these methodologies offer powerful tools for solving complex mechanical and physical problems. The work highlights the importance of fundamental solutions in enabling numerical solutions, laying the groundwork for further research and application in engineering and computational sciences.

REFERENCES

1. Kholmurodov A.E., Toshmurodova G. Singular solutions of one-dimensional SH wave equation in porous media. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2016. 300-304-p
2. Leontovich M.A. Introduction to thermodynamics. Static physics: Textbook. Village - M.: Science. 1983.- 416-p.
3. Dorovsky V.N. Equations of continuum theory of filtration. Novosibirsk, 1987, 9 p.
4. Khalatnikov I.M. Theory of superfluidity. - M.: Nauka, 1971.- 320 p.
5. Kholmurodov A.E., Imomnazarov Kh.Kh. Direct and inverse dynamic problems for the equation of SH waves in a porous medium//Bulletin of NUUZ, series mechanics-mathematics, 2006, No.2, pp. 86-91.
6. Kholmuradov A.E., Imomnazarov Kh.Kh. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media//Mathematical and Computer Modelling, V.45, Issues 3-4, 2007, pp. 270-280.
7. Xolmurodov, A., Matanov, M., Quzratov, M. (2024, November). Propagation of harmonic plane waves in an elastic half-space. Field equations. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3244, No. 1). AIP Publishing.
8. Kholmurodov, A. E., Matanov, M. C. (2024). Seismic excitation model of half-space propagation of rayleigh waves. Проблемы вычислительной и прикладной математики, (6 (62)), 45-56.
9. Matanov M. Integral equations and harmonic fundamental solutions for wave equations in poroelastic media. SamDU ilmiy axborotnomasi No 1/2 (149) 2025
10. Xolmurodov, A. E., Matanov, M. C. (2024). Reflection of sv waves in the elastic half-space. field equations for angles of incidence less than the critical one: Reflection of sv waves in the elastic half-space. field equations for angles of incidence less than the critical one. MODERN PROBLEMS AND PROSPECTS OF APPLIED MATHEMATICS, 1(01).

Annotatsiya

Ushbu tadqiqot ishida turli xil muhitlar, jumladan, elastik, skalyar va g'ovak elastik muhitlar uchun integral tenglamalar va asosiy garmonik yechimlar o'rganilgan. Integral tenglamalar chegaraviy o'zgaruvchilar nuqtai nazaridan ifodalanadi va ichki soha o'zgaruvchilarini chegaraviy shartlarga bog'laydi. Ushbu ish asosiy yechimlarning chegaraviy integral tenglamalarni yechishda muhim hisoblanadi va Chegaraviy elementlar usuli (CHEU) yordamida sonli yechimlarni ta'minlaydi. Har bir muhit uchun tenglamalar va yechimlar keltirilgan bo'lib, ularni hal qilish usullari va hisoblash murakkabligini kamaytirish yo'llari yoritilgan. Natijalar CHEU ni murakkab muhitlarga qo'llashda muhandislar va tadqiqotchilar uchun asosiy tushunchalarni taqdim etadi.

Kalit so'zlar: Integral tenglamalar, garmonik yechimlar, Chegaraviy elementlar usuli, to'lqin tenglamalari, g'ovak elastik, elastik, skalyar muhitlar, hisoblash mexanikasi.

Аннотация

В данном исследовании рассматриваются интегральные формулировки и гармонические фундаментальные решения для различных сред, включая системы в области эластодинамики, скалярных полей и пороупругости. Интегральные формулировки выражены через переменные на границе, связывая внутренние переменные области с граничными условиями. Работа подчеркивает важность фундаментальных решений в решении граничных интегральных уравнений,

что позволяет численно решать их с использованием метода граничных элементов (МГЭ). Приведены подробные выводы и примеры применения для каждой среды, с акцентом на методы устранения сингулярностей и уменьшения вычислительной сложности. Полученные результаты предоставляют базовые знания для инженеров и исследователей, применяющих метод граничных элементов к сложным средам.

Ключевые слова: интегральные уравнения, гармонические решения, метод граничных элементов, волновые уравнения, порозластичность, эластодинамика, скалярные среды, вычислительная механика.

UDC 517.55

SOME HOMOTOPY PROPERTIES OF n -FOLD SYMMETRIC PRODUCT OF THE SPACE X

MUKHAMADIEV F. G.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, UZBEKISTAN NATIONAL PEDAGOGICAL UNIVERSITY, TASHKENT
farhodgm@nuu.uz

MEYLIEV SH. U.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT
shmeyliev@mail.ru

RESUME

In this paper, we study some homotopy properties of the space n -fold symmetric product of the space X . We prove that if mappings $f, g : X \rightarrow Y$ are homotopic, then the mappings $\mathcal{F}_n f, \mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ are also homotopic. Also shown that the functor of n -fold symmetric product $\mathcal{F}_n$ is a covariant homotopy functor. Besides proved that if spaces X and Y are homotopically equivalent, then the spaces $\mathcal{F}_n X$ and $\mathcal{F}_n Y$ are also homotopically equivalent.

Key words: Functor, n -fold symmetric product, homotopy, homotopically equivalent.

Recently, the topological properties on hyperspaces with the Vietoris topology and the homotopy properties of the topological spaces have been studied by many authors ([1], [2], [3], [4], [5], [6]).

In [1] the connection between a finally compact, pseudocompact, extremely disconnected, $\aleph$ -space and its hyperspace is studied. And in the work [2] have been studied the connection between a uniformly connected, uniformly pseudocompact, P -precompact and its hyperspace. In the works [3] and [4] have been studied some cardinal and homotopy properties of the superextension λX of a topological space X . And in [4] proved that the superextension functor λ preserves homotopy, i.e. that it is a homotopy functor. In [5] showed that the functor of Permutation Degree SP_G^n preserves the homotopy and the retraction of topological spaces. And in [6] have been studied some homotopy properties of the space of complete linked systems.

Recall that a covariant functor is a mapping $\mathcal{F}$ which assigns to a topological space X the space $\mathcal{F}(X)$, and to a continuous mapping $f : X \rightarrow Y$, the mapping $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ satisfying the following conditions:

- 1) $\mathcal{F}$ preserves identity, that is, if id_X is the identity mapping of X , then $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$;
- 2) $\mathcal{F}$ preserves composition, that is, if $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ are continuous mappings, then we have

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

We refer the reader to the book [7] and the article [8] for more information about functors. Some metric properties of n -fold symmetric product of the space X is studied in the work [9]. In this paper we study some homotopy properties and retractions of n -fold symmetric product of the space X .

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers. Given a space X , we define its hyperspaces as the following sets:

- 1) $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty}\}$;
- 2) $2^X = \{A \in CL(X) \mid A \text{ is compact}\}$;
- 3) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ has at most } n \text{ points}\}$, $n \in N$ (see [9, 10]).

$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$$\beta = \{\langle U_1, \dots, U_k \rangle \mid U_1, \dots, U_k \text{ are open subsets of } X, k \in N\},$$

where $\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j \text{ and } A \cap U_j \neq \emptyset \text{ for each } j \in \{1, \dots, k\}\}$.

Note that, by definition, 2^X , $\mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}(X)$ are subsets of $CL(X)$. Hence, they are topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. Moreover,

- 1) $CL(X)$ is called the *hyperspace of nonempty closed subsets of X* ;
- 2) 2^X is called the *hyperspace of nonempty compact subsets of X* ;
- 3) $\mathcal{F}_n(X)$ is called the *n -fold symmetric product of X* ;
- 4) $\mathcal{F}(X)$ is called the *hyperspace of finite subsets of X* .

On the other hand, it is obvious that $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X)$ for each $n \in N$ (see [9, 10]).

Remark 1. Let X be a space and let $n \in N$.

- 1) $\mathcal{F}_n(X)$ is closed in $\mathcal{F}(X)$;
- 2) $f_1 : X \rightarrow \mathcal{F}_1(X)$, $(x \mapsto x)$, is a homeomorphism;
- 3) Every $\mathcal{F}_m(X)$ is a closed subset of $\mathcal{F}_n(X)$ for each $m, n \in N$, $m < n$ (see [11]).

Notation 1. If $U_1, U_2, \dots, U_n$ are open subsets of a space X , then $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$ denotes the intersection of the open set $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ of the Vietoris topology, with $\mathcal{F}(X)$ (see [12]).

Notation 2. Let X be a space. If $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ is a point of $\mathcal{F}(X)$ and $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$, then for each $j \leq r$, we let $U_{x_j} = \bigcap \{U \in \{U_1, U_2, \dots, U_n\} : x_j \in U\}$. Observe that $\langle U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_r} \rangle_{\mathcal{F}(X)} \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$ (see [13]).

For some undefined or related concepts, we refer the reader to [14], [15] and [16].

Now we will consider some homotopic properties of n -fold symmetric product of the space X . We begin with definitions of notions that will be used in this section. We mainly follow terminology from [15] and [16].

Continuous mappings $f, g : X \rightarrow Y$ are said to be *homotopic* if there is a continuous mapping $H : X \times I \rightarrow Y$ such that $H(x, 0) = f(x)$ and $H(x, 1) = g(x)$. The mapping H is called a *homotopy* between f and g and we write $f \simeq g$ [15].

Let $f : X \rightarrow Y$ is a continuous mapping and $A \in \mathcal{F}_n X$. Let's assume that $(\mathcal{F}_n f)(A) = f(A)$. Then the mapping $\mathcal{F}_n f : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ also is a continuous mapping.

For the functor of n -fold symmetric product $\mathcal{F}_n$ the following theorem holds.

Theorem 1. If mappings $f, g : X \rightarrow Y$ are homotopic, then the mappings $\mathcal{F}_n f, \mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ are also homotopic.

Proof. Assume that the mappings $f, g : X \rightarrow Y$ are homotopic. Then there exists a continuous mapping $H : X \times I \rightarrow Y$ such that $H(x, 0) = f(x)$, and $H(x, 1) = g(x)$. On the other hand, we have that $(\mathcal{F}_n f)(A) = f(A)$ and $(\mathcal{F}_n g)(A) = g(A)$ for all $A \in \mathcal{F}_n X$. Now we can define the mapping $(\mathcal{F}_n H)(A, t) = H(a, t)$, where $A \in \mathcal{F}_n X$ and $t \in [0, 1]$. It is clear that since the mapping H is continuous, the mapping $\mathcal{F}_n H$ is also continuous. Now we will show that the mapping $\mathcal{F}_n H$ is a homotopy between the mappings $\mathcal{F}_n f$ and $\mathcal{F}_n g$. Indeed $(\mathcal{F}_n H)(A, 0) = H(A, 0) = f(A) = (\mathcal{F}_n f)(A)$, and $(\mathcal{F}_n H)(A, 1) = H(A, 1) = g(A) = (\mathcal{F}_n g)(A)$. This means that $\mathcal{F}_n f \simeq \mathcal{F}_n g$. Theorem 1 is proved.

From the Theorem 1 we get the following corollary.

Corollary 1. If the mapping H is homotopy between f and g , then the mapping also $\mathcal{F}_n H$ is a homotopy between $\mathcal{F}_n f$ and $\mathcal{F}_n g$.

A continuous mapping $f : X \rightarrow Y$ is said to be a *homotopy equivalence* if there exists a continuous mapping $g : Y \rightarrow X$ such that the compositions $g \circ f$ and $f \circ g$ are homotopic to the identity mappings on X and Y respectively. Two topological spaces X and Y is said to be *homotopically equivalent* (notation, $X \simeq Y$) if there exists a homotopy equivalence $f : X \rightarrow Y$ (see [15]).

Proposition 1. If the mapping $f : X \rightarrow Y$ is homotopy equivalence, then the mapping $\mathcal{F}_n f : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ is also homotopy equivalence.

Proof. Suppose that the spaces X and Y are homotopically equivalent. Then there exists two continuous mappings $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow X$ such that $f \circ g \simeq id_Y$ and $g \circ f \simeq id_X$. It means that there are two homotopy $H_1(y, t)$ and $H_2(x, t)$ such that $H_1(y, 0) = (f \circ g)(y)$, $H_1(y, 1) = y$, and $H_2(x, 0) = (g \circ f)(x)$, $H_2(x, 1) = x$. We can define the compositions $\mathcal{F}_n f \circ \mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n Y \rightarrow \mathcal{F}_n Y$, and $\mathcal{F}_n g \circ \mathcal{F}_n f : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n X$ of the mappings $\mathcal{F}_n f : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ and $\mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n Y \rightarrow \mathcal{F}_n X$ as follows: $(\mathcal{F}_n f \circ \mathcal{F}_n g)(B) = (f \circ g)(B)$ for all $B \in \mathcal{F}_n Y$, and $(\mathcal{F}_n g \circ \mathcal{F}_n f)(A) = (g \circ f)(A)$ for all $A \in \mathcal{F}_n X$. One can easily check that the mapping $(\mathcal{F}_n H_1)(B, t) = H_1(B, t)$ is a homotopy between $\mathcal{F}_n f \circ \mathcal{F}_n g$ and $id_{\mathcal{F}_n Y}$, where $B \in \mathcal{F}_n Y$ and $t \in [0, 1]$. Indeed, $(\mathcal{F}_n H_1)(B, 0) = H_1(B, 0) = (f \circ g)(B) = (\mathcal{F}_n f \circ \mathcal{F}_n g)(B)$ for all $B \in \mathcal{F}_n Y$, and $(\mathcal{F}_n H_1)(B, 1) = H_1(B, 1) = B = id_{\mathcal{F}_n Y}$. Similarly, the mapping $(\mathcal{F}_n H_2)(A, t) = H_2(A, t)$ is a homotopy between $\mathcal{F}_n g \circ \mathcal{F}_n f$ and $id_{\mathcal{F}_n X}$, where $A \in \mathcal{F}_n X$ and $t \in [0, 1]$. Indeed, $(\mathcal{F}_n H_2)(A, 0) = H_2(A, 0) = (g \circ f)(A) = (\mathcal{F}_n g \circ \mathcal{F}_n f)(A)$ for all $A \in \mathcal{F}_n X$, and $(\mathcal{F}_n H_2)(A, 1) = H_2(A, 1) = A = id_{\mathcal{F}_n X}$. It means that $\mathcal{F}_n X$ and $\mathcal{F}_n Y$ are homotopically equivalent. Proposition 1 is proved.

Corollary 2. If spaces X and Y are homotopically equivalent, then the spaces $\mathcal{F}_n X$ and $\mathcal{F}_n Y$ are also homotopically equivalent.

By a *covariant homotopy functor* we mean a functor $\mathcal{F}$ in the category **Top** of topological spaces and their continuous mappings satisfying

(*) $\mathcal{F}$ preserves homotopy, that is, if a mapping $H(x, t)$ is a homotopy between continuous mappings $f, g : X \rightarrow Y$, then $F(H(x, t))$ is also a homotopy between mappings $F(f), F(g) : F(X) \rightarrow F(Y)$.

Theorem 2. The functor of n -fold symmetric product $\mathcal{F}_n$ is a covariant homotopy functor.

Proof. Now we will show that the functor $\mathcal{F}_n$ satisfies the above three conditions.

(i) Let id_X be identity mapping in the topological space X . Then we have that $(\mathcal{F}_n id_X)(A) = id_X(A) = A$. It means that the mapping $\mathcal{F}_n id_X$ is an identity mapping in the topological space $\mathcal{F}_n X$.

(ii) Let $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ be the continuous mappings. Then it follows that $\mathcal{F}_n(g \circ f)(A) = (g \circ f)(A) = g(f(A)) = (\mathcal{F}_n g)(f(A)) = \mathcal{F}_n g(A) \circ \mathcal{F}_n f(A)$.

(*) It follows easily from Theorem 1. Theorem 2 is proved.

REFERENCES

1. Beshimov R. B., Safarova D. T. Some Topological Properties of a Functor of Finite Degree. Lobachevskii of Journal Mathematics, 2021, V.42, P.2744–2753.
2. Beshimov R. B., Safarova D. T. Uniformly linked space and its hyperspace. AIP Conference Proceedings, 2024, V.3004(1), P.020003.
3. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. On some properties of the superextension functor. Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 2022, V.2, P.5–18.
4. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. On the superextension functor. AIP Conference Proceedings, 2023, V.2879(1), P.020004.
5. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. Some Cardinal and Geometric Properties of the Space of Permutation Degree. Axioms, 2022, V.11(6), P.290.
6. Mukhamadiev F. G. Some homotopy properties of the space of complete linked systems. Selected papers of the 2023 International Conference on Topology and its Applications. In press.
7. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. Topology of Hyperspaces and Its Applications. Znanie: Moscow, Russia, 1989. (In Russian)
8. Shchepin E. V. Functors and uncountable powers of compacta. Math. Surveys. 1981, V.36:3, P.1–7.

9. Good C., Macias S. Symmetric products of generalized metric spaces. *Topology Appl.* 2016, V.206, P.93–114.
10. Tuyen L. Q., Tuyen O. V., Kočinac Lj. D. R. The Vietoris hyperspace $F(X)$ and certain generalized metric properties. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2024, V.53(2), P.356–366.
11. Tang Z., Lin S., Lin F. Symmetric products and closed finite-to-one mappings. *Topology and its Applications*, 2018, V.234, P.6–45.
12. Peng L. X., Sun Y. A study on symmetric products of generalized metric spaces. *Topology and its Applications*, 2017, V.231, P.411–429.
13. Tuyen L. Q., Tuyen O. V. A note on the hyperspace of finite subsets. *Fasciculi Math.* 2021, V.65, P.67–73.
14. Yuldashev T. K., Mukhamadiev F. G. The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space. *Ural Mathematical Journal*, 2020, V.6(2), P.108–116.
15. Kosniowski C. *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.
16. Munkres J. *Topology*, Second ed. Pearson Education Limited, Edinburgh, 2014.

REZYUME

Ushbu maqolada biz X fazoning n -darajali simmetrik ko'paytma fazosining ba'zi gomotopik xossalari o'rganamiz. Agar $f, g : X \rightarrow Y$ akslantirishlar o'zaro gomotop bo'lsa, u holda $\mathcal{F}_n f, \mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ akslantirishlar ham o'zaro gomotop ekanligi isbotlangan. Bundan tashqari, n -darajali simmetrik ko'paytma funktori $\mathcal{F}_n$ kovariant gomotopik funktor ekanligi ko'rsatilgan. Shu bilan birga, agar X va Y fazolar gomotopik ekvivalent bo'lsa, u holda $\mathcal{F}_n X$ va $\mathcal{F}_n Y$ fazolar ham gomotopik ekvivalent ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Funktor, n -darajali simmetrik ko'paytma, gomotopiya, gomotopik ekvivalentlik.

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучаются некоторые гомотопические свойства пространства n -кратного симметрического произведения пространства X . Доказывается, что если отображения $f, g : X \rightarrow Y$ гомотопны, то отображения $\mathcal{F}_n f, \mathcal{F}_n g : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n Y$ также гомотопны. Также показано, что функтор n -кратного симметрического произведения $\mathcal{F}_n$ является ковариантным гомотопическим функтором. Кроме того, доказано, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то пространства $\mathcal{F}_n X$ и $\mathcal{F}_n Y$ также гомотопически эквивалентны.

Ключевые слова: Функтор, n -кратное симметричное произведение, гомотопия, гомотопическая эквивалентность.

UDC 512.554

 $\mathbb{Z}_2$ MAYDONDA IKKI VA UCH O'LCHAMLI EVOLYUTSION ALGEBRALARNING TASNIFI**NORMATOV E. P.**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT XALQARO MOLYAVIY BOSHQARUV VA TEXNOLOGIYALAR
UNIVERSITETI, TOSHKENT
erkinnormatov@yandex.ru**ELBOYEV K. E.**TOSHKENT XALQARO MOLYAVIY BOSHQARUV VA TEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI, TOSHKENT
k.elboyev@tift.uz**Rezyume**

Hozirgi vaqtda zamonaviy algebraning muhim yo'nalishlaridan biri evolyutsion algebralar nazariyasini tadqiq qilishdir. Evolyutsion algebralar matematikaning boshqa sohalari, jumladan graflar nazariyasi, Markov jarayonlari, dinamik sistemalar bilan bog'liq. Evolyutsion algebralar sinfi birinchi marta Lyubich tomonidan 1992 yilda kiritilgan. 2008 yilda Tian o'zining monografiyasida evolyutsion algebra atamasini ishlatib, bu algebralarining tadbirlari va ba'zi xossalari keltirib o'tgan. Bu maqolada $\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki va uch o'lchamli evolyutsion algebralar tasnifi keltirilgan.

Kalit so'zlar: Evolyutsion algebra, tabiiy bazis, gomomorfizm, izomorfizm, maydon, o'lcham.

2008 yilda J.P. Tian tadqiqotlarining asosiy yo'nalishi evolyutsion algebralarining tadbiriy muammolariga bag'ishlangan edi. Shu bilan birga chekli o'lchovli algebralarining biror ko'pxilligini o'rganishga tabiiy yondashish, masalan, strukturaviy nazariyani qurish u tomonidan qaralmagan edi [1]. Strukturaviy nazariyani o'rganishga bag'ishlangan dastlabki natijalar B.A.Omirov, U.A.Rozikov, M.Ladra, J.M.Casas, M.V.Velasco va boshqalarning ishlarida paydo bo'ldi. Xususan, kompleks, haqiqiy sonlar maydonida ikki va uch o'lchamli evolyutsion algebralarining tasnifi olingan, nilpotent evolyutsion algebralarining klassik xossalari tasniflangan [2,3].

Bizga biror K maydon berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.[1] $(E, \cdot)$ biror K maydon ustidagi algebra bo'lsin. Agar

$$e_i \cdot e_j = 0, \quad \text{agar } i \neq j, \quad \text{barcha } i \text{ larda } e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik} e_k$$

shartni qanoatlantiruvchi $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ bazis mavjud bo'lsa, u holda bu algebra *evolyutsion algebra* deyiladi. Bu bazisga esa *tabiiy bazis* deyiladi.

Eslatma. Ushbu maqolada evolyutsion algebrani tashkil etuvchi konstantalari $\mathbb{Z}_2$ maydonda o'rganiladi.

Ikki va uch o'lchamli kompleks evolyutsion algebralar tasnifi [2], [3] da, ikki va uch o'lchamli haqiqiy evolyutsion algebralar tasnifi [4], [5] da keltirilgan.

E -evolyutsion algebra uchun quyi markaziy qator aniqlaymiz:

$$E^1 = E, \quad E^k = \sum_{i=1}^{k-1} E^i E^{k-i}, \quad k \geq 1$$

Bizga $(E, \cdot)$ evolyutsion algebra va e_i uning tabiiy bazisi berilgan bo'lsin.

Ta'rif 2.[2] E va E' evolyutsion algebralar va $\varphi : E \rightarrow E'$ chiziqli akslantirish bo'lsin. Agar $\varphi(e_i) \in E'$ da tabiiy bazis bo'lsa, φ - gomomorfizm deyiladi. Bundan tashqari, agar φ - biektiv bo'lsa, u holda φ - izomorfizm deyiladi.

$\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki o'lchamli evolyutsion algebralarining tasnifi

$\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki o'lchamli evolyutsion algebra va $\{e_1, e_2\}$ uning tabiiy bazisi bo'lsin.

Ma'lumki, agar $E^2 = 0$ bo'lsa, u holda E *abel* algebra deyiladi, ya'ni nol ko'paytmali algebra deyiladi.

Teorema 1. $\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki o'lchamli evolyutsion algebralar o'zaro izomorf bo'lmagan quyidagi algebralarining biri bilan izomorfdir.

(i) $\dim E^2 = 1$ bo'lgan holda

- E_1 : $e_1 \cdot e_1 = e_1$
- E_2 : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$
- E_3 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$

(ii) $\dim E^2 = 2$ bo'lgan holda

- E_4 : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$
- E_5 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$
- E_6 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$

Isbot. Ikki o'lchamli evolyutsion algebra uchun ko'paytmaning umumiy ko'rinishi

$$e_1 \cdot e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = a_3 e_1 + a_4 e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}_2 \quad (\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}).$$

(i) $\dim E^2 = 1$ bo'lgan holda;

$e_1 \cdot e_1 = c_1(a_1 e_1 + a_2 e_2)$, $e_2 \cdot e_2 = c_2(a_1 e_1 + a_2 e_2)$, $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0$. Ravshanki, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ aks holda bizning algebra abel algebra bo'lar edi. e_1 va e_2 simmetrik ekanligidan $c_1 \neq 0$ deb faraz qila olamiz, u holda biz bazisni sodda almashtirishlar orqali $c_1 = 1$ qila olamiz.

1-hol. $a_1 \neq 0$. U holda biz bazisni quyidagi o'zgarishini qabul qilamiz.

$e'_1 = e_1 + a_2 e_2$, $e'_2 = A e_1 + B e_2$, bu yerda $B - a_2 A \neq 0$. Natijani hisoblasak

$$0 = e'_1 \cdot e'_2 = (e_1 + a_2 e_2)(A e_1 + B e_2) = A(e_1 + a_2 e_2) + a_2 B c_2(e_1 + a_2 e_2) = \\ = (A + a_2 B c_2)(e_1 + a_2 e_2)$$

Shuning uchun, $A + a_2 B c_2 = 0$ ya'ni $A = -a_2 B c_2$ va $B - a_2 A = B + a_2^2 B c_2 \neq 0$.

Bu shuni bildiradiki, $B \neq 0$ ($B = 1$) va $1 + a_2^2 c_2 \neq 0$ bo'lganda biz yuqoridagi almashtirishlarni olamiz. Natijani ko'rib chiqsak

$$e'_1 \cdot e'_1 = (e_1 + a_2 e_2)(e_1 + a_2 e_2) = (e_1 + a_2 e_2) + a_2^2 c_2(e_1 + a_2 e_2) = (1 + a_2^2 c_2)(e_1 + a_2 e_2) = \\ = (1 + a_2^2 c_2)e'_1$$

$$e'_2 \cdot e'_2 = (A e_1 + B e_2)(A e_1 + B e_2) = A^2(e_1 + a_2 e_2) + c_2(e_1 + a_2 e_2) = (A^2 + c_2)(e_1 + a_2 e_2) = \\ = (a_2^2 c_2^2 + c_2)e'_1 = c_2(1 + a_2^2 c_2)e'_1$$

1.1-hol. $c_2 = 0$. U holda $e'_1 \cdot e'_1 = e'_1$, $e_2 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0$, bizga E_1 algebrani beradi.

1.2-hol. $c_2 \neq 0$. U holda $e'_1 \cdot e'_1 = (1 + a_2^2)c'_1$, $e'_2 \cdot e'_2 = (1 + a_2^2)e'_1$ ga ega bo'lamiz. Agar $(1 + a_2^2) \neq 0$ ya'ni $a_2 \neq 1, a_2 = 0$ bo'lganda bajariladi. Bizga $e_1 \cdot e_1 = e_1$, $e_2 \cdot e_2 = e_1$ ya'ni E_2 algebrani beradi.

2-hol. $a_1 = 0$. U holda biz $e_1 \cdot e_1 = a_2 e_1$; $e_2 \cdot e_2 = c_2 a_2 e_2$ natijalarga ega bo'lamiz. Bu yerda $a_2 \neq 0$, aks holda evolyutsion algebra bo'lmaydi.

Agar $c_2 = 0$ bo'lsa, bazisni $e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{a_2}}$ almashtirish orqali $e'_1 \cdot e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{a_2}} \cdot \frac{e_1}{\sqrt{a_2}} = e_2$, $e_2 \cdot e_2 = 0$ ya'ni E_3 algebra ga ega bo'lamiz.

Agar $c_2 \neq 0$ ($c_2 = 1$) bo'lsa, bazisni $e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{a_2}}$, $e'_2 = \frac{e_2}{\sqrt{a_2}}$ almashtirishlar orqali $e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_2 \cdot e_2 = e_2$ ya'ni E_2 algebra ga izomorf bo'lgan algebrani hosil qilamiz.

(ii) $\dim E^2 = 2$ bo'lgan holda;

Ko'paytmaning umumiy ko'rinishi $e_1 \cdot e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2$, $e_2 \cdot e_2 = a_3 e_1 + a_4 e_2$ bu yerda $a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}_2$

1-hol. $a_1 \neq 0$ va $a_4 \neq 0$. Bazisning o'zgarishi $e_1 = a_1^{-1}e_1, e_1 = a_2^{-1}e_2$ orqali $a_1 = a_4 = 1$ deb faraz qila olamiz. Shu sababli biz 2 ta parametrik oilaga ega bo'lamiz ya'ni

$E_4(a_2, a_3) : e_1 \cdot e_1 = e_1 + a_2e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = a_3e_1 + e_2, \quad 1 - a_2a_3 \neq 0$ bundan $(a_2, a_3) \neq (1, 1)$.

Bazisning umumiy o'zgarishini quyidagicha olaylik,

$e'_1 = A_1e_1 + A_2e_2, \quad e'_2 = B_1e_1 + B_2e_2, \quad A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Natijani ko'rib chiqsak,
 $0 = e'_1e'_2 = (A_1e_1 + A_2e_2)(B_1e_1 + B_2e_2) = A_1B_1(e_1 + a_2e_2) + A_2B_2(a_3e_1 + e_2) = (A_1B_1 + A_2B_2a_3)e_1 + (A_1B_1a_2 + A_2B_2)e_2$

Ushbu yangi bazisdagi algebra ham evolyutsion algebra bo'lishi kerakligidan bizga $A_1B_1 + A_2B_2a_3 = 0$ va $A_1B_1a_2 + A_2B_2 = 0$. Bundan $A_2B_2(1 - a_2a_3) = 0$ va $A_1B_1(1 - a_2a_3) = 0$. Bunda $1 - a_2a_3 \neq 0$ ekanligidan, $A_1B_1 = A_2B_2 = 0$ ga ega bo'lamiz.

1.1-hol. $A_2 = 0$. U holda $B_1 = 0$ bo'lsin.

$e'_1e'_1 = A_1^2e_1 \cdot e_1 = A_1^2(e_1 + a_2e_2) = e'_1 + a'_2e'_2 = A_1e_1 + a'_2B_2e_2$

$\Rightarrow A_1^2 = A_1, A_1^2a_2 = a'_2B_2 \Rightarrow A_1 = 1$

$e'_2e'_2 = B_2^2(a_3e_1 + e_2) = a'_3e'_1 + e'_2 = a'_3A_1e_1 + B_2e_2$

$\Rightarrow B_2^2a_3 = a'_3A_1, B_2^2 = B_2 \Rightarrow B_2 = 1$

Demak, $e'_1e'_1 = e_1 + a'_2e_2, \quad e'_2e'_2 = a'_3e_1 + e_2$ ekanligidan

$a'_2 = 0$ bo'lsa $a'_3 = 1$, bundan $e_1 \cdot e_1 = e_1, e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$ ya'ni E_4 ni beradi.

$a'_2 = 1$ bo'lsa $a'_3 = 0$, bundan $e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2, e_2 \cdot e_2 = e_2$ ya'ni E_5 ni beradi.

1.2-hol. $A_1 = 0$. U holda $B_2 = 0$ bo'sin va bizga $E_4(a_2, a_3) \cong E'_4(a_3, a_2)$ izomorf bo'lgan algebra hosil bo'ladi.

2-hol. $a_1 = 0$ yoki $a_4 = 0$ bo'lsin. e_1 va e_2 simmetrik ekanligidan umumiylikka zarar yetkazmasdan $a_1 = 0$ deb olishimiz mumkin.

$e_1e_1 = a_2e_2$ va $e_2e_2 = a_3e_1 + a_4e_2$ bu yerda $a_2a_3 \neq 0, (a_2a_3) \neq (0, 0), Z_2$ da $a_2 = a_3 = \bar{1}$ bo'lgan holda bajariladi.

Bazisni o'zgarishini quyidagicha qabul qilib $e'_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3}}e_1, \quad e'_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3^2}}e_2$ bundan,

$$e'_1 \cdot e'_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3} \cdot \frac{1}{a_2a_3}}e_1 \cdot e_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3^2}}e_2; \quad e'_2 \cdot e'_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3^4}}(a_3e_1 + a_4e_2) = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3}}e_1 + \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3^4}}a_4e_2$$

Biz algebralarining bir parametrik oilasini $E_6(a_4) : e_1 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + a_4e_2$ ni olamiz. Bundan, $a_4 = 0$ bo'lsa, $e_1 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$ ya'ni E_6 ni beradi.

$a_4 = 1$ bo'lsa, $e_1 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$ ya'ni $E_7 \cong E_4$ o'zaro izomorf bo'lgan algebrani beradi.

Teorema isbotlandi.

Z_2 maydonda uch o'lchamli evolyutsion algebralarining tasnifi

Z_2 maydonda uch o'lchamli evolyutsion algebra va $\{e_1, e_2, e_3\}$ uning tabiiy bazisi bo'lsin.

Teorema 2. Z_2 maydonda uch o'lchamli E evolyutsion algebralar $\dim E^2 = 1$ bo'lganda quyidagi o'zaro izomorf bo'lmagan algebralarining biri bilan izomorfdir.

- $E_1 : e_1 \cdot e_1 = e_1$
- $E_2 : e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
- $E_3 : e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_4 : e_1 \cdot e_1 = e_2$
- $E_5 : e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_6 : e_1 \cdot e_1 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_3$

Isbot. Uch o'lchamli evolyutsion algebra uchun ko'paytmaning umumiy ko'rinishi

$$e_1 \cdot e_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$e_2 \cdot e_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$e_3 \cdot e_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

Ma'lumki, $e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$.

Bu yerda $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ - tabiiy bazis, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$

Bizda $\dim E^2 = 1$ bo'lganligi sababli,

$$e_1 \cdot e_1 = k_0(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)$$

$$e_2 \cdot e_2 = k_1(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)$$

$$e_3 \cdot e_3 = k_2(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)$$

Ma'lumki, $(k_0, k_1, k_2) \neq (0, 0, 0)$ aks holda bizning algebra abel algebra si bo'lar edi. e_1, e_2, e_3 simmetrik ekanligidan $k_0 \neq 0$ deb faraz qila olamiz, u holda $k_0 = 1$ qila olamiz.

$$e_1^2 \neq 0; e_1 \cdot e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$e_2 \cdot e_2 = k_1(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)$$

$$e_3 \cdot e_3 = k_2(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)$$

$$M_B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k_1 a_1 & k_1 a_2 & k_1 a_3 \\ k_2 a_1 & k_2 a_2 & k_2 a_3 \end{pmatrix} E \text{ evolyutsion algebrani } B \text{ tabiiy bazisga nisbatan strukturaviy konstantalari}$$

Biz tabiiy bazisni $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ quyidagicha almashtiramiz:

$$e'_1 = e_1^2 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$e'_2 = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

$$e'_3 = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Natijani hisoblasak,}$$

$$e'_1 \cdot e'_2 = 0, \quad e'_1 \cdot e'_3 = 0, \quad e'_2 \cdot e'_3 = 0 \text{ ekanligidan}$$

$$\begin{cases} a_1 A_1 + a_2 A_2 k_1 + a_3 A_3 k_2 = 0 \\ a_1 B_1 + a_2 B_2 k_1 + a_3 B_3 k_2 = 0 \\ A_1 B_1 + A_2 B_2 k_1 + A_3 B_3 k_2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{ifodaga ega bo'lamiz. Natijani ko'rib chiqsak,}$$

$$e'_1 \cdot e'_1 = (a_1^2 + a_2^2 k_1 + a_3^2 k_2) e'_1$$

$$e'_2 \cdot e'_2 = (A_1^2 + A_2^2 k_1 + A_3^2 k_2) e'_1$$

$$e'_3 \cdot e'_3 = (B_1^2 + B_2^2 k_1 + B_3^2 k_2) e'_1$$

1-hol. $a_1 \neq 0$

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$\begin{cases} A_1 = -(a_2 A_2 k_1 + a_3 A_3 k_2) \\ B_1 = -(a_2 B_2 k_1 + a_3 B_3 k_2) \end{cases} \quad (2)$$

1.1-hol. $k_1 = k_2 = 0$ bo'lsin. U holda $e'_1 \cdot e'_1 = e'_1$, $e'_2 \cdot e'_2 = A_1^2 e'_1$, $e'_3 \cdot e'_3 = B_1^2 e'_1$ (2) ifodadan $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ bundan $e_1 \cdot e_1 = e_1$ bizga E_1 algebrani beradi.

1.2-hol. $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ bo'lsin. U holda $e'_1 \cdot e'_1 = (1 + a_2^2) e'_1$, $e'_2 \cdot e'_2 = (A_1^2 + A_2^2) e'_1$, $e'_3 \cdot e'_3 = (B_1^2 + B_2^2) e'_1$ (2) ifodadan $A_1 = -a_2 A_2$, $B_1 = -a_2 B_2$. Bundan

$$e'_2 \cdot e'_2 = (a_2^2 A_2^2 + A_2^2) e'_1 = A_2^2 (1 + a_2^2) e'_1,$$

$$e'_3 \cdot e'_3 = (a_2^2 B_2^2 + B_2^2) e'_1 = B_2^2 (1 + a_2^2) e'_1$$

1.2.1-hol. $1 + a_2^2 \neq 0$. Aks holda Abel algebra, bundan $a_2 = 0$ bo'ladi.

$e'_1 \cdot e'_1 = e'_1$, $e'_2 \cdot e'_2 = A_2^2 e'_1$, $e'_3 \cdot e'_3 = B_2^2 e'_1$, (2) ifodadan $A_1 = 0, B_1 = 0$; (1) ifodadan $A_2 B_2 = 0$, u holda $A_2 = 1, B_2 = 0$ bo'lganda bajariladi. Bizga $e_1 \cdot e_1 = e_1$, $e_2 \cdot e_2 = e_1$ ya'ni E_2 algebrani beradi.

1.3-hol. $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ bo'lsin. U holda biz quyidagi natijalarga ega bo'lamiz.

$$e'_1 \cdot e'_1 = (1 + a_2^2 + a_3^2) e'_1, \quad e'_2 \cdot e'_2 = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) e'_1, \quad e'_3 \cdot e'_3 = (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) e'_1$$

$$(3.2.1.2) \text{ ifodadan } \begin{cases} A_1 = -(a_2 A_2 + a_3 A_3) \\ B_1 = -(a_2 B_2 + a_3 B_3) \end{cases}$$

1.3.1-hol. $a_2 = 0, a_3 = 0$. U holda $A_1 = 0, B_1 = 0$ (1) ifodadan $\begin{cases} A_2B_2 + A_3B_3 = 0 \\ A_2B_3 - A_3B_2 \neq 0 \end{cases}$ bundan $A_2 = 0, A_3 = 1; B_2 = 1, B_3 = 0$ bo'lganda o'rinli. Bizga $e_1 \cdot e_1 = e_1, e_2 \cdot e_2 = e_1, e_3 \cdot e_3 = e_1$ ya'ni E_3 algebrani beradi.

2-hol. $a_1 = 0$ bo'lsin. U holda

$$e_1 \cdot e_1 = a_2e_2 + a_3e_3$$

$$e_2 \cdot e_2 = k_1(a_2e_2 + a_3e_3)$$

$$e_3 \cdot e_3 = k_2(a_2e_2 + a_3e_3)$$

$a_2 \neq 0$ dan tabiiy bazisni quyidagicha almashtiramiz.

$$B' = \{e_1, a_2e_2 + a_3e_3, e_3\}, e'_1 = e_1, e'_2 = a_2e_2 + a_3e_3, e'_3 = e_3$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2 \neq 0. \text{ Natijani hisoblasak,}$$

$$e'_2e'_3 = a_3e_3^2 = a_3k_2e'_2 = 0 \text{ tenglikdan } a_3k_2 = 0 \text{ (3) ifodaga ega bo'lamiz.}$$

$$e'_1e'_1 = e_1e_1 = e'_2$$

$$e'_2e'_2 = (e_2 + a_3e_3)(e_2 + a_3e_3) = e_2e_2 + a_3^2e_3e_3 = (k_1 + a_3^2k_2)e'_2$$

$$e'_3e'_3 = e_3e_3 = k_2e'_2$$

2.1.1-hol. $k_1 = 0, k_2 = 0$ bo'lsin. U holda

$$e'_1e'_1 = e'_2, e'_2e'_2 = e'_3e'_3 = 0 \Rightarrow e_1 \cdot e_1 = e_2 \text{ bizga } E_4 \text{ algebrani beradi.}$$

2.1.2-hol. $k_1 = 0, k_2 = 1$ bo'lsin. u holda

$$e'_1e'_1 = e'_2$$

$$e'_2e'_2 = a_3^2e'_2$$

$$e'_3e'_3 = e'_2$$

(3) ifodadan $a_3 = 0$ ekanligidan bizga $e_1 \cdot e_1 = e_2, e_3 \cdot e_3 = e_2$ ya'ni E_5 algebrani beradi.

2.1.3-hol. $k_1 = 1, k_2 = 0$ bo'lsin. u holda

$$e'_1e'_1 = e'_2$$

$$e'_2e'_2 = (1 + a_3^2 \cdot 0)e'_2 = e'_2$$

$$e'_3e'_3 = 0$$

Bundan bizga $e_1 \cdot e_1 = e_2, e_2 \cdot e_2 = e_2, E_6 \cong E_2$ algebrani beradi.

2.1.4-hol. $k_1 = 1, k_2 = 1$ bo'lsin. u holda

$$e'_1e'_1 = e'_2$$

$$e'_2e'_2 = (1 + a_3^2)e'_2$$

$$e'_3e'_3 = e'_2$$

(3) ifodadan $a_3 = 0$ ekanligidan bizga $e_1 \cdot e_1 = e_2, e_2 \cdot e_2 = e_2, e_3 \cdot e_3 = e_2$ ya'ni $E_7 \cong E_3$ izomorf bo'lgan algebrani beradi.

2.2-hol. $a_3 \neq 0$ bo'lsin. Tabiiy bazisni quyidagicha almashtiramiz.

$$B = \{e_1, e_2, a_2e_2 + a_3e_3\}, e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = a_2e_2 + a_3e_3$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \neq 0. \text{ Natijani hisoblasak,}$$

$$e'_2e'_3 = a_3e_3^2 = a_2k_1e'_3 = 0 \text{ tenglikdan } a_2k_1 = 0 \text{ (4) ifodaga ega bo'lamiz.}$$

$$e'_1e'_1 = e_1e_1 = a_2e_2 + a_3e_3 = e'_3$$

$$e'_2e'_2 = e_2e_2 = k_1e'_3$$

$$e'_3e'_3 = (a_2e_2 + a_3e_3)(a_2e_2 + a_3e_3) = (k_1a_2^2 + a_3^2k_2)e'_3 = (k_1a_2^2 + k_2)e'_3$$

2.2.1-hol. $k_1 = 0, k_2 = 0$ bo'lsin. U holda

$$e'_1e'_1 = e'_3, e'_2e'_2 = e'_3e'_3 = 0. \text{ Bizga } e_1 \cdot e_1 = e_3 \text{ ya'ni } E_8 \cong E_4 \text{ izomorf bo'lgan algebrani beradi.}$$

2.2.2-hol. $k_1 = 0, k_2 = 1$ bo'lsin. u holda

$$e'_1e'_1 = e'_3$$

$$e'_2 e'_2 = 0$$

$$e'_3 e'_3 = e'_3$$

Bizga $e_1 \cdot e_1 = e_3$, $e_3 \cdot e_3 = e_3$ ya'ni E_9 algebrani beradi.

2.2.3-hol. $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ bo'lsin. u holda

$$e'_1 e'_1 = e'_3$$

$$e'_2 e'_2 = e'_3$$

$$e'_3 e'_3 = a_2^2 e'_3$$

(4) ifodadan $a_2 = 0$ ekanligidan bizga $e_1 \cdot e_1 = e_3$, $e_2 \cdot e_2 = e_3$ ya'ni $E_{10} \cong E_5$ izomorf bo'lgan algebrani beradi.

2.2.4-hol. $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ bo'lsin. u holda

$$e'_1 e'_1 = e'_3$$

$$e'_2 e'_2 = e'_3$$

$$e'_3 e'_3 = (a_2^2 + 1)e'_3$$

(4) ifodadan $a_2 = 0$ ekanligidan bizga $e_1 \cdot e_1 = e_3$, $e_2 \cdot e_2 = e_3$, $e_3 \cdot e_3 = e_3$ ya'ni $E_{11} \cong E_3$ izomorf bo'lgan algebrani beradi. **Teorema isbotlandi.**

Teorema 3. $\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli E evolyutsion algebralarning $\dim E^2 = 2$ bo'lganda quyidagi o'zaro izomorf bo'lmagan algebralarning biri bilan izomorfdir.

- E_1 : $e_2 \cdot e_2 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_2 : $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_3 : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_4 : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_5 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_6 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_7 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_8 : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_9 : $e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_{10} : $e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_{11} : $e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_{12} : $e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1$
- E_{13} : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- E_{14} : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- E_{15} : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- E_{16} : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- E_{17} : $e_1 \cdot e_1 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- E_{18} : $e_1 \cdot e_1 = e_2$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$

Isbot. $\dim E^2 = 2$ da $E^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $E^2 = \langle e_1, e_3 \rangle$, $E^2 = \langle e_2, e_3 \rangle$ ni qaraymiz.

$\mathbb{Z}_2$ maydonda $\alpha_i + \alpha_i = 0$, $\alpha_i^2 = \alpha_i$ ekanligini eslatib o'tamiz.

Uch o'lchamli evolyutsion algebra uchun ko'paytmaning umumiy ko'rinishi

$$e_1 \cdot e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$e_2 \cdot e_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$e_3 \cdot e_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$\text{ma'lumki, } e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$$

Bu yerda $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ - tabiiy bazis, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$

Bizda $\dim E^2 = 2$ bo'lganligi sababli,

$$e_1 \cdot e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$e_2 \cdot e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

$e_3 \cdot e_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \implies \gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_1 = 0$ bittasi noldan farqli bo'lishi kerak, aks holda 2-o'lchamli evolyutsion algebra hosil bo'ladi.

1-hol. $\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0$ bo'lsin. u holda $e_3 \cdot e_3 = e_1$.

Tabiiy bazisni quyidagicha almashtiramiz.

$$e'_3 = A_1 e_1 + A_2 e_2 + e_3$$

$$e'_2 = B_1 e_1 + B_2 e_2$$

$$e'_1 = e'_3 e'_3 = (A_1 e_1 + A_2 e'_2 + e_3)(A_1 e_1 + A_2 e'_2 + e_3) = A_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + A_2(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) + e_1 = (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1)e_1 + (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2)e_2$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) & (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 \\ A_1 & A_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) & (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$B_2(1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) \neq B_1(A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) \quad (5) \quad \text{ifodaga ega bo'lamiz.}$$

$$e'_1 e'_2 = e'_1 e'_3 = e'_2 e'_3 = 0 \text{ ekanligidan}$$

$$\begin{cases} B_1 \alpha_1 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + B_2 \beta_1 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \\ B_1 \alpha_2 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + B_2 \beta_2 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \\ A_1 \alpha_1 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + A_2 \beta_1 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \\ A_1 \alpha_2 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + A_2 \beta_2 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \\ A_1 B_1 \alpha_1 + A_2 B_2 \beta_1 = 0 \\ A_1 B_1 \alpha_2 + A_2 B_2 \beta_1 = 0 \end{cases} \quad (6) \quad \text{ifodaga ega bo'lamiz. Natijani}$$

ko'rib chiqsak,

$$e'_1 e'_1 = (\alpha_1 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + \beta_1 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2))e_1 + (\alpha_2 (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) + \beta_2 (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2))e_2$$

$$e'_2 e'_2 = (B_1 \alpha_1 + B_2 \beta_1)e_1 + (B_1 \alpha_2 + B_2 \beta_2)e_2$$

$$e'_3 e'_3 = e'_1 = (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1)e_1 + (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2)e_2$$

1.1-hol. $B_2(1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) \neq B_1(A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2)$ (5) ifodadan

$$B_1(A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \text{ bo'lsin. Bundan } B_2(1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) = 1 \Rightarrow$$

$$B_2 = 1, \quad (1 + A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1) = 1$$

1.1.1-hol. $B_1 = 0, \quad (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 1$ bo'lsin.

$$(6) \text{ ifodadan } \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ A_1 \alpha_1 = A_2 \beta_1 \\ A_1 \alpha_2 = A_2 \beta_2 \Rightarrow \text{ ziddiyat } (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0 \\ A_2 \beta_1 = 0 \\ A_2 \beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{sistema bajarilmaydi.}$$

1.1.2-hol. $B_1 = 1, \quad (A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2) = 0$ bo'lsin.

$$(6) \text{ ifodadan } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_1\alpha_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = A_2\beta_1 = 0 \\ A_1\alpha_2 = A_2\beta_2 = 0 \end{cases}$$

$e'_1e'_1 = 0$, $e'_2e'_2 = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$, $e'_3e'_3 = e_1$ ko'paytmanni hosil qilamiz.
 Agar $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1 \Rightarrow e_2e_2 = e_2$ $e_3e_3 = e_1$ E_1 algebrani beradi;
 Agar $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0 \Rightarrow e_2e_2 = e_1$ $e_3e_3 = e_1$ E_2 algebrani beradi;
 Agar $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 \Rightarrow e_2e_2 = e_1 + e_2$ $e_3e_3 = e_1$ E_3 algebrani beradi;
 Agar $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0 \Rightarrow e_2e_2 = 0$ $e_3e_3 = e_1$ E_4 algebrani beradi.

1.1.3-hol. $B_1 = 0$, $(A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0$ bo'lsin.

$$(6) \text{ ifodadan } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_1\alpha_2 = 0 \\ A_2\beta_1 = 0 \\ A_2\beta_2 = 0 \end{cases} \text{ ekanligidan}$$

$e'_1e'_1 = \alpha_1e_1$, $e'_2e'_2 = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$, $e'_3e'_3 = e_1$ ni hosil qilamiz. Bunda $(\alpha_1; \alpha_2) \neq 0$ aks holda **1.1.2-holga** kelamiz va bundan quyidagi holatlar hosil boladi.

1.1.3.1-hol. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ bo'lsin. Bundan

$e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_5 algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_1$, $e_3e_3 = e_1$ E_6 algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_7 algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = 0$, $e_3e_3 = e_1$ E_8 algebrani beradi.

1.1.3.2-hol. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ bo'lsin. Bundan

$e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_9 algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = e_1$, $e_3e_3 = e_1$ E_{10} algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_{11} algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = 0$, $e_3e_3 = e_1$ E_{12} algebrani beradi.

1.1.3.3-hol. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ bo'lsin. Bundan

$e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_{13} algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_1$, $e_3e_3 = e_1$ E_{14} algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_1$ E_{15} algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = 0$, $e_3e_3 = e_1$ E_{16} algebrani beradi.

1.2-hol. $B_2(1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) \neq B_1(A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)$ (5) ifodadan

$B_2(1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0$ bo'lsin. Bundan $B_1(A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1 \Rightarrow$

$B_1 = 1$, $(A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1$ kelib chiqadi.

Ushbu holatdan bolishi mumkin bo'lgan holatlarni hisobga olib, (6) sistemaga qo'yganimizda biz ziddiyatga ega bo'lamiz ya'ni sistema birgalikda emas.

2-hol. $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ bo'lsin. u holda $e_3 \cdot e_3 = e_2$.

Tabiiy $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ bazisni quyidagicha almashtiramiz.

$$e'_3 = A_1e_1 + A_2e_2 + e_3$$

$$e'_1 = C_1e_1 + C_2e_2$$

$$e'_2 = e'_3e'_3 = (A_1e_1 + A_2e_2 + e_3)(A_1e_1 + A_2e_2 + e_3) = A_1(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2) + A_2(\beta_1e_1 + \beta_2e_2) + e_2 = (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)e_1 + (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)e_2$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) & (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) & 0 \\ A_1 & A_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) & (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$C_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \neq C_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) \quad (7) \quad \text{ifodaga ega bo'lamiz.}$$

$$e'_1 e'_2 = e'_1 e'_3 = e'_2 e'_3 = 0 \text{ ekanligidan}$$

$$\begin{cases} C_1\alpha_1(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + C_2\beta_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \\ C_1\alpha_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + C_2\beta_2(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \\ A_1\alpha_1(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + A_2\beta_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \\ A_1\alpha_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + A_2\beta_2(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \\ C_1A_1\alpha_1 + C_2A_2\beta_1 = 0 \\ C_1A_1\alpha_2 + C_2A_2\beta_2 = 0 \end{cases} \quad (8) \quad \text{sistemaga ega bo'lamiz. Natijani}$$

ko'rib chiqsak,

$$e'_1 e'_1 = (C_1\alpha_1 + C_2\beta_1)e_1 + (C_1\alpha_2 + C_2\beta_2)e_2$$

$$e'_2 e'_2 = (\alpha_1(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + \beta_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2))e_1 + (\alpha_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + \beta_2(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2))e_2$$

$$e'_3 e'_3 = e'_2 = (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)e_1 + (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)e_2$$

2.1-hol. $C_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \neq C_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)$ (7) ifodadan

$C_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0$ bo'lsin. U holda $C_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1 \Rightarrow$

$$C_1 = 1, \quad (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1$$

2.1.1-hol. $C_2 = 0, \quad (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 1$ bo'lsin.

$$(8) \text{ sistemadan } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = A_2\beta_1 = 0 \Rightarrow \text{ziddiyat}(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0 \\ A_1\alpha_2 = A_2\beta_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_2\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{sistema bajarilmaydi.}$$

2.1.2-hol. $C_2 = 1, \quad (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0$ bo'lsin.

$$(8) \text{ sistemadan } \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ A_2\beta_1 = 0 \\ A_1\alpha_1 = A_2\beta_1 \\ A_1\alpha_2 = A_2\beta_2 \end{cases}$$

$$e'_1 e'_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad e'_2 e'_2 = 0, \quad e'_3 e'_3 = e_2 \text{ ko'paytmani hosil qilamiz.}$$

Agar $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1 \Rightarrow e_1 e_1 = e_2 \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{17} \cong E_2$ algebrani beradi;

Agar $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0 \Rightarrow e_1 e_1 = e_1 \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{18} \cong E_1$ algebrani beradi;

Agar $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1 \Rightarrow e_1 e_1 = e_1 + e_2 \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{19} \cong E_3$ algebrani beradi;

Agar $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \Rightarrow e_1 e_1 = 0 \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{20}$ algebrani beradi;

2.1.3-hol. $C_2 = 0, \quad (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0$ bo'lsin.

$$(8) \text{ sistemadan } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ A_2\beta_1 = 0 \\ A_2\beta_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_1\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ekanligidan}$$

$$e'_1 e'_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad e'_2 e'_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad e'_3 e'_3 = e_2 \text{ ni hosil qilamiz. Bunda } (\beta_1; \beta_2) \neq 0 \text{ aks holda}$$

2.1.2-holga kelamiz va bundan quyidagi holatlar hosil bo'ladi.

2.1.3.1-hol. $\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0$ bo'lsin. U holda

$$e_1 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = e_1, \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{21} \cong E_{10} \text{ algebrani beradi;}$$

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_2 e_2 = e_1, \quad e_3 e_3 = e_2 \quad E_{22} \cong E_9 \text{ algebrani beradi;}$$

$e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_1$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{23} \cong E_{11}$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = 0$, $e_2e_2 = e_1$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{24} \cong E_{12}$ algebrani beradi.

2.1.3.2-hol. $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ bo'lsin. U holda

$e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{25} \cong E_6$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{26} \cong E_5$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{27} \cong E_7$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = 0$, $e_2e_2 = e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{28} \cong E_8$ algebrani beradi.

2.1.3.3-hol. $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$ bo'lsin. u holda

$e_1e_1 = e_2$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{29} \cong E_{14}$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{30} \cong E_{13}$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = e_1 + e_2$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{31} \cong E_{15}$ algebrani beradi;
 $e_1e_1 = 0$, $e_2e_2 = e_1 + e_2$, $e_3e_3 = e_2$ $E_{32} \cong E_{16}$ algebrani beradi.

2.2-hol. $C_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \neq C_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)$ (7) ifodadan

$C_1(1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0$ bo'lsin. U holda $C_2(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 1 \Rightarrow$

$C_1 = 1$, $(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 1$ kelib chiqadi.

Ushbu holatdan bolishi mumkin bo'lgan holatlarni hisobga olib, (8) sistemaga qo'yganimizda biz ziddiyatga ega bo'lamiz ya'ni sistema birgalikda emas.

3-hol. $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ bo'lsin. u holda $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$.

Tabiiy $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ bazisni quyidagicha almashtiramiz.

$$e'_3 = A_1e_1 + A_2e_2 + e_3$$

$$e'_2 = B_1e_1 + B_2e_2$$

$$e'_1 = (1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)e_1 + (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)e_2$$

$$\text{bu yerda } (e'_3e'_3 = e'_1 + e'_2 \Rightarrow e'_1 = e'_3e'_3 - e'_2)$$

$$|P_{B'B}| = \begin{vmatrix} (1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) & (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 \\ A_1 & A_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) & (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$B_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) \neq B_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \quad (9) \quad \text{ifodaga ega bo'lamiz.}$$

$$e'_1e'_2 = e'_1e'_3 = e'_2e'_3 = 0 \text{ ekanligidan}$$

$$\begin{cases} B_1\alpha_1(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = B_2\beta_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \\ B_1\alpha_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = B_2\beta_2(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \\ A_1\alpha_1(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = A_2\beta_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \\ A_1\alpha_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = A_2\beta_2(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \\ A_1B_1\alpha_1 = A_2B_2\beta_1 \\ A_1B_1\alpha_2 = A_2B_2\beta_2 \end{cases} \quad (10) \quad \text{sistemaga ega bo'lamiz.}$$

Natijani ko'rib chiqsak,

$$e'_1e'_1 = ((\alpha_1(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + \beta_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2))e_1 + (\alpha_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) + \beta_2(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2))e_2$$

$$e'_2e'_2 = (B_1\alpha_1 + B_2\beta_1)e_1 + (B_1\alpha_2 + B_2\beta_2)e_2$$

$$e'_3e'_3 = e'_1 + e'_2 = (1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1)e_1 + (1 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)e_2$$

3.1-hol. $B_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) \neq B_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2)$ (9) ifodadan $B_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0$ bo'lsin. U holda $B_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 1 \Rightarrow B_2 = 1$, $(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 1$

3.1.1-hol. $B_1 = 0$, $(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1$ bo'lsin.

$$(10) \text{ sistemadan } \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = A_2\beta_1 \\ A_1\alpha_2 = A_2\beta_2 \\ A_2\beta_1 = 0 \\ A_2\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ziddiyat hosil bo'ladi. Sistema bajarilmaydi.}$$

3.1.2-hol. $B_1 = 1, (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \Rightarrow (A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0$ bo'lsin.

$$(10) \text{ sistemadan } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_2\alpha_2 = 0 \\ A_1\alpha_1 = A_2\beta_1 = 0 \Rightarrow \text{ziddiyat}(A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0 \\ A_1\alpha_2 = A_2\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{sistema bajarilmaydi.}$$

3.1.3-hol. $B_1 = 0, (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0 \Rightarrow (A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 0$ bo'lsin.

$$(10) \text{ sistemadan } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ A_1\alpha_1 = 0 \\ A_1\alpha_2 = 0 \\ A_2\beta_1 = 0 \\ A_2\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ekanligidan}$$

$e'_1 e'_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad e'_2 e'_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad e'_3 e'_3 = e_1 + e_2$ ko'paytmani hosil qilamiz. $M_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} E$

evolyutsion algebrani B' tabiiy bazisga nisbatan strukturaviy konstantalari uchun α_i, β_i larni $\mathbb{Z}_2$ maydondan tanlasak, quyidagicha 16 ta evolyutsion algebralarga hosil bo'ladi.

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{33} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{34} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{35} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{36} \cong E_{35} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{37} \cong E_{33} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = 0; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{38} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{39} \\ e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{40} \cong E_{39} \\ e_1 \cdot e_1 = 0; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{41} \cong E_{38} \\ e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{42} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{43} \cong E_{42} \\ e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = 0; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{44} \\ e_1 \cdot e_1 = 0; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{45} \cong E_{44} \\ e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = 0; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{46} \\ e_1 \cdot e_1 = 0; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{47} \cong E_{45} \\ e_1 \cdot e_1 = 0; \quad e_2 \cdot e_2 = 0; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 \quad E_{48} \end{aligned}$$

3.2-hol. $B_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) \neq B_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) \quad (9) \quad \text{ifodadan } B_2(1 + B_1 + A_1\alpha_1 + A_2\beta_1) = 0$ bo'lsin. U holda $B_1(1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1 \Rightarrow B_1 = 1, (1 + B_2 + A_1\alpha_2 + A_2\beta_2) = 1$

Ushbu holatni ko'rib chiqqanimizda **3.1-holatda** hosil bo'lgan evolyutsion algebralarga izomorf evolyutsion algebralarga paydo bo'ldi. **Teorema isbotlandi.**

Teorema 4. $\mathbb{Z}_2$ maydonda uch o'lchamli E evolyutsion algebralarga $\dim E^2 = 3$ bo'lganda quyidagi o'zaro izomorf bo'lmagan algebralarning biri bilan izomorfdir.

- $E_1 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_3$
- $E_2 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2 + e_3$
- $E_3 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_3$
- $E_4 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_5 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_6 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2 + e_3$
- $E_7 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_8 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_9 : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_3$
- $E_{10} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{11} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_3$
- $E_{12} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{13} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{14} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{15} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{16} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_{17} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{18} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{19} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_{20} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{21} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_{22} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{23} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{24} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{25} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2 + e_3$
- $E_{26} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{27} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{28} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1$
- $E_{29} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{30} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_{31} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2 + e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_2$
- $E_{32} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$
- $E_{33} : \quad e_1 \cdot e_1 = e_3; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1; \quad e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$

- E_{34} : $e_1 \cdot e_1 = e_3$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3$; $e_3 \cdot e_3 = e_2$
- E_{35} : $e_1 \cdot e_1 = e_3$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_2$
- E_{36} : $e_1 \cdot e_1 = e_2 + e_3$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_2$
- E_{37} : $e_1 \cdot e_1 = e_2 + e_3$; $e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_3$; $e_3 \cdot e_3 = e_2$
- E_{38} : $e_1 \cdot e_1 = e_2 + e_3$; $e_2 \cdot e_2 = e_1$; $e_3 \cdot e_3 = e_1 + e_2$

Isbot. $\dim E^2 = 3$ bo'lganda $E^2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ni qaraymiz.

$\mathbb{Z}_2$ maydonda $\alpha_i + \alpha_i = 0$, $\alpha_i^2 = \alpha_i$ ekanligini eslatib o'tamiz.

Uch o'lchamli evolyutsion algebra uchun ko'paytmaning umumiy ko'rinishi

$$e_1 \cdot e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$e_2 \cdot e_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

$$e_3 \cdot e_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$$

$$\text{ma'lumki, } e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$$

Bu yerda $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ - tabiiy bazis, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_2$

$$M_B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} E \text{ evolyutsion algebra ni } B \text{ tabiiy bazisga nisbatan strukturaviy konstantalari}$$

$$|P_B| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Natijani hisoblaymiz.}$$

1-hol. $a_1 = b_2 = c_3 = 0$ bo'lsin.

$$|P_B| = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \Rightarrow a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \neq 0 \Rightarrow a_2 b_3 c_1 \neq a_3 b_1 c_2$$

1.1-hol. $a_2 b_3 c_1 = 0$ bo'lsin. U holda $a_3 b_1 c_2 = 1 \Rightarrow a_3 = b_1 = c_2 = 1$

Agar $a_2 = 0$ bo'lsa;

$b_3 = 1, c_1 = 1$; $e_1 e_1 = e_3, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ E_1 algebrani beradi;

$b_3 = 0, c_1 = 1$; $e_1 e_1 = e_3, e_2 e_2 = e_1, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ E_2 algebrani beradi;

$b_3 = 1, c_1 = 0$; $e_1 e_1 = e_3, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_2$ E_3 algebrani beradi;

$b_3 = 0, c_1 = 0$; $e_1 e_1 = e_3, e_2 e_2 = e_1, e_3 e_3 = e_2$ E_4 algebrani beradi;

Agar $a_2 = 1$ bo'lsa;

$b_3 = 0, c_1 = 0$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_1, e_3 e_3 = e_2$ E_5 algebrani beradi;

$b_3 = 1, c_1 = 0$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_2$ E_6 algebrani beradi;

$b_3 = 0, c_1 = 1$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_1, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ E_7 algebrani beradi.

1.2-hol. $a_2 b_3 c_1 = 1$ bo'lsin. U holda $a_3 b_1 c_2 = 0 \Rightarrow a_2 = b_3 = c_1 = 1$

Agar $a_3 = 0$ bo'lsa;

$b_1 = 1, c_2 = 1$; $e_1 e_1 = e_2, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ $E_8 \cong E_7$ algebrani beradi;

$b_1 = 0, c_2 = 1$; $e_1 e_1 = e_2, e_2 e_2 = e_3, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ $E_9 \cong E_2$ algebrani beradi;

$b_1 = 1, c_2 = 0$; $e_1 e_1 = e_2, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_1$ $E_{10} \cong E_5$ algebrani beradi;

$b_1 = 0, c_2 = 0$; $e_1 e_1 = e_2, e_2 e_2 = e_3, e_3 e_3 = e_1$ $E_{11} \cong E_4$ algebrani beradi;

Agar $a_3 = 1$ bo'lsa;

$b_1 = 0, c_2 = 0$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_3, e_3 e_3 = e_1$ $E_{12} \cong E_3$ algebrani beradi;

$b_1 = 1, c_2 = 0$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_1 + e_3, e_3 e_3 = e_1$ $E_{13} \cong E_6$ algebrani beradi;

$b_1 = 0, c_2 = 1$; $e_1 e_1 = e_2 + e_3, e_2 e_2 = e_3, e_3 e_3 = e_1 + e_2$ $E_{14} \cong E_1$ algebrani beradi.

2-hol. $a_1 = 1$ bo'lsin.

$$\text{U holda } |P_B| = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ushbu evolyutsion algebra ning strukturaviy konstantalarining determinanti noldan farqli bo'ladigan holatlarni ko'rib chiqqanimizda jami 96 ta evolyutsion algebra hosil bo'ldi. Bunda o'zaro izomorflarini ajratib chiqqanimizda 31 ta o'zaro izomorf bo'lmagan evolyutsion algebralar hosil bo'ldi. **Teorema isbotlandi.**

Rezyume

At present, one of the important directions in modern algebra is the study of the theory of evolution algebras. Evolution algebras are connected to various other areas of mathematics, including graph theory, Markov processes, and dynamical systems. The class of evolution algebras was first introduced by Lyubich in 1992. In 2008, Tian, in his monograph, used the term evolution algebra and presented certain applications and properties of these algebras. This paper provides a classification of two- and three-dimensional evolution algebras over the field $\mathbb{Z}_2$

Key words: Evolution algebra, natural basis, homomorphism, isomorphism, field, dimension.

Rezyume

На современном этапе одним из актуальных направлений в развитии алгебры является теория эволюционных алгебр. Данный класс алгебр представляет собой относительно новое направление, обладающее широкой областью применения и тесно связанное с другими разделами математики, такими как теория графов, марковские процессы и теория динамических систем. Понятие эволюционной алгебры было впервые введено Любичем в 1992 году. Существенный вклад в развитие данной теории внёс Тиан, который в своей монографии, изданной в 2008 году, систематизировал основные свойства эволюционных алгебр и продемонстрировал их приложения. Настоящая работа посвящена классификации двух и трёхмерных эволюционных алгебр над полем $\mathbb{Z}_2$

Ключевые слова: Эволюционная алгебра, натуральный базис, гомоморфизм, изоморфизм, поля, размерность.

ADABIYOTLAR

1. J.P. Tian, *Evolution algebras and their applications*. Lecture Notes in Mathematics, 1921, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
2. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov and U.A. Rozikov, *On evolution algebras*. Algebra Colloq. 21(2), 331-324, 2014.
3. Cabrera Casado, Yolanda; Siles Molina, Mercedes; Velasco, M. Victoria, (2017), Classification of three-dimensional evolution algebras, Linear Algebra Appl. **254**, pp.68-108.
4. Sh.N. Murodov, *Classification of two-dimensional real evolution algebras and dynamics of some two-dimensional chains of evolution algebras*. Uzb.Mat.jour. **2** pp.102-111. 2014.
5. A.N. Imomkulov, *Classification of a family of three-dimensional real evolution algebras*. TWMS J. Pure Appl. Math.2019. V. 10. №2 p. 225-238.

UDC 519.21

STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR BANACH SPACE-VALUED RANDOM FIELDS WITH WEIGHTS

RUZIEVA D. S.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT
dilnura.saidovna@gmail.com

RESUME

We consider random fields with values in infinite dimensional spaces. We assume that random fields can be represented as a functional of random fields consisting of independent identically distributed random variables. For such random fields we prove strong law of large numbers.

Key words: random field, strong law of large numbers, Banach space.

Let $\{Y_i, i \in Z^d\}$ be a real-valued random field with $d \geq 2$. We assume that $\{Y_i, i \in Z^d\}$ can be represented as

$$Y_i = g(\varepsilon_{i-s}, s \in Z^d) \quad i \in Z^d \quad (1)$$

where $(\varepsilon_j)_{j \in Z^d}$ are iid random variables and g is a measurable function.

We define the dependence measure as follows: let $(\varepsilon_j^*)_{j \in Z^d}$ be an iid copy of $(\varepsilon_j)_{j \in Z^d}$ and consider for any positive integer n the coupled version Y_i^* of Y_i defined by

$$Y_i^* = g(\varepsilon_{i-s}^*, s \in Z^d), \quad i \in Z^d,$$

where for any j in Z^d ,

$$\varepsilon_j^* = \begin{cases} \varepsilon_j, & j \neq 0 \\ \varepsilon_0, & j = 0 \end{cases}$$

denote

$$\delta_{i,p} = \|Y_i - Y_i^*\|_p = (E |Y_i - Y_i^*|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

In [1] a central limit theorem for $\{Y_i, i \in Z^d\}$ was proved under some additional conditions. Generalizations of such random fields in infinite dimensional Banach spaces were considered in [4]. In [4] the central limit theorem was proved for random fields with values in some Banach spaces. Strong law of large numbers for random fields with values in infinite dimensional spaces was proved in [5].

Let $\{\xi(t), t \in Z^2\}$ be a random field of independent identically distributed random variables with values in a separable Hilbert space H (with inner product $(\cdot, \cdot)$ and a norm $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$) and let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a random field with values in H . By $\{e_j, j \geq 1\}$ we denote an orthonormal basis of H . Thus, we can write

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} X^{(j)}(t) e_j, \quad t \in Z^2.$$

Assume that the following representations hold

$$X^{(j)}(t) = g_j(\xi(t-s), s \in Z^2), \quad j = 1, 2, \dots \quad (2)$$

where $g_j, j = 1, 2, \dots$ are measurable functions.

Let $\{\xi^l(t), t \in Z^2\}$ be an independent copy of $\{\xi(t), t \in Z^2\}$ and

$$\overline{X}^{(j)}(t) = g_j(\xi^*(t-s), s \in Z^2)$$

where

$$\overline{X}^{(j)}(t) = g_j(\xi^*(t-s), \quad s \in Z^2),$$

$$\xi^*(j) = \begin{cases} \xi(j), & \text{if } j \neq 0 \\ \xi^l(0), & \text{if } j = 0. \end{cases}$$

Denote

$$\delta_j(t, p) = \left(E \left| X^{(j)}(t) - \overline{X}^{(j)}(t) \right|^p \right)^{1/p},$$

$$\Delta_p(j) = \sum_{t \in Z^2} \delta_j(t, p).$$

$\{G_n, n = 1, 2, \dots\}$ – is a sequence of finite sets from Z^2 such that $G_k \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$|G_k| = \text{card } G_k, \quad f(|G_n|) = \sum_{i \in G_n} a_i^2, \quad S_{G_n} = \sum_{i \in G_n} a_i X_i.$$

where a_i – real numbers.

Random fields with values in c_0 (a space of all sequences $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ with a norm $\|x\| = \sup_n |x_n|$) and l_p ($1 \leq p \leq 2$) (a space of the sequences $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p < \infty$

with a norm $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p \right)^{1/p}$) can be defined analogously. In these spaces as a basis we take the following standard basis $\{e_i, i \geq 1\}$, $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$.

We establish the strong law of large numbers for $\{X(t), t \in Z^2\}$. In [2] the strong laws of large numbers were proved for mixing random variables with values in Banach spaces. In [3] the strong law of large numbers were proved for mixing random fields with values in some Banach spaces.

Main results

Now we formulate our results.

Theorem 1. Let $\{X_i, i \in Z^2\}$ be a random field with values in H defined by equation (2). Assume that the following conditions hold:

$$1. EX_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2 < \infty.$$

2. There exists an integer valued increasing function $\varphi(m)$ such that

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(|G_{\varphi(m)}|)}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|G_{\varphi(m+1)} \setminus G_{\varphi(m)}| (f(|G_{\varphi(m+1)}|) - f(|G_{\varphi(m)}|))}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty. \tag{4}$$

Then as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_{G_n}}{|G_n|} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Theorem 2. Let $\{X_i, i \in Z^2\}$ be a c_0 -space-valued random field defined by equation (2). Assume that the following conditions hold:

$$1. EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_2^2(j) < \infty.$$

2. There exists an integer valued increasing function $\varphi(m)$ such that

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(|G_{\varphi(m)}|)}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|G_{\varphi(m+1)} \setminus G_{\varphi(m)}| (f(|G_{\varphi(m+1)}|) - f(|G_{\varphi(m)}|))}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty.$$

Then as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_{G_n}}{|G_n|} \rightarrow 0 \text{ a.s..}$$

Theorem 3. Let $\{X_i, i \in Z^2\}$ be a $l_p(1 \leq p \leq 2)$ space-valued random field defined by equation (2). Assume that the following conditions hold:

1. $EX(t) = 0, \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^{p/2} < \infty, \quad 1 \leq p \leq 2.$

2. There exists an integer valued increasing function $\varphi(m)$ such that

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(|G_{\varphi(m)}|)}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|G_{\varphi(m+1)} \setminus G_{\varphi(m)}| (f(|G_{\varphi(m+1)}|) - f(|G_{\varphi(m)}|))}{|G_{\varphi(m)}|^2} < \infty.$$

Then as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_{G_n}}{|G_n|} \rightarrow 0 \text{ a.s..}$$

Proof of theorems.

We now present the proof of the above theorems.

In the proof of the above theorems, we use the following theorems from [5].

Theorem 4. Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a random field with values in H defined by equation (2). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2 < \infty.$$

Then there is a constant $C > 0$ such that the following inequality holds:

$$E \|S_G\|^2 \leq C |G| \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2.$$

Theorem 5. Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a c_0 - space-valued random field defined by (2). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_2^2(j) < \infty.$$

Then there is a constant $C > 0$ such that the following inequality holds:

$$E \|S_G\|^p \leq C |G|^{p/2} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_2^2(j).$$

Theorem 6. Let $\{X(t), t \in Z^2\}$ be a $l_p(1 \leq p \leq 2)$ space - valued random field defined by (2). Assume that the following conditions hold:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^{p/2} < \infty, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Then there is a constant $C > 0$ for which the following inequality holds:

$$E \|S_G\|^p \leq C \cdot |G|^{p/2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^{p/2}, \quad \text{for } 1 \leq p \leq 2.$$

Proof of Theorem 1.

Using the inequality from Theorem 4 we obtain:

$$E \left\| \sum_{i \in G} a_i X_i \right\|^2 \leq C \sum_{i \in G} a_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2 = Cf(|G|) \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta_2(j))^2. \quad (5)$$

Using Chebyshev inequality and (5) we have for any $\varepsilon > 0$

$$P \left(\frac{\|S_{G_{\varphi(m)}}\|}{|G_{\varphi(m)}|} > \varepsilon \right) \leq \frac{E \|S_{G_{\varphi(m)}}\|^2}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2} \leq \frac{C \left(\sum_{i \in G_{\varphi(m)}} a_i^2 \right) \sum_{i \in G_{\varphi(m)}} (\Delta_2(i))^2}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2} = \frac{Cf(|G_{\varphi(m)}|)}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2}$$

It follows from Borel-Cantelli lemma that as $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{|G_{\varphi(m)}|} \|S_{G_{\varphi(m)}}\| \rightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad (6)$$

Again using Chebyshev inequality we have

$$\begin{aligned} P \left(\frac{\max_{\varphi(m) < n \leq \varphi(m+1)} \|S_{G_n} - S_{G_{\varphi(m)}}\|}{|G_{\varphi(m)}|} > \varepsilon \right) &\leq \frac{E \max_{\varphi(m) < n \leq \varphi(m+1)} \|S_{G_n} - S_{G_{\varphi(m)}}\|^2}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2} \leq \\ &\leq \frac{|G_{\varphi(m+1)} - G_{\varphi(m)}| \sum_{i \in G_{\varphi(m+1)} \setminus G_{\varphi(m)}} E \|a_i X_i\|^2}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2} \leq \frac{|G_{\varphi(m+1)} - G_{\varphi(m)}| \sum_{i \in G_{\varphi(m+1)} \setminus G_{\varphi(m)}} a_i^2 E \|X_i\|^2}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2} = \\ &= \frac{|G_{\varphi(m+1)} - G_{\varphi(m)}| E \|X_1\|^2 (f(|G_{\varphi(m+1)}|) - f(|G_{\varphi(m)}|))}{\varepsilon^2 |G_{\varphi(m)}|^2}. \end{aligned}$$

From (4) and Borel-Cantelli lemma we have as $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\max_{\varphi(m) < n \leq \varphi(m+1)} \|S_{G_n} - S_{G_{\varphi(m)}}\|}{|G_{\varphi(m)}|} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad (7)$$

From (6) and (7) follows the statement of the theorem.

Theorems 2-3 can be proved using the same method and therefore we omit their proofs.

REFERENCES

1. Machkouri M. E., Volny D., Wu W. B. A central limit theorem for stationary random fields. Stochastic Processes and their Applications, 2013, V.123, P.1-14.
2. Bosq D. Linear processes in function spaces. Theory and applications. Lect. Notes in Statist, 2000, V.149, Springer-Verlag.
3. Parpieva N. T. Strong law of large numbers for weakly dependent random fields with values in some Banach spaces. Uzbek Mathematical Journal, 2002, №2, P.59-64. (Russian)
4. Ruzieva D. S., Sharipov O. Sh. Central limit theorem for weakly dependent random fields with values in $l_p(1 \leq p \leq 2)$ and c_0 spaces. Uzbek Mathematical Journal, 2020, №1, P.130-136.
5. Ruzieva D. S. Strong law of large numbers for random fields with values in infinite dimensional spaces. Bull. Inst. Math., 2024, V.7(4), P.70-75.

REZYUME

Cheksiz o'lchamli fazolarda qiymat qabul qiluvchi tasodifiy maydonlarni ko'rib chiqamiz. Tasodifiy maydonlarni bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan tasodifiy maydonlarning funksionali sifatida yozish mumkin deb faraz qilamiz. Bunday tasodifiy maydonlar uchun biz kuchaytirilgan katta sonlar qonunini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: tasodifiy maydon, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni, Banax fazosi.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются случайные поля со значениями в бесконечномерных пространствах. Мы предполагаем, что случайные поля могут быть представлены как функционал от случайных полей состоящих из независимых одинаково распределенных случайных величин. Для таких случайных полей мы доказываем усиленный закон больших чисел.

Ключевые слова: случайное поле, усиленный закон больших чисел, банаховое пространство.

UDC 517.55

SOME REMARK ON THE INVARIANT MEASURE OF CIRCLE MAPS WITH BREAK POINTS

SAFAROV U. A.

TURIN POLYTECHNIC UNIVERSITY IN TASHKENT, TASHKENT

safarovua@mail.ru

RESUME

In this paper we study invariant measure of circle homeomorphisms with break type of singularities. It is proven that invariant measure of circle homeomorphisms have four break points with trivial total product of jumps and irrational rotation numbers of bounded type is singular with respect to Lebesgue measure on the circle.

Key words: circle homeomorphism, rotation number, invariant measure, break point.

In the present paper, we study invariant measures of circle homeomorphisms with break type of singularities.

Let f be an orientation preserving circle homeomorphism. It is well-known that any this kind of homeomorphism can be written as

$$f(x) = F(x)(\text{mod } 1), \quad x \in S^1,$$

where $F(x)$ - continuous, strictly increasing function on R^1 satisfying condition

$$F(x+1) = F(x) + 1, \quad x \in R.$$

The function F is called a **lift** of the homeomorphism f . Let F be the lift with initial condition $F(0) \in [0, 1)$. We denote by ρ_f the rotation number of the homeomorphism f (see [1]), that is,

$$\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}, \quad x \in R^1.$$

Henceforth, $F^n(x)$ denotes the n th iteration of the function F . The limit ρ_f belongs to the interval $[0, 1)$ and does not depend on the point x . The number ρ_f is the most important numerical characteristic of the homeomorphism f . Namely, if the rotation number ρ_f is irrational, then the homeomorphism f has a unique probability invariant measure μ_f . Moreover, there exists a continuous, non-decreasing function $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ such that $\varphi \circ f = f_{\rho_f} \circ \varphi$, where $f_{\rho_f} = x + \rho_f(\text{mod } 1)$ (see [1]). Note that the semi-conjugation φ and the invariant measure μ_f are connected by the relation $\varphi(x) = \mu_f([0, x])$, $x \in S^1$. Because of this relation, invariant measure μ_f is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure ℓ if and only if φ is given by an absolutely continuous function.

The fundamental results in the problem of smoothness of the conjugacy were obtained by V.I. Arnold, J. Moser, M. Herman, J.C. Yoccoz, Ya.G. Sinai and K.M. Khanin, Y. Katznelson and D. Ornstein and others.

We formulate the last two important results in this area.

Theorem 1. (Katznelson-Ornstein,[2]). *Let f be an orientation preserving C^1 - circle diffeomorphism. If f' is absolutely continuous, $\frac{f''}{f'} \in L_p$ for some $p > 1$ and the rotation number $\rho = \rho_f$ is of bounded type, then the invariant measure μ_f is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.*

Theorem 2. (Khanin-Sinai,[3]). *Let f be a $C^{2+\varepsilon}$ circle diffeomorphism for some $\varepsilon > 0$, and let the rotation number $\rho = \rho_f$ be a Diophantine number with exponent $\delta \in (0, \varepsilon)$, i.e., there is a constant $c(\rho)$ such that*

$$|\rho - \frac{p}{q}| \geq \frac{c(\rho)}{q^{2+\delta}}, \text{ for any } p, q \in Q.$$

Then the conjugating map φ belongs to $C^{1+\varepsilon-\delta}$.

One of the important class of circle homeomorphisms are homeomorphisms with break points, or the class of P -homeomorphisms.

Definition 1. Let f be circle homeomorphisms with the lift F . If at the point $x_b \in S^1$ there exist one-sided positive derivatives $F'(x_b - 0)$, $F'(x_b + 0)$ and $F'(x_b - 0) \neq F'(x_b + 0)$, then $x = x_b$ is called break point of the homeomorphism f .

The number $\sigma_f(x_b) = \frac{F'(x_b-0)}{F'(x_b+0)}$ is called **jump ratio** or **jump** of the homeomorphism f at the point $x = x_b$.

Definition 2. An orientation preserving circle homeomorphism f with the lift F is called P -homeomorphism, if F satisfies the following conditions:

- 1) F is differentiable on S^1 except at a finite or countable number of break points;
- 2) there exist constants $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ such that

$$c_1 < F'(x_b - 0), F'(x_b + 0) < c_2, \quad \forall x_b \in BP(f),$$

$$c_1 < F'(x) < c_2, \quad \forall x \in S^1 \setminus \{BP(f)\},$$

where $BP(f)$ - set of all break points of f ;

- 3) $\ln F'$ has bounded variation in S^1 , i.e. $v(F) = \text{var}_{S^1} \ln F' < \infty$.

The regularity properties of invariant probability measures of circle homeomorphisms with break points differ from the properties in the case of circle diffeomorphisms. The piecewise-linear (PL) orientation preserving circle homeomorphisms with two break points are the simplest examples of P -homeomorphisms. The invariant measures of PL homeomorphisms were studied first by Herman in [4].

Theorem 3. (Herman). A PL circle homeomorphisms with two break points and irrational rotation number has an invariant measure absolutely continuous with respect to Lebesgue measure if and only if its break points belong to the same orbit.

General (non PL) circle homeomorphisms with one break point have been studied by Dzhalilov and Khanin in [5]. The character of their results for such circle maps is quite different from the one for $C^{2+\varepsilon}$ -diffeomorphisms. The main result of [5] is the following:

Theorem 4. Let f be a circle homeomorphisms with a single break point x_b . If the rotation number ρ_f of f is irrational and $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$ for some $\varepsilon > 0$, then the f -invariant probability measure μ_f is singular with respect to Lebesgue measure ℓ .

The invariant measures of circle homeomorphisms with two break points of "general type", that is, which are not piecewise linear, were studied in [6], [7]. We state the main results of these papers.

Theorem 5. ([6]). Suppose that a circle homeomorphism f with lift F satisfies the following conditions.

- 1) The rotation number ρ_f is irrational of "bounded type", that is, the sequence of elements of the expansion of ρ_f into a continued fraction is bounded.
- 2) f has break points at two points b_1, b_2 of the circle that do not lie on the same trajectory.
- 3) The derivative $F'(x)$ exists on the set $S^1 \setminus \{b_1, b_2\}$ and satisfies Lipschitz conditions on every connected component of that set.

Then the f -invariant measure μ_f is singular with respect to Lebesgue measure ℓ .

Circle homeomorphisms with two break points but arbitrary irrational rotation number were studied in [7].

Theorem 6 ([7]). Suppose that a circle homeomorphism f with lift F satisfies the following conditions.

- 1) The rotation number ρ_f is irrational;
 - 2) f has break points at points b_1, b_2 and the derivative $F'(x)$ is absolutely continuous on every connected component of the set $S^1 \setminus \{b_1, b_2\}$;
 - 3) $F''(x) \in L_1(S^1, d\ell)$;
 - 4) The product of the jumps at the break points is non-trivial, that is, $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \neq 1$.
- Then the f -invariant probability measure μ_f is singular with respect to Lebesgue measure.

Now we formulate the main result of the paper of A.A. Dzhalilov, D. Mayer, U.A. Safarov [8].

Theorem 7. Suppose that the lift $F(x)$ of circle homeomorphism f with irrational rotation number satisfies the following conditions:

- (1) f has break points $b(1), b(2), \dots, b(k) \in S^1$ and $F'(x)$ absolutely continuous function on each connected component of the set $S^1 \setminus \{b(i), i = \overline{1, k}\}$;
- (2) $\int_{S^1} |F''(x)| d\ell < \infty$;
- (3) $\prod_{i=1}^k \sigma_i \neq 1$.

Then the f -invariant probability measure μ_f is singular with respect to Lebesgue measure ℓ on the circle S^1 , i.e. there exists a set $A \subseteq S^1$ such that $\ell(A) = 1$ and $\mu_f(A) = 0$.

In the paper [9] author answered positively a question of whether it is possible for a circle diffeomorphisms with breaks to be smoothly conjugate to a rigid rotation in the case when its breaks are lying on pairwise distinct trajectories. An example constructed is a piecewise linear circle homeomorphisms with irrational rotation numbers of "unbounded type" that has four break points lying on distinct trajectories, and whose invariant measure is absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure.

Now we formulate our main result.

Theorem 8. Let f be a P -homeomorphism with irrational rotation number ρ of "bounded type". Suppose that

- (a) f has four break points $b^{(i)}, i = \overline{1, 4}$, lying on pairwise distinct trajectories, with break jumps $\sigma_f(b^{(i)}), i = \overline{1, 4}$, respectively and $f'(x)$ absolutely continuous function on each connected component of the set $S^1 \setminus \{b^{(i)}, i = \overline{1, 4}\}$;
- (b) $\int_{S^1} |f''(x)| d\ell < \infty$;
- (c) $\sigma_f(b^{(1)}) \neq \sigma_f(b^{(i)}), i = 2, 3, 4$;
- (d) $\prod_{i=1}^4 \sigma_f(b^{(i)}) = 1$.

Then the f -invariant probability measure μ_f is singular w.r.t. Lebesgue measure ℓ on the circle S^1 .

Sketch of the Proof of the Main Theorem. In this section, we provide a sketch of the proof for the main theorem, highlighting the critical ideas and techniques involved. While the full details are omitted, this outline aims to give a clear understanding of the underlying approach and the key steps that lead to the result. In the first step of the proof, we study cross-ratio of triple of intervals $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ and its distortion. More precisely, we estimate cross-ratio distortion for two cases: (i) interval $[z_1, z_4]$ does not cover any of break points, that is, diffeomorphism in the interval $[z_1, z_4]$. (ii) interval $[z_1, z_4]$ covers some of the break points with either $[z_1, z_2]$ or $[z_3, z_4]$. In the case (i) cross ratio distortion tends to 1 as length of interval $[z_1, z_4]$ approaches 0. In the case (ii) cross ratio distortion tends to product of jumps of break points, covered by the interval $[z_1, z_4]$, as length of interval $[z_1, z_4]$ approaches 0.

In the step 2, we establish the existence of subsequence of dynamical partitions of the circle $\xi_n(x_0) = \{\Delta_i^{(n)}(x_0), 0 \leq i < q_{n-1}, \Delta_i^{(n-1)}(x_0), 0 \leq j < q_n\}$ that trajectories of break points separate at least two groups with nontrivial product of jumps.

In the step 3, we construct triple of interval $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ that iteration of the interval $[z_1, z_4]$

under the $f^s(x)$, $s = q_n \vee q_{n-1}$ covers subset of break points with nontrivial product of jumps either iteration of $f^s([z_1, z_2])$ or $f^s([z_3, z_4])$ such that the break points sufficiently close to trajectory of either z_2 or z_3 .

In the step 4, using the steps above we prove that invariant measure is singular w.r.t Lebesgue measure. Let $\varphi(x) = \mu([0, x])$, $x \in S^1$ be conjugacy between f and f_ρ . Assume the contrary, that is, $\varphi(x)$ is absolutely continuous homeomorphism. Then $\exists x_0 \in S^1$ such that $\varphi'(x_0) > 0$. In the small neighbourhood of x_0 we construct triple of intervals satisfying condition of step 3. If we consider cross-ratio distortion of triple of interval $([z_1, z_2], [z_2, z_3], [z_3, z_4])$ w.r.t $f^{(s)}$, $s = q_n \vee q_{n-1}$, then it differs from 1. On the other side, if we use the properties of conjugation map it must close to one. This contradiction proves the theorem.

Conclusion. The question of the absolute continuity and singularity of two probability measures is one of the important problems of modern probability theory. These results confirm that for circle homeomorphisms with four break points and with an irrational rotation number of bounded type, it is proved that the invariant probability measure is singular with respect to the Lebesgue measure.

REFERENCES

1. Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J. Math. Pures Appl., 1932, V.11, P.333-375.
2. Katznelson Y. and Ornstein D. The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. Ergod. Theor. Dyn. Syst., 1989, V.9, P.681-690.
3. Khanin K.M. and Sinai Y.G. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations. Russ. Math. Surv., 1989, V.44, P.69-99.
4. Herman M. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1979, V.49, P.225-234.
5. Dzhililov A.A. and Khanin K.M. On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a point of break. Funct. Anal. Appl., 1998, V.32, P.153-161.
6. Dzhililov A.A. and Liousse I. Circle homeomorphisms with two break points. Nonlinearity, 2006, V.19, P.1951-1968.
7. Dzhililov A.A., Liousse I. and Mayer D. Singular measures of piecewise smooth circle homeomorphisms with two break points. Discrete and continuous dynamical systems, 2009, V.24, P.381-403.
8. Dzhililov A.A., Mayer D. and Safarov U.A. Piecewise-smooth circle homeomorphisms with several break points. Izvestiya RAN: Ser. Mat., 2012, V.76, P.95-113.
9. Teplinsky A. A circle diffeomorphism with breaks that is absolutely continuously linearizable. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2018, V.38, P.371-383.

REZYUME

Ushbu maqolada sinish tipidagi maxsuslikka ega aylana gomeomorfizmlarining invariant o'lchovi o'rganilgan. Bunda to'rtta sinish nuqtalariga ega bo'lib, sinish kattaliklari ko'paytmasi trivial va bo'rish soni chegaralangan tipdagi irratsional bo'lgan aylana gomeomorfizmlarining invariant o'lchovi aylanada Lebeg o'lchoviga nisbatan singulyar bo'lishi isbotlangan.

Kalit so'zlar: aylana gomeomorfizmi, burish soni, invariant o'lchov, sinish nuqtasi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучается инвариантная мера гомеоморфизмов окружности с особенностями типа излома. Доказано, что инвариантная мера гомеоморфизмов окружности с четырьмя точками излома, при тривиальном общем произведении скачков и иррациональным числом вращения ограниченного типа, является сингулярной относительно меры Лебега на окружности.

Ключевые слова: гомеоморфизм окружности, число вращения, инвариантная мера, точка излома.

UDC 519.21

ON STABLE TYPE p BANACH SPACES

SHARIPOV O. SH.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT
V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF
UZBEKISTAN, TASHKENT
osharipov@yahoo.com

KOBILOV U. X.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT
kobilov.utkir25@gmail.com

RESUME

In the paper stable type p Banach spaces are considered. We extend a result known for independent random variables to the mixing random variables. A sufficient and necessary condition for stable type p Banach spaces is given.

Key words: Rademacher type p Banach space, a stable type p Banach space, mixing condition.

It is known that validity of limit theorems in Banach spaces depends on geometrical structure of Banach spaces (see for instance [1]-[11]). There are several types of Banach spaces. We will consider two types of Banach spaces.

Namely, we will consider Rademacher type p and a stable type p Banach spaces.

Let B be a separable Banach spaces with a norm $\|\cdot\|$ and $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent random variables with values in B . Now we will give a definition of Rademacher type p Banach space.

Definition 1. We say that B is Rademacher type p ($1 \leq p \leq 2$) Banach space if for any finite collection of B -valued independent random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ with $EX_i = 0, E\|X_i\|^p < \infty$ there exists a constant $C = C(p, B) > 0$ such that

$$E \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^p \leq C \sum_{i=1}^n E \|X_i\|^p.$$

Obviously any separable Banach space is Rademacher type 1 space. L_p, l_p spaces are Rademacher type 2 Banach spaces for $p \geq 2$ and L_p, l_p are Rademacher type p spaces if $1 \leq p \leq 2$. c_0 space is not Rademacher type p space for any $p \in (1, 2]$.

By θ we denote a real valued stable random variable with characteristic function

$$E \exp(it\theta) = \exp(-|t|^p)$$

$\{\theta_i, i \geq 1\}$ is a sequence of independent copies of θ .

Now we give a definition of stable type p Banach spaces.

Definition 2. We say that B is a stable type p ($0 < p \leq 2$) Banach space if for each $q < p$ there exists a constant $C > 0$ such that for all integers n and any $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ the following inequality holds

$$\left(E \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

It is known that B is of stable type p if and only if for all sequences $x_1, x_2, \dots$ of elements of B such that $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$ the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i$$

converges almost surely, see [4].

If B is of stable type p , then for independent random variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ with characteristic functions $\exp(-\alpha_i |t|^p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ and any $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ the following inequality holds (see [4])

$$\left(E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

where $q < p$ and $C = C(q) > 0$.

Some of above results were extended to the case of mixing random variables.

For the sequence $\{\theta_i, i \geq 1\}$ mixing coefficients are defined as following

$$\psi(k) = \sup \left\{ \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)P(B)} : A \in F_1^n, B \in F_{n+k}^\infty, n \in N, P(A)P(B) > 0 \right\}$$

where F_a^b is a σ -field generated by random variables $\theta_a, \dots, \theta_b$.

We say that the sequence $\{\theta_i, i \geq 1\}$ is ψ -mixing, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$.

Denote $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

We will give some of the results for ψ -mixing Banach space-valued random variables from [11].

Theorem 1 ([11]). The following statements are equivalent:

- 1) B is a stable type p Banach space.
- 2) For any sequence $\{x_i, i \geq 1\}$ of elements of B such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$$

and any sequence $\{\theta_i, i \geq 1\}$ of ψ -mixing identically distributed p -stable random variables with characteristic function $f_{\theta_i}(t) = \exp(-|t|^p)$ and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \psi(1) < 1$$

the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i$$

converges almost surely and in L_q $q < p$.

- 3) For any bounded sequence $\{x_n, n \geq 1\}$ of elements of B and any sequence $\{r_n, n \geq 1\}$ of ψ -mixing random variables with

$$P(r_n = \pm 1) = \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$$

the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{n^{1/p}} x_n$$

converges almost surely.

- 4) For any bounded sequence $\{x_n, n \geq 1\}$ of elements of B there exists a choice of $\varepsilon_n = \pm 1$ such that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{1/p}} x_n$$

converges.

Theorem 2 ([11]). Let B be a stable type p ($1 \leq p \leq 2$) Banach space and $\{X_i, i \geq 1\}$ be a sequence of symmetric, identically distributed ψ -mixing random variables with values in B . Assume that the following conditions hold

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP\left(\|X_1\| > n^{1/p}\right) = 0.$$

Then as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \text{ in probability.}$$

MAIN RESULT.

Our goal is to give another sufficient and necessary condition for type p stability of Banach spaces. We will extend Theorem 1 of [7] to the case of mixing Banach space-valued random variables.

Let $\{X_i, i \geq 1\}$ be a sequence of ψ -mixing random variables with values in B a separable Banach space B .

Denote

$$\Lambda_p(X) = \sup_{t > 0} t^p P(\|X\| > t).$$

The following is our main result.

Theorem 3. B is stable type p ($0 < p < 2$) Banach space if and only if

$$\Lambda_p\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq C \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i) \quad (1)$$

for all symmetric ψ -mixing B -valued random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ such that

$$\Lambda_p(X_i) < \infty, i = \overline{1, n}, n \geq 1$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty.$$

Proof of Theorem 3.

Necessity follows from Theorem 1 of [7] where this theorem was proved for independent Banach space-valued random variables. As independent random variables are ψ -mixing, the necessity part of the theorem follows from Theorem 1 of [7].

It remains to prove that in stable type p ($0 < p < 2$) Banach B (1) holds for $X_1, X_2, \dots, X_n$.

It is known (see for instance [4]) that if B is a stable type p ($0 < p < 2$) Banach space then there exists $p' > p$ such that B will be Rademacher type p' . We will use this fact for the $Y_i = X_i I(\|X_i\| \leq 1)$.

As in [7] we have

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| > 1\right) \leq P\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| > 1, \max_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| \leq 1\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| > 1\right) \leq$$

$$P\left(\left\|\sum_{i=1}^n Y_i\right\| > 1\right) + \sum_{i=1}^n \Lambda_{p'}(X_i).$$

Now we will use the following

Theorem 4 ([10]). Let B Rademacher type p' ($0 < p' < 2$) Banach space. Then for any finite set of ψ -mixing B -valued random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ such that

$$EX_i = 0, E\|X_i\|^{p'} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$$

there exists a constant $C(B, p', \psi)$ such that the following inequality holds

$$E \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^{p'} \leq C(B, p', \psi) \sum_{i=1}^n E \|X_i\|^{p'}.$$

Using above theorem and Markov inequality we have

$$\begin{aligned} P \left(\left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\| > 1 \right) + \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i) &\leq \\ E \left\| \sum_{i=1}^n Y_i \right\|^{p'} + \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i) &\leq \\ C(B, p', \psi) \sum_{i=1}^n E \|Y_i\|^{p'} + \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i). \end{aligned}$$

It is proved in [7] that

$$E \|Y_i\|^{p'} = \frac{p'}{p' - p} \Lambda_p(X_i).$$

Thus

$$P \left(\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| > 1 \right) \leq \left(\frac{C(B, p', \psi) p'}{p' - p} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i).$$

Replacing X_i by $\frac{X_i}{t}$ as in [7] we get

$$P \left(\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| > t \right) \leq \frac{C}{t^p} \sum_{i=1}^n \Lambda_p(X_i).$$

The theorem is proved.

REFERENCES

1. Hoffmann-Jørgensen J. Sums of independent Banach space valued random variables, *Studia Math.* 1974, V.52, P.159-186.
2. Kuelbs J. and Mandrekar V. Domains of attraction of stable measures on a Hilbert space. *Studia Math.* 1974, V.59, P.149-162.
3. Ledoux M., Talagrand M. *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes.* Springer, Berlin, 1991.
4. Marcus M. B. and Woyczynski W. A. Stable measures and central limit theorems in spaces of stable type. *Transactions of the American Mathematical Society*, July 1979, Volume 251, P.71-102.
5. Maurey B., Pisier G. Series de variables aleatoires vectorielles independantes et proprietes geometriques des espaces de Banach. *Stud. Math.* 1976, V.58, P.45-90.
6. Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. In: *Probability and Analysis, Lectures Given at the 1st 1985 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E).* Lecture Notes in Mathematics, 1986, vol. 1206, P.167-241. Springer, Berlin.
7. Rosinski J. Remarks on Banach spaces of stable type. *Probab. Math. Statist.* 1980, 1, P.67-71.

8. Woyczynski W. A. Geometry and martingales in Banach spaces, Part II: Independent increments. In: Kuelbs, J., Ney, P. (eds.) Probability on Banach Spaces. Advances in Probability and Related Topics, 1978, vol. 4, P.267-517. Dekker, New York.
9. Woyczynski W. A. Geometry and martingales in Banach spaces. CRC Press; 1st edition, September 30, 2020.
10. Sharipov O. Sh. On probabilistic characterization of Banach spaces by weakly dependent random elements. Uzb. Math. 1998, J. N.2, P.86-91, (in Russian).
11. Sharipov O. Sh., Kobilov U. X. Limit theorems for weakly dependent random variables with values in stable type p Banach spaces. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2023, Volume 6, Issue 2, P.106-119.

REZYUME

Maqolada turg'un tip p Banax fazolari ko'riladi. Biz bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar uchun ma'lum bo'lgan natijalarni qorishmali tasodifiy miqdorlar uchun umumlashtiramiz. Turg'un tip p Banax fazolari uchun zarur va yetarli shart keltirilgan.

Kalit so'zlar: Rademaxer tip p Banax fazosi, turg'un tip p Banax fazosi, qorishmalilik sharti.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются Банаховы пространства устойчивого типа p . Мы распространяем результаты, известные для независимых случайных величин, на случайные величины с перемешиванием. Приводится необходимое и достаточное условие для Банаховых пространств устойчивого типа p .

Ключевые слова: Банахово пространство радемахеровского типа p , Банахово пространство устойчивого типа p , условие перемешивания.

UDC 519.21

STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR DEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH VALUES IN RADEMACHER TYPE p BANACH SPACES

SHARIPOV O. SH.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT,
V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, TASHKENT
osharipov@yahoo.com

KUSHMURODOV A. A.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT,
kushmurodov85@mail.ru

RESUME

We consider functionals of the sequences of independent random variables with values in Rademacher type p Banach spaces. Under some additional conditions we prove a strong law of large numbers for the sequences of such functionals.

Key words: Banach space, a functional of the sequence random variables, strong law of large numbers.

Strong law of large numbers for Banach space valued independent and weakly dependent random variables were studied by many authors, see for instance [1]-[15] and references therein. We are interested in strong laws of large numbers for dependent random variables with values in Rademacher type p Banach spaces.

We say that the sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfies a strong law of large numbers if (assuming $EX_i = 0, i \in N$) as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

Our goal is to establish strong laws of large numbers under some dependence conditions.

Definition 1. A separable Banach space B (with a norm $\|\cdot\|$) is called Rademacher type p ($1 \leq p \leq 2$) Banach space if for any finite collection of B -valued independent random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ with $EX_i = 0, E\|X_i\|^p < \infty, i = 1, 2, \dots, n$ there exists a constant $C(B, p)$ depending on B and p only such that the following inequality

$$E \left\| \sum_{j=1}^n X_j \right\|^p \leq C(B, p) \sum_{j=1}^n E \|X_j\|^p,$$

holds.

For the sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ of independent random variables with values in Rademacher type p Banach space the following result is known.

Theorem 1([9]). Let B be a Rademacher type p ($1 < p \leq 2$) Banach space and assume that $\{X_n, n \geq 1\}$ is a sequence of independent random variables such that the following hold

$$EX_k = 0, E\|X_k\|^p < \infty, k = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\|X_k\|^p}{k^p} < \infty.$$

Then $\{X_n, n \geq 1\}$ satisfies the strong law of large numbers i.e. as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

Theorem 1 was extended to the mixing random variables with values in Rademacher type p Banach spaces.

Definition 2. For the sequence of B -valued random variables $\{X_n, n \geq 1\}$, the mixing coefficients are defined as following:

$$\psi(k) = \sup \left\{ \left| \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{P(A)P(B)} \right| : A \in F_1^n, B \in F_{n+k}^\infty, n \in N \right\}$$

where F_a^b is a σ -field generated by the random variables $X_a, X_{a+1}, \dots, X_b$.

We say that $\{X_n, n \geq 1\}$ is ψ -mixing if $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$.

The following theorem was proved in [12].

Theorem 2. Let B be a separable Rademacher type p ($1 < p \leq 2$) Banach space. Assume that $\{X_n, n \geq 1\}$ is ψ -mixing sequence of random variables with values in B satisfying the following conditions:

$$X_k = 0, \quad E \|X_k\|^p < \infty, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\psi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \psi(k)) < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E \|X_k\|^p}{k^p} < \infty.$$

Then as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

Our goal is to prove strong laws of large numbers for dependent random variables with values in Rademacher type p Banach spaces.

Main result.

Consider a two-sided, sequence $\{Y_n, n \in Z\}$ of independent random variables with values in a separable measurable space T . We say that $\{X_n, n \in Z\}$ is a functional of $\{Y_n, n \in Z\}$ if there exists a measurable function $f : T^Z \rightarrow B$ such that

$$X_n = f((Y_{n+i})_{i \in N}) \quad (1)$$

We say that f is a p -approximating functional (or near epoch dependent) if there exist sequences $\{\alpha_n(m), n \geq 1, m \geq 1\}$ with $\alpha_n(m) \rightarrow 0$ for any fixed n as $m \rightarrow \infty$ and for every m a function $f_m : T^{2m+1} \rightarrow B$ such that

$$E \|X_n - f_m(Y_{n-m}, \dots, Y_{n+m})\|^p \leq \alpha_n(m) \text{ for all } m \in N, n \in Z. \quad (2)$$

Examples of such functionals can be found in [16].

As an example, consider a sequence $\{Y_n, n \in Z\}$ of independent random variables with values in a separable Rademacher type p Banach spaces.

Set $X_n = \sum_{i \in Z} a_i Y_{n+i}$, $n \in Z$ assuming that the series converges almost surely.

In this case we can take $f_m(Y_{n-m}, \dots, Y_{n+m})$ as following

$$f_m(Y_{n-m}, \dots, Y_{n+m}) = \sum_{n-m \leq i \leq n+m} a_i Y_{n+i},$$

and (2) means

$$E \|X_n - f_m(Y_{n-m}, \dots, Y_{n+m})\|^p = E \left\| \sum_{|i|>m} a_i Y_{n+i} \right\|^p \leq \alpha_n(m).$$

The following is our main result

Theorem 3. Let $\{Y_n, n \in Z\}$ be a sequence of independent random variables with values in Rademacher type p ($1 < p \leq 2$) Banach space B satisfying (1), (2) and $EX_k = 0$, $E \|X_k\|^p < \infty$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\max_i \alpha_i(m) \leq \frac{C}{m^\gamma}, \quad \text{for some } C > 0, \quad \gamma > 1.$$

Then as $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

Note that we can consider in (1) one sided sequences with corresponding changes in theorem.

Proof of Theorem 3.

Denote $N_0 = N \cup \{0\}$, $S_{a,b} = \sum_{k=a}^{a+b-1} X_k$, $a, b \in N$.

In the proof we will use the following results.

Theorem 4 ([5]). Let $1 < p < \infty$. Assume that $\{X_n, n \in N_0\}$ is a sequence of random variables with values in a separable Banach space B satisfying the following conditions:

$$EX_i = 0, \quad E \|X_i\|^p < \infty, \quad i \in N_0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{k \in N_0} E \left\| \frac{S_{k,2^n}}{2^n} \right\|^p < \infty.$$

Then the sequence $\{X_n, n \in N_0\}$ satisfies strong law of large numbers.

Theorem 5 ([17]). Let $\{X_n, n \in Z\}$ be a sequence of random variables with values in a separable Rademacher type p ($1 < p \leq 2$) Banach space B satisfying conditions (1) and (2). Then there exists a constant $C_1(B, p)$ such that

$$E \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^p \leq C_1(B, p) \left((2m+1)^{p-1} \sum_{i=1}^n E \|X_i^m\|^p + n^{p-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i(m) \right),$$

for all $n \geq 4m+2$.

By C we denote a constant which might be different even in one chain of inequalities.

Denote $X_i^m = f_m(Y_{-m}, \dots, Y_m)$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i^m + \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^m)$.

Using Theorem 5 we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{k \geq 0} E \left\| \frac{1}{2^n} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} X_i \right\|^p &\leq \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \sup_{k \geq 0} E \left\| \sum_{i=k}^{k+2^n-1} X_i \right\|^p &\leq \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \sup_{k \geq 0} \left(C(B, p) (2m+1)^{p-1} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} E \|X_i^m\|^p + 2^{n(p-1)} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} \alpha_i(m) \right) \end{aligned}$$

Now using conditions of the theorem we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^{np}} \sup_{k \geq 0} \left((2m+1)^{p-1} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} E \|X_i^m\|^p \right) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^{np}} \left((2m+1)^{p-1} 2^n \right) \leq \\ C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^{p-1}}{2^{np-1}} & \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^{np}} \sup_{k \geq 0} \left(2^{n(p-1)} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} \alpha_i(m) \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^{np}} \left(2^{n(p-1)} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} \max \alpha_i(m) \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{m^\gamma} \quad (4)$$

We take $m = m(n) = n^{\frac{\beta}{\gamma}}$, $1 < \beta < \gamma$, for $n \geq 1$ and $m(0) = 1$. Then series in (3) and (4) converges. Now Theorem 4 implies Theorem 3. The proof is complete.

References

1. de Acosta A., Inequalities for B-valued random vectors with applications to the law of large numbers. Ann.Probab. 9, 157-161. 1981.
2. Adler A., Rosalsky A.A. and Taylor R.L., Some strong laws of large numbers for sums of random elements, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 1992, pp. 335-357.
3. Azlarov T.A., Volodin N.A. Law of large numbers for identically distributed Banach-valued random variables. Prob.ther. and its appl.1981, 26, v.3, 584-590.
4. Cantrell A. and Rosalsky A.A., Some strong laws of large numbers for Banach space valued summand irrespective of their joint distributions, Stochastic Anal. Appl. 21 2003, pp.79-95.
5. Chobanyan S., Sh. Levental, H.Salehi., Strong law of large numbers under a general moment condition. Elect. Comm. In Probab. 10.2005, pp.218-222.
6. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach Spaces Isoperimetry and Processes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg , 2002.
7. Li D. , Qi Y ., Rosalsky A. A refinement of the Kolmogorov-Marcinkiewich-Zygmund strong law of large numbers . Jour. Theor. Probab.,24. 2011, 1130–1156.
8. He Q., Pan L., Convergence properties for coordinatewise asymptotically negatively associated random vectors in Hilbert space. Open Mathematics 2023; 21: 20220556
9. Hoffman-Jorgensen J., Pisier G. The laws of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces.// Ann. Of Probab.- 1976. – V.4. – P.587-599.
10. Rosalsky A. A., Thanh L. V., Strong and weak laws of large numbers for double sums of independent random elements in Rademacher type p Banach spaces. Stochastic Analysis and Applications,24. 2006, pp.1097-1117
11. Rosalsky A. A., and Thahn L.V., On the strong laws of large numbers for sequences of blockwise independent and blockwise p-orthogonal random elements in Rademacher type p Banach space. Prob. And Math. Stat., Vol.27, Fasc.2 2007,pp.205-222.
12. Sharipov O.Sh. On probabilistic kharakterization of Banach spaces by weakly dependent random elements. // Uzb. Methem.journal 1998, No.2, 86-91.
13. Sharipov O.Sh., Kushmurodov A.A., Strong law of large numbers for random fields with values in Banach spaces. Uzbek Mathematical Journal. No.1, 2017, pp.165-171
14. Kwang H. H., Some convergence theorem for and random variables in a hilbert space with application. Honam Mathematical J. 36 (2014), No. 3, pp. 679-688.
15. Zuparov T.M., Mamadaliev K.B. Strong law of large numbers for qwasistationary sequences in Hilbert space. Izvestiya Academy of Sciences of UzSSR. Phiz-math. Series, 1982, No. 1, 15-19.
16. Borovkova S.A., Burton R.M., Dehling H.G. Limit theorems for functionals of mixing processes with applications to U-statistics and dimension estimation. Transactions Of The American Mathematical Society. Vol. 353, N.11, 2001. Pp. 4261–4318.

17. Sharipov O. Sh., Mukhtorov I. G., On the moment inequality for weakly dependent random variables with values in Banach spaces of type p . Bulletin of the Institute of Mathematics , 2022, Vol. 5, No. 5, стр.184-186

REZYUME

Rademaxer p tipli Banach fazolarida qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining funksionallarini ko'rib chiqamiz. Ba'zi qo'shimcha shartlar ostida biz bunday funksionallar ketma-ketligi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonunini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: Banax fazosi, tasodifiy miqdor, funksional tasodifiy miqdor, kuchaytirilgan katta sonlar qonuni.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются функционалы от последовательностей независимых случайных величин со значениями в банаховых пространствах Радемахера типа p . При некоторых дополнительных условиях доказывается усиленный закон больших чисел для последовательностей таких функционалов.

Ключевые слова: Банахово пространство, функционал последовательности случайных величин, усиленный закон больших чисел.

UDC 517.55

ESTIMATING THE UNEMPLOYMENT RATE USING MATHEMATICAL
MODELING

ZHABBOROV N. M.

TASHKENT STATE UNIVERSITY OF ECONOMICS, TASHKENT

jabborov61@mail.ru

TUYCHIEV S. G.

TASHKENT INTERNATIONAL UNIVERSITY OF FINANCIAL MANAGEMENT AND TECHNOLOGY (TIFT),

TASHKENT

stuychev@gmail.com

ESHDAVLATOVA S. E.

BELARUSIAN-UZBEK JOINT INTER-SECTORAL INSTITUTE OF APPLIED TECHNICAL QUALIFICATIONS IN

TASHKENT, TASHKENT

sevaraeshdavlatova@gmail.com

RESUME

This article proposes and analyzes a nonlinear mathematical model of the unemployment problem, based on the consideration of three main variables: the number of unemployed individuals, employed individuals, and those not officially employed. The model reflects the situation observed in some countries with a transitional economy or in countries with a strong agricultural sector, where the unemployed rarely turn to labor authorities for job placement, which in turn leads to an increase in the rate of hidden unemployment. The results for the mathematical model were obtained using the stability theory of nonlinear differential equations.

Key words: Hidden unemployment, system of nonlinear differential equations, equilibrium point, stability analysis.

The increase in the number of unemployed people in the country is economically dangerous because it can lead to a decline in gross domestic product and an increase in the social burden on the state. From a social perspective, it can result in a rise in poverty levels, which may contribute to an increase in crime.

If we define unemployment, then according to the legislation of the Republic of Uzbekistan on employment, the following individuals are considered unemployed: "Unemployed persons are able-bodied individuals aged sixteen and older, up to the acquisition of the right to pension benefits, who do not have paid work or income-generating activities, are seeking employment and ready to start working as soon as a job is offered to them, or are willing to undergo vocational training, retraining, or skills improvement (except for those studying in educational institutions).

Persons specified in the first part of this article who have applied to local labor authorities for assistance in employment and have been registered by them as job seekers are recognized as unemployed." [5].

Unlike officially registered unemployment, there is hidden unemployment. In countries with a transitional economy or a highly developed agricultural sector, hidden unemployment tends to grow significantly. As K. Mukulsky states, the reason for this is "employment and self-employment in personal households that are not officially recorded." [7] The article examines the dynamics of unemployment and proposes a mechanism to reduce the rate of the hidden economy.

The history of the development of this topic begins with the work of A.K. Misra and Arvind K. Singh, dedicated to the development of a mathematical model of unemployment. In their article, published in 2011, they modeled the problem of unemployment using nonlinear ordinary differential equations [1]. The study [1] considered three main variables: U is the number of unemployed individuals, T is the number of seasonally employed individuals, and R is the number of permanently employed individuals. The model assumes that unemployed individuals can either obtain permanent employment or become temporarily employed. At the

same time, temporarily employed individuals attempt to transition from the temporary employment class to the permanent employment class. It is also assumed that permanently employed individuals may be dismissed from their jobs or voluntarily resign, thereby joining the class of unemployed individuals.

This study was motivated by the work of Nikolopoulos and Tsanetis, which developed a model for providing housing to the homeless population in response to a natural disaster [2].

In the future, based on this model, Misra and Singh proposed a nonlinear mathematical model for unemployment control [3]. In [3], they considered three dynamic variables: U - the number of unemployed individuals, E - the number of employed individuals, and V - the number of new job vacancies created through government measures. In this case, the time delay is proportional to the number of newly created vacancies and is denoted as $U(\tau - t)$. In the model [4], Gulbanu Pathan and Bhattachwala also consider three dynamic variables and assume that there is no time delay from the state and the private sector in creating new job vacancies. They also assume that the unemployed attempt to engage in independent economic activities, creating self-employment opportunities, which is essential for their survival.

Given the statements in articles [1], [2], [3], and [4], we proposed a different model of unemployment consisting of three dynamic variables: U - the number of unemployed individuals, V - the number of unemployed individuals who have applied to local labor authorities for employment, E - the number of employed individuals. It is also assumed that employed individuals can lose their jobs and move from the employed class to the unemployed class. Mortality and population migration are taken into account for each class in the model. A distinctive feature of our work is that, in describing the model, we use a closed biological model of infection spread, whereas the researchers mentioned above use an open model [6].

The model was constructed considering three main variables: the number of unemployed individuals $U(t)$, the number of unemployed individuals who have applied to local labor authorities for employment $V(t)$, and the number of employed individuals $E(t)$. When formulating the model, we assume that people enter the unemployed class at a constant rate Λ and may either migrate in search of work or find employment. In order to be employed, unemployed individuals must apply to local labor authorities. The number of applications to labor authorities is assumed to be proportional to the existing job vacancies and the number of unemployed individuals. It is also assumed that the number of newly created jobs is proportional to the number of officially unemployed individuals. Additionally, migration levels are considered proportional to the population size of each class separately. In our study, unlike researchers such as Misra, Singh, Gulbanu Pathan, we used a closed-type model to better reveal the internal mechanisms of employment. However, in the future, we plan to study employment issues using an open model, as employment dynamics need to be analyzed in the long term, taking external factors into account. Furthermore, our model is a modified version of a virus spread model, which allows us to more accurately simulate employment dynamics and hidden unemployment in countries with a developed agricultural sector.

The formulation of the model is as follows:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \Lambda - \varphi UV + \mu E - \gamma U \\ \frac{dV}{dt} = \varphi UV - \delta V - \gamma V \\ \frac{dE}{dt} = \delta V - \mu E - \gamma E \end{cases} \quad (2)$$

The parameters involved in system (1) are detailed in the following table:

Parameter	Descriptions of the parameter
Λ	Rate of increase in the number of unemployed
φ	The rate of unemployed individuals applying to labor authorities for employment.
μ	The rate of job loss for employed individuals
γ	Migration rate
δ	The employment rate after contacting labor authorities.

Initial conditions at time $t = 0$:

$$U(0) = U_0 \geq 0$$

$$V(0) = V_0 \geq 0$$

$$E(0) = E_0 \geq 0$$

$$U(t) + V(t) + E(t) = N(t) = \text{const}$$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} = 0$$

Here, $N(t)$ is the number of the working-age population at any moment t .

Theorem 1. *Let for all, the set $\Omega = \{(U, V, E) \in \mathbb{R}_+^3 : U(0) > 0, V(0) > 0, E(0) > 0, 0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\gamma}\}$ be positive and bounded, then the system (3.1) has a solution.*

Proof. First, we will check each equation in system (1) for positivity.

$$\frac{dU}{dt} \geq -\varphi UV - \gamma U$$

$$\frac{dU}{dt} \geq (-\varphi UV - \gamma)U$$

$$\int_0^t \frac{dU}{U dt} \geq \int_0^t (-\varphi UV - \gamma) dt$$

$$U(t) \geq U(0)e^{\int_0^t (-\varphi UV - \gamma) dt} \geq 0$$

If we integrate the second and third equations in system (1) in a similar manner from 0 to t , we obtain the following inequalities:

$$V(t) \geq V(0)e^{\int_0^t (\varphi U - \delta - \gamma) dt} \geq 0$$

$$E(t) \geq E(0)e^{\int_0^t (-\mu - \gamma) dt} \geq 0.$$

Let's check for boundedness:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} = \Lambda - \gamma N$$

taking limit supremum, we get

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup N(t) \leq \frac{\Lambda}{\gamma}.$$

Let's begin the equilibrium analysis. To do this, we must find the equilibrium point. If we solve each equation in system (1) by setting it to zero, we can find the equilibrium point.

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \Lambda - \varphi UV + \mu E - \gamma U = 0 \\ \frac{dV}{dt} = \varphi UV - \delta V - \gamma V = 0 \\ \frac{dE}{dt} = \delta V - \mu E - \gamma E = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow U^* = \frac{\delta + \gamma}{\varphi}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow V^* = \frac{(\mu + \gamma)E^*}{\delta}$$

$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow E^* = \frac{\delta\gamma + \gamma^2 - \Lambda\varphi}{\varphi(\mu - (\delta + \gamma)(\mu + \gamma))}$$

Thus, we have found the equilibrium point $E_p(U^*, V^*, E^*)$.

After finding the equilibrium point, we must check its stability. We will perform this check by calculating the Jacobian matrix for system (1).

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial U} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial E} \\ \frac{\partial g}{\partial U} & \frac{\partial g}{\partial V} & \frac{\partial g}{\partial E} \\ \frac{\partial h}{\partial U} & \frac{\partial h}{\partial V} & \frac{\partial h}{\partial E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi V^* - \gamma & -\varphi U^* & \mu \\ \varphi V^* & \varphi U^* - \delta - \gamma & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Let's introduce the following notations in J :

$$a_1 = -\varphi V^* - \gamma$$

$$a_2 = \varphi U^* - \delta - \gamma$$

$$a_3 = -\mu - \gamma$$

To find the characteristic number of matrix J , we must solve the following equation:

$$\det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & -\varphi U^* & \mu \\ \varphi V^* & a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & a_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - (a_1 + a_2 + a_3)\lambda^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)\lambda - a_1a_2a_3 + \varphi V^*U^*(\varphi\mu + \varphi\gamma - \mu) = 0$$

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$b_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$$

$$b_3 = -a_1a_2a_3 + \varphi V^*U^*(\varphi\mu + \varphi\gamma - \mu)$$

Then we obtain the following characteristic equation:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

We will check the stability of the system using the Routh-Hurwitz criterion [8]. According to this criterion, if the following conditions are satisfied, the system will be stable:

$$b_1 > 0$$

$$b_3 > 0$$

$$b_1b_2 - b_3 > 0$$

These conditions are satisfied when $V^* > U^*$. Therefore, the system will be stable when $V^* > U^*$.

From the equilibrium analysis, we can see that there exists an equilibrium point that is stable for certain parameter values. This implies the possibility of achieving a stable level of employment. However, changes in certain coefficients, such as migration or the rate of job applications, may lead to instabilities, which characterize the growth of hidden unemployment. In turn, this suggests that without government employment programs and without state regulatory intervention, the unemployment rate may remain at a high level.

The developed mathematical model can be applied to forecast the long-term consequences of employment policy. For example, by increasing the rate of job placement after an application and decreasing the rate of job loss, it is possible to stabilize employment. In the model, these actions are represented by the parameters δ and μ , respectively. Everything stated above indicates that the model is practically significant.

If we compare the results with previous studies, we can see that the proposed model describes the internal mechanisms of employment more accurately, such as the balance between employed and unemployed individuals. Our further research will focus on studying the balance between seasonally employed workers and those employed on a permanent basis.

In this part, we will consider the following solution to system (1) using the "RK45" method in the Python programming language. In the graphs below we can see a graphical modeling of unemployment levels depending on changes in the parameters affecting it. The values of additional parameters are given below: $\Lambda = 0.1$, $\varphi = 0.02$, $\mu = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\delta = 0.03$. Initial conditions for a country with a developed agricultural sector, where the population is about 38 million people, with 60 percent being youth.

$$U(0) = 1.6 \text{ mln.}, \quad V(0) = 0.45 \text{ mln.}, \quad E(0) = 14.2 \text{ mln.}$$

In the first graph, we can observe changes in the number of unemployed individuals as the employment rate increases after contacting local labor authorities:

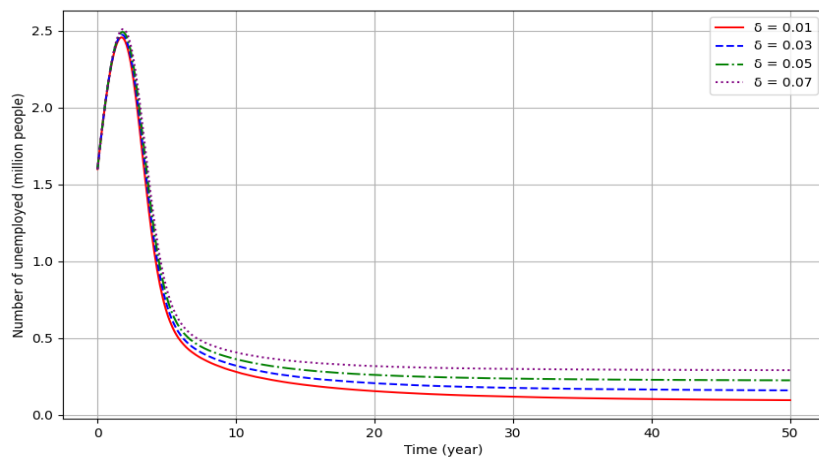


Figure 1: Impact of the employment rate on the unemployment rate

In the second graph, we can see changes in the number of unemployed due to changes in the migration level:

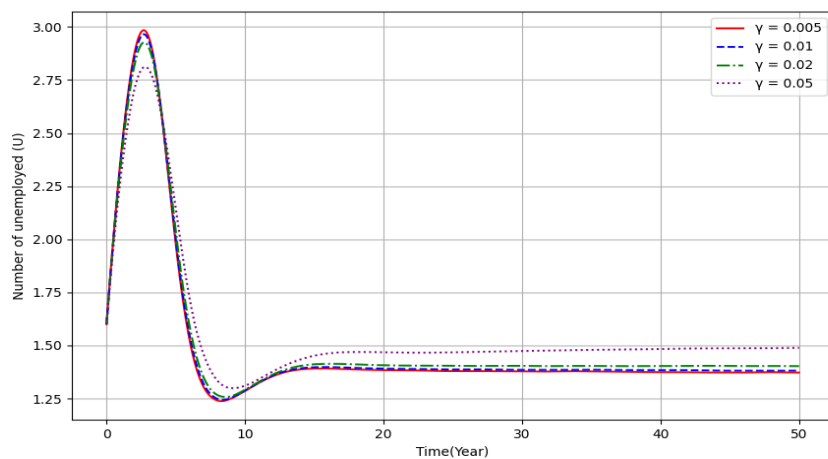


Figure 2: Impact of migration level on unemployment rate

In the third graph, the change in the number of unemployed under the influence of migration is shown:

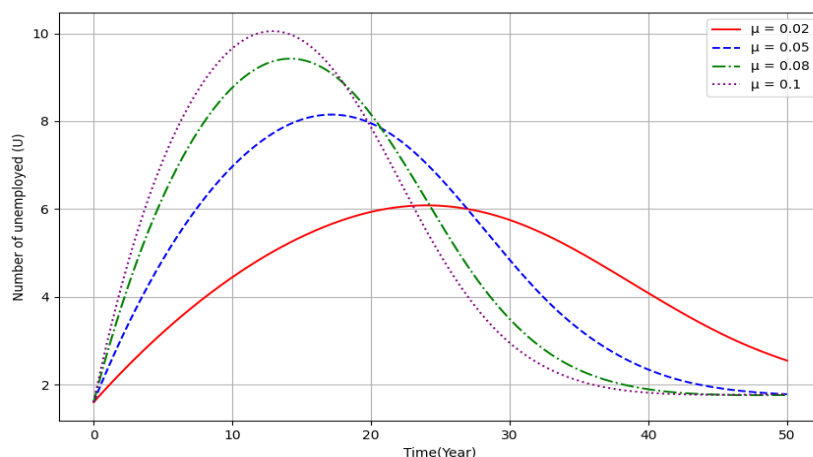


Figure 3: Impact of the rate of job loss on the unemployment rate

The present article examines a mathematical model describing the dynamics of unemployment. The model considers three main variables: the number of unemployed individuals, the number of officially registered unemployed individuals, and the number of employed individuals. The conducted research has shown that the proposed model adequately describes the internal mechanisms of the labor market while accounting for the rate of unemployed individuals seeking assistance and the impact of migration. Stability analysis has revealed an equilibrium point that remains stable under certain conditions. This implies that, under specific conditions, the unemployment rate stabilizes.

The practical significance of the proposed model lies in its application for analyzing dynamics and forecasting the effectiveness of various strategies to combat unemployment. As a particular case, we can illustrate that an increase in the employment rate and a rise in the number of registered unemployed individuals can significantly reduce the level of hidden unemployment.

Future research on this topic will continue, taking into account external economic factors and workforce qualifications. In addition to the methods presented, numerical analysis will be employed in further studies, allowing for a better understanding of unemployment dynamics.

REFERENCES

1. A.K.Misra, A.K.Singh. A mathematical model for unemployment // Nonlinear Anal.1, 2011,pp.128-136..
2. C.V.Nikolopoulos, D.E.Tzanetis. A model for housing allocation of a homeless population due to natural disaster // Nonlinear Anal.4,2003,pp.561-579.
3. A.K.Misra, A.K.Singh. A Delay mathematical model for the control of unemployment // Differ Equ Dyn Syst 21(3), 2013,pp.291-307.
4. Gulbanu Pathan, P.H.Bhathawala. A Mathematical Model for Unemployment with effect of self employment // IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), 2015,pp.37-43.
5. Law of the Republic of Uzbekistan on Employment of the Population. Article 3. Recognition as Unemployed. <https://www.lex.uz/acts/51763>.
6. N.M. Jabborov, S.G. Tuychiyev, S.E. Eshdavlatova. Влияние некоторых коэффициентов на уровень коррупции // Yosh Olimlar Axborotnomasi, 4(4), 2024, pp. 26-33.
7. Mukulskiy K. Формирования новой модели занятости // Economist. 1997. No. 3. P. 47.

8. Lugiato L, Prati F, Brambilla M. The Routh-Hurwitz stability criterion. In: Nonlinear Optical Systems. Cambridge University Press; 2015:412-412.

REZYUME

Ushbu maqolada ishsizlik muammosining chiziqsiz matematik modeli taklif qilinadi va tahlil qilinadi. Ushbu model uchta asosiy o'zgaruvchini hisobga oladi: ishsizlar soni, bandlar va norasmiy ishlayotgan shaxslar. Model o'tish iqtisodiyotiga ega ba'zi davlatlarda yoki qishloq xo'jaligi sektori rivojlangan mamlakatlarda kuzatiladigan holatni aks ettiradi. Bunday mamlakatlarda ishsizlar ishga joylashish uchun bandlik organlariga kamdan-kam murojaat qiladilar, bu esa yashirin ishsizlik darajasining oshishiga olib keladi. Matematik model uchun natijalar chiziqsiz differensial tenglamalar turg'unligi nazariyasi yordamida olingan.

Kalit so'zlar: Yashirin ishsizlik, chiziqsiz differensial tenglamalar tizimi, muvozanat nuqtasi, turg'unlik tahlili.

РЕЗЮМЕ

В данной статье предлагается и анализируется нелинейная математическая модель проблемы безработицы, основанная на рассмотрении трёх основных переменных: количества безработных, занятых и неофициально трудоустроенных лиц. Модель отражает ситуацию, наблюдаемую в некоторых странах с переходной экономикой или в странах с развитым сельскохозяйственным сектором, где безработные редко обращаются в органы занятости для трудоустройства, что, в свою очередь, приводит к увеличению уровня скрытой безработицы. Результаты для математической модели были получены с использованием теории устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Скрытая безработица, система нелинейных дифференциальных уравнений, точка равновесия, анализ устойчивости.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИН В НАПРЯЖЕНИЯХ

Ахмедов А. Б.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ, УЗБЕКИСТАН
Ahmedov-1956@mail.ru

Ибрагимов Н.И.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ, УЗБЕКИСТАН

РЕЗЮМЕ

В данной работе предлагается новая теория пластин в напряжениях. Получены разрешающие уравнения в терминах продольных усилий, перерезывающих сил и внутренних моментов. Сформулированы граничные условия для пластин в напряжениях. Полученные решения в напряжениях одновременно удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности напряжений Бельтрами-Митчелла. Сформулирована краевая задача для пластины под действием самоуравновешенных нагрузок. Решены некоторые прикладные задачи.

Ключевые слова: Теория упругости, задача в напряжениях, параллелепипед, потенциал напряжений, взаимно уравновешенные нагрузки, пластина, Бельтрами-Митчелл.

Введение

Как известно, в инженерных приложениях для расчета прочности и жесткости элементов конструкций, оперируют компонентами тензора напряжений, возникающие, при этом, перемещения представляют собой чисто академический интерес. Вместе с тем, корректная постановка задачи теории упругости сформулирована в перемещениях, следовательно, непосредственное вычисление компонентов тензора напряжений в пространственных задачах не представляется возможным. Классическая постановка задачи теории упругости в напряжениях заключается в решении трех уравнений равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x \in V, \quad (1)$$

при выполнении трех статических граничных условий:

$$\sigma_{ij}n_j|_G = S_i, \quad x \in G, \quad (2)$$

где $\sigma_{ij,j}$ - компоненты симметричного тензора напряжений X_i и S_i - соответственно компоненты массовых и поверхностных сил. n_j - компоненты вектора внешней нормали. При этом на лицо некорректность постановки пространственных задач в напряжениях.

В плоских задачах теории упругости, с использованием функции напряжений Эри, достигается точное удовлетворение уравнениям равновесия. Для определения неизвестного потенциала напряжений используется уравнение совместности деформаций. Следовательно, в плоских задачах теории упругости имеется возможность непосредственного исследования напряженно-деформированного состояния различных тел.

Первые попытки постановки пространственных задач теории упругости в напряжениях предприняты в работах Коновалова А.Н. [1], в которых пространственные уравнения равновесия с применением, так называемой операции деформирования, приведены к шести уравнениям в напряжениях, вместе с тем имеется в наличии только три статические граничные условия (1.2) в напряжениях.

В фундаментальной работе Победри Б.Е. [2] с требованием выполнения уравнения равновесия на границе рассматриваемого трехмерного тела, достигается замкнутая задача пространственной теории упругости в относительно шести компонент симметричного тензора напряжений.

В работе [4] предложен вариационно-разностный метод решения задачи в напряжениях. В работе [5] данным методом решены задачи о квазистатическом равновесии вязкоупругого параллелепипеда в напряжениях под действием самоуравновешенных нагрузок, в том числе и сосредоточенных сил.

В работе [6] введением трех потенциалов напряжений, пользуясь постановкой задачи в напряжениях Победри, решены задачи о равновесии параллелепипеда под воздействием различных самоуравновешенных поверхностных и объёмных нагрузок. Здесь, показано, что для пластины, как предельный случай параллелепипеда, полученные решения точно удовлетворяют уравнениям равновесия.

В теории пластин, обычно введением продольных усилий, перерезывающих сил и внутренних моментов редуцируются к двумерным задачам. В работах [7-10] предложена неклассическая теория пластин без упрощающих предположений и гипотез в перемещениях.

В данной работе предлагается новая теория пластин в напряжениях.

Основная часть

С целью упрощения выкладок для рассматриваемой задачи предположим, что на пластину с толщиной - h , действуют только поверхностные нагрузки ($X_i = 0$) и прямоугольная декартова система координат расположена в геометрическом центре рассматриваемой пластины. Нормальную, к срединной плоскости пластины координату, обозначая через $-z$, будем иметь координатную систему- Ox_1x_2z , тогда в индексах тензора напряжений следует ввести замену $3 \rightarrow z$, следовательно, уравнения равновесия (1):

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0 \\ \sigma_{zj,j} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

и Бельтрами-Митчелла примут вид:

$$\begin{cases} \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz})_{,ij} = 0 \\ \Delta \sigma_{iz} + \sigma_{iz,zz} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz})_{,iz} = 0 \\ \Delta \sigma_{zz} + \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{zz,zz} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,zz} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что на противоположных плоскостях пластины, по нормальной координате $-z$ действует нормальные $-q_z^\pm(x_1, x_2)$, и касательные нагрузки $-q_i^\pm(x_1, x_2)$ остальные грани свободны от нагрузок.

Тогда соответствующие граничные условия на произвольных гранях параллелепипеда можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_{zi} = q_i^\pm(x_1, x_2), \\ \sigma_{zz} = q_z^\pm(x_1, x_2), \quad \text{при } z = \pm \frac{h}{2}, \\ \sigma_{iz,z} = -\sigma_{ij,j}, \\ \sigma_{zz,z} = -q_{i,i}^\pm(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{1z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x_1 = -\frac{l_1}{2}, \frac{l_1}{2}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{2z} = 0, \\ \sigma_{ij,j} + \sigma_{iz,z} = 0, \\ \sigma_{zz,z} + \sigma_{zi,i} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x_2 = -\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2}, \quad (7)$$

Для пластин искомое решение в напряжениях представим в виде полинома по нормальной координате z [6]:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \frac{1}{h} N_z + \frac{12}{h^3} M_z z - \Phi_2(z) C - \Phi_3(z) D \\ \sigma_{iz} = \frac{N_i}{h} + \frac{12}{h^3} M_i z - \Phi_2(z) C_i - \Phi_3(z) D_i \\ \sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{h} + \frac{12}{h^3} M_{ij} z - \Phi_2(z) C_{ij} - \Phi_3(z) D_{ij} \end{cases} \quad (8)$$

где,

$$\begin{pmatrix} N_z \\ N_i \\ N_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{iz} \\ \sigma_{ij} \end{pmatrix} dz, \quad \begin{pmatrix} M_z \\ M_i \\ M_{ij} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{iz} \\ \sigma_{ij} \end{pmatrix} z dz,$$

$$\Phi_2(z) = \frac{h^2}{12} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right), \quad \Phi_3(z) = \frac{3h^2}{20} \left(1 - \frac{20}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) z$$

При этом, имеет место $\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r(z) dz = 0$, $\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_r(z) z dz = 0$, $r = 2, 3$.

После удовлетворения граничных условий (5), для нормальных σ_{zz} и касательных σ_{iz} напряжений будем иметь следующие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz} = \left[\frac{3}{2h} \left(m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i} \right) + 3 \frac{z}{h} \left(q_z + \frac{1}{6} m_{i,i} \right) \right] \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ \quad - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} + 6 \frac{z}{h} - 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_z^+ \\ \quad - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} - 6 \frac{z}{h} + 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_z^-, \\ \sigma_{iz} = \left[\frac{3}{2} \frac{N_i}{h} + \frac{5}{2} \left(\frac{h^3}{30} C_{ij,j} + q_i \right) \frac{z}{h} \right] \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ \quad - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} + 6 \frac{z}{h} - 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_i^+ \\ \quad - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} - 6 \frac{z}{h} + 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_i^- \end{array} \right. \quad (9)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i = \frac{h^5}{360} C_{ij,j} + \frac{h^2}{12} q_{i'} D_{ij,j} = 0, \\ M_z = \frac{h^2}{10} q_z + \frac{h^2}{60} m_{i,i}, \\ N_z = m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i}, \\ q_z = q_z^+ - q_z^-, \quad m_z = \frac{q_z^+ + q_z^-}{2} h, \\ q_i = q_i^+ - q_i^-, \quad m_i = \frac{q_i^+ + q_i^-}{2} h \end{array} \right. \quad (10)$$

После подстановки (10) в (9) получим окончательную формулу для σ_{zz}

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \left[\frac{3}{2h} \left(m_z + \frac{h^2}{12} q_{i,i} \right) + 3 \left(q_z + \frac{1}{6} m_{i,i} \right) \frac{z}{h} \right] \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \\ & - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} + 6 \frac{z}{h} - 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_z^+ \\ & - \frac{1}{4} \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2} - 6 \frac{z}{h} + 40 \frac{z^3}{h^3} \right) q_z^-, \end{aligned} \quad (11)$$

В частности, из полученного выражения для σ_{zz} и (10) следует что, при $q_z^+ = -q_z^- = q_z$, $q_i^+ = q_i^- = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
N_z &= 0, \\
M_z &= \frac{h^2}{5} q_z, \\
\sigma_{iz} &= \left(\frac{3N_i}{2h} + \frac{30}{h^3} M_i z \right) \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right), \\
\sigma_{zz} &= \left(3 \frac{z}{h} - 4 \frac{z^3}{h^3} \right) q_z.
\end{aligned}$$

а для случая $q_z^+ = q_z$, $q_z^- = 0$, $q_i^+ = q_i^- = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
N_z &= \frac{h}{2} q_z, \\
M_z &= \frac{h^2}{10} q_z, \\
\sigma_{zz} &= q_z \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{z}{h} - 2 \frac{z^3}{h^3} \right).
\end{aligned}$$

Здесь, выражение нормального напряжения- σ_{zz} , соответствует предложенной формуле Рейснера [10]. Компоненты тензора напряжений σ_{zz} и σ_{iz} вопреки известным классическим и уточненным теориям пластин [11] нетривиальны и точно удовлетворяют заданным граничным условиям, что свидетельствует о преимуществе предложенной теории. Неизвестные функции продольных и поперечных координат, участвующие в выражениях (8)-(11) подлежат к определению. С целью их определения в уравнениях равновесия (3) и Бельтрами-Митчелла (4) произведем стандартную процедуру интегрирования по толщине рассматриваемой пластины:

$$\begin{cases} N_{ij,j} + q_i = 0 \\ N_{i,i} + q_z = 0 \\ M_{ij,j} - N_i + m_i = 0 \\ M_{i,i} - N_z + m_z = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta N_{ij} + \sigma_{ij,z} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} (N_{kk} + N_z)_{,ij} = 0 \\ \Delta N_i + \sigma_{iz,z} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk} + \sigma_{zz})_{,i} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \\ \Delta N_z + \frac{2+\nu}{1+\nu} \sigma_{zz,z} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,z} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Delta M_{ij} + (z\sigma_{ij,z}) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \sigma_{ij} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} (M_{kk} + M_z)_{,ij} = 0 \\ \Delta M_i + (z\sigma_{iz,z}) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \sigma_{iz} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} [(z(\sigma_{kk} + \sigma_{zz}))_{,i}] \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - (N_{kk} + N_z)_{,i} = 0 \\ \Delta M_z + \frac{2+\nu}{1+\nu} (z\sigma_{zz,z} - \sigma_{zz}) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{1+\nu} (z\sigma_{kk,z} - \sigma_{kk}) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Принимая во внимание (8) будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{ij,z} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{ij,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = 2hC_{ij} \\
\sigma_{ij,j} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{ij,j} \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{12}{h^2} (m_i - N_i) \\
\sigma_{zj,j} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zj,j} \left(-\frac{h}{2} \right) = q_{i,i} \\
\sigma_{zz,i} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz,i} \left(-\frac{h}{2} \right) = q_{z,i} \\
\sigma_{kk,z} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{kk,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = 2hC_{kk} \\
\sigma_{kk,i} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{kk,i} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{12}{h^2} M_{kk,i} + \frac{h^3}{10} D_{kk,i}
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{ij,z} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{ij,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{24}{h^3} M_{ij} + \frac{6h^2}{5} D_{ij}, \\
\sigma_{ij} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{ij} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{24}{h^2} M_{ij} + \frac{h^3}{10} D_{ij}, \\
\sigma_{iz,z} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{iz,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{120}{h^3} M_i + \frac{12}{h} q_i, \\
\sigma_{iz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{iz} \left(-\frac{h}{2} \right) = q_i, \\
\sigma_{kk,i} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{kk,i} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{2}{h} N_{kk,i} + \frac{h^2}{3} C_{kk,i}, \\
\sigma_{zz,i} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{zz,i} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{2}{h} m_{z,i}, \\
\sigma_{zz,z} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{zz,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{120}{h^3} M_z + \frac{12}{h} q_z, \\
\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) = q_i, \\
\sigma_{kk,z} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{kk,z} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{24}{h^3} M_{kk} + \frac{6h^2}{5} D_{kk}, \\
\sigma_{kk} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{kk} \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{12}{h^2} M_{kk} + \frac{h^3}{10} D_{kk}.
\end{array} \right. \quad (15)$$

и подставляя их в (13) - (14), при этом свертывая первые уравнения этих систем, учитывая граничные условия (5)-(7) и выражения для тензора напряжений (8)-(9), а также выражений (10) после некоторых математических выкладок будем иметь окончательную систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Delta N_{kk} = \left[\nu \Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12} q_{k \cdot k} \right) - (1 + \nu) q_{k \cdot k} \right] \\
\Delta N_i - \frac{12}{h^2} (N_i - m_i) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{12}{h^2} M_{kk,i} + \mathcal{Q}_{,i} = 0 \\
2hC_{kk} = -(1 + \nu) \Delta N_z + (2 + \nu) q_{k \cdot k}
\end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Delta M_{kk} = \nu \Delta \left(\frac{h^2}{10} q_z + \frac{h^2}{60} m_{i,i} \right) - (1 + \nu) (m_{i,i} + q_z) \\
\Delta M_t - \frac{60}{h^2} M_i + 5q_i + \mathcal{T}_{,i} = 0, \\
\frac{h^3}{2} D_{kk} = -(1 + \nu) \Delta M_z + (2 + \nu) (m_{i,i} + q_z)
\end{array} \right. \quad (17)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{1}{5} \left((2+\nu)(m_{i,i} + q_z) - (1+\nu)\Delta \left(\frac{h^2}{10}q_z + \frac{h^2}{60}m_{i,i} \right) \right) + q_z \right],$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{1+\nu} \left[\frac{h^2}{12} \left(-(1+\nu)\Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12}q_{k,k} \right) + (2+\nu)q_{k,k} \right) - \frac{h^2}{12}q_{k,k} \right]$$

В полученных уравнениях (16) и (17) вторые уравнения, дифференцируя по x_i и свертывая их получим условия равновесного состояния по внешним нагрузкам q_z и q_i , условия при котором не будет перемещения пластины как жесткое тело:

$$\begin{cases} -\Delta q_z + \frac{24}{h^2}(m_{i,i} + q_z) + \frac{6}{5} \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \left(q_z + \frac{1}{6}m_{i,i} \right) + \Delta \mathcal{Q} = 0, \\ \frac{h^2}{12} \Delta q_{k,k} + \Delta \mathcal{T} = 0. \end{cases}, \quad (18)$$

Таким образом, относительно неизвестных $M_{ij}, N_{ij}, D_{ij}, C_{ij}, N_i, M_i$ будем иметь следующие системы 16 взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} N_{ij,j} + q_i = 0, \\ C_{ij,j} - \frac{360}{h^5}M_i + \frac{30}{h^3}q_i = 0, \\ \Delta N_{kk} = \left[\nu \Delta \left(m_x + \frac{h^2}{12}q_{k,k} \right) - (1+\nu)q_{k,k} \right], \\ C_{kk} = -\frac{1+\nu}{2h} \left[\Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12}q_{k,k} \right) \right] + \frac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ \Delta N_i - \frac{12}{h^2}(N_i - m_i) + \frac{1}{1+\nu} \frac{12}{h^2}M_{kk,i} + \mathcal{Q}_{,i} = 0. \end{cases}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} M_{ij,j} - N_i + m_i = 0, \\ D_{ij,j} = 0, \\ \Delta M_{kk} = \nu \Delta \left(\frac{h^2}{10}q_z + \frac{h^2}{60}m_{i,i} \right) - (1+\nu)(m_{t,i} + q_z), \\ D_{kk} = \frac{2}{h^3} \left[-(1+\nu)\Delta \left(\frac{h^2}{10}q_z + \frac{h^2}{60}m_{t,i} \right) + (2+\nu)(m_{i,i} + q_z) \right], \\ \Delta M_i - \frac{60}{h^2}M_i + 5q_i + \mathcal{J}_{,i} = 0. \end{cases}, \quad (20)$$

Из граничных условий (6) и (7) на краях пластины будем иметь свободные граничные условия для этих интегральных величин:

$$\begin{cases} N_{11} = 0, & N_{12} = 0, & M_{11} = 0, & M_{12} = 0, & M_1 = 0, & N_1 = 0 \\ N_{ij,j} + q_i = 0, & M_{ij,j} - N_i + m_i = 0, & C_{11} = 0, & C_{12} = 0 \\ C_{22} = -\frac{1+\nu}{2h} \left[\Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12}q_{k,k} \right) \right] + \frac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ D_{11} = 0, & D_{12} = 0, \\ D_{22} = \frac{2}{h^3} \left[-(1+\nu)\Delta \left(\frac{h^2}{10}q_z + \frac{h^2}{60}m_{i,i} \right) + (2+\nu)(m_{i,i} + q_z) \right]. \end{cases} \quad \text{при } x_1 = -\frac{l_1}{2}, \frac{l_1}{2} \quad (21)$$

$$\begin{cases} N_{22} = 0, & N_{21} = 0, & M_{22} = 0, & M_{21} = 0, & M_2 = 0, & N_2 = 0 \\ N_{ij,j} + q_i = 0, & M_{ij,j} - N_i + m_i = 0, & C_{22} = 0, & D_{22} = 0, \\ C_{11} = -\frac{1+\nu}{2h} \left[\Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12}q_{i,i} \right) \right] + \frac{2+\nu}{2h}q_{k,k}, \\ C_{21} = 0, & D_{21} = 0, \\ D_{11} = \frac{2}{h^3} \left[-(1+\nu)\Delta \left(\frac{h^2}{10}q_z + \frac{h^2}{60}m_{i,i} \right) + (2+\nu)(m_{i,i} + q_z) \right]. \end{cases} \quad \text{при } x_2 = -\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2} \quad (22)$$

Таким образом, имеем новую постановку задач о равновесии пластин в продольных усилиях, перерезывающих силах и изгибающих моментах, с помощью которых непосредственно вычисляются компоненты симметричного тензора напряжений.

Обсуждение результатов

Краевая задача в потенциалах.

Пусть внешние касательные нагрузки являются потенциальными, т.е. $q_i = q_{,i}$, $m_i = m_{,i}$. Введем в рассмотрение для искомых переменных M_{ij} , N_{ij} , D_{ij} , C_{ij} функцию Эри в следующем виде:

$$\begin{cases} M_{ij} = (\Delta M - hq + Q) \delta_{ij} - M_{,ij}, \\ N_{ij} = (\Delta N - q) \delta_{ij} - N_{,ij}, \\ C_{ij} = \left(\Delta C + \frac{360}{h^5} T - \frac{30}{h^3} q \right) \delta_{ij} - C_{,ij}, \\ D_{ij} = \Delta D \delta_{ij} - D_{,ij} \end{cases}, \quad (23)$$

при этом, как следствие, с учетом выражений для последних уравнений (19)-(20) можно положить $N_i = Q_{,i}$ и $M_i = T_{,i}$, тогда уравнения равновесия в моментах и продольных усилиях, а также вторые уравнения относительно C_{ij} и D_{ij} в (19)-(20) становятся тождествами. Тогда, вместо системы из восьми уравнений (19)-(20) будем иметь следующую систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \Delta N = \nu \Delta \left(m_z + \frac{h^2}{12} \Delta q \right) - (1 + \nu) \Delta q \\ \Delta C + \frac{720}{h^5} T = \frac{1}{2h} \left[(2 + \nu) \Delta q - (1 + \nu) \frac{h^2}{12} \Delta \Delta q \right] - \frac{1 + \nu}{2h} \Delta q + \frac{60}{h^3} q \\ \Delta Q + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{12}{h^2} (Q - m) + \frac{1}{1 + \nu} \frac{12}{h^2} \Delta M + Q = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \Delta (\Delta M - 2m + 2Q) = \nu \frac{h^2}{10} \Delta (q_z + \frac{1}{6} \Delta m) - (1 + \nu) (\Delta m + q_z) \\ \Delta D = \frac{2}{h^3} \left[-(1 + \nu) \Delta \left(\frac{h^2}{10} q_z + \frac{h^2}{60} \Delta m \right) + (2 + \nu) \Delta m + q_z \right] \\ \Delta T - \frac{60}{h^2} T + T + 5q = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Граничные условия (21), (22) на свободных краях пластины в терминах потенциалов продольных усилий- N , перерезывающих усилий- Q и внутренних моментов- M , а также для C , D с учетом тождественного выполнения соответствующих уравнений равновесия на границе, примет следующей вид:

$$\begin{cases} N = 0, & N_{,i} = 0, & M = 0, & M_{,i} = 0, \\ C = 0, & D = 0, & Q_{,i} = 0, & T_{,i} = 0, \end{cases} \quad \text{при } x_i = \pm \frac{l_i}{2}, \quad (26)$$

Для простоты рассмотрим случай взаимно уравновешенных внешних нагрузок

$$q_z^+ = -q_z^- = q_z, \quad q^+ = -q^- = q, \quad m_z = 0, \quad m = 0.$$

Для этих нагрузок систему уравнений (24) и (25), можно записать в более компактной форме

$$\begin{cases} \Delta \Delta N = \nu \frac{h^2}{12} \Delta \Delta q + \Delta q (1 - \nu) \\ \Delta C + \frac{720}{h^5} T = \frac{1}{2h} \left[(2 + \nu) \Delta q - (1 + \nu) \frac{h^2}{12} \Delta \Delta q \right] - \frac{1 + \nu}{2h} \Delta q + \frac{60}{h^3} q \\ \Delta T - \frac{60}{h^2} T + 5q + \frac{h^2}{12} \left(\Delta q - \frac{h^2}{12} \Delta \Delta q \right) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \Delta(\Delta M + 2Q) - \nu \frac{h^2}{10} \Delta q_z + (1 + \nu) q_z = 0 \\ \Delta D = \frac{2}{h^3} \left(-(1 + \nu) \frac{h^2}{10} \Delta q_z + (2 + \nu) q_z \right) \\ \Delta Q + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{12}{h^2} Q + \frac{1}{1+\nu} \frac{h^2}{12} \Delta M + \frac{7+\nu}{5(1+\nu)} q_z - \frac{h^2}{50} \Delta q_z = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Из (27) следует, что при $q = 0$ немедленно следует, что $N = T = C = 0$.

Действие поперечной и касательной нагрузки на пластину.

Пусть на пластину действуют произвольные самоуравновешенные нагрузки:

$$q_z = q_z(x_1, x_2), \quad q = q(x_1, x_2)$$

Для рассматриваемой краевой задачи как следует из граничных условий (26), для потенциалов решение можно представить в виде бесконечных тригонометрических рядов следующего вида:

$$\begin{pmatrix} N(x_1, x_2) \\ M(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \\ T(x_1, x_2) \\ C(x_1, x_2) \\ D(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} N_{nm} \\ M_{nm} \\ Q_{nm} \\ T_{nm} \\ C_{nm} \\ D_{nm} \end{pmatrix} \varphi_{nm}(x_1, x_2), \quad (29)$$

где

$$\varphi_{nm}(x_1, x_2) = \left[\sin \frac{2n\pi}{l_1} x_1 - \frac{1}{3} \sin \frac{6n\pi}{l_1} x_1 \right] \left[\sin \frac{2m\pi}{l_2} x_2 - \frac{1}{3} \sin \frac{6m\pi}{l_2} x_2 \right]$$

базисные функции точно удовлетворяют граничным условиям. При этом эти базисные функции в виде бинорма являются ортонормированными, тем самым обеспечивая полноту решений (29), в виде бесконечного тригонометрического ряда. Откуда следует, внешние нагрузки $q_z(x_1, x_2)$ и $q(x_1, x_2)$ также должны разложены в бесконечный тригонометрический ряд по этим базисным функциям. Тогда вместо системы дифференциальных уравнений получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} N_{nm} = -\frac{q_{znm}}{\gamma_{nm}^2} \left(1 + \nu \frac{h^2 \gamma_{nm}^2}{12} \right), \\ M_{nm} = -\frac{1}{\gamma_{nm}^4} \left[1 + \nu + \nu \frac{h^2 \gamma_{nm}^2}{60} \right] q_{nm} + 2 \frac{Q_{nm}}{\gamma_{nm}^2}, \\ Q_{nm} = \frac{1}{12h(1+\nu)} \left[\frac{1}{2h^2 \gamma_{nm}^2} \left(1 + \nu \frac{h^2 \gamma_{nm}^2}{12} \right) q_{nm} - h^2 \gamma_{nm}^2 q_{znm} \right], \\ T_{nm} = \frac{1}{60} \frac{1}{1 + \frac{h^2 \gamma_{nm}^2}{60}} \left[5 - \frac{(2+\nu)h^2 \gamma_{nm}^2}{12(1+\nu)} \frac{h^4 \gamma_{nm}^4}{144} \right] q_{nm}, \\ h^2 C_{nm} = \frac{1+\nu}{4} \left(1 - \frac{h^2 \gamma_{nm}^2}{12} \right) q_{nm} + \frac{1440}{h^3 \gamma_{nm}^2} T_{nm}, \\ h^3 D_{nm} = -\frac{1}{\gamma_{nm}^2} \left(1 - \frac{(1+\nu)h^2 \gamma_{nm}^2}{10(2+\nu)} \right) q_{znm} - \frac{480}{h^2 \gamma_{nm}^2} Q_{nm} \end{cases}, \quad (30)$$

где

$$Y_{nm}^2 = \frac{5}{9} \left[\left(\frac{2n\pi}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{2m\pi}{l_2} \right)^2 \right], \quad \left\{ \begin{matrix} q_{znm} \\ q_{nm} \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \int_{-\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2}} \left\{ \begin{matrix} q_z(x_1, x_2) \\ q(x_1, x_2) \end{matrix} \right\} \varphi_{nm}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

В качестве внешней нормальной нагрузки рассмотрим воздействие поперечной, приложенной в точке $M(X_1, X_2)$, самоуравновешенной сосредоточенной силы, при $z = \pm h/2$, на свободную пластину

$$q_z(x_1, x_2) = P \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}), \quad (31)$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака

А для потенциала касательной нагрузки введем следующую функцию:

$$q(x_1, x_2) = \frac{q_0}{4} \left[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1) \right] \left[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2) \right], \quad (32)$$

откуда, для касательных нагрузок будем иметь

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2) = \frac{q_0}{2} \delta(x_1 - x_{10}) \left[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2) \right], \\ q_2(x_1, x_2) = \frac{q_0}{2} \left[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1) \right] \delta(x_2 - x_{20}). \end{cases}, \quad (33)$$

Тогда для коэффициентов внешних нагрузок будем иметь :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_{zmm} \\ q_{nm} \end{Bmatrix} = \\ \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \int_{-\frac{l_2}{2}}^{\frac{l_2}{2}} \left\{ P \delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \right. \\ \left. \frac{q_0}{4} \left[H(x_1 - x_{10}) - H(x_{10} - x_1) \right] \left[H(x_2 - x_{20}) - H(x_{20} - x_2) \right] \right\} \varphi_{mm}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ \begin{Bmatrix} = P \left[\sin \frac{2n\pi}{l_1} x_{10} - \frac{1}{3} \sin \frac{6n\pi}{l_1} x_{10} \right] \left[\sin \frac{2m\pi}{l_2} x_{20} - \frac{1}{3} \sin \frac{6m\pi}{l_2} x_{20} \right], \\ \frac{q_0}{16m^2 n^2} \left[\cos \frac{2n\pi}{l_1} x_{10} - \cos \frac{6n\pi}{l_1} x_{10} \right] \left[\cos \frac{2m\pi}{l_2} x_{20} - \cos \frac{6m\pi}{l_2} x_{20} \right] \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, что при $x_{10} = 0, x_{20} = 0$ рассматриваемая задача по всем осям становится абсолютно симметричной, для которой в точке приложения самоуравновешенной сосредоточенной силы значение σ_{zz} бесконечно. Все остальные компоненты напряжений для рассматриваемой задачи тривиальны.

Основная выводы

1. Впервые предложена неклассическая теория пластин в напряжениях, на основе трехмерной теории упругости.
2. В отличие от известных подходов, полученные разрешающие уравнения и граничные условия в напряжениях являются корректными и замкнутыми.
3. В предложенной теории достигнуто одновременное выполнение уравнений равновесия и совместности напряжений Бельтрами - Митчелла.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Конавалов А.Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости, Сиб. Математический журнал, 1997, т. 38, No 3, с. 551-568
2. Победра Б.Е. К проблеме статики в напряжениях // Вестник МГУ.сер. Матем., мех., 2003, No 3, с. 61-67
3. Тимошенко С.П., Гудер Д.Ж. Теория упругости. М.: Наука, 1975, 576.
4. Холматов Т.О методах решения задачи в напряжениях, ДАН СССР, 1980, т. 1, с. 252 No 2, стр. 315-317
5. Ахмедов А.Б. Численное решение пространственных задач теории вязкоупругости в напряжениях. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1984. 12 с.
6. Ахмедов А.Б., Шешенин С.В. Нелинейные уравнения движения ортотропных плит. Вестник МГУ Механика математика, 2012, 66-68 стр. (<https://doi.org/10.3103/S002713301203003X>)

7. Altenbach H., Eremeyev V.A. (Eds). Shell like Structures: Nonclassical Theories and Applications. Advanced Structured Materials. Volume 15, (<https://doi.org/10.10079783642218552>) Springer, Berlin et al. 2011, 761 p.
8. Akhmedov A.B, Grigorev P.S, Ibodulloev Sh.R, Kuldibaeva L.A Imitating Simulation of Thermomechanical Processing of Metals // J:Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2021 Vol.12 No.4, 31-36 (<https://doi.org/10.17762/turcomat/v12i462>)
9. Reissner E. On the bending of elastic plates//Quart. Appl. Math. - 1947.-V. 5, No 1. P 11-22
10. Ахмедов А.Б. Качественный анализ теории пластин из композиционных материалов //ДАН РУз. 2011. №1. С. 81 -84.
11. Tyukalov Yu.Ya. Equilibrium finite elements for plane problems of the elasticity theory. Magazine of Civil Engineering. 2019. 91(7). Pp. 80-97. DOI: 10.18720/MCE.91.8

REZYUME

Mazkur maqolada plastinalar nazariyasining kuchlanishlardagi yangicha talqini taklif etilgan. Bo'ylama kuch, qirquvchi kuch va ichki momentlar terminida yechimga ega bo'lgan tenglamalar olingan. Plastinalar uchun kuchlanishlardagi chegaraviy shartlar shakllantirilgan. Kuchlanishlarda olingan yechimlar bir vaqtning o'zida ham muvozanat tenglamalarini, ham kuchlanishlarning birgalikdagi tenglamasi bo'lgan Beltrami-Mitchell tenglamalarini qanoatlantiradi. O'zaro muvozanatlashgan yuklanishlar ta'siri ostida bo'lgan plastina uchun chegaraviy masala shakllantirilgan. Ba'zi amaliy masalalarga yechim topilgan.

Kalit so'zlar: Elastiklik nazariyasi, kuchlanishlardagi masala, parallelepiped, kuchlanish potentsiali, o'zaro muvozanatlashgan yuklanish, plastina, Beltrami-Mitchell

RESUME

In this work, a new theory of plates in terms of stresses is proposed. Governing equations are derived in terms of axial forces, shear forces, and internal moments. Boundary conditions for stress-based plate theory are formulated. The obtained stress solutions simultaneously satisfy the equilibrium equations and the Beltrami-Mitchell stress compatibility conditions. A boundary value problem is formulated for a plate subjected to self-equilibrated loads. Some applied problems are solved.

Key words: Theory of elasticity, stress-based formulation, parallelepiped, stress potential, self-equilibrated loads, plate, Beltrami-Mitchell

УДК 512.548

О НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ И НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИГРУПП И КВАЗИГРУПП СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО (ВТОРОГО) РОДА

Давлатбеков А. А.

ДЕНАУСКИЙ ИНСТИТУТ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА И ПЕДАГОГИКИ, ТЕРМЕЗ

akimbekd@mail.ru

СОБИРОВА М. Р.

ДЕНАУСКИЙ ИНСТИТУТ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА И ПЕДАГОГИКИ, ТЕРМЕЗ

mavjudasobirova79@gmail.com

РЕЗЮМЕ

Квазигруппы, главным образом изотопные группе, абелевой группе, особую роль играют линейные квазигруппы, аilinearные квазигруппы, обобщённые линейные квазигруппы (линейные (слева), справа, аilinearные (слева), справа, смешанного типа первого (второго) рода) и Т-квазигруппы. В данной работе даётся характеристика обобщённых линейных квазигрупп, а также линейных квазигрупп с помощью Λ -форм квазигруппы. Следует отметить, что в работах [1-2] некоторые свойства Т-квазигруппы в [3] линейной квазигруппе, в [4] левых (правых) линейных квазигрупп изучались с помощью квазигрупп Λ -формы. Аналогично для квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода эти свойства доказаны с помощью Λ -формы квазигрупп. Кроме того, устанавливается связь между различными видами квазигруппы смешанного типа первого (второго) рода с Т-квазигруппы.

Ключевые слова: аilinearная квазигруппа, линейная квазигруппа, форма квазигруппы, квазигруппа смешанного типа первого рода квазигруппа смешанного второго рода, эндоморфизм, антиавтоморфизм, квазиавтоморфизм, Т-квазигруппа.

В теории линейных квазигрупп важную роль играют группы, изотопные этим квазигруппам. Многие результаты, а также важную информацию о структуре линейной квазигруппы можно получить посредством изотопной группы. Понятие изотопии на квазигруппы следующим образом, что квазигруппа (Q, Ω) моноиду, полугруппе, группе, абелевой группе $(Q, +)$, если для n -арной операции $A \in \Omega$ существуют подстановки $\alpha_1^A, \alpha_2^A, \dots, \alpha_n^A, \beta_n^A$ множества Q такие, что

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \beta_A^{-1} (\alpha_1^A x_1, \alpha_2^A x_2, \dots, \alpha_n^A x_n),$$

для всех $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$. Если $\beta_A = 1$ (1 – единичное отображения) для всех $A \in \Omega$, то изотопия называется главной.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется «линейной над группой» $(Q, +)$, если $(Q, \cdot)$ имеет вид $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$ где $\varphi, \psi \in \text{Aut}(Q, +)$, c – фиксированный элемент множества Q , [5].

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется «смешанного типа первого (второго) рода над группой» $(Q, +)$, если $(Q, \cdot)$ имеет вид: $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ ($x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \psi y$), где $\varphi (\psi) \in \text{Aut}(Q, +)$, $\bar{\psi} (\bar{\varphi}) \in \text{Aaut}(Q, +)$, c – фиксированный элемент множества Q , [6].

Все необходимые сведения о Λ -форме квазигруппы можно найти в работах [7-9].

Определение. Пусть $(Q, \cdot)$ – квазигруппа смешанного типа первого (второго) рода: $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ ($x \cdot y = \bar{\varphi} x + c + \psi y$), четверка $((Q, +), \varphi, \bar{\psi}, c)$ ($((Q, +), \bar{\varphi}, \psi, c)$) где $\varphi (\psi) \in \text{Aut}(Q, +)$, $\bar{\psi} (\bar{\varphi}) \in \text{Aaut}(Q, +)$, c – фиксированный элемент множества Q , это называется нормальной формой квазигруппы $(Q, \cdot)$ и обозначается следующим образом: $\Lambda = ((Q, +), \varphi, \bar{\psi}, c)$ ($\Lambda = (((Q, \oplus), \alpha, \psi, c))$). Группа $(Q, +)$ называется Λ -группой квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что $x \cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \bar{\psi}_1 y = \varphi_2 x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}_2 y$, $x \cdot y = R_{c_1}^+ \varphi_1 x + \bar{\psi}_1 y = R_{c_2}^+ \varphi_2 x \oplus \bar{\psi}_2 y$ где $R_{c_1}^+ \varphi_1 x = \varphi_1 x + c_1$, $R_{c_2}^+ \varphi_2 x = \varphi_2 x \oplus c_2$ то есть группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ изотопны, тогда по теореме Алберта [8] группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ изоморфны, то есть $(Q, +) \cong (Q, \oplus)$.

Следствие 1. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа смешанного типа второго рода, имеющая две смешанного типа второго рода Λ - формы $\Lambda_1 = ((Q, +), \bar{\varphi}_1, \psi_1, c_1)$ и $\Lambda_2 = ((Q, \oplus), \bar{\varphi}_2, \psi_2, c_2)$, где $\psi_1 \in Aut(Q, +), \bar{\varphi}_1 \in Aaut(Q, +)$ и $\psi_2 \in Aut(Q, \oplus), \bar{\varphi}_2 \in Aaut(Q, \oplus), c_1, c_2 \in Q$. Тогда группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ изоморфны, то есть $(Q, +) \cong (Q, \oplus)$.

Лемма 2. Пусть $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ квазигруппа смешанного типа первого рода над одной группой $(Q, +)$: $x \cdot y = \varphi_1 x + \bar{\psi}_1 y$ и $x * y = \varphi_2 x + \bar{\psi}_2 y$ где $c_1, c_2 = 0$ нулевой элемент группы $(Q, +)$. Тогда квазигруппа $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ изотопны, причем изотопия имеет вид $-(\alpha, \beta, \varepsilon)$, такой, что $\alpha \in Aut(Q, +)$ и $\beta \in Aaut(Q, +)$.

Доказательство. Из условия леммы имеем $x \cdot y = \varphi_1 x + \bar{\psi}_1 y$ и $x * y = \varphi_2 x + \bar{\psi}_2 y$, тогда если $x + y = \varphi_1^{-1} x \cdot \bar{\psi}_1^{-1} y$ и $x + y = \varphi_2^{-1} x * \bar{\psi}_2^{-1} y$ то $\varphi_1^{-1} x \cdot \bar{\psi}_1^{-1} y = \varphi_2^{-1} x * \bar{\psi}_2^{-1} y$ или $\varphi_1^{-1} x \cdot \bar{\psi}_1^{-1} y = \varphi_2^{-1} \varphi_1 x * \bar{\psi}_2^{-1} \bar{\psi}_1 y = \alpha x * \beta y$, где $\alpha = \varphi_2^{-1} \varphi_1, \beta = \bar{\psi}_2^{-1} \bar{\psi}_1$ поэтому $\alpha \in Aut(Q, +)$ и $\beta \in Aaut(Q, +)$.

Следствие 2. Пусть $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ квазигруппа смешанного типа второго рода над одной группой $(Q, +)$: $x \cdot y = \bar{\varphi}_1 x + \psi_1 y$ и $x * y = \bar{\varphi}_2 x + \psi_2 y$ где $c_1, c_2 = 0$ нулевой элемент группы $(Q, +)$. Тогда квазигруппа $(Q, \cdot)$ и $(Q, *)$ изотопны, причем изотопия имеет вид $-(\alpha, \beta, \varepsilon)$, такой, что $\beta \in Aut(Q, +)$ и $\alpha \in Aaut(Q, +)$.

Теорема 1. Пусть $(Q_1, \cdot)$ линейные квазигруппы $x \cdot y = \varphi x + c_1 + \psi y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, +), \varphi, \psi, c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2, \circ)$ аilinearные квазигруппы $x \circ y = \bar{\varphi} x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} y$: $\Lambda_2 = ((Q_2, \oplus), \bar{\varphi}, \bar{\psi}, c_2)$ их нормальные формы, $\gamma : (Q_1, \cdot) \rightarrow (Q_2, \circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \cdot)$ в $(Q_2, \circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma x * \gamma 0, \eta_2 x = * \gamma 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$. Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1, +)$ в $(Q_2, \oplus)$ и $\eta_1 \varphi = \bar{\varphi} \eta_1, \eta_2 \psi = \bar{\psi} \eta_2$, Кроме того $\eta_1 (\eta_2)$, -взаимно однозначно тогда и только тогда, когда γ - взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть $\gamma : (Q_1, +) \rightarrow (Q_2, \oplus)$ гомоморфизм, то есть

$$\gamma(x \cdot y) = \gamma x \circ \gamma y,$$

$$\gamma(\varphi x + c_1 + \psi y) = \bar{\varphi} \gamma x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma y. \quad (4)$$

Положим в (4) $y = \psi^{-1}(-c_1)$,

$$\gamma \varphi x = \bar{\varphi} \gamma x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma \psi^{-1}(-c_1) = \bar{\varphi} \gamma x \oplus c_3, \quad (5)$$

где $c_3 = c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma \psi^{-1}(-c_1)$.

Аналогично положив (4) $x = \varphi^{-1}(-c_1)$, получим

$$\gamma \psi y = \bar{\varphi} \gamma \varphi^{-1}(-c_1) x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma y = c_4 \oplus \bar{\psi} \gamma y, \quad (6)$$

где $c_4 = \bar{\varphi} \gamma \varphi^{-1}(-c_1) x \oplus c_2$.

Теперь, при $x = \varphi^{-1}(-c_1), y = \psi^{-1}(-c_1)$ из (6) следует

$$\gamma(-c_1) = \bar{\varphi} \gamma \varphi^{-1}(-c_1) \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma \psi^{-1}(-c_1) = c_4 * c_2 \oplus c_3, \quad (7)$$

Из (4), (5), (6), (7) следует

$$\begin{aligned} \gamma(x + y) &= \gamma(\varphi \varphi^{-1} x + c_1 + \psi \psi^{-1}(-c_1 + y)) = \bar{\varphi} \gamma \varphi^{-1} x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma \psi^{-1}(-c_1 + y) = \\ &= \gamma \varphi \varphi^{-1} x * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma \psi \psi^{-1}(-c_1 + y) = \gamma x * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma(-c_1 + y) = \\ &= \gamma x * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \gamma(-c_1 + y) = \gamma x * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-c_1 + y), \\ \gamma(x + y) &= \gamma x * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-c_1 + y). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \gamma(x + y) &= \gamma(\varphi \varphi^{-1}(x - c_1) + c_1 + \psi \psi^{-1} y) = \bar{\varphi} \gamma \varphi^{-1}(x - c_1) \oplus c_2 \oplus \bar{\psi} \gamma \psi^{-1} y = \\ &= \gamma \varphi \varphi^{-1}(x - c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma \beta_1 \beta_1^{-1} y = \gamma(x - c_1) * c_3 \oplus c_2 * c_4 \oplus \gamma y = \\ &= \gamma(x - c_1) * (c_4 * c_2 \oplus c_3) \oplus \gamma y = \gamma(x - c_1) * (-c_1) \oplus \gamma y, \\ \gamma(x + y) &= \gamma x * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-c_1 + y). \end{aligned} \quad (9)$$

при $y = -c_1$ получаем

$$\gamma(x - c_1) = \gamma x * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-2c_1). \quad (10)$$

Положим значение $\gamma(x - c_1)$ в (10), учитывая (10):

$$\gamma(x + y) = \gamma x * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-2c_1) * \gamma(-c_1) \oplus \gamma y.$$

Положим в (10), $x = y = 0$:

$$\gamma 0 = \gamma 0 * \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-2c_1) * \gamma(-c_1) \oplus \gamma 0.$$

Тогда

$$\gamma 0 = \gamma(-c_1) \oplus \gamma(-2c_1) * \gamma(-c_1).$$

Следовательно (10), имеет вид

$$\gamma(x + y) = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma y.$$

Определим следующие отображения Q_1 в Q_2 .

$$\eta_1 x = \gamma x * \gamma 0, \eta_2 x = * \gamma 0 \oplus \gamma y.$$

Легко заметить, что η_1 и η_2 групповые гомоморфизмы. Действительно,

$$\eta_1(x + y) = \gamma(x + y) * \gamma 0 = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma y * \gamma 0, \eta_1 x \oplus \eta_1 y = \gamma x * \gamma 0 \oplus \gamma y * \gamma 0. \text{ Следовательно, } \eta_1(x + y) = \eta_1 x \oplus \eta_1 y.$$

Второе проверяется аналогично. Далее, учитывая определение η_1 -и (10) имеем: $\eta_1 \varphi x = \gamma \varphi x * \gamma 0 = \bar{\varphi} \gamma x \oplus c_3 - \gamma 0$. Пусть в (10) $x = 0$, тогда получим $\gamma 0 = \bar{\varphi} \eta 0 \oplus c_3$, откуда $c_3 * \gamma 0 = * \bar{\varphi} \eta 0$. Следовательно, $\eta_1 \varphi x = \bar{\varphi} \gamma x * \bar{\varphi} \eta 0 = \bar{\varphi}(\gamma x * \gamma 0) = \bar{\varphi} \eta_1 x$, то есть $\eta_1 \varphi = \bar{\varphi} \eta_1$. Аналогично, $\eta_2 \psi x = * \bar{\psi} \gamma 0 \oplus \psi \gamma x = \bar{\psi}(* \gamma 0 \oplus \gamma x) = \bar{\psi} \eta_2 x$, то есть $\eta_2 \psi = \bar{\psi} \eta_2$.

Следствие 3. Пусть $(Q_1, \cdot)$ линейные квазигруппы $x \cdot y = \varphi_1 x + c_1 + \psi_1 y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, +), \varphi_1, \psi_1, c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2, \circ)$ квазигруппы смешного типа первого рода $x \circ y = \varphi_2 x \oplus c_2 \oplus \psi_2 y$: $\Lambda_2 = ((Q_2, \oplus), \varphi_2, \bar{\psi}_2, c_2)$ их нормальные формы, $\gamma : (Q_1, \cdot) \rightarrow (Q_2, \circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \cdot)$ в $(Q_2, \circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma x * \gamma 0$, $\eta_2 x = * \gamma 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$. Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1, +)$ в $(Q_2, \oplus)$ и $\eta_1 \varphi_1 = \varphi_2 \eta_1$, $\eta_2 \psi_1 = \bar{\psi}_2 \eta_2$, Кроме того $\eta_1(\eta_2)$, - взаимно однозначно тогда и только тогда, когда γ - взаимно однозначно.

Следствие 4. Пусть $(Q_1, \cdot)$ квазигруппы смешанного типа второго рода $x \cdot y = \bar{\varphi}_1 x \oplus c_1 \oplus \psi_1 y$: $\Lambda_1 = ((Q_1, \oplus), \bar{\varphi}_1, \psi_1, c_1)$ их нормальные формы и $(Q_2, \circ)$ линейные квазигруппы $x \circ y = \varphi_2 x + c_2 + \psi_2 y$: $\Lambda_2 = ((Q_2, +), \varphi_2, \psi_2, c_2)$ их нормальные формы, $\gamma : (Q_1, \cdot) \rightarrow (Q_2, \circ)$ гомоморфизм квазигруппы $(Q_1, \cdot)$ в $(Q_2, \circ)$. Положим $\eta_1 x = \gamma x * \gamma 0$, $\eta_2 x = * \gamma 0 \oplus \gamma 0$ для любого $x \in Q_1$. Тогда η_1 и η_2 гомоморфизм группы $(Q_1, +)$ в $(Q_2, \oplus)$ и $\eta_1 \varphi_1 = \bar{\varphi}_2 \eta_1$, $\eta_2 \psi_1 = \psi_2 \eta_2$, Кроме того $\eta_1(\eta_2)$, - взаимно однозначно тогда и только тогда, когда γ - взаимно однозначно.

Ввиду того, что доказательство следствий 3 и 4 почти полностью повторяет доказательство теоремы 1, считаем, что нет необходимости приводить доказательство следствий 3 и 4.

Лемма 3. Пусть $(Q, \cdot)$ линейная слева квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + c + \beta y$ и $(Q, \circ)$ алинейная справа квазигруппа $x \circ y = \alpha x \oplus c_1 \oplus \bar{\psi} y$. Квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ являются квазигруппой смешанного типа первого рода, тогда и только тогда, когда β и α являются квазиавтоморфизмом группой $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$

Доказательство. Пусть

$$x \cdot y = \varphi x + c + \beta y = \alpha x \oplus c_1 \oplus \bar{\psi} y, \quad (11)$$

где β и α подстановки множества Q , $\varphi \in \text{ut}(Q, +)$, $\bar{\psi}$ -антиавтоморфизм группы $(Q, \oplus)$, и c, c_1 - фиксированный элемент множества Q . Тогда из равенства (11) получим

$$x \cdot y = \tilde{L}_{\varphi x}^+ \tau y = \tilde{L}_{\sigma x}^{\oplus} \bar{\psi} y, \quad (12)$$

где $\tau = c + \beta y$ и $\sigma = \alpha x \oplus c_1$. Из равенства (12) следует, что группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$ главно изотопны, потому по теореме Алберта [7], если две группы изотопны то они изоморфны. Более того, из доказательства этой теоремы следует, что существует, такой элемент, как $0 \in Q$, что

$$\tilde{L}_0(x + y) = \tilde{L}_0 x \oplus \tilde{L}_0 y,$$

где $\tilde{L}_0 x = 0 + x$. Тогда и равенство () получим

$$\tilde{L}_0 \left(\tilde{L}_{\varphi E}^+ \tau y \right) = \tilde{L}_0 \tilde{L}_{\sigma x}^+ \tilde{L}_0 \bar{\psi} y,$$

или

$$\varphi x + \tau \tilde{L}_0^{-1} y = \sigma x + \tilde{L}_0 \bar{\psi} \tilde{L}_0^{-1} y, \quad (13)$$

Положим в равенстве () $x = 0$, тогда $\varphi 0 + \tau \tilde{L}_0^{-1} y = \sigma 0 + \tilde{L}_0 \bar{\psi} \tilde{L}_0^{-1} y$ или $\tau \tilde{L}_0^{-1} y = 2 + \tilde{L}_0 \bar{\psi} \tilde{L}_0^{-1} y$, $\tau \tilde{L}_0^{-1} y = 2 + \bar{\psi}_1 y$, где $2 = \sigma 0$, $\tilde{L}_0 \bar{\psi} \tilde{L}_0^{-1} = \bar{\psi}_1$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$. По лемме 2.5 [7] $\tau \tilde{L}_0^{-1}$, а следовательно τ — квазиантиавтоморфизмы группы $(Q, +)$. Так как $\tilde{L}_0 = \tilde{L}_0^{-1}$ — квазиантиавтоморфизмы этой группы $(Q, +)$. Поэтому $\tau \tilde{L}_0^{-1} y = s + \bar{\psi}_2 y$, $s \in Q$, а $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi}_2 y$, $\bar{\psi}$ — антиавтоморфизм группы $(Q, +)$, $\varphi \in \text{ut}(Q, +)$. То есть $(Q, \cdot)$ — квазигруппа смешанного типа первого рода.

Таким образом, верна следующее следствие.

Следствие 5. Пусть $(Q, \cdot)$ линейная справа квазигруппа $x \cdot y = \alpha x + c + \psi y$ и $(Q, \circ)$ аilinearная слева квазигруппа $x \circ y = \bar{\varphi} x \oplus c \oplus \beta y$. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ является квазигруппой смешанного типа второго рода, тогда и только тогда, когда α и β являются квазиавтоморфизмом группы $(Q, +)$ и $(Q, \oplus)$.

Лемма 4. Пусть $(Q, \cdot)$ квазигруппа смешанного типа первого рода $x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ над некоторой группой $(Q, +)$ и $(Q, \circ)$, а квазигруппа смешанного типа второго рода $x \circ y = \bar{\varphi} x \oplus c_1 \oplus \psi y$ над некоторой группой $(Q, \oplus)$. Тогда квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ является Т-квазигруппой, если $R_k \bar{\varphi} R_k^{-1}$ является антиавтоморфизмом группы $(Q, +)$.

Доказательство. Пусть $(Q, \cdot)$ квазигруппа смешанного типа первого рода над некоторой группой и $(Q, \circ)$ квазигруппа смешанного типа второго рода над некоторой группой

$$x \cdot y = \varphi x + c + \bar{\psi} y = \bar{\varphi} x \oplus c_1 \oplus \psi y \quad (14)$$

где $\varphi \in \text{Aut}(Q, +)$, $\bar{\psi} \in \text{Aut}(Q, +)$, $\psi \in \text{Aut}(Q, \oplus)$, $\bar{\varphi} \in \text{Aut}(Q, \oplus)$.

Тогда

$$x \cdot y = \varphi x + \alpha y = \bar{\varphi} x \oplus \beta y, \quad (15)$$

где $\alpha y = c + \bar{\psi} y$, $\beta y = \bar{c} \oplus \bar{\psi} y$. α , β — подстановка множества Q . Тогда по теореме Альберта (теорема 1.4 [7]) $(Q, +) \cong (Q, \oplus)$, более того, существует элемент $k \in Q$ такой, что

$$R_k(x \oplus y) = R_k x + R_k y, \quad (16)$$

где $R_k x = x + k$. Учитывая, это в (), получаем

$$R_k(J\varphi^{-1}x \oplus \alpha y) = R_k \bar{\varphi}^{-1}x + R_k \beta y$$

или

$$\varphi x + \alpha y = \bar{\varphi} x + k + \beta y.$$

Положим $y = 0$: $\varphi x + \alpha 0 = \bar{\varphi} x + k + \beta 0$. Тогда $\varphi x + \alpha 0 - \beta 0 - k = \bar{\varphi} x$, $\bar{\varphi} x = \varphi x + p = R_h \varphi x$, где $p = \alpha 0 - \beta 0 - k$.

Подстановка $R_k \bar{\varphi} R_k^{-1}$ является антиавтоморфизмом группы $(Q, +)$, действительно,

$$\begin{aligned} R_k \bar{\varphi} R_k^{-1}(x + y) &= R_k \bar{\varphi}(R_k^{-1}x \oplus R_k^{-1}y) = \\ &= R_k(\bar{\varphi} R_k^{-1}y \oplus \bar{\varphi} R_k^{-1}x) = R_k \bar{\varphi} R_k^{-1}y + R_k \bar{\varphi} R_k^{-1}x. \end{aligned}$$

Учитывая, что $R_k \bar{\varphi} R_k^{-1} = R_k R_p \varphi R_k^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} R_k R_p \varphi R_k^{-1}(x + y) &= R_k R_p \varphi R_k^{-1}y + R_k R_p \varphi R_k^{-1}x, \\ \varphi(x + y - k) + p + k &= \varphi(y - k) + p + k + \varphi(x - k) + p + k, \\ \varphi(x + y - k) &= \varphi(y - k) + p + k + \varphi(x - k), \\ \varphi x + \varphi y - \varphi k &= \varphi y - \varphi k + p + k + \varphi x - \varphi k, \\ \varphi x + \varphi y &= \varphi y - \varphi k + p + k + \varphi x \end{aligned}$$

Положим $x = y = 0$: $0 = -\varphi k + p + k$. Тогда $\varphi x + \varphi y = \varphi y + \varphi x$ или $x + y = y + x$, то есть группа $(Q, +)$ — абелева. Следовательно, $(Q, \cdot)$ Т-квазигруппа.

Литература

1. Керка, Т. T-quasigroups I, Acta univ. Carolin. Math. Phys. -1971. - Vol.12. - No1.- Pp.31-39.
2. Керка, Т. T-quasigroups II, Acta univ. Carolin., Math. Phys. – 1971. - Vol.12. - No2. - pp.39-49.
3. Табаров А.Х. Тождества и линейность квазигрупп, Москва 2009. 203 С.
4. Давлатбеков А.А. Автоморфизмы, эндоморфизмы и конгруэнция обобщенных линейных квазигрупп. Душанбе 2019. 115 С.
5. Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах, Мат. сборник, 1966, 70: 1. С. 55-97.
6. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп, Дискретная математика, РАН, 1992, том 4, вып.2, С. 142-147.
7. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп, -М.: Наука, 1967.- 222. С.
8. Табаров А.Х. Гомоморфизмы эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп, Дискретная математика, РАН, 2007, том 19, вып.2, С. 67-73.
9. Табаров А.Х. Л-Формы линейных квазигрупп, Доклады. АНРТ, 2005, том. XLVIII, No 11-12, С. 13-21.

REZYUME

Kvaziguruhlilar asosan gruppaga izotop bo'lgan kvaziguruhlilar, Abel guruhga izotop kvaziguruhlilar bilan bog'liq bo'lib, chiziqli kvaziguruhlilar, achiziqli kvaziguruhlilar, umumlashtirilgan chiziqli kvaziguruhlilar (chapdan chiziqli, o'ngdan chiziqli, chapdan achiziqli, o'ngdan achiziqli, aralash turdagi birinchi (ikkinchi) turdagi) hamda T-kvaziguruhlilar muhim o'rin tutadi. Ushbu ishda umumlashtirilgan chiziqli kvaziguruhlilar hamda chiziqli kvaziguruhlilar Λ -shaklli kvaziguruhlilar yordamida tavsiflanadi. Ta'kidlash lozimki, manbalarda [1-2] T-kvaziguruhlilar ba'zi xususiyatlari, [3] chiziqli kvaziguruhlilar, [4] chap (o'ng) chiziqli kvaziguruhlilar Λ -shaklli kvaziguruhlilar yordamida o'rganilgan. Shuningdek, birinchi (ikkinchi) turdagi aralash turdagi kvaziguruhlilar uchun ham bu xususiyatlar Λ -shaklli kvaziguruhlilar yordamida isbotlangan. Bundan tashqari, birinchi (ikkinchi) turdagi aralash turdagi kvaziguruhlilar bilan T-kvaziguruhlilar o'rtasidagi bog'lanish aniqlangan.

Kalit so'zlar: achiziqli kvazigruppa, chiziqli kvazigruppa, kvazigruppa shakli, birinchi turdagi aralash kvazigruppa, ikkinchi turdagi aralash kvazigruppa, endomorfizm, antiavtomorfizm, kvaziavtomorfizm, T-kvazigruppa.

RESUME

Quasigroups, mainly isotopic groups, Abelian groups, a special role is played by linear quasigroups, alinear quasigroups, generalized linear quasigroups (linear (left), right, alinear (left), right, mixed type of the first (second) kind) and T -quasigroups.

This paper provides a description of generalized linear quasigroups, as well as linear quasigroups using the forms of the quasigroup. It should be noted that in [1-2] some properties of the T -quasigroup in [3] linear quasigroups, in [4] left (right) linear quasigroups were studied Λ -form quasigroups. Similarly, for a quasigroup of mixed type of the first (second) kind, these properties are proved using Λ -form of quasigroups. In addition, a connection is established between different types of mixed-type quasigroups of the first (second) kind with T -quasigroups.

Key words: alinear quasigroup, linear quasigroup, Λ -form quasigroup, quasigroup of mixed type of the first kind, quasigroup of mixed type of the second kind, endomorphism, anti-automorphism, quasi-automorphism, T -quasigroup.

UDC 519.214

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ (Ц.П.Т) ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зупаров Т.М.

Чирчикский государственный педагогический университет

Жовлиев А.И.

ДЕНАУСКИЙ ИНСТИТУТ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА И ПЕДАГОГИКИ, ТЕРМЕЗ

РЕЗЮМЕ.

В работе рассматривается фиксированный линейный процесс $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$ где $k \in \mathbb{Z}$ и для него доказывается центральная предельная теорема и указывается оценка скорости сходимости к нулю распределения X_{kn} с некоторой нормировкой к $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – распределению стандартной нормальной величины $N(0, 1)$.

Ключевые слова. Линейный процесс, центральная предельная теорема, неравномерная оценка в центральной предельной теореме.

Введение и вспомогательные утверждения

Пусть $\{\xi_{in}, i \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность случайных величин (с.в.) заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$ – числовая последовательность.

Определение 1. Если ряд

$$X_{kn} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} \xi_{k-i,n}$$

сходится с вероятностью 1, то последовательность случайных величин $\{X_{kn}, k \in \mathbb{Z}\}$ называется линейным процессом с коэффициентами $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$ и порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{in}, i \in \mathbb{Z}\}$.

Замечание 1. Если линейный процесс $\{X_{kn}\}$ порожден инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ – независимых случайных величин и выполнены условия $E\xi_{jn} = 0, E\xi_{jn}^2 = \sigma_{jn}^2 < \infty$ и $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j}^2 < \infty$, то согласно теореме Хинчина-Колмогорова ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} \xi_{k-i,n}$ сходится с вероятностью 1 и в этом случае линейный процесс определен вполне корректно.

Сравнивая результаты, полученные для обычных и взвешенных сумм можно заключить, что на случай взвешенных сумм переноситься далеко не все факты, доказанные для обычных сумм. В частном случае взвешенных сумм $S(v) := \sum_{j=0}^{\infty} v^j \xi_j$, где $0 < v < 1$ – для схем суммирования независимых с.в. по Абелю в этом вопросе удастся продвинутся значительно дальше см([1],[7]).

Аналог известной теоремы Берри-Эссена для $S(v)$ получен в работе [4]. Дальнейшие исследования по предельным теоремам для схеме суммирования независимый с.в. по Абелю, когда каждая ξ_j имеет различные распределения проводились С.Х.Сираждиновым и М.У.Гафуровым [7], Т.А.Азларовым и Б. Мередовым [1]. Эти работы посвящены доказательству ц.п.т. и неравномерной оценки остаточного члена в ц.п.т. для Абелевой суммы $S(v)$. В последние годы возрос интерес к изучению асимптотики Абелевой суммы $S(v)$ с неслучайными коэффициентами при $v \rightarrow 1-$ в связи с тем, что, к этой схеме суммирования приводят многие прикладные задачи.

Легко заметить, что Абелевы суммы являются линейными процессами имеющий вид $X_0 = \sum_{j=0}^{\infty} v^j \zeta_{-j}$, $\zeta_{-j} = \xi_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ и поэтому возникает естественный вопрос остаются ли справедливыми результаты, полученные для Абелевых сумм и для общих линейных процессов. Ответ на поставленный вопрос положителен по крайней мере в случае центральной предельной теореме.

В данной работе рассматривается фиксированный линейный процесс $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$ где $k \in \mathbb{Z}$ и для него доказываемая центральная предельная теорема и указывается неравномерная оценка скорости сходимости к нулю распределения X_{kn} с некоторой нормировкой к $\Phi(x)$ – распределению стандартной нормальной случайной величины $N(0, 1)$.

В следующем разделе мы используем известное моментное неравенство Розенталя для сумм независимых с.в.

Лемма 1. (см. [5]) Пусть $\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{nn}$ набор независимых с.в. с $E\eta_{jn} = 0, E|\eta_{jn}|^t < \infty, j = 1, 2, \dots, n, t \geq 2$. Тогда

$$E \left| \sum_{j=1}^n \eta_{jn} \right|^t \leq c(t) \max \left\{ \sum_{j=1}^n E|\eta_{jn}|^t, \left(\sum_{j=1}^n E\eta_{jn}^2 \right)^{t/2} \right\},$$

где $c(t)$ – постоянная, зависящая только от t .

Для установления ц.п.т. для X_{kn} мы используем следующую ц.п.т. Линдеберга, доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [3], стр. 187, теорема 5 и теорема 7А.

Теорема 1. Пусть $\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nn}, n \geq 1$ – с.с.случайных величин с $E\eta_{kn} = 0, E\eta_{kn}^2 = \sigma_{kn}^2 < \infty$.

1) Если выполнено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_n) \quad \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n E\eta_{kn}^2 I\{|\eta_{kn}| \geq \varepsilon B_n\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{kn}^2$. Тогда $P\left(\frac{\zeta_n}{B_n} \leq x\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi(x)$ равномерно по x .

2) Если $E\eta_{jn}^3 < \infty, j = 1, 2, \dots, n$, то справедлива оценка

$$\Delta_n = \sup_x \left| P\left(\frac{\zeta_n}{B_n} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq CL_{3n}^{1/4},$$

где C абсолютная постоянная и $L_{3n} = \frac{\sum_{j=1}^n E|\eta_{jn}|^3}{B_n^3}$.

При получении оценок остаточного члена в ц.п.т. для линейного процесса $\{X_k\}$ потребуются следующая несколько видоизменённая оценка А.Бикиялиса [2] в ц.п.т. для независимых с.в.

Лемма 2. (см. [2]) Пусть $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}$ – независимые случайные величины, $M\eta_j = 0$ и для некоторого положительного $s; 2 < s \leq 3$,

$\beta_{j,s} = |\eta_j|^s < \infty (j = 0, 1, 2, \dots, n+1)$. Введем следующие обозначения:

$$\sigma_j^2 = M\eta_j^2, B_n^2 = \sum_{j=0}^{n+1} \sigma_j^2, L_s = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} |\eta_j|^s}{B_n^s}, \Delta_n(x) = \left| P\left(B_n^{-1} \sum_{j=1}^n \eta_j \leq x\right) - \Phi(x) \right|.$$

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\Delta_n(x) \leq \frac{C(s)}{(1 + |x|)^s} L_s, \quad (1)$$

где $C(s)$ положительное постоянное, зависящее только от s .

При получении оценки остаточного члена в ц.п.т. мы используем следующий общеизвестный утверждения (см, например [5]).

Лемма 3. Пусть X и Y с.в., $F(x)$ функция распределения и ε – произвольное положительное число. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sup_x |P(X + Y \leq x) - F(x)| &\leq \sup_x |P(X \leq x) - F(x)| + \\ &\sup_x |F(x + \varepsilon) - F(x)| + P(|Y| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Основные результаты

Лемма 4. Если линейный процесс $\{X_{kn}, k \in \mathbb{Z}\}$ порожден инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ – независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$E\xi_{jn} = 0, E|\xi_{jn}|^t = \beta_{jn,t} < \infty; t \geq 2,$$

имеет коэффициенты $\{a_{in}, i = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$, то для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$E \left| \sum_{j=l}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n} \right|^t \leq c(t) \left(\sum_{j=l}^{\infty} |a_{jn}|^t \beta_{k-j,n,t} + \left(\sum_{j=l}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{t/2} \right),$$

где $c(t)$ – постоянная, зависящая только от t .

Доказательство леммы следует из неравенства Розенталя (лемма 1.1): пусть l произвольное целое неотрицательное число. Тогда, используя неравенство Розенталя для любого заданного $m \geq l$, справедливо неравенство

$$E \left| \sum_{j=l}^m a_{jn} \xi_{k-j,n} \right|^t \leq c(t) \left(\sum_{j=l}^m |a_{jn}|^t \beta_{k-j,n,t} + \left(\sum_{j=l}^m a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{t/2} \right). \quad (2)$$

Теперь используя теорему о монотонной сходимости, мы из неравенства (2) при $m \rightarrow \infty$ получим доказательство леммы.

Теорема 2. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$ – линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn} = 0, \sigma_{jn}^2 = E\xi_{jn}^2 < \infty$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$ и выполнено условие $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 < \infty$. Кроме того, если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2}{\sum_{j=0}^n a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2} \rightarrow 0 \quad (3)$$

и выполнено следующее условие Линдеберга: для любого положительного ε при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\Lambda_n = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 E\xi_{k-j,n}^2 I\{|a_{jn} \xi_{k-j,n}| > \varepsilon B_n\} \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $B_n^2 = \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

где “ $\xrightarrow{D}$ ” означает сходимость по распределению.

Доказательство. Рассмотрим следующее разложение линейного процесса X_{kn} в виде суммы

$$X_{kn} = \sum_{j=0}^n a_{jn} \xi_{k-j,n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n} = X_{kn}^{(1)} + X_{kn}^{(2)},$$

где

$$X_{kn}^{(1)} = \sum_{j=0}^n a_{jn} \xi_{k-j,n}, \quad X_{kn}^{(2)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}.$$

Отсюда

$$\frac{X_{kn}}{B_n} = \frac{X_{kn}^{(1)}}{B_n} + \frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n}. \quad (5)$$

Согласна ц.п.т. Линдеберга (теорема 1), для первого члена в правой части разложения (5) справедливо следующее соотношение

$\frac{X_{kn}^{(1)}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь для доказательства теоремы 2 достаточно показать сходимость к нулю по вероятности, второго члена разложения (5) т.е. нужно доказать, что

$$\frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Для доказательства соотношения (6), используем известное неравенство Чебышева и независимость с.в. $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}\}$. Имеем

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X_{kn}^{(2)}}{B_n}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right| > \varepsilon B_n\right) \leq \frac{E\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}\right)^2}{\varepsilon^2 B_n^2} = \\ &= \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2}{\varepsilon^2 \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу условий (3) теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что в случае расходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2$ при отсутствие других условий линейный процесс X_{kn} не существует. Следовательно, сходимость этого ряда в теореме 2 является необходимым условием.

Из теоремы 2 непосредственно следует справедливость следующего следствия.

Следствие 1. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}$ — линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых, одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с $E\xi_{0n} = 0$, $\sigma_{0n}^2 = E\xi_{0n}^2 < \infty$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 < \infty$ и $\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2}{\sum_{j=0}^n a_{jn}^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Если выполнено условие Линдеберга (4) с $B_n^2 = \sigma_{0n}^2 \sum_{j=0}^n a_{jn}^2$, тогда $\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Из теоремы 2 также следует справедливость аналога теоремы Ляпунова для линейных процессов.

Следствие 2. Пусть X_{kn} — линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn} = 0$, $\sigma_{jn}^2 = E\xi_{jn}^2 < \infty$, $E|\xi_{jn}|^{2+\delta} < \infty$, где $\delta > 0$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 < \infty$ и (3) Кроме того, выполнено следующее условие Ляпунова: при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$L_{n\delta} := \frac{\sum_{j=0}^n E|a_{jn}\xi_{k-j,n}|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Тогда линейный процесс X_{kn} удовлетворяет центральной предельной теореме:

$$\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\begin{aligned} E|a_{jn}\xi_{k-j,n}|^{2+\delta} &\geq E|a_{jn}\xi_{k-j,n}|^{2+\delta} I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}| \geq \varepsilon B_n\} \geq \\ &\geq \varepsilon^\delta B_n^\delta E a_{jn}^2 \xi_{k-j,n}^2 I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}| \geq \varepsilon B_n\} \end{aligned}$$

и, значит,

$$\Lambda_n = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 E\xi_{k-j,n}^2 I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}| > \varepsilon B_n\} \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} \frac{\sum_{j=0}^n E|a_{jn}\xi_{k-j,n}|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}}.$$

Следовательно, из условия Ляпунова (7) следует условие Линдеберга (4). Отсюда следует доказательство следствия 2.

Если инновационная последовательность $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ в следствии 2 состоит из независимых и одинаково распределенных в каждой серии с.в., то дробь Ляпунова имеет вид

$$L_{n\delta} = \frac{\beta_{2+\delta,n}}{\sigma_{0n}^{2+\delta}} \frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^n a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}} = \rho_{2+\delta,n} \frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^{2+\delta}}{\left(\sum_{j=0}^n a_{jn}^2\right)^{1+\delta/2}},$$

где $\beta_{2+\delta,n} = E|\xi_{0n}|^{2+\delta}$ и $\rho_{2+\delta,n} = \frac{\beta_{2+\delta,n}}{\sigma_{0n}^{2+\delta}}$. В силу этого, из следствия 2.2 мы получим.

Следствие 3. Пусть X_{kn} – линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых, одинаково распределенных в каждой серии случайных величин с $E\xi_{0n} = 0, \sigma_{0n}^2 = E\xi_{0n}^2 < \infty, \beta_{2+\delta,n} = E|\xi_{0n}|^{2+\delta} < \infty$, где $\delta > 0$, коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$, которые удовлетворяют условиям $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 < \infty$ и

$$\frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^{2+\delta}}{(\sum_{j=0}^n a_{jn}^2)^{1+\delta/2}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда линейный процесс X_{kn} удовлетворяет центральной предельной теореме:

$$\frac{X_{kn}}{B_n} \xrightarrow{D} N(0, 1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В следующей теореме получена оценка остаточного члена в ц.п.т. для линейного процесса X_k .

Введем обозначения:

$$\bar{\Delta}_n(x) = |P(B^{-1}X_k \leq x) - \Phi(x)|, \\ B^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \sigma_{j-k}^2, \quad L_{ns} = \frac{\sum_{j=0}^n E|a_j \xi_{k-j}|^s}{B^s}, \quad B_n^2 = \sum_{j=0}^n a_j^2 \sigma_{j-k}^2.$$

При этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $X_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_{k-j}$ – линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ независимых случайных величин с $E\xi_j = 0, \sigma_j^2 = E\xi_j^2 < \infty, \beta_{js} = E|\xi_j|^s < \infty$, где $s > 2$, имеющих коэффициенты $\{a_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ удовлетворяющие условию $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \sigma_{j-k}^2 < \infty$.

Тогда справедливо неравенство

$$\bar{\Delta}_n(x) \leq C(s) \left\{ L_{ns} + B^{-s} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^s \beta_{j-k,s} + \left(B^{-2} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 \sigma_{j-k}^2 \right)^{s/2} \right\},$$

где $C(s)$ – постоянная, зависящая только от s .

Доказательство. В лемме 2 положим $\eta_j = a_j \xi_{k-j}, j = 0, 1, 2, \dots, n$ и $\eta_{n+1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \xi_{k-j}$.

Тогда $\Delta_n(E) = \bar{\Delta}_n(E)$ и так как, $\eta_j, j = 0, 1, 2, \dots, n+1$ очевидно являются независимыми, то неравенства (1) в данном случае имеет вид

$$\bar{\Delta}_n(x) \leq \frac{C(s)}{(1+|x|)^s} \frac{\sum_{j=0}^n E|\eta_j|^s + E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \xi_{k-j}\right|^s}{B^s}. \quad (8)$$

Применяя лемму 1 при $l = n+1$ и используя независимость с.в. $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$, получим

$$E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \xi_{k-j}\right|^s \leq C(s) \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^s \beta_{k-j,s} + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 \sigma_{k-j}^2 \right)^{s/2} \right\}. \quad (9)$$

Из (8), в силу последнего неравенства следует справедливость следующего неравенства

$$\bar{\Delta}_n(x) \leq \frac{C(s)}{(1+|x|)^s} \frac{\sum_{j=0}^n E|a_j \xi_{k-j}|^s + E\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \xi_{k-j}\right|^s}{B^s} \leq \\ \leq \frac{C(s)}{(1+|x|)^s} B^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^n |a_j|^s \beta_{k-j,s} + C(s) \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^s \beta_{k-j,s} + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 \sigma_{k-j}^2 \right)^{s/2} \right] \right\}.$$

Отсюда следует доказательство теоремы 2.

Из теоремы 2 непосредственно следует справедливость следующего следствия.

Следствие 4. Пусть X_k — линейный процесс, порожденный последовательностью $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ независимых, одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_0 = 0$, $\sigma^2 = E\xi_0^2 < \infty$, $\beta_s = E|\xi_0|^s < \infty$, где $s > 2$, коэффициенты которого удовлетворяют условию $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty$. Тогда

$$\bar{\Delta}_n(x) \leq C(s) \frac{\rho_s}{(1+|x|)^s} b^{-s} \left[\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^s + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 \right)^{s/2} \right],$$

где $b^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2$.

Для иллюстрации полученных результатов о ц.п.т. и оценки остаточного члена в ц.п.т. для линейных процессов, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $a_0 = 1$, $a_j = \frac{1}{j^\alpha}$, $\alpha > 1/2$ и инновационная последовательность $\{\xi_j\}$ состоит из независимых, одинаково распределенных с.в. с $E\xi_0 = 0$, $E\xi_j^2 = \sigma^2$. Тогда $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^{2\alpha}} < \infty$, но ц.п.т. не имеет места. Однако, если инновационная последовательность задана в схеме серий с дисперсией равной $\sigma_{n0}^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $a_{0n} = 1$, $a_{jn} = \frac{1}{j^\alpha}$, $\alpha > 1/2$ при $j = 0, 1, \dots, n$ и $a_{jm} = \frac{n^\beta}{j^\alpha}$, $\beta + 1 - 2\alpha < 0$ при $j \geq n+1$, то в этом случае л.п. подчиняется ц.п.т. Действительно, в этом случае

$$\sum_{j=0}^n a_{jn}^2 = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{2\alpha}} > 1 + \int_1^{n+1} x^{-2\alpha} dx > \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}$$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{n^\beta}{j^{2\alpha}} < n^\beta \int_n^{\infty} x^{-2\alpha} dx = \frac{n^{\beta+1-2\alpha}}{2\alpha - 1}$$

и, значит $\frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^{2+\delta}}{(\sum_{j=0}^n a_{jn}^2)^{1+\delta/2}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$\Lambda_n = \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 E\xi_{k-j,n}^2 I\{|a_{jn}\xi_{k-j,n}| > \varepsilon B_n\} \leq \sigma_{0m}^2 \frac{\sum_{j=0}^n a_{jn}^2}{B_n^2} = \sigma_{0n}^2 \rightarrow 0.$$

Таким образом выполнены все условия следствия 1, и поэтому из этого следствия следует справедливость ц.п.т.

Если неравенство $\beta + 1 - 2\alpha < 0$ не выполняется, то хотя справедливо условие Линдеберга, однако ц.п.т. может не иметь места.

Отметим, что такие примеры можно построить и для иллюстрации других результатов, полученных в данной работе.

Пример 2. В следствии 4 положим $a_j = v^j$, где v постоянное число удовлетворяющее условию $0 < v < 1$. Тогда справедливы равенства:

$$b^2 = \sum_{j=0}^{\infty} v^{2j} = \frac{1}{1-v^2}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^s = \sum_{j=0}^{\infty} v^{js} = \frac{1}{1-v^s}$$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} v^{2j} = \frac{v^{2(n+1)}}{1-v^2}$$

Теперь, выбирая $n = n(v, s)$ достаточно большим, мы из следствия 2.4 получим следующую оценку остаточного члена в ц.п.т. для Абелевой суммы $S(v)$.

$$\bar{\Delta}_v(x) \leq C(s) \frac{\rho_s}{(1+|x|)^s} (1-v^2)^{(s-2)/2}.$$

Эта оценка значительно лучше, чем оценка Гербера, полученная в статье [4].

В следующей теореме получена оценка остатка в ц.п.т для X_{kn} .

Теорема 3. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$ – линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $E\xi_{jn} = 0$, $\sigma_{jn}^2 = E\xi_{jn}^2 < \infty$, $\beta_{jB}^s = E|\xi_{jB}|^s < \infty$, $s \geq 3$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$ и $B_n^2 = \sum_{j=0}^n a_{jn}^2 \sigma_{j-k,n}^2$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_n \leq CL_{3n}^{1/4} + \frac{C(s)}{B_n^{s/(s+1)}} \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{jn}|^s \beta_{k-j,n}^s + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{s/2} \right\}^{1/(s+1)}, \quad (10)$$

где $\Delta_n = \sup_x \Delta_n(x)$.

Доказательство. Положим $X = B_n^{-1} \sum_{j=0}^n \eta_{jn}$ и $Y = B_n^{-1} \eta_{n+1,n}$, где $\eta_{jn} = a_{jn} \xi_{k-j,n}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ и $\eta_{n+1,n} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$. Тогда из леммы 1.3 при $F(x) = \Phi(x)$, получим

$$\Delta_n \leq \sup_x \Delta_n(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + P \left(\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n} \right| \geq \varepsilon B_n \right) \quad (11)$$

Применяя оценку в ц.п.т. сформулированную в теореме 1.1, имеем

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq CL_{3n}^{1/4}, \quad (12)$$

где $L_{sn} = \frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^3 \beta_{k-j,n}^3}{B_n^3}$. Чтобы оценить последнее слагаемое в правой части неравенства (11), мы используем сначала неравенство Чебышева, а затем Розенталя и получим, что

$$\begin{aligned} P \left(\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n} \right| \geq \varepsilon B_n \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^s B_n^s} E \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n} \right|^s \leq \\ &\leq \frac{C(s)}{\varepsilon^s B_n^s} \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{jn}|^s \beta_{k-j,n}^s + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{s/2} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенства (11), в силу оценок (12) и (13), получим

$$\Delta_n \leq CL_{3n}^{1/4} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \frac{C(s)}{\varepsilon^s B_n^s} \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{jn}|^s \beta_{k-j,n}^s + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{s/2} \right\}.$$

Отсюда, выбирая

$$\varepsilon = \frac{1}{B_n^{s/(s+1)}} \left\{ \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{jn}|^s \beta_{k-j,n}^s + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2 \sigma_{k-j,n}^2 \right)^{s/2} \right\}^{1/(s+1)},$$

мы приходим к неравенству (10). Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} \xi_{k-j,n}$ – линейный процесс, порожденный инновационной последовательностью $\{\xi_{jn}, j \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ независимых и в каждой серии одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_{0n} = 0$, $\sigma_{0n}^2 = E\xi_{0n}^2 < \infty$, $\beta_{0n}^s = E|\xi_{0n}|^s < \infty$, $s \geq 3$, имеющий коэффициенты $\{a_{jn}, j = 0, 1, 2, \dots, n \geq 1\}$ и $B_n^2 = \sigma_{0n}^2 \sum_{j=0}^n a_{jn}^2$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_n \leq C \rho_{3n}^{1/4} \left[\frac{\sum_{j=0}^n |a_{jn}|^3}{\left(\sum_{j=0}^n a_{jn}^2 \right)^{3/2}} \right]^{1/4} + C(s) \left\{ \rho_{sn}^{1/(s+1)} \frac{\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{jn}|^s \right)^{1/(s+1)}}{\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}^2 \right)^{s/2(s+1)}} + \left(\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{jn}^2}{\sum_{j=0}^n a_{jn}^2} \right)^{s/2(s+1)} \right\},$$

где $\rho_{sn} = \frac{\beta_{0n}^s}{\sigma_{0n}^s}$.

Литература

1. Т.А.Азларов, Б.Мередов, Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю, Изв. АН УзССР, сер. физ. – мат. наук, No5, 1977, 7 – 15.
2. Билялис А. Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме, Литовский матем. сб., (1966), 6, No3, стр. 323 – 346.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей, Москва “Наука”, 1986, 432 стр.
4. Gerber, H.U. The discounted central limit theorem and its Berry-Essen analogue, Ann. Math. Statist. 42, 1, 1971, 389 – 392.
5. Зупаров Т.М. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин, Теория вероятн. и ее прим., 1991, т.36, No4.
6. Rozenhal, H.P. On the subspace of m spanned by sequences of independent random variables, Israel Journal of Mathematics, 8, 1970, 273–303.
7. С.Х.Сираждинов, М.У.Гафуров, Замечание к одной предельной теореме, В сб. “Случайные процессы и статистические выводы”, вып.3 Изд-во. “Фан” УзССР, 1973, 170 – 172.

RESUME

The paper considers a fixed linear process: $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}$ – where $k \in \mathbb{Z}$. For this process, the Central Limit Theorem is proved. Additionally, an estimate of the rate of convergence to zero of the distribution of X_{kn} with some normalization, to the standard normal distribution: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – of the standard normal random variable $N(0, 1)$, is provided.

Key words: Linear process, Central Limit Theorem, non-uniform estimate in the Central Limit Theorem.

REZYUME

Ushbu ishda quyidagi ko'rinishdagi fiksirlangan chiziqli jaroyonlar ko'rib chiqiladi: $X_{kn} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn}\xi_{k-j,n}$ – bu yerda $k \in \mathbb{Z}$. Ushbu jaroyon uchun markaziy limit teoremasi isbotlanadi. Bunda X_{kn} taqsimotining ma'lum normallashtirish ostida, standart normal taqsimotga yaqinlashish tezligi uchun baho ham keltirilgan: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – bu yerda $\Phi(x) = N(0, 1)$ standart normal tasodifiy o'zgaruvchining taqsimot funksiyasi.

Kalit so'z Chiziqli jarayon, markaziy limit teorema, markaziy limit teoremadagi notekis baho.

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ
НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО
ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В СМЫСЛЕ МИЛЛЕРА - РОССА В
КЛАССАХ СОБОЛЕВА**

Касимов Ш. Г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
shokiraka@mail.ru

Кощанов А. П.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
allanazarkoshanov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи, для которой найдены её собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена решения поставленной начально - граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка, начально - граничная задача, дробная производная по времени, собственные значения, собственные функции, полнота, спектральный метод, существование, единственность, ряд.

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.141-143; 2; 3, с. 3375-3389; 4, с. 52-62; 5, с. 650-671; 6, с. 63-77; 7, с. 614-628; 8, с. 311-324; 9, с. 89-100; 10, с. 665-671]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [11, с. 364-374].

В работе [4] исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных трёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

В работе [6] изучена задача с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классе регулярных и обобщённых решений.

В работе [7] для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области изучена первая граничная задача. Показано, что корректность постановки задачи существенным образом зависит от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Установлен критерий единственности решения. Доказаны оценки устойчивости решения от заданных граничных функций и правой части.

В работе [12] для уравнения смешанного типа с дробными производными изучена первая граничная задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ортогонального ряда и показана его сходимость в классе регулярных решений

данного уравнения. Установлена устойчивость решения относительно заданных граничных функций в классе непрерывных и квадратично-суммируемых функций.

Отметим, что в работе [15] доказано теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. В работе [16] исследуется начально-граничная задачи для уравнения балки в многомерном случае и установлено теорема об однозначной разрешимости начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае. В работе [17] доказано о разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. В работе [25] доказано об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи, связанные с уравнениями колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе, с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

В работе [22] изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консолю закреплённой балки. Такие линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка описывает изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы при отсутствии вращательного движения при изгибе.

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$ где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$D_j^\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) + \sum_{p=1}^N a_\rho^2 \frac{\partial^{4\rho_p} u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial x_p^{4\rho_p}} + b^2 \sum_{p=1}^N a_\rho^2 D_j^\alpha \frac{\partial^{4\rho_p} u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial x_p^{4\rho_p}} + c^2 u(x_1, \dots, x_N, t) = f(x_1, \dots, x_N, t), \quad (x, t) \in Q, \quad n-1 \leq \alpha < n, \quad 0 \leq j \leq n-1, \\ N, \quad n, \quad j+1 \in \mathbb{N}, \quad \rho_p \in \mathbb{N}, \quad a_\rho > 0, \quad b > 0, \quad p = \overline{1, N}, \quad c = \text{const} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x), \quad i = 0, \dots, j-1, \quad \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \Big|_{t=0} = \varphi_s^0(x), \quad s = 0, \dots, n-j-1 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^{4k_p} u(x, t)}{\partial x_p^{4k_p}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} u(x, t)}{\partial x_p^{4k_p+1}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} u(x, t)}{\partial x_p^{4k_p+1}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+3} u(x, t)}{\partial x_p^{4k_p+3}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad (3)$$

$k_p = \overline{0, \rho_p - 1}, \quad p = \overline{1, N},$

где $(x, t) = (x_1, \dots, x_N, t) \in \Pi \times (0, T)$ и $f(x, t), \tilde{\varphi}_i^0(x), i = 0, \dots, j-1, \varphi_s^0(x), s = 0, \dots, n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N), (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N\}$ следующей спектральной задачи:

$$\sum_{p=1}^N a_\rho^2 \frac{\partial^{4\rho_p} v(x)}{\partial x_p^{4\rho_p}} - \lambda v(x) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^{4k_p} v(x)}{\partial x_p^{4k_p}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} v(x)}{\partial x_p^{4k_p+1}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+1} v(x)}{\partial x_p^{4k_p+1}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k_p+3} v(x)}{\partial x_p^{4k_p+3}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad (5)$$

$k_p = \overline{0, \rho_p - 1}, \quad j = \overline{1, N},$

λ – спектральный параметр. D_j^α – интегро-дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля.

Пусть $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ функция n раз непрерывно дифференцируемая и $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Дробная производная по Римана–Лиувилля порядка α определяется с равенством

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (6)$$

где $\Gamma(\cdot)$ —гамма-функция Эйлера. Эта функция удовлетворяет равенство $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Дробная производная или регуляризованной дробной производной по Капута порядка α определяется с равенством

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (7)$$

Справедлива формула

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, производная в смысле Римана–Лиувилля может быть представлена в виде суммы сингулярных членов

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (9)$$

и регуляризованной дробной производной по Капута порядка α :

$$\frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (10)$$

Присутствие слагаемых (9) приводит к тому, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие чётко физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная порядка α ($n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0), \quad (11)$$

которая была впервые введена в работе Капуто [13], а также независимо от него в работах Джрбашяном и Нерсесяном [20].

Как производные Римана–Лиувилля, так и производные Капуто не обладают ни полугрупповым свойством, ни тем более свойством коммутативности, т.е. существует функции $f(t)$ и $g(t)$, который

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha+\beta}f(t) &\neq \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}^\beta f(t), \quad \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}^\beta f(t) \neq \mathbf{D}^\beta \mathbf{D}^\alpha f(t), \\ \mathbf{D}^{(\alpha+\beta)}f(t) &\neq \mathbf{D}^{(\alpha)} \mathbf{D}^{(\beta)}f(t), \quad \mathbf{D}^{(\alpha)} \mathbf{D}^{(\beta)}f(t) \neq \mathbf{D}^{(\beta)} \mathbf{D}^{(\alpha)}f(t). \end{aligned}$$

В связи с этим Миллером и Россом [14] были введены так называемые секвенциальные производные, дробного порядка:

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = \mathbf{D}^{\alpha_1} \mathbf{D}^{\alpha_2} \dots \mathbf{D}^{\alpha_m} f(t), \quad (12)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Вообще говоря, в качестве оператора $\mathbf{D}^\alpha$, лежащего в основе секвенциальной производной Миллера–Росса, можно использовать оператор дробного дифференцирования по Риману–Лиувилля, Капуто или любую другую его разновидность. В частности, для целых α_i это может быть оператор обычного дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_i}$. Использование секвенциальных производных Миллера–Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений.

Выберем некоторое ν , $n-1 \leq \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha = (j, \nu-n+1, n-1-j)$, $j = 0, \dots, n-1$. Определим производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля и в смысле Миллера–Росса по Капуто с равенствами соответственно

$$\mathbf{D}_j^\nu f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{\nu-n+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t), \quad \mathbf{D}_j^{(\nu)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(\nu-n+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

где $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Эти производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля $D_j^\nu f(t)$ и в смысле Миллера–Росса по Капуа $D_j^{(\nu)} f(t)$ связаны с равенствами

$$\begin{aligned} D_0^{(\nu)} f(t) &= D^{(\nu)} f(t) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\ D_1^{(\nu)} f(t) &= D_0^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\ &\vdots \\ D_j^{(\nu)} f(t) &= D_{j-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\ D_{n-1}^{(\nu)} f(t) &= D_{n-2}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0), \\ D_{n-1}^\nu f(t) &= D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t), \end{aligned}$$

где $n-1 \leq \nu < n$, $l \in \mathbb{N}$ и для функции $f(t)$ производная порядка $l-1$ абсолютно непрерывная функция. Доказательство этих утверждений дано в работах Чикрий и Матичина [24].

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ вводится так:

$$\begin{aligned} (f(x), g(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)} &= (f(x), g(x))_{L_2(\Pi)} + \\ &+ \sum_{i_1=1}^N (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \\ &+ \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} g(x))_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Тогда соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 &= \|f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \sum_{i_1=1}^N \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left. \frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{4s_j-N}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{4s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{4s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{4s_j-N-6}{8}$, $j = \overline{1, N}$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$ функций N -переменных $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) = X_{m_1}(x_1) \cdot \dots \cdot X_{m_N}(x_N), \quad (13)$$

где

$$X_{m_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{1+d_{m_j}^{4s_j}}} \frac{1}{\sqrt{l} \cdot |ctgd_{m_j}l|} \left(\frac{\cos d_{m_j}(l-x_j)}{\sin d_{m_j}l} + \frac{chd_{m_j}(l-x_j)}{shd_{m_j}l} \right), \quad m_j \in \bar{\mathbb{Z}}_+,$$

d_{m_j} – корень трансцендентного уравнения $tgld = -thld$. Справедлива следующая

Теорема 1. Система собственных функций

$$\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \bar{\mathbb{Z}}_+^N} = \left\{ \prod_{j=1}^N X_{m_j}(x_j) \right\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \bar{\mathbb{Z}}_+^N} \quad (14)$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left. \frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-6}{8}$, $j = \overline{1, N}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Система собственных функций (14) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$.

Теоремы 1 и 2 доказана в работе 23.

Существование и единственность решения начально-граничной задачи. Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ назовем функцию $u(x, t)$ из класса $u(x, t) \in C(\bar{Q})$, $D_j^\alpha u(x, t) \in C(\bar{Q})$, $\frac{\partial^{4\rho_p} u(x, t)}{\partial x_p^{4\rho_p}} \in C(\bar{Q})$, $D_j^\alpha \frac{\partial^{4\rho_p} u(x, t)}{\partial x_p^{4\rho_p}} \in C(\bar{Q})$, $p = 1, 2, \dots, N$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left. \frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=0} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}} \right|_{x_j=l} = 0$ при $0 \leq k_j < \frac{2s_j-N-6}{8}$, $j = \overline{1, N}$.

Функцию $u(x, t)$ назовем регулярным решением задачи (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, если функция $u(x, t)$ регулярное решение уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 > 4\rho_1 + \frac{N}{2}$, $s_2 > 4\rho_2 + \frac{N}{2}$, $\dots$, $s_N > 4\rho_N + \frac{N}{2}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x, t)$ является регулярным решением задачи (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$.

Докажем теперь существование и единственность решения начально-граничной задачи. Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$ и правая часть $f(\cdot, t) \in C([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi))$.

Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; s+1 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; \alpha - i \right) + \\
& + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^{\alpha}; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x). \quad (15)
\end{aligned}$$

Здесь $E_{\eta}(x; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\eta^{-1} + \mu)}$ функция Миттаг-Леффлера, $\lambda_{m_1, \dots, m_N} = \sum_{p=1}^N a_p^2 d_{m_p}^{4\rho_p}$, где d_{m_p} корень трансцендентного уравнения $tgld = -thld$ и в каждом из интервалов $\frac{\pi m_p}{l} < d_{m_p} < \frac{\pi m_p}{l} + \frac{3\pi}{4l}$, $m_p = 0, 1, 2, \dots$, $p = 1, 2, \dots, N$ имеется равно один корень d_{m_p} , причем $\frac{\pi m_p}{l} + \frac{3\pi}{4l} - d_{m_p} \rightarrow 0$ при $m_p \rightarrow \infty$ и коэффициенты определяется по формулам

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} f(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_i^0(x) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx,$$

$i = 0, \dots, j-1$; $m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+$,

$$\varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \varphi_s^0(x) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+.$$

Доказательство. Введем функции

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} u(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad (16)$$

где

$$v_{m_1, \dots, m_N}(x) = \prod_{i=1}^N X_{m_i}(x_i). \quad (17)$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_m(t) = T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_j^{\alpha} T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(t), \quad m_p \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \quad (18)$$

$n-1 < \alpha \leq n$, $0 \leq j \leq n-1$, $N, n, j+1 \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $c = const$ и начальным условиям

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0, \quad i = 0, \dots, j-1; \quad m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \\
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^s T_{m_1, \dots, m_N}(t)}{dt^s} = \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \quad (19)
\end{aligned}$$

где

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} f(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad (20)$$

$$\tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_i^0(x) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad i = 0, \dots, j-1; \quad m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \quad (21)$$

$$\varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \varphi_s^0(x) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \bar{\mathbb{Z}}_+. \quad (22)$$

Решение задачи Коши (18), (19) известно (см., например [24]), и оно имеет вид

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; s+1 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; \alpha - i \right) + \\
& + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^{\alpha}; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau,
\end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\lambda_{m_1, \dots, m_N} = \sum_{p=1}^N a_p^2 d_{m_p}^{4\rho_p}, \quad (24)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; s + 1 \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha} \right)^q}{\Gamma(\alpha q + s + 1)}, \quad (25)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; \alpha - i \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha} \right)^q}{\Gamma(\alpha q + \alpha - i)}, \quad (26)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^{\alpha}; \alpha \right] = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot (t - \tau)^{\alpha} \right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha q)}. \quad (27)$$

Поскольку функции (16) построены в явном виде (23), то на основании полноты системы собственных функций (14) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, -[-\alpha]$. Тогда из формулы (20)–(22) и (23) следует, что

$$\int_{\Pi} u(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx = 0$$

при всех $m_1, \dots, m_N \in \overline{\mathbb{Z}}_+$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (14) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$.

Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x, t)$ непрерывна на $\bar{Q}$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ по переменной x является функцией из класса $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (14) спектральной задачи (4), (5):

$$u(x, t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x), \quad (28)$$

где $v_{m_1, \dots, m_N}(x) = \prod_{i=1}^N X_{m_i}(x_i)$, $T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ определяется по формуле (16).

После подстановки (23) в (28) мы получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; s + 1 \right) + \right. \\
& + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; \alpha - i \right) + \\
& \left. + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^{\alpha}; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x).
\end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку система собственных функций (14) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому ряд (29) сходится в $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ при любом $t \in [0, T]$. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$. Согласно теореме 2, система собственных функций (14) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(Q)$.

Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$ и правая часть $f(\cdot, t) \in C\left([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)\right)$. Тогда по теореме вложения Соболева справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{C^{4\rho, 4\rho, \dots, 4\rho}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; s+1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_i^0; m_1, \dots, m_N \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^{\alpha}; \alpha-i \right) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{\lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t-\tau)^{\alpha}; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right|^2 < const. \end{aligned}$$

Отсюда следует что, если начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j-1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n-j-1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, и правая часть $f(\cdot, t) \in C\left([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)\right)$, то регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда (15). Теорема 3 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. МГУ, М. 1999.
2. Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. Наука, М. 1965.
3. K.B. Sabitov, and A.G. Khakimov. Determination of the Spectrum of Frequencies and Vibrations of a Rectangular Plate, Mobily Employed Around the Edge, in Different Media // Mechanics of Solids, 2024, Vol. 59, No. 6, pp. 3375-3389. <https://doi.org/10.1134/S002565442460435X>
4. K.B. Sabitov. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate // Russian Mathematics. 2021. Vol. 65. No. 10. P. 52-62. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>.
5. K.B. Sabitov. Vibrations of plate with boundary "hinged attachment" conditions // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 26, No. 4. P. 650-671. [In Russian]. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>.
6. K.B. Sabitov. Plate oscillations with mixed boundary conditions // Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2023. No. 3. P. 63-77. [In Russian]. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>.
7. K.B. Sabitov. Direct and inverse problems for the equation of oscillations of a rectangular plate to find the source // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 614-628. [In Russian]. <https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>.
8. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, №2. С. 311-324.

9. Сабитов К.Б. К теории начально–граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №1, с. 89-100.
10. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №5, С. 665-671.
11. Сабитов К.Б. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференциальные уравнения, 2021, том 57, №3. С. 364-374.
12. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными // Изв. вузов. Матем., 2022, №9, С. 83-94. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-9-83-94.
13. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529-539.
14. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley & Sons, 1993.
15. O.A. Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes // Mathematics 2019, 7, 235. №1. P. 1-20. Basel, Switzerland.
16. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально–граничная задача для уравнения балки в многомерном случае // Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том 55, №10, с. 1379-1391.
17. Kasimov Sh.G., Ilhan O. A., Madraximov U.S., Baskonus H. M. Solvability of the mixed problem of a high-order PDE with fractional time derivatives, Sturm-Liouville operators on spatial variables and non-local boundary conditions // Rocky mountain journal of mathematics volume 49, number 4, 2019, pp. 1191-1206.
18. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М. 1969.
19. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М. 1965.
20. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3-29.
21. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. 1966.
22. Сабитов К.Б., Фадеева О.Б. Начально–граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 25, №1. С. 51-66.
23. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С., Кошанов А.П. Об однозначной разрешимости начально–граничной задачи колебаний балки, один конец которой заделан, а другой плавающий, в классах Соболева в многомерном случае // Бюллетень Института Математики, 2020, №3, стр. 119-136.
24. Chikriy A.A., Matichin I.I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Rossa // J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1-11.
25. Sh.G. Kasimov, and A.P. Koshanov. On the unambiguous solvability of a multidimensional initial-boundary value problem for the beam oscillation equation with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes // Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, (11), 5546-5558 (2024).

ANNOTATSIYA

Mazkur ishda Sobolev sinflarida qo'yilgan masala yechimining mavjudlik va yagonalik teoremasi isbotlangan. Qaralayotgan masalaning yechimi ko'p o'lchamli spektral masalaning xos funktsiyalari sistemasi bo'yicha yoyilgan qator ko'rinishida qurilgan, bunda xos qiymatlar transsendent tenglamaning ildizlari sifatida topilgan va mos xos funktsiyalar sistemasi qurilgan. Bu xos funktsiyalar sistemasi Sobolev fazolarida to'la va Riss bazisini tashkil etishi ko'rsatilgan. Xos funktsiyalar sistemasining to'laligi asosida qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimi olingan.

Kalit so'zlar: yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar, boshlang'ich-chegaraviy masala, vaqt bo'yicha kasr tartibli hosila, xos funktsiyalar, to'lalik, spektral usul, mavjudlik, yagonalik, qator.

ANNOTATION

The paper proves the theorem of the existence and uniqueness of the solution of the problem in Sobolev classes. The solution of the problem under consideration is constructed as the sum of a series according to the system of eigenfunctions of a multidimensional spectral problem, for which its eigenvalues are found as the roots of the transcendental equation and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev spaces. Based on the completeness of the system of eigenfunctions, solutions to the initial boundary value problem are obtained.

Key words: high-order partial differential equation, initial-boundary value problem, fractional time derivative, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, spectral method, existence, uniqueness, series.

УДК 517.55

СВОЙСТВА M -СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Мадрахимов Р. М.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, ТАШКЕНТ

mrugimbay@mail.ru

Омонов О. И.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, ТАШКЕНТ

o.i.omonov@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной статье представлены основные свойства M -субгармонической функции и доказано, что если срез-функция является M -гармонической на единичном шаре (поликруге), то функция является плюригармонической.

Ключевые слова: срез-функция, гармоническая функция, субгармоническая функция, плюригармоническая функция, M -гармоническая функция, M -субгармоническая функция.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — комплексное пространство ($n \geq 1$), $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат, граница которого является сферой

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}.$$

Когда $n = 1$, единичный поликруг в $\mathbb{C}$ будет обозначаться через U , а для $n > 1$

$$U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

Множество $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, j = 1, 2, \dots, n\}$ называется выделенной границей U^n .

Как известно, функция $f(z) \in C^2(D)$ называется плюригармонической в D , если она удовлетворяет следующим n^2 -дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Действительная функция $f(z)$, $-\infty \leq f(z) < \infty$ определенная в окрестности точки z_0 , называется полунепрерывной сверху в этой точке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\overline{\lim_{z \rightarrow z_0}} f(z) \leq f(z_0) \quad (1)$$

Определение 1. Функция $f(z): B \rightarrow [-\infty, \infty)$ называется M -гармонической (M -субгармонической) в шаре B , если она удовлетворяет условиям: а) $f(z)$ полунепрерывна сверху в B ; б) для каждой точки $z \in B$ имеет место равенство (неравенство)

$$f(a) = \int_S f(\varphi_a(rt)) d\sigma(t) \quad (f(a) \leq \int_S f(\varphi_a(rt)) d\sigma(t)) \quad (2)$$

для всех $a \in B$ достаточно малого радиуса r сферы σ .

Определение 2. Пусть B -единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Функция $f(z) \in C^2(B)$ называется M -гармонической (M -субгармонической) в B , если $\tilde{\Delta}f(z) = 0$ ($\tilde{\Delta}f(z) \geq 0$) в B , где

$$\tilde{\Delta}f(z) = \frac{4(1 - |z|^2)}{n + 1} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - z_i \bar{z}_j) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \quad (3)$$

(здесь $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$) инвариантный лапласиан в B [5].

Определение 3. Пусть U^n -единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$. Функция $f(z) \in C^2(U^n)$ называется М-гармонической (М-субгармонической) в U^n , если $\tilde{\Delta}f(z) = 0$ ($\tilde{\Delta}f(z) \geq 0$) в U^n , где

$$\tilde{\Delta}f(z) = 2 \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \quad (4)$$

инвариантный лапласиан в U^n [4].

Изучение теории гармонических функций с учетом инвариантного лапласиана активизировалось в 1960-х годах благодаря работам Фюрстенберга ([8], [9]), где появилось интегральное представление Пуанкаре для ограниченных гармонических функций на симметричных пространствах, а также расширение классической теоремы Фату ([12]) на интегралы Пуанкаре для шара и ограниченных симметричных областей Кораньи ([10]), Штейна и Вайса ([11], [13]). С тех пор проводятся активные исследования инвариантных гармонических функций и, в последнее время, теории инвариантного потенциала в целом.

У. Рудин в работе [3] получил следующий результат: если функция $u(z)$ гармоническая и М-гармоническая в B , является плюригармонической в B .

Р.М. Мадрахимов и М.Д. Ваисова в работе [15] доказали следующую теорему: если функция $u(z)$ гармоническая и М-субгармоническая в B , то является плюригармонической в B .

Основные результаты работы

Цель данной работы - сформулировать свойства М-субгармонических функций на шаре B и доказать следующую теорему о плюригармонических функциях в шаре B (поликруге U^n).

Свойство 1. Любая линейная комбинация с положительными коэффициентами М-субгармонических функций является М-субгармонической функцией.

Доказательство свойства 1. Докажем, что произведение М-субгармонической функции на положительную константу снова является М-субгармонической функцией.

Действительно, при умножении на положительную постоянную полунепрерывность сверху $\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} \mu f(z) \leq \mu f(z_0)$, так и условие $\mu f(z) \leq \int_S \mu f(\varphi_z(rt)) d\sigma(t)$ сохраняются.

Теперь докажем, что сумма двух М-субгармонических функций есть М-субгармоническая функция.

Пусть $f(z)$ и $h(z)$ -М-субгармонические функции. Функции $f(z)$ и $h(z)$ полунепрерывны сверху, т. е. выполняются $\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} f(z) \leq f(z_0)$ и $\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} h(z) \leq h(z_0)$. Также выполняются $f(z) \leq \int_S f(\varphi_z(rt)) d\sigma(t)$ и $h(z) \leq \int_S h(\varphi_z(rt)) d\sigma(t)$.

Отсюда следует, что $\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} f(z) + \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} h(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} [f(z) + h(z)] \leq f(z_0) + h(z_0)$ и $f(z) + h(z) \leq \int_S f(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) + \int_S h(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) = \int_S [f(\varphi_z(rt)) + h(\varphi_z(rt))] d\sigma(t)$. Таким образом, $f(z) + h(z)$ является М-субгармонической функцией.

Используя это, мы доказываем свойство 1. Пусть функции $f_j(z)$ ($j = 1, \dots, n$)- М-субгармонические функции, а λ_j ($j = 1, \dots, n$) - положительные действительные числа. Тогда $\lambda_j \cdot f_j(z)$, ($j = 1, \dots, n$) является М-субгармонической функцией.

Из этих свойств непосредственно следует доказательство свойства 1.

Свойство 2. Верхняя огибающая конечного числа М-субгармонических функций есть М-субгармоническая функция.

Доказательство свойства 2. В самом деле, пусть

$$F(z) = \max\{f_1(z), f_2(z), \dots, f_N(z)\} \quad (5)$$

есть верхняя огибающая М-субгармонических функций $f_j(z)$, ($j = 1, 2, \dots, N$). Очевидно, что $F(z)$ полунепрерывна сверху, потому что $f_j(z)$ полунепрерывны сверху. Далее легко проверить выполнение условия (2) для $F(z)$.

Действительно, $f_j(z) \leq F(z)$, где $j = 1, \dots, N$. Следовательно,

$$f_j(z) \leq \int_S f_j(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) \leq \int_S F(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) \quad (6).$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $f_j(z)$, то, в частности,

$$F(z) \leq \int_S F(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) \quad (7),$$

что и требовалось доказать.

В частности, из этого свойства вытекает, что верхняя огибающая конечного числа M -гармонических функций есть M -субгармоническая.

Свойство 3. Равномерно сходящаяся последовательность M -субгармонических функций имеет своим пределом M -субгармоническую функцию.

Доказательство свойства 3. Пусть $\{f_n(z)\}$ - заданная функциональная последовательность, а $f(z)$ равномерно сходящаяся к предельной функции, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$, $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

Покажем, что первая является полунепрерывной сверху функцией. $\{f_n(z)\}$ - M -субгармонические функции, значит, они полунепрерывны сверху, т.е., $\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} f_n(z) \leq f_n(z_0)$ (для всех $j = 1, 2, \dots$). Отсюда и из $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} f(z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0) \quad (8).$$

Следовательно, $f(z)$ - полунепрерывная сверху функция.

Теперь покажем, что условие (2) выполняется для предельной функции.

Поскольку $\{f_n(z)\}$ - M -субгармонические функции, известно, для любой функции последовательности выполняется неравенство

$$f_n(z) \leq \int_S f_n(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) \quad (9).$$

Поскольку оно сходится равномерно, можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) = \int_S \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) = \int_S f(\varphi_z(rt)) d\sigma(t) \quad (10).$$

Отсюда получаем $f(z) \leq \int_S f(\varphi_z(rt)) d\sigma(t)$. Итак, свойство доказано.

Пусть $f(z)$ - дважды дифференцируемая функция (то есть $f(z) \in C^2(B)$). Чтобы изучить поведение этой функции в различных направлениях внутри шара (поликруге), вводится понятие срез-функции.

Срез-функция определяется следующим образом:

$$f_{a,b}(\lambda) = f(a + \lambda b)$$

где $a \in B$ ($a \in U^n$), $b \in \mathbb{C}^n$. Срез-функция определяется для всех значений $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что точка $l_{a,b} = a + \lambda b \in B$ ($l_{a,b} = a + \lambda b \in U^n$). Согласно этому определению, функция $f_{a,b}(\lambda)$ становится функцией одной переменной по комплексному параметру λ .

Теорема 1. Функция $f(z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ является плюригармонической, если каждая функция $f_{a,b}(\lambda)$ является M -гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку у нас $n = 1$, то (3) принимает следующий вид:

$$\tilde{\Delta} f(z) = 2(1 - |z|^2) \left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - z \bar{z} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}} \right) = 2(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (11).$$

Согласно гипотезе теоремы, функция $f_{a,b}$ является M -гармонической. Это означает, что отображение $l_{a,b}(\lambda) = a + \lambda b$ является голоморфным, и функция $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$ получается как суперпозиция функции f и голоморфного отображения $l_{a,b}(\lambda)$. Если применить цепные правила из ([5], ст 9, уравнения (1.1) и (1.2)) дважды для функции $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$, то выражение (3) примет следующий вид:

$$(\tilde{\Delta} f_{a,b})(0) = \tilde{\Delta}(f \circ l_{a,b})(0) = 2(1 - |a|^2)^2 \sum_{i,j=1}^n b_j \bar{b}_i \frac{\partial^2 f(a)}{\partial a_i \partial \bar{a}_j} = 0. \quad (12).$$

Обозначим через $H_f(a)$ комплексный гессиан функции f в точке a , то есть матрицу размером $n \times n$, элементы которой имеют вид:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial \bar{a}_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial \bar{a}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial \bar{a}_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (12) может быть переписана в более компактном виде как:

$$(\tilde{\Delta} f_{a,b})(0) = 2(1 - |a|^2)^2 \langle H_f(a)b, b \rangle = 0, \quad (13)$$

где $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ обозначает эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, а $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что $1 - |a|^2 > 0$ для всех $a \in B$. Из этого следует, что все функции $f_{a,b}$ являются М-гармоническими в том и только в том случае, если комплексный гессиан функции f в каждой точке $a \in B$ равен нулю, то есть

$$H_f(a) = 0 \quad \text{для всех } a \in B.$$

А это, в свою очередь, эквивалентно тому, что все вторые смешанные производные функции f по переменным $a_i \in B$ и сопряженным переменным $\bar{a}_i \in B$ равны нулю для всех индексов, то есть выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial \bar{a}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (14)$$

Таким образом, можно сделать окончательный вывод: функция f является плюригармонической в B , так как выполнение равенства (14) и обнуление комплексного гессиана означают, что f удовлетворяет определению плюригармонической функции.

Теорема 2. Функция $f(z) : U^n \rightarrow \mathbb{R}$ является плюригармонической, если каждая функция $f_{a,b}(\lambda)$ является М-гармонической в пересечении U^n и $l_{a,b}$.

Доказательство теоремы 2. Мы доказываем теорему 2 так же, как и теорему 1, поскольку $\tilde{\Delta}_B = \tilde{\Delta}_U$, при $n = 1$. По условию теоремы, $f_{a,b}$ является М-гармонической функцией. Как и в теореме 1, если мы дважды применим правила цепочки к функции $f_{a,b} = f \circ l_{a,b}(\lambda)$, то (12) вытекает из (4).

Тогда выражение (12) преобразуется в (13). Это означает, что все функции $f_{a,b}$ являются М-гармоническими тогда и только тогда, когда комплексный Гессиан функции f , $H_f(a)$, равен нулю для всех точек $a \in U^n$, то есть, когда выполняется равенство (14).

Таким образом, f является плюригармонической функцией в U^n .

Хотя теоремы 1 и 2 имеют схожую структуру и идеи, мы предпочитаем рассматривать их отдельно, так как шар B и поликруг U^n не являются биголоморфными.

Из этих теорем вытекают следующие следствия:

Следствие 1. Функция $f(z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(z) : U^n \rightarrow \mathbb{R}$) является гармонической, если каждая функция $f_{a,b}$ является М-гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$ (U^n и $l_{a,b}$).

Следствие 2. Функция $f(z) : B \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(z) : U^n \rightarrow \mathbb{R}$) является М-гармонической, если каждая функция $f_{a,b}$ является М-гармонической в пересечении B и $l_{a,b}$ (U^n и $l_{a,b}$).

Определим Λ следующим образом:

$$\Lambda f(z) = \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$$

Следствие 3. Пусть функция $f_{a,b}$ удовлетворяет условию $\Lambda f_{a,b} = 0$ в пересечении B и $l_{a,b}$. Тогда функция $f(z)$ является плюригармонической.

Подводя итоги статьи, можно сказать, что изучены свойства М-субгармонических функций, аналогичные свойствам субгармонических функций. В теоремах 1 и 2 даны критерии плюригармоничности функций, определенных на единичном шаре и поликруге соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ronkin L. I. Introduction to the Theory of Entire Functions of Many Variables. - M. Nauka, 1971. - 432.
2. Shabat B.V. "Introduction to complex analysis" Part 2. M. Science. 1976.-321.
3. W. Rudin, Pluriharmonic functions in balls, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), 44-46.
4. Rudin U. Theory of functions in the unit ball from. // M. Mir. 1984.-457.
5. Stoll M., Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.
6. Madrakhimov R.M., Omonov O.I. Pluriharmonicity of M-harmonic functions, // Ilm sarchashmalari - Urganch-2018-12, pp. 12-14.
7. P.R. Ahem and Walter Rudin, "M-harmonic products", Indag. Math. 2 (1991), 141-147.
8. H. Furstenberg, A Poisson formula for semisimple Lie groups, Ann. of Math. 77 (1963), 335-386.
9. H. Furstenberg, Boundaries of Riemannian symmetric spaces; Symmetric Spaces, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., 1972.
10. A. Koranyi, The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. Math. 82 (1965), 332-350.
11. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
12. P. Fatou, Series trigonometriques et series de Taylor, Acta Math. 30 (1906), 335-400.
13. E. M. Stein and N. Weiss, On the convergence of Poisson integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 35-54.
14. Forelli F. pluriharmonicity in terme of harmonic slices//Math.Scand. 1977. V. 41. P. 358-364.
15. Madrakhimov R.M., Vaisova M.D. Criteria of pluriharmonicity of harmonic functions // Dan RUzyu Tashkent, 2008, No. 5. Pp. 19-20.
16. Madrakhimov R.M. Some criteria of pluriharmonicity. Izvestiya AN UzSSR. Ser. Phys. Mat. Nauk No. 3. 1986.

REZYUME

Ushbu maqolada M -subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari va agar birlik sharda (polidoirada) kesim-funksiya M -garmonik bo'lsa, u holda funksiya plyurigarmonik ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: kesim-funksiya, garmonik funksiya, subgarmonik funksiya, plyurigarmonik funksiya, M -garmonik funksiya, M -subgarmonik funksiya.

RESUME

This article presents the basic properties of the M -subharmonic function and proves that if the slice function is M -harmonic on the unit ball (polydisc), then the function is pluriharmonic.

Key words: slice function, harmonic function, subharmonic function, pluriharmonic function, M -harmonic function, M -subharmonic function.

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

МАМАДАЛИЕВ Н. А.НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ.
В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН, ТАШКЕНТ

m_numana59@mail.ru

ВАСИЕВА Х. Г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ

vasiyeva98@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования описываемая системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Изучена задача о переводе пучка траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ на терминальное множество M при геометрических ограничениях на управления игроков. С помощью модификации первого метода задачи преследования получены новые достаточные условия для разрешимости игровые задачи управления пучками траекторий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, терминальное множество, преследователь, убегающий, управлений.

Введение

Во второй половине двадцатого века одним из интенсивно развивающихся разделов современной математики стала теория управляемых процессов. Конфликтно управляемые процессы, описываемые дифференциальными уравнениями, называются дифференциальными играми. Настоящий термин был введен американским математиком Р. Айзексом - одним из основоположников теории дифференциальных игр. Исследования Айзекса по проекту кооперации RAND (США), выполненные в начале второй половины 20-го века, были опубликованы в 1965 году в виде монографии, "Дифференциальные игры"[1], в которой предложен оригинальный метод решения дифференциальных игр и достаточно глубоко выяснены все основные принципиальные трудности проблемы. При этом заслуживает внимание то, что стратегия противоборствующих сторон конструируется в виде синтезирующих функций, зависящих только от состояния игры. Р.Айзекс с помощью своего метода решил большое количество интересных прикладных задач и получил оригинальные результаты.

Становление и систематическое развитие теории дифференциальных игр началось в конце 50-х и начале 60-х годов XX столетия. Оно стимулировалось потребностями практики, большими успехами математической теории управления, теории игр и исследования операций. Прогресс теории дифференциальных игр связан прежде всего с именами советских и зарубежных математиков Л.С.Понтрягина, Н.Н. Красовского, Е.Ф. Мищенко, Р.Айзекса, У.Флеминга. Крупный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли Ю.С.Осипов, Р.В. Гамкрелидзе, А.И. Субботин, А.Б. Куржанский, А.В.Кряжмский, Ф.Л.Черноусько, В.Н.Ушаков, Н.Ю.Лукоянов, Б.Н.Пшеничный, Н.Ю.Сатимов, А.А.Азамов, А.Г.Ченцов, В.Е.Третьяков, Л.А.Петросян, М.С.Никольский, В.И.Максимов, Н.Н.Субботина, П.Б.Гусятников, Н.Л.Григоренко, В.И.Ухоботов, А.А. Чикрий и многие другие математики.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Л.С.Понтрягина и Н.Н.Красовского. Н.Н.Красовским и представителями его научной школы [2-3] был предложен и развит позиционный подход к дифференциальным играм. Этот подход, основанный

на конструктивных законах управления с обратной связью, позволил изучить структуру дифференциальных игр и выдвинул фундаментальный принцип построения разрешающих управлений-принцип экстремального прицеливания и сформулировать и доказать центральный результат теории позиционных дифференциальных игр - теорему об альтернативе. Затем была развита более общая концепция позиционной дифференциальной игры, доказаны теоремы существования цены игры и седловой точки, предложены конструктивные методы формирования оптимальных стратегий. Итоги подведены в совместной с А.И. Субботиным монографии "Позиционные дифференциальные игры"[2]. Обоснованы методы детерминированных и стохастических программных конструкций. Решение игровой задачи сводится к последовательному выбору экстремальных управлений, сохраняющих траекторию конфликтно управляемого процесса на стабильном мосту и приводящих траекторию по нему на терминальное множество.

Фундаментальные результаты по решению дифференциальных игр преследования и убегания получили Л.С.Понтрягин и Е.Ф.Мищенко. В работе [4] сформулированы достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх. В ней использован формализм принципа максимума - одного из центральных методов теории управления. Основной результат заключается в описании множества начальных позиций, из которых гарантируется возможность завершения преследования, а также в вычислении времени преследования, и способ формирования управления преследователя, реализующего процесс преследования. Результаты, полученные Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко привело к созданию Л. С. Понтрягиным первого и второго прямых методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных игр [5]. Наиболее простым и достаточно эффективным для решения конкретных задач преследования является первый метод Л.С.Понтрягина. Первый метод Л.С.Понтрягина послужил основой для многих обобщений, в частности, [6-8], а также этот метод имеет тесную связь с методом разрешающих функций [7]. В работе [8] разработан третий промежуточный прямой метод для линейных дифференциальных игр. А.Азамовым [10] обнаружена двойственность альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина.

Во всех упомянутых выше работах изучались дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что более реалистичная модель игры должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Простейший тип зависимости от прошлого в дифференциальных играх осуществляется через фазовые переменные. Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы А.В.Кряжмского, Ю.С. Осипова [11], А.Б.Куржанского [12], М.С.Никольского [13-14], А.А.Чикрий, Г.Ц.Чикрия [15]. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе, изучаются дифференциально-разностные игры преследования и убегания при геометрических и интегральных ограничениях на управления игроков, исследована структура дифференциальных игр.

I. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени [24, с. 198],[21]

$$\sum_{i=1}^m [A_i \dot{z}(t - h_i) + B_i z(t - h_i)] = f(u(t), v(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A_i, B_i (i = 1, 2, \dots, m)$ - постоянные $(n \times n), (n \times n)$ матрицы; функция $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ - непрерывна по совокупности переменных - блок управления. $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_m = h$ - фиксированные положительные числа; $u(t), v(t)$ - называются *управлениями* преследующего и убегającego игроков, соответственно, они выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot), v = v(\cdot)$, определенных на отрезке $[0, +\infty)$. Кроме того, они удовлетворяют ограничениям вида

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Измеримые функции $u(t), v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегającego игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M имеющий цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [4, с.411],[5],[6].

В пространстве $\mathbb{R}^n$, кроме терминального множества M выделено множество $N(X(\cdot))$, из точек которого исходят траектории игры (1), называется начальным множеством. В качестве начального множества $N(X(\cdot))$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения $X(t)$, $-h \leq t \leq 0$:

$$N(X(\cdot)) = \{\varphi(t) : z(t) = \varphi(t), \varphi(t) \in X, -h \leq t \leq 0\}.$$

Пусть $u = u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, и $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, – произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Через $z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$, обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек множества $N(X(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ на терминальное множество M .

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T , т.е. для каждой траектории $z(t)$, $t \in [0, +\infty)$, пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода*. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T .

Пусть $\tau > 0$, и $t \in [0, \tau]$. Через

$$X \underset{*}{\ast} Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y),$$

– обозначим геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ [см.[6, с.459]].

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами [23, с.199],[24]: а) $K(t) = \bar{0}$, $t < 0$, $\bar{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0; \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^m [A_i \dot{K}(t - h_i) + B_i K(t - h_i)] = 0, \quad (3)$$

при $t > 0$, $t \notin S^0$, где $S^0 = S \cup (-h, +\infty)$, $S = \{t : t = \sum_{i=0}^{\infty} j_i h_i\}$, j_i – целые числа.

Матричная функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$, $t \notin S^0$ но, в общем случае, имеет разрывы первого рода в точках множества S^0 .

Пусть $u = u(s)$, $v = v(s)$ – допустимые управления определены на отрезке $[0, t]$, $t > 0$, тогда для решения системы (1), при начальном условии $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$, ($z(s) = \varphi(s)$, $-h_m \leq s \leq 0$), в силу формулы Коши имеет место представление [23, с.193]

$$\begin{aligned} z(t) = & - \sum_{i=1}^m K(t - s - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(t - s - h_i) [A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s)] ds - \\ & - \int_0^t K(t - s) f(u(s), v(s)) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие множества [4]

$$F(t, v) = \pi K(t) f(P, v),$$

$$\widehat{W}(t) = \bigcap_{v \in Q} F(t, v), \quad W(\tau) = \int_0^\tau \widehat{W}(t) dt, \quad (4)$$

где $\pi K(t)f(P, v) = \{\pi K(t)f(u, v) : u \in P\}$.

Предположение 1. Для всех $t \geq 0$ отображение $\widehat{W}(t)$ не пусто.

Из предположения (1) следует, что $\text{dom} \widehat{W}(t) = [0, \infty)$. Тогда поскольку многозначное отображение $F(t, v)$ непрерывно на множестве $[0, \infty) \times Q$, то в силу утверждения 1.3.1 [6] отображение $\widehat{W}(t)$ полунепрерывно сверху, а значит, борелевское. Следовательно, согласно лемме 1.3.6 [6] и в соответствии с определением интеграла $W(\tau_1)$ существует хотя бы один борелевский суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, такая, что имеет место равенство $w = \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t) dt$. Зафиксируем ее.

Через $\Sigma = \{\tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t), t \geq 0\}$ обозначим совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $\widehat{W}(t)$. Далее, через $W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]$ обозначим следующее множество [16],[17]

$$W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau] = [M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))]] + \int_0^\tau \widehat{W}(t) dt, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} H[\tau, N(X(\cdot))] &= - \sum_{i=1}^m K(\tau - t - h_i) A_i X(0) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [A_i \dot{X}(t) + B_i X(t)] ds = \left\{ \sum_{i=1}^m K(\tau - t - h_i) A_i \varphi(0) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt : \varphi(t) \in X(t), -h_m \leq t \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и предположим, что при некотором $\tau = \tau_1 > 0$ имеет место включение

$$0 \in W_1[M_1 \ast H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]. \quad (6)$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за конечное время $T(N(X(\cdot))) = \tau_1$.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы (см.(6)), т.е. имеем

$$0 \in W_1[M_1 \ast H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + W(\tau_1). \quad (7)$$

Тогда (см.(7),(5)) найдутся вектор $d \in [M_1 \ast H[\tau_1, N(X(\cdot))]]$ и суммируемая функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$ такие, что

$$\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t), \quad \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t) dt = 0$$

В соответствии с (4) для произвольного фиксированного значения пары $(t, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ уравнения

$$\pi K(\tau_1 - t)f(u, v) = \tilde{w}(\tau_1 - t), \quad (8)$$

Относительно $u \in P$ имеет решение. Пусть для $(t, v) \in [0, \tau_1] \times Q$ вектор $u(t, v)$ - наименьшее в лексикографическом смысле решения уравнения (8). Можно показать, что функция $u(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, $v \in Q$, является лебеговски измеримой по t и борелевски измеримой по v [28, с. 179]. Поэтому для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, функция $u[t] = u(t, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_1$, будет лебеговски измеримой функцией [28, с.179]. Следовательно, в силу теоремы Филиппова-Кастена [28, с.179], уравнение (8) разрешима в классе измеримых функций.

Покажем, что при таком способе управления параметром u все траектории пучка $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попадают на терминальное множество M за время, не превосходящее $T(N(X(\cdot))) = \tau_1$.

Подставив в уравнение (1) вместо $u(t)$ и $v(t)$, функции $u[t]$, $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, соответственно, из формулы Коши для решения $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, после его проектирования на L , получаем

$$\pi z(\tau_1) = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) f(u[t], v(t)) dt = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \\
& + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt - \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t) dt = \\
& = - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt + d,
\end{aligned} \tag{9}$$

так как $d + w = 0$. Далее, имеем (см.(9))

$$\begin{aligned}
\pi z(\tau_1) &= - \sum_{i=1}^m \pi K(\tau_1 - t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau_1 - t - h_i) [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt + d \in \\
&\in [M_1 * H[\tau_1, N(X(\cdot))]] + H[\tau_1, N(X(\cdot))] \subset M_1,
\end{aligned}$$

в соответствии с определением геометрической разности $*$. Таким образом, для любого начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$ имеет место включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$ что эквивалентно включению $z(\tau_1) \in M_1$. Это означает, что задача управления пучками траекторий решена, а временем перевода является τ_1 . Теорема 1 доказана.

II. Пусть по-прежнему $\tau > 0$ и $t \in [0, \tau]$. Пусть d — произвольная точка множества $M_1 * H[\tau, N(X(\cdot))]$, $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — произвольная суммируемая функция $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = -d - f(\tau),$$

где $f(\tau) \in W(\tau)$. Далее, в соответствии с определением интеграла $W(\tau)$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что выполнено равенство $f(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(t) dt$. Зафиксируем его. Тогда вектор функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = -d - \int_0^\tau \tilde{w}(t) dt.$$

Для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ [8]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \pi K(t) f(P, v) - \tilde{w}(\tau - t) \right\}, & \text{если } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0, \\ \tau^{-1}, & \text{если } \xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|}, \quad \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0.$$

Введем обозначение $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \inf \{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q \}$.

Предположение 2. Существуют число $\tau = \tau_2 > 0$, вектор $d \in M_1 * H[\tau_2, N(X(\cdot))]$ и суммируемая функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $\tilde{w}(t) \in \widehat{W}(t)$, $d + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(t) dt \neq 0$, такие, что: а) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))$, функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $v \in Q$, при произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, являются суммируемыми; б) справедливо неравенство [25]

$$|\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt \leq 0. \tag{10}$$

Теорема 2. Если выполнено сформулированное выше предположение 2, то в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$ выполнены условия предположения 2. Для произвольной измеримой функции $v = v(r)$, $0 \leq t < +\infty$, $v(r) \in Q$, рассмотрим контрольную функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau$, определенную следующим образом:

$$0 < \rho(\tau; v(t), 0 \leq t \leq \tau) = |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^\tau \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t)) dt.$$

В силу п.б) предположения 2 существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_2]$ такой, что $\rho(t^*; v(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Пусть $\xi[t^*, \varphi(\cdot)] \neq 0$, и $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в противном случае

$$0 < \rho(\tau_2; v(t), 0 \leq t \leq \tau_2) = |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t)) dt \leq \\ \leq |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt,$$

что противоречит неравенству (10). Таким образом, пусть $\rho(t^*; v(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Учитывая этот факт рекомендуется значение $u[t]$ параметра u выбирать как первый компонент решения уравнений

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t)) = \tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)], \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad (11)$$

$$\pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \tilde{w}(\tau_2 - t), \quad t^* < t \leq \tau_2, \quad (12)$$

относительно $u \in P$. Используя лемму Филиппова–Кастена [28, с.179] можно показать существование измеримых решений уравнений (11), (12). Как обычно, за решение $u[t]$ уравнений (11), (12) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений уравнений (11), (12). При таком способе управления параметром $u[t]$ убедимся, что пучок траекторий $z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$, попадает на множество M за время, не превосходящее $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$. Действительно, (см. (11), (12)) имеем соотношение

$$d = -\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt = -\xi[t^*, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} [\pi K(t^* - t)f(u[t], v(t)) - \\ - \lambda(z_0(\cdot), t^*, \tau_2, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]]dt - \int_{t^*}^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \\ = -\xi[t^*, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(z_0(\cdot), t^*, \tau_2, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]dt - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = \\ = - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt, \quad (13)$$

ибо, из установленного выше равенства $\rho(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$ имеем (см. (13))

$$- \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt = d \in [M_1 \underline{H}[\tau_2, N(X(\cdot))]].$$

Из определения геометрической разности множеств следует, что

$$H[\tau_2, N(X(\cdot))] - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(u[t], v(t))dt \subset M_1.$$

Таким образом, учитывая произвольность начального положения $\varphi(\cdot) \in N(X(\cdot))$, пучок траекторий, из начального множества $N(X(\cdot))$ переведен на терминальное множество M за конечное время $T(N(X(\cdot))) = \tau_2$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. Мир, М. 1967.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Наука, М. 1974
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Наука, М. 1985
4. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Линейные дифференциальные игры. // Докл.АН СССР 1967. 174. С. 27–29
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования.// Мат. сб.1980. 112(154). С. 307–330

6. Понтрягин Л.С. Избранные труды.1988. Наука М. Т. 2.
7. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*, (Изд.МГУ, М.,1990).
8. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Наука думка. Киев. 1992
9. Сатимов Н.Ю. *К задаче преследования в линейных дифференциальных играх*, Дифференц. уравнения.9(11),2000-2009(1973).
10. Азамов А. *Математические труды*, (Ташкент:"Университет 2017).
11. Кряжимский А.В.,Осипов Ю.С.*Дифференциально - разностная игра сближения с функциональным целовым множеством*, Прикладная математика и механика,Т.37,1,3-13(1973).
12. Куржанский А.Б. *Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием*, Дифференциальные уравнения,7(8), 1398 - 1409(1971).
13. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Докл.АН СССР 1971. 197. С.1018-1021
14. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний.// Дифференц. уравнения 1972. С. 260-267
15. Чикрий А.А.,Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх.// Дифференц. уравнения. 1984. №20. С. 802-810
16. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий.// Докл.АН СССР. 1990. 314. С. 132-134
17. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий.// Дифференц. уравнения. 1991. вып. 27. С. 219-228
18. Мамадалиев Н. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания. // Международный научно-технический журнал Кибернетика и системный анализ. 2012. №5. вып. 1 С. 154-164
19. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков. // Изв.вузов.Матем. 2020. №3. С. 12-28
20. Мамадалиев Н.А. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков.// Сибирский математический журнал. 2015. т.56. №1. С. 129-148
21. Мамадалиев Н.А.,Мустапокулов Х.Я., Абдуманнопов М.М. Дифференциальные игры преследования нейтрального типа с интегральными ограничениями на управления игроков// Математическая теория игр и её приложения. 2024. Т.16. в.4. С.45-68.
22. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками траекторий. Л. 1981
23. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Мир. М. 1984
24. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные игры. М.: Мир. 1967. 548 с.
25. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий// Дифференциальные уравнения. Минск.1991. Т.27. №2. С. 219– 228.
26. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука. Том 2. 576 с.
27. Абдуалимова Г.М. Об одной игровой задаче управления пучками траекторий при наличии запаздывания// Бюллетень Института математики. Ташкент. 2023. 6, №2. С. 80-91.

28. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

REZYUME

Mazkur ishda o'yinchilarning boshqaruvlariga geometrik chegara qo'yilgan differensial-ayirmali neytral tipdagi differensial o'yinda trayektoriyalarni boshqarishning o'yin masalasi qaraladi. O'yinchilarning boshqaruvlariga geometrik chegara qo'yilgan holda $N(X(\cdot))$ boshlang'ich to'plamdan M terminal to'plamga trayektoriyalar dastasini o'tkazish haqidagi masala o'rganilgan. Quvish masalasining birinchi usulining modifikatsiyasi yordamida traektoriyalar dastasining boshqarish masalasini hal etish uchun yangi yetarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: differensial o'yin, quvish masalasi, neytral tipdagi differensial-ayirmali tenglama, terminal to'plam, quvlovchi, qochuvchi, boshqaruvlar.

RESUME

In this paper, we consider a quasilinear differential pursuit game described by a system of differential-difference equations of neutral type. We study the problem of transferring a bundle of trajectories from the initial set $N(X(\cdot))$ to the terminal set M under geometric constraints on the players' controls. Using a modification of the first method of the pursuit problem, we obtain new sufficient conditions for the solvability of game problems of controlling bundles of trajectories.

Key words: differential games, the pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, terminal set, pursuer, evader, controls.

УДК 517.55

ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УБЕГАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Мустапокулов Х. Я.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУТБЕКА, МЕЖДУНАРОДНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ НОРДИК, ТАШКЕНТ
m_hamdham@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается игра преследования и убегания, описываемая дифференциальными уравнениями второго порядка с импульсным управлением. Оба игрока обладают импульсным управлением, которое воздействует на объект в заранее заданные моменты времени и моделируется с использованием дельта-функции Дирака. Для данного класса дифференциальных игр получено достаточное условие поимки при применении П-стратегии в задаче преследования. Кроме того, в задаче убегания показано, что побег возможен при использовании определённой стратегии убегающего игрока.

Ключевые слова: разрешающая функция, импульсное управление, дифференциальная игра, задача преследования, задача убегания, П-стратегия.

Введение

Основную теорию дифференциальных игр сформулировали Р. Айзекс [1], Л.С. Понтрягин [2], Н.Н. Красовский [3], Б.Н. Пшеничный [4], Л.А. Петросян [5], А.А. Чикрий [6], А.И. Субботин [7] и др.

В теории дифференциальных игр задачи преследования-убегания занимают особое место в силу ряда специфических качеств. Одним из них является широта применения различных методов и оригинальность получаемых результатов [1, 2, 4, 5, 8]. Это качество отчетливо проявилось в модельных задачах. Например, пример Р. Айзекса, названный "игрой с линией жизни" [1, Задача 9.5.1] с простой динамикой игроков, был решен Л.А. Петросяном, который ввел специальную стратегию [5], названную стратегией параллельного сближения (кратко, П-стратегия). В дальнейшем П-стратегия эффективно применялась для решения других видов игр преследования [6, 9-12]. Позднее А.А. Чикрий [6] разработал разрешающие функции на основе объединения идей П-стратегии и первого прямого метода Л.С. Понтрягина [2].

В работе [13-16] рассмотрены дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими и интегральными ограничениями. Методом разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Указаны способы нахождения гарантированного времени и управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты применены к решению конкретных задач преследования.

В работах [17] рассмотрена задача преследования, в которой движения игроков описываются однотипными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка — уравнениями Мещерского. Мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью сводится к задаче с импульсным управлением. Указаны соответствующие управления игроков и оптимальное время завершения преследования. В [18] изучена дифференциальная игра преследования многих лиц с простыми нестационарными движениями каждого из игроков. С применением метода разрешающих функций доказывается теорема о поимке хотя бы одним из преследователей на основе импульсных контрстратегий. Доказывается аналогичная теорема при применении убегающим игроком импульсной стратегии.

В [19] рассматриваются игры преследования с простым движением, в которых игроки (преследователь, убегающий или оба) используют импульсные управления, воздействия на объект которых осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление выражается при помощи

дельта-функции Дирака. Для данного класса дифференциальных игр получены достаточные условия разрешимости задачи преследования и убегания.

1. Постановка задачи

Пусть в пространстве R^n управляемый объект P , называемый преследователем, гонится за другим объектом E , называемом убегающим. Вектор состояния преследователя обозначим x , вектор состояния убегающего через y , соответственно. В настоящей работе рассматривается задача преследования-убегания, динамические возможности которых описываются уравнениями [12]

$$P: \ddot{x} + a\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad (1.1)$$

$$E: \ddot{y} + a\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad (1.2)$$

где $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$, $a > 0$; x_0, y_0 — начальные состояния объектов, а x_1, y_1 — их начальные векторы скоростей. При этом требуется, чтобы $x_0 \neq y_0$ и $x_1 = y_1$.

Предположим, что $\tau_i = i\Delta$, $i \in N_0 = N \cup \{0\}$, где Δ — некоторый положительный период.

Классом допустимых управлений преследователя и убегающего игроков являются множество импульсных функции, которые выражаются при помощи дельта-функции Дирака [13-19]

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - i\Delta), \quad u_i \in S_\rho, \quad i \in N_0, \quad t \geq 0; \quad (1.3)$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - i\Delta), \quad v_i \in S_\sigma, \quad i \in N_0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

где S_ρ, S_σ — шары радиусов ρ и σ с центрами в начале координат, а ρ, σ — неотрицательные фиксированные числа.

Управляющие функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ игроков зависят от времени t , $t \geq 0$. Множество всех допустимых управляющих функций $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$), обозначается через U (через V).

В силу уравнений (1.1)-(1.2) каждые пары $(x_0, u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in U$, и $(y_0, v(\cdot))$, где $v(\cdot) \in V$, порождают траектории:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{x_1}{a}(1 - e^{-at}) + \frac{1}{a} \int_0^t u(s)(1 - e^{-a(t-s)})ds, \\ y(t) &= y_0 + \frac{y_1}{a}(1 - e^{-at}) + \frac{1}{a} \int_0^t v(s)(1 - e^{-a(t-s)})ds \end{aligned}$$

соответственно. Тогда $x(t)$ — называется траекторией движения преследователя, а $y(t)$ — траекторией движения убегающего.

Известно, что, если функции управления игроков P и E зависят только от времени t , $t \geq 0$, то они не гарантируют решения игр преследования и уклонения. Таким образом, допустимые типы управлений предполагают наличие стратегий. Ниже мы приведем основные определения и понятия.

Введем обозначения

$$z(t) = x(t) - y(t), \quad z(0) = z_0 = x_0 - y_0, \quad \dot{z}(0) = z_1 = x_1 - y_1. \quad (1.5)$$

Тогда, согласно (1.1), (1.2), (1.7), получаем начальную задачу

$$\ddot{z} + a\dot{z} = u - v, \quad (1.6)$$

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = z_1 = 0. \quad (1.7)$$

Следовательно, в качестве альтернативы игре (1.1)-(1.2) нами была сформирована игра (1.6) или для краткости игра (U, V) .

После подстановки в правую часть уравнения (1.6) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно теореме 1 [20, §1, гл.1] эта

система имеет решение при любом начальном условии (1.7) причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_{i-1}, τ_i) , $i \in N$, где N – множество натуральных чисел, а в моменты времени τ_i может иметь разрывы первого рода.

Определение 1.1. *Отображение $u: V \times R^n \rightarrow U$ называется стратегией преследователя, если выполнены следующие условия:*

(1) *Для каждого $v(\cdot) \in V$ выполнено включение $u(\cdot) = u(v(\cdot), z_0) \in U$ в некотором промежутке времени $[0, T]$, при этом, функция $u(t) = u(v(\cdot))$, $t \geq 0$ называется реализацией стратегии $u(v(\cdot))$, $v(\cdot) \in V$.*

(2) *Если для $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in V$ выполнено равенство $v_1(t) = v_2(t)$ почти всюду на $[0, T]$, то $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $[0, T]$, где $u_i(\cdot) = u(v_i(\cdot), z_0)$, $i = 1, 2$.*

Определение 1.2. *Стратегию $u = u(v(\cdot), z_0)$ принято называть стратегией параллельного преследования или П-стратегией, если для каждого $v(\cdot) \in V$ решение задачи Коши*

$$\ddot{z}(t) + a\dot{z}(t) = u(v(t), z_0) - v(t), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0$$

можно представить в виде

$$z(t) = \Lambda(t, v(\cdot))z_0, \quad \Lambda(0, v(\cdot)) = 1,$$

где $\Lambda(t, v(\cdot))$ – некоторая скалярная непрерывная функция по t , $t \geq 0$; функцию $\Lambda(t, v(\cdot))$ в дальнейшем назовем функцией сближения в задаче преследования.

Определение 1.3. *П-стратегия называется выигрышной для преследователя в промежутке времени $[0, T(u)]$ в игре (U, V) , начинающейся с (z_0, z_1) , если для любого управления $v(\cdot) \in V$ существует некоторое время $T^* \in T(u)$ такое, что $z(T^*) = 0$. При этом, число $T(u)$ будем называть гарантированным временем преследования или поимки.*

Теперь мы рассмотрим игру (U, V) с точки зрения игрока E .

Определение 1.4. *Стратегия $v^*(\cdot) \in V$ называется выигрышной для убегающего в игре (U, V) , начинающейся с (z_0, z_1) , если для любого управления $u(\cdot) \in U$ решение $z(t)$ задачи Коши*

$$\ddot{z}(t) + a\dot{z}(t) = u(t) - v^*(t), \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

не равно нулю, т.е. $z(t) \neq 0$ при каждом $t \in [0, +\infty)$.

В этой статье будут по отдельности исследованы следующие игровые задачи:

Задача преследования. Задача преследования в игре (1.1)-(1.2). Построить П-стратегию для преследователя и найти достаточное условие поимки.

Задача уклонения. Задача уклонения в игре (1.1)-(1.2). Установить оптимальную стратегию для убегающего и оценить, как изменить расстояние $|z(t)|$ между преследователем и убегающим.

2. Решение задачи преследования

В настоящем разделе П-стратегия будет определена на основе работ [5, 10-12] и будет взято достаточное условие поимки.

Для решения задачи преследования предположим, что в текущий момент времени t преследователю известны начальные параметры x_0, y_0 , текущий момент времени t и значение управления убегающего $v(t)$.

Если игроки P и E выделяют свои допустимые функции управления $u(\cdot) \in U$ и $v(\cdot) \in V$ соответственно, то, используя (1.3)-(1.7), получим вектор-функцию

$$z(t) = z_0 + \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} (u_i - v_i) (1 - e^{-a(t-i\Delta)}), \quad (2.1)$$

где $N(t) = [\frac{t}{\Delta}]$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

В силу (2.1) преследователь стремится к достижению равенства $z(t^*) = 0$ при некотором $t^* > 0$, а убегающий стремится сохранить соотношение $z(t) \neq 0$ при каждом t , $t \geq 0$.

Рассмотрим функцию

$$p(t) = 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \left(\frac{t}{\Delta} - e^{-at} \cdot \frac{e^{a(t+\Delta)} - 1}{e^{a\Delta} - 1} \right).$$

Следующее утверждение будет использовано для доказательства существования времени поимки.

Предложение 2.1. Пусть $\rho > \sigma$. Тогда уравнение

$$p(t) = 0, t \geq 0, \quad (2.2)$$

имеет один и только один положительный корень, который обозначим через T .

Для построения П-стратегии предположим, что преследователь знает начальные данные z_0 , ρ , σ и значение $v(t)$ в текущий момент времени t .

Определение 2.1. Пусть $\rho \geq \sigma$. Тогда в игре (U, V) функцию

$$u(z_0, v(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - i\Delta), t \geq 0, u_i = v_i - \lambda(z_0, v_i) \xi_0, i \in N_0, \quad (2.3)$$

назовем стратегией параллельного преследования (кратко П-стратегией) преследователя, где

$$\lambda(z_0, v_i) = \langle v_i, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v_i, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 - |v_i|^2}, \xi_0 = z_0/|z_0|, i \in N_0 \quad (2.4)$$

$\langle v_i, \xi_0 \rangle$ – скалярное произведение векторов v_i , $i \in N_0$ и ξ_0 в R^n . Функцию $\lambda(z_0, v_i)$, $i \in N_0$ обычно называют разрешающей функцией.

Теперь укажем некоторые важные особенности стратегии (2.3) и разрешающей функции (2.4).

Лемма 2.1. Разрешающая функция (2.4) определена и неотрицательна для всех $v_i \in S_\sigma$, $i \in N_0$, и эта функция ограничена следующим образом:

$$\rho - \sigma \leq \lambda(z_0, v_i) \leq \rho + \sigma, i \in N_0.$$

Доказательство. Максимальное и минимальное значения разрешающей функции (2.4) определяются для произвольного $v_i \in S_\sigma$, $i \in N_0$ следующим образом:

$$\min_{v_i \in S_\sigma} \lambda(z_0, v_i) = \lambda(z_0, v_i) \Big|_{v_i = -\sigma \xi_0} = \langle -\sigma \xi_0, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle -\sigma \xi_0, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 - |-\sigma \xi_0|^2} = \rho - \sigma,$$

$$\max_{v_i \in S_\sigma} \lambda(z_0, v_i) = \lambda(z_0, v_i) \Big|_{v_i = \sigma \xi_0} = \langle \sigma \xi_0, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle \sigma \xi_0, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 - |\sigma \xi_0|^2} = \rho + \sigma, i \in N_0.$$

Следовательно,

$$\rho - \sigma \leq \lambda(z_0, v_i) \leq \rho + \sigma, i \in N_0.$$

□

Определение 2.2. Если $\rho > \sigma$, то скалярная функция

$$\Lambda(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \lambda(z_0, v_i) (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \quad (2.5)$$

называется функцией сближением игроков в игре (U, V) .

Лемма 2.2. Пусть $\rho > \sigma$. То

а) для всех $v(\cdot) \in V$ функция (2.5) монотонно убывает по t , $t \geq 0$;

б) функция (2.5) ограничена для всех $t \in [0, T]$ следующим образом:

$$\Lambda_1(t, v(\cdot)) \leq \Lambda(t, v(\cdot)) \leq \Lambda_1(t, v(\cdot)) \quad (2.6)$$

где

$$\Lambda_1(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{\rho + \sigma}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \left(1 - e^{-a(t-i\Delta)}\right),$$

$$\Lambda_2(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \left(1 - e^{-a(t-i\Delta)}\right),$$

$$N(t) = \left[\frac{t}{\Delta}\right].$$

Доказательство. Пусть $\rho > \sigma$.

а) Определим производную по t от $\Lambda(t, v(\cdot))$ и из леммы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(t, v(\cdot))}{dt} &= -\frac{1}{|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \lambda(z_0, v_i) e^{-a(t-i\Delta)} \leq \\ &\leq -\frac{\rho - \sigma}{|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} e^{-a(t-i\Delta)} \leq 0, \quad t \in [\Delta i, \Delta(i+1)), \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

б) Из формулы (2.5) и леммы 2.1 получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, v(\cdot)) &\leq 1 - \frac{1}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \min_{v_i \in S_\sigma} \lambda(z_0, v_i) (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \leq 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \left(1 - e^{-a(t-i\Delta)}\right) = \Lambda_2(t, v(\cdot)), \\ \Lambda(t, v(\cdot)) &\geq 1 - \frac{1}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \max_{v_i \in S_\sigma} \lambda(z_0, v_i) (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \geq 1 - \frac{\rho + \sigma}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \left(1 - e^{-a(t-i\Delta)}\right) = \Lambda_1(t, v(\cdot)). \end{aligned}$$

□

Теорема 2.1. Если $\rho > \sigma$, то П-стратегия (2.3) является выигрышной для преследователя в промежутке времени $[0, T]$, а гарантированное время T .

Доказательство. Предположим сначала, что убегающий выбирает любое управление $v(\cdot) \in V$, а преследователь реализует П-стратегию (2.3). Тогда в силу (2.1) и (2.3) имеем

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} \lambda(z_0, v_i) \xi_0 (1 - e^{-a(t-i\Delta)}). \quad (2.7)$$

Перепишем (2.7) как

$$z(t) = z_0 \Lambda(t, v(\cdot)) \quad (2.8)$$

где $\Lambda(t, v(\cdot))$ то же самое, что и (2.5).

Из этого, из леммы 2.2 вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} |z(t)| &= |z_0| \cdot \left| \Lambda(t, v(\cdot)) \right| \leq |z_0| \cdot \left| \Lambda_2(t, v(\cdot)) \right| = \\ &= |z_0| \cdot \left| 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \sum_{i=0}^{N(t)} \left(1 - e^{-a(t-i\Delta)}\right) \right| = \\ &= |z_0| \cdot \left| 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \left(N(t) + 1 - e^{-at} \cdot \frac{e^{a\Delta(N(t)+1)} - 1}{e^{a\Delta} - 1} \right) \right| \leq \\ &\leq |z_0| \cdot \left| 1 - \frac{\rho - \sigma}{a|z_0|} \left(\frac{t}{\Delta} - e^{-at} \cdot \frac{e^{a(t+\Delta)} - 1}{e^{a\Delta} - 1} \right) \right| = |z_0| \cdot |p(t)|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из предложения 2.1 немедленно следует, что в момент T выполняется равенство $p(t) = 0$. Следовательно, (2.9) указывает на то, что существует конечное время $T^* \in [0, T]$, удовлетворяющее $\Lambda(T^*, v(\cdot)) = 0$. Из этого и учитывая (2.8), получаем $z(T^*) = 0$.

Следовательно, П-стратегия (2.3) гарантирует поимку убегающего на интервале времени $[0, T]$. $\square$

3. Решение задачи уклонения

В этом разделе в качестве стратегии убегающего будет взята постоянная функция и будет дано достаточное условие уклонения. Более того, мы обоснуем, что стратегия убегающего является оптимальной стратегией, а время T , указанное в теореме 2.1, является оптимальным временем поимки.

Определение 3.1. Назовем функцию управления

$$v^*(t) = - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sigma \xi_0 \delta(t - i\Delta) \right), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

стратегией убегающего в игре (U, V) .

Сформулируем наш основной результат для проблемы уклонения.

Теорема 3.1. Пусть $\rho \leq \sigma$. Тогда управление (3.1) является выигрышным в игре (U, V) для убегающего и при этом $|z(t)| \geq |z_0|$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что $\rho \leq \sigma$ и преследователь выбирает управление $u(\cdot) \in U$, а убегающий применяет стратегию (3.1). Тогда из (1.6) и (2.6) получаем

$$\begin{aligned} |z(t)| &= \left| z_0 + \frac{1}{a} \int_0^t (u(s) - v^*(s)) (1 - e^{-a(t-s)}) ds \right| = \\ &= \left| z_0 + \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} (u_i + \sigma \xi_0) (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \right| \geq \\ &\geq \left| z_0 + \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} \sigma \xi_0 (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \right| - \left| \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} u_i (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \right| \geq \\ &\geq \left| z_0 \right| + \frac{\sigma}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) - \frac{1}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} |u_i| (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \geq \\ &\geq |z_0| + \frac{\sigma - \rho}{a} \sum_{i=0}^{N(t)} (1 - e^{-a(t-i\Delta)}) \geq |z_0| \end{aligned}$$

при всех $t \geq 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
4. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. Т. 12. № 3. С. 145-146.
5. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific Publishing, 1993.
6. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
7. Subbotin A.I. Generalization of the main equation of differential game theory, Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, vol. 43, issue 1, pp. 103-133.

8. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Изд-во НУУз, 2019.
9. Азамов А. О задаче качества для игр простого преследования с ограничением // Сердика. Българско математическо списание. 1986. Т. 12. 1. С. 38-43.
10. Azamov A.A., Samatov B.T. The P-strategy: Analogies and applications, Contributions to Game Theory and Management, 2011, vol. 4, pp. 33-46.
11. Azamov A.A., Samatov B.T. P-strategy, Tashkent: National University of Uzbekistan, 2000.
12. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Differential game with 'lifeline' for Pontryagins control example, Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2023, vol. 61, pp. 94-113.
13. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков //Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2005. Т. 11. No 1. С. 212-224.
14. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков, Тр. ИММ УрО РАН, 2016, том 22, номер 3, 273-282.
15. Белоусов А.А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. No 11. С. 37-42.
16. Абдуалимова Г.М., Мамадалиев Н.А., Тухтасинов М. Достаточные условия разрешимости задачи преследования при импульсном воздействии, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 63:7 (2023), С. 1073-1083.
17. Ухоботов В.И., Троицкий А.А. Об одной задаче импульсного преследования // Вестн. ЮжноУрал. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, No 2. С. 79-87.
18. Котлячкова Е.В. К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 45, No 1. С. 106-113.
19. Мустапокулов Х.Я., Мамадалиев Н.А. Построение П-стратегий в игре простого преследования-убегания с импульсным управлением // Вестник НУУз. 2024. 2/2.1. С. 164-175.
20. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

REZYUME

Ushbu maqolada impuls boshqaruvli ikkinchi tartibli differensial tenglamalar orqali tavsiflanuvchi quvish-qochish o'yini qaralgan. Bunda o'yinchilar ikkalasi ham impuls boshqaruvlarga ega bo'lib, bu impuls ta'sirlari ob'ektga oldindan belgilangan vaqt momentlarda ta'sir etib, boshqaruv Dirakning delta-funksiyasi yordamida ifodalanadi. Ushbu differentsial o'yinlar sinfi uchun quvish masalasida P-strategiyani qo'llagan holda tutish vazifasining hal etilishi uchun yetarli shart olingan. Bundan tashqari qochish masalasida aniq bir strategiyani qo'llab, qochib ketish mumkinligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: differensial o'yin, quvish masalasi, qochish masalasi, P-strategiya, tutish.

RESUME

This paper considers a chase-escape game described by second-order differential equations with impulse control. In this case, both players have impulse controls, and these impulse effects act on the object at predetermined time instants, and the control is represented by the Dirac delta function. For this class of differential games, a sufficient condition is obtained for solving the capture problem using the P-strategy in the chase problem. In addition, it is shown that it is possible to escape using a specific strategy in the escape problem.

Key words: differential game, pursuit problem, escape problem, P-strategy, capture.

УДК 517.925

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ ОПИСЫВАЕМОЙ НЕОДНОРОДНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ УПРУГОСТИ

Рахимов А.М.

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, КАРШИ

abrorrahimov2094@gmail.com

Имомназаров Б.Х.

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ,

buned11998.07@mail.ru

Искандаров И.К.

ТИХООКЕАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ХАБАРОВСК, РОССИЯ,

iskandarovilkham@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости описываемое тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении. Получено решение данной задачи Коши на основе метода характеристик в виде формулы Даламбера. Показано влияние пористости на распространение акустических волн.

Ключевые слова: математическая модель, пористая среда, задача Коши, формула Даламбера, прямая задача, медленная волна, пористость.

Введение

В прикладных задачах теории волновых процессов часто приходится иметь дело с пористостью, флюидонасыщенностью среды и гидродинамическим фоном. Аналогичные вопросы возникают в разведочной геофизике при разработке нефтяных скважин и выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью оптимизации добычи. Такие вопросы возникают при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны для прогноза землетрясений [1-3].

В геофизике кинетические параметры горных пород, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, они также содержат сведения о литологии пород и характере их границ, трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений, а также о составе и фазовом состоянии флюидов-заполнителей порового пространства коллекторов. Математические моделирование волновых процессов позволяют определить значения скоростей распространения и коэффициентов поглощения упругих сейсмических волн в зависимости от вещественного состава флюидо-заполненного коллектора, его строения и влияния окружающей среды.

Выявленные особенности затухания сейсмических волн в трещиновато-пористых средах с одновременным проявлением множественных электросейсмических эффектов не удается согласовать с простейшими моделями идеальной теории упругости и среды типа Френкеля-Био. Реальные горные породы являются многофазными, электропроводящими, трещиноватыми, пористыми и т. д. [4-11].

В работе [9] предложена математическая модель распространения нелинейных волн в насыщенной жидкостью пористой упругодеформируемой среде. Модель основана на трех основных принципах: выполнения законов сохранения, принцип инвариантности группа вращений Галилея, согласованность уравнений движения насыщающей жидкости с условиями термодинамического равновесия:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u}_1 + \rho_l \mathbf{u}_2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\rho} \mathbf{j} \right) &= 0, \rho = \rho_l + \rho_s, \\
\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l \mathbf{u}_2) &= 0, \\
\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj} \partial_i u_{1j} + g_{ij} \partial_k u_{1j} + u_{1j} \partial_j g_{ik} &= 0, \\
\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} &= 0, \rho_s = \operatorname{const} \sqrt{\det(g_{ik})}, \\
\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k (\rho_s u_{1i} u_{1k} + \rho_s u_{2i} u_{2k} + p \delta_{ik} + h_{ij} g_{jk}) &= 0, \\
Q_k &= \left(\hat{\mu} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{TS}{\rho} \right) j_k + \rho_s (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) u_{1k} + u_{1i} h_{km} g_{mi}, \\
\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2 &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho} \nabla g_{ik}.
\end{aligned}$$

Здесь u_1 – скорость движения упругой пористой среды; u_2 – скорость насыщающей жидкости, $\rho = \rho_l + \rho_s$, ρ_s , ρ_l – плотность континуума, парциальная плотность пористого тела, парциальная плотность жидкости соответственно; g_{ik} – метрический тензор упругой деформации; h_{ik} – тензор напряжений; e , S – энергия и энтропия единицы объема; $\hat{\mu}$ – химический потенциал; T – температура; p – давление, j_0 – относительный импульс. При этом выполняется первое начало термодинамики для рассматриваемой системы

$$de_0 = TdS + \hat{\mu}d\rho + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, d\mathbf{j}_0) + \frac{1}{2} h_{ik} dg_{ik}.$$

В работе [12] получена формула решения задачи Коши для однородной системы пороупругости. В данной работе получена формула решения задачи Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости, которая описывается тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волн в пористой среде в обратимом приближении с учетом массовых сил F , описываемый одномерной неоднородной системой уравнений [9, 13, 14]

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - a_{12} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} = F_1(x, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} - a_{21} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - a_{22} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} = F_2(x, t), \quad (1)$$

где парциальные плотности $\rho_s = \rho_s^f(1 - d_0)$ и $\rho_l = \rho_l^f d_0$, ρ_s^f и ρ_l^f – физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно, d_0 – пористость,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s} + \left(\rho \alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho^2} \right) \rho_s - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}, \\
a_{12} &= \left(\rho^2 \alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho^2} - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho_s} \right) \frac{\rho_l}{\rho}, \\
a_{21} &= \left(\rho^2 \alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho} \right) \frac{\rho_l}{\rho} - \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho}, \\
a_{22} &= \left(\rho^2 \alpha_3 + \frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho} \right) \frac{\rho_l}{\rho},
\end{aligned}$$

α_3 , λ , μ – упругие параметры пористой среды [8, 9].

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений пороупругости (1), (2) со следующими данными Коши [10]:

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1(x) \quad (3)$$

$$u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_2(x) \quad (4)$$

Методология исследования

Удобно ввести новые функции $\tilde{u}_1$, $\tilde{F}_1$ и $\tilde{u}_2$, $\tilde{F}_2$ вместо u_1 , F_1 и u_2 , F_2 по формуле

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} c_{l_1}^2 - a_{22} & c_{l_2}^2 - a_{22} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix},$$

$$c_{l_1}^2 = B_* \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}} \right), \quad c_{l_2}^2 = B_* \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b_*}{B_*^2}} \right),$$

$$B_* = \frac{\alpha_3 \rho^2}{2} + \frac{\lambda + 2\mu/3}{2\rho} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \frac{\rho}{\rho_s} - 1 \right),$$

$$b_* = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho} \right) \left[\frac{\lambda + 2\mu/3}{\rho} \left(1 - \frac{\lambda + \frac{2}{3}\mu}{\lambda + 2\mu} \right) + \alpha_3 \rho^2 \right].$$

Тогда система уравнений пороупругости (1), (2) эквивалентна двум неоднородным уравнениям струны

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} - c_{l_1}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} = \tilde{F}_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial t^2} - c_{l_2}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x^2} = \tilde{F}_2, \quad (6)$$

Рассмотрим неоднородные системы (5), (6) с нулевыми данными Коши:

$$\tilde{u}_1|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{u}_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Функции

$$v_1(t, x, \tau) = \frac{1}{c_{l_1}} \int_{x-c_{l_1}t+c_{l_1}\tau}^{x+c_{l_1}t-c_{l_1}\tau} \tilde{F}_1(\tau, \xi) d\xi,$$

$$v_2(t, x, \tau) = \frac{1}{c_{l_2}} \int_{x-c_{l_2}t+c_{l_2}\tau}^{x+c_{l_2}t-c_{l_2}\tau} \tilde{F}_2(\tau, \xi) d\xi$$

являются решениями однородной системы

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c_{l_1}^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - c_{l_2}^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

с начальными данными Коши

$$v_1|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \tilde{F}_1(\tau, x), \quad (11)$$

$$v_2|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial t} \right|_{t=\tau} = \tilde{F}_2(\tau, x). \quad (12)$$

А функции

$$\tilde{u}_1(t, x) = \int_0^t v_1(t, x, \tau) d\tau, \quad \tilde{u}_2(t, x) = \int_0^t v_2(t, x, \tau) d\tau \quad (13)$$

являются решениями задачи (5) - (8) согласно принципу Дюамеля.

Решение задачи Коши для неоднородной системы пороупругости во всем пространстве в одномерном случае обобщают полученные формулы из [12] для однородной системы и представляется в виде:

$$\begin{aligned} u_1(t, x) = & \frac{c_{l_1}^2 - a_{22}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_1(x + c_{l_1}t) + \varphi_1(x - c_{l_1}t) + \frac{1}{c_{l_1}} \int_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t} \psi_1(\xi) d\xi \right] - \\ & \frac{(c_{l_1}^2 - a_{22})(c_{l_2}^2 - a_{22})}{2a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_2(x + c_{l_1}t) + \varphi_2(x - c_{l_1}t) - \frac{1}{c_{l_1}} \int_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t} \psi_2(\xi) d\xi \right] + \\ & \frac{(c_{l_1}^2 - a_{22})(c_{l_2}^2 - a_{22})}{2a_{21}(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_2(x + c_{l_2}t) + \varphi_2(x - c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}} \int_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t} \psi_2(\xi) d\xi \right] - , \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_{l_2}^2 - a_{22}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_1(x + c_{l_2}t) + \varphi_1(x - c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}} \int_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t} \psi_1(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{c_{l_1}} \int_0^t d\tau \int_{x-c_{l_1}t+c_{l_1}\tau}^{x+c_{l_1}t-c_{l_1}\tau} F_1(\tau, \xi) d\xi \\ u_2(t, x) = & \frac{a_{21}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_1(x + c_{l_1}t) + \varphi_1(x - c_{l_1}t) + \frac{1}{c_{l_1}} \int_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t} \psi_1(\xi) d\xi \right] - \\ & \frac{c_{l_2}^2 - a_{22}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_2(x + c_{l_1}t) + \varphi_2(x - c_{l_1}t) - \frac{1}{c_{l_1}} \int_{x-c_{l_1}t}^{x+c_{l_1}t} \psi_2(\xi) d\xi \right] + \\ & \frac{c_{l_1}^2 - a_{22}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_2(x + c_{l_2}t) + \varphi_2(x - c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}} \int_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t} \psi_2(\xi) d\xi \right] - , \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{a_{21}}{2(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2)} \left[\varphi_1(x + c_{l_2}t) + \varphi_1(x - c_{l_2}t) + \frac{1}{c_{l_2}} \int_{x-c_{l_2}t}^{x+c_{l_2}t} \psi_1(\xi) d\xi \right] + \frac{1}{c_{l_2}} \int_0^t d\tau \int_{x-c_{l_2}t+c_{l_2}\tau}^{x+c_{l_2}t-c_{l_2}\tau} F_2(\tau, \xi) d\xi$$

Классическим решением задачи (1) – (4) называется функции

$$u_1, u_2 \in C^2(R_+ \times R) \cap C^1(\bar{R}_+ \times R),$$

где C^k – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций.

Результаты

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(R), \psi_1, \psi_2 \in C^1(R), F_1, F_2 \in C^1(\bar{R}_+ \times R)$ тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(4), которое даётся формулой Даламбера, при этом справедлива оценка

$$\|u_1\|_{C([0,T] \times R)} + \|u_2\|_{C([0,T] \times R)} \leq C \left(\|\varphi_1\|_{C(R)} + \|\varphi_2\|_{C(R)} + \|\psi_1\|_{C(R)} + \|\psi_2\|_{C(R)} + \|F_1\|_{C([0,T] \times R)} + \|F_2\|_{C([0,T] \times R)} \right)$$

где $0 < C$ – некоторая константа, зависящая только от T .

Легко заметить, что при $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(R), \psi_1, \psi_2 \in C^1(R), F_1, F_2 \in C^1(\bar{R}_+ \times R)$ функции определенные формулами Даламбера (14), (15), дают нам классическое решение задачи (1)–(4).

Единственность классического решения сразу следует из единственности интегралов при получении формулы Даламбера.

Заключение

Таким образом, получена формула решения задачи Коши для одномерной неоднородной системы уравнений пороупругости, которая описывается тремя параметрами упругости в обратимом гидродинамическом приближении. Это решение является единственным в классическом смысле и для него можно получить оценку как в доказанной выше теореме. Полученные формулы могут быть использованы для тестирования численных методов решения задач волновой динамики пороупругости.

Литература

1. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб.ЖИМ. 2004. т.7, No. 1. С. 3-8.
2. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. 2001. т.IV, No. 2(8). С.154-165.
3. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.
4. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. 1944. Т. 8, No. 4. С. 133-150.
5. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range // J. Acoustic. Soc. America. 1956. V. 28, No. 2. P. 168-178.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 1. М: Наука. 1987.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть 2. М: Наука. 1987.
8. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упруго деформируемых средах // ФГВ. 1993. No. 1. с.100-111.
9. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science Publishers Inc.,1995. 192p.
10. Имомназаров Х.Х., Янгигоев З.Ш. Прямые и обратные задачи для систем уравнений гиперболического типа, Основные понятия, методы решения, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2022, 169с.
11. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. - М.: Недра, 1970. 339 с.
12. Abror Rakhimov, Kholmatzhon Imomnazarov d'alembert formula for poroelasticity system described by three elastic parameters // Journal of Mathematical Sciences, 2023, Vol. 274, No. 2, pp. 269-274.

13. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000, Т. 373, No.4, с.536-537.
14. Imomnazarov Kh.Kh. Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000, v. 13, No. 3, p 33-35.

REZYUME

Qaytariladigan gidrodinamik yaqinlashishda uchta elastiklik parametrlari bilan tavsiflangan bir o'lchovli bir jinsli bo'lmagan g'ovak elastik muhit tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini ko'rib chiqamiz. Berilgan Koshi masalasining yechimi xarakteristikalar metodi asosida D'alamber formulasi ko'rinishida topilgan. Akustik to'lqinlarning tarqalishiga g'ovaklikning ta'siri ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: matematik model, g'ovak muhit, Koshi masalasi, d'Alembert formulasi, to'g'ri masala, sekin to'lqin, g'ovaklik.

RESUME

We consider the Cauchy problem for a one-dimensional inhomogeneous system of poroelasticity equations described by three elasticity parameters in a reversible hydrodynamic approximation is considered. The solution of the Cauchy problem in the form of the d'Alembert formula is obtained. The effect of porosity on the propagation of acoustic waves has been shown.

Key words: mathematical model, porous medium, Cauchy problem, d'Alembert formula, direct problem, slow wave, porosity.

УДК 517.968

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕННИ-ЛЮК ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

РАХМОНОВ Ф. Д.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

farxod_frd@bk.ru

ХОЛТУРАЕВ Ф. С.

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА

Fedya-spets@mail.ru

РЕЗЮМЕ.

Представляют большой интерес с точки зрения приложений уравнения типа Бенни-Люка [1-20].

В прямоугольной области рассматривается уравнение в частных производных типа Бенни-Люк четного высокого порядка со смешанными условиями. Изучаются вопросы однозначной разрешимости данной задачи. Решение изучается в классе регулярных функций. Используются метод рядов Фурье разделения переменных. При доказательстве существования и единственности коэффициента Фурье от неизвестной функции применяется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающего отображения.

Ключевые слова: Уравнение типа Бенни-Люка, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, краевая задача, существования и единственности решения.

Постановка задачи. Исследуется классическая разрешимость краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого четного порядка. В прямоугольной области $\Omega = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < l\}$ рассматривается уравнение вида

$$D_{t,x}^{2+4k} U(t, x) = \nu \int_0^T K(t, s) U(s, x) ds + \alpha(t) \beta(x), \quad (1)$$

где

$$D_{t,x}^{2+4k} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} \right] - \omega(t) \left[(-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} \right],$$

T и l заданные положительные действительные числа, k заданное фиксированное положительное целое число, $\omega(t)$, $\alpha(t) \in C(\Omega_T)$ – заданные непрерывные функции, $\Omega_T \equiv [0; T]$, $\Omega_l \equiv [0; l]$, $\beta(x) \in C(\Omega_l)$ – заданная функция, $0 \neq K(t, s) = \sum_{i=1}^p a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t)$, $b_i(s) \in C[0; T]$. Здесь предполагается, что система функций $a_i(t)$, $i = \overline{1, p}$ и система функций $b_i(s)$, $i = \overline{1, p}$ являются линейно независимыми. Мы предполагаем, что для заданной функции $\beta(x)$ верны следующие граничные условия

$$\beta(0) = \beta(l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \beta(l) = \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \beta(l).$$

Найдем функцию $U(t, x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующим условиям

$$U(T, x) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$U_t(T, x) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

и условиям типа Дирихле для $0 \leq t \leq T$

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, l) =$$

$$= \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, 0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} u(t, l) = 0, \quad (4)$$

класс функций

$$U(t, x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{t,x}^{2,4k}(\Omega) \cap C_{t,x}^{2+2k}(\Omega), \quad (5)$$

где $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) - заданные гладкие функции и имеют место условия периодичности

$$\begin{aligned} \varphi_i(0) &= \varphi_i(l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_i(l) = \\ &= \dots = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(0) = \frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}} \varphi_i(l) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Разложение решения задачи (1)-(5) в ряд Фурье. Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(5) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \vartheta_n(x), \quad (6)$$

где

$$u_n(t) = \int_0^l U(t, x) \vartheta_n(x) dx, \quad \vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (7)$$

Предполагаем, что следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \vartheta_n(x), \quad (8)$$

где

$$\beta_n = \int_0^l \beta(x) \vartheta_n(x) dx. \quad (9)$$

Подставляя ряды Фурье (6) и (9) в уравнение в частных производных (1), получаем счетную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной t

$$\begin{aligned} u_n''(t) - \lambda_n \omega(t) u_n(t) &= \\ &= \frac{1}{1 + \mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}} \left(\nu \int_0^T \sum_{i=1}^p a_i(t) b_i(s) u_n(s) ds + \alpha(t) \beta_n \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lambda_n = \frac{\mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}}{1 + \mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}}$, $\mu_n^{2k} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}$.

Счетная система интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (10) решается обычным методом интегрирования

$$u_n(t) = A_{1,n} + A_{2,n} t + \gamma_n(t), \quad (11)$$

где $A_{1,n}$ и $A_{2,n}$ - произвольные постоянные,

$$\gamma_n(t) = \delta_n(t) + \sum_{i=1}^p h_{1i,n}(t) \tau_{i,n} + \beta_n h_{2,n}(t), \quad (12)$$

$$\delta_n(t) = \lambda_n \int_0^t (t-s) \omega(s) u_n(s) ds,$$

$$\tau_{i,n} = \int_0^T b_i(s) u_n(s) ds, \quad (13)$$

$$h_{1i,n}(t) = \int_0^t \frac{a_i(s)(t-s)}{1 + \mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}} ds, \quad h_{2,n}(t) = \int_0^t \frac{\alpha(s)(t-s)}{1 + \mu_n^{2k} + \mu_n^{4k}} ds.$$

С помощью коэффициентов Фурье (7) интегральные условия (2) и (3) записываются в следующем виде

$$u_n(T) = \int_0^l U(T, x) \vartheta_n(x) dx = \int_0^l \varphi_1(x) \vartheta_n(x) dx = \varphi_{1,n}, \quad (14)$$

$$u'_n(T) = \int_0^l U_t(T, x) \vartheta_n(x) dx = \int_0^l \varphi_2(x) \vartheta_n(x) dx = \varphi_{2,n}. \quad (15)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов интегрирования $A_{1,n}$ и $A_{2,n}$ в (11), воспользуемся условиями (14) и (15). Тогда с учетом (12) получим

$$\begin{aligned} u_n(t) = & \varphi_{1,n} D_0 + \varphi_{2,n} D_1(t) + \sum_{i=1}^p D_{2i,n}(t) \tau_{in} + \\ & + \beta_n D_{3,n}(t) + \int_0^T H_n(t, s) u_n(s) ds, \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты Фурье β_n определяются с помощью формулы (),

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{1+T}, \quad D_1(t) = \frac{t}{1+T} - \frac{2+T}{2(1+T)^2}, \\ D_{2i,n}(t) &= h_{1i,n}(t) - \frac{1}{1+T} \left[\int_0^T h_{1i,n}(t) dt + h_{1i,n}(T) \right] - \\ &- \left(\frac{2+T}{2(1+T)^2} + \frac{t}{1+T} \right) \left[\int_0^T h'_{1i,n}(t) t dt + h'_{1i,n}(T) \right], \\ D_{3,n}(t) &= h_{2,n}(t) - \frac{1}{1+T} \left[\int_0^T h_{2,n}(t) dt + h_{2,n}(T) \right] - \\ &- \left(\frac{2+T}{2(1+T)^2} + \frac{t}{1+T} \right) \left[\int_0^T h'_{2,n}(t) t dt + h'_{2,n}(T) \right], \\ H_n(t, s) &= \begin{cases} H_{1,n}(s), & t \leq s \leq T, \\ H_{2,n}(t, s), & 0 \leq s < t, \end{cases} \\ H_{1,n}(s) &= -\frac{\lambda_n}{1+T} \left[\frac{2(T-s) + (T-s)^2}{2} + \left(\frac{2+T}{2(1+T)} + s \right) (T-s+1) \right] \omega(s), \\ H_{2,n}(t, s) &= H_{1,n}(s) + \lambda_n(t-s) \omega(s). \end{aligned}$$

Подставляя представление (16) в обозначение (13), получаем систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$\tau_{i,n} - \nu \sum_{j=1}^p \tau_{j,n} \Phi_{i,j,n} = \varphi_{1,n} \Psi_{1i,n} + \varphi_{2,n} \Psi_{2i,n} + \beta_n \Psi_{3i,n} + \Psi_{4i,n}(u), \quad i = \overline{1, p}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,n} &= \int_0^T b_i(s) D_{2j,n}(s) ds, \quad \Psi_{1i} = D_0 \int_0^T b_i(s) ds, \\ \Psi_{2i} &= \int_0^T b_i(s) D_1(s) ds, \quad \Psi_{3i,n} = \int_0^T b_i(s) D_{3,n}(s) ds, \quad \Psi_{4i,n}(u) = \\ &= \int_0^T b_i(s) \int_0^T H_n(s, \theta) u_n(\theta) d\theta ds. \end{aligned}$$

Отметим, что из линейной независимости системы функций $a_i(t)$, $i = \overline{1, p}$ и системы функций $b_i(s)$, $i = \overline{1, p}$ следует, что $\Phi_{ij,n} \neq 0$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$Z_{1,n}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 - \nu \Phi_{11} & \nu \Phi_{12} & \dots & \nu \Phi_{1p} \\ \nu \Phi_{21} & 1 - \nu \Phi_{22} & \dots & \nu \Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu \Phi_{p1} & \nu \Phi_{p2} & \dots & 1 - \nu \Phi_{pp} \end{pmatrix},$$

$$Z_{ri,n}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 - \nu \Phi_{11} & \dots & \nu \Phi_{1(i-1)} & \Psi_{r1} & \nu \Phi_{1(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{1p} \\ \nu \Phi_{21} & \dots & \nu \Phi_{2(i-1)} & \Psi_{r2} & \nu \Phi_{2(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu \Phi_{p1} & \dots & \nu \Phi_{p(i-1)} & \Psi_{rp} & \nu \Phi_{p(i+1)} & \dots & 1 - \nu \Phi_{pp} \end{pmatrix},$$

где $\Phi_{ij} = \Phi_{ij,n}$, $i = \overline{1, p}$, $r = 1, 2, 3, 4$.

СССАУ (17) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется следующее условие не вырожденности для определителя Фредгольма

$$\Delta_{1,n}(\nu) = \det Z_{1,n}(\nu) \neq 0. \quad (18)$$

Определитель $\Delta_{1,n}(\nu)$ в (18) есть многочлен относительно ν степени не выше p . Уравнение $\Delta_{1,n}(\nu) = 0$ имеет не более p различных корней. Их обозначим через ν_q ($l = \overline{1, \ell}$, $1 \leq \ell \leq p$). Эти значения называются характеристическими числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Примем следующее обозначение

$\aleph_1 = \{ \nu : \nu \neq \nu_q, |\Delta_{1,n}(\nu)| > 0 \}$. На спектральном множестве $\aleph_1$ решения СССАУ (17) записываются в виде

$$\tau_{i,n} = \varphi_{1,n} \frac{\Delta_{1i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} + \varphi_{2,n} \frac{\Delta_{2i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} + \beta_n \frac{\Delta_{3i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} + \frac{\Delta_{4i,n}(\nu, u)}{\Delta_{1,n}(\nu)}, \quad \nu \in \aleph_1, \quad (19)$$

где $\Delta_{ri,n}(\nu) = \det Z_{ri,n}(\nu)$, $i = \overline{1, p}$, $r = 1, 2, 3, 4$.

Подставляя решение (19) в представление (16), получаем

$$u_n(t) = I(t; u_n) \equiv \varphi_{1,n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \beta_n E_{3,n}(t) +$$

$$+ E_{4,n}(t, u) + \int_0^T H_n(t, s) u_n(s) ds, \quad \nu \in \aleph_1, \quad (20)$$

$$E_{1,n}(t) = D_0 + \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{1i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} D_{2,n}(t), E_{2,n}(t) = D_1(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{2i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} D_{2,n}(t),$$

$$E_{3,n}(t) = D_{3,n}(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{3i,n}(\nu)}{\Delta_{1,n}(\nu)} D_{2,n}(t), E_{4,n}(t, u) = \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{4i,n}(\nu, u)}{\Delta_{1,n}(\nu)} D_{2,n}(t).$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (20) неизвестной функции в ряд Фурье (6), получаем

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) [\varphi_{1,n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \beta_n E_{3,n}(t) +$$

$$+ E_{4,n}(t, u) + \int_0^T H_n(t, s) u_n(s) ds], \quad \nu \in \aleph_1. \quad (21)$$

Ряд Фурье (21) является формальным решением краевой задачи (1)-(5).

Однозначная разрешимость счетной системы (20). Предполагается, что справедливы следующие условия:

$$!_1 = \max_{t \in \Omega_T} \max_n \{ |E_{1,n}(t)|; |E_{2,n}(t)|; |E_{3,n}(t)| \} < \infty,$$

$$!_2 = \max_{t \in \Omega_T} \max_n \{ |E''_{1,n}(t)|; |E''_{2,n}(t)|; |E''_{3,n}(t)| \} < \infty, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} !_3 &= \max \left\{ \int_0^T \|H(t, s)\|_{B_2(T)} ds; \int_0^T \|H''(t, s)\|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \\ !_4 &= \max \left\{ \int_0^T \|\bar{H}(t, s)\|_{B_2(T)} ds; \int_0^T \|\bar{H}''(t, s)\|_{B_2(T)} ds \right\} < \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

где $F_{n,m}(t) = \frac{D_{2,n,m}(t)}{\Delta_{1,n,m}(\nu)}$, $\bar{H}_n(t, s) = n^{4k} H_n(t, s)$.

Условия гладкости. Пусть для функций $\varphi_i(x)$, $\beta(x) \in C^{4k}(\Omega_l)$, в области Ω_l существуют кусочно-непрерывные производные порядка $4k+1$. Тогда, интегрируя по частям функций (9), (14) и (15) $4k+1$ раз по каждой переменной E , получаем следующие соотношения

$$|\beta_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \frac{|\beta_n^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}}, \quad |\varphi_{i,n}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \frac{|\varphi_{i,n}^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}}, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

где

$$\beta_n^{(4k+1)} = \int_0^l \frac{\partial^{4k+1} \beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \vartheta_n(x) dx, \quad \varphi_{i,n}^{(4k+1)} = \int_0^l \frac{\partial^{4k+1} \varphi_i(x)}{\partial x^{4k+1}} \vartheta_n(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Здесь справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\beta_n^{(4k+1)}]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+1} \beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \right]^2 dx, \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{i,n}^{(4k+1)}]^2 \leq \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+1} \varphi_i(x)}{\partial x^{4k+1}} \right]^2 dx, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости и (22), (23). Если

$$\rho = C_1 C_3 \sum_{i=1}^p \|\bar{\Delta}_{4i}(\nu)\|_{\ell_2} \int_0^T |b_i(s)| ds + C_3 < 1,$$

то для регулярных значений параметра $\nu \in \aleph_1$ ССФИУ (20) однозначно разрешима в пространстве $B_2(T)$, где $\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu, u) = \det \bar{Z}_{4i,n}(\nu, u)$, $i = \overline{1, p}$,

$$\bar{Z}_{4i,n}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 - \nu \Phi_{11} & \dots & \nu \Phi_{1(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{1(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{1p} \\ \nu \Phi_{21} & \dots & \nu \Phi_{2(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{2(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu \Phi_{p1} & \dots & \nu \Phi_{p(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{p(i+1)} & \dots & 1 - \nu \Phi_{pp} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,n}.$$

Искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = \varphi_{1,n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \beta_n E_{3,n}(t), \\ u_n^{r+1}(t) = I_2(t; u_n^r), \quad r = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Доказательство. Мы используем метод сжимающих отображений в пространстве $B_2(T)$. С учетом оценок (22), (23) и формул (24), применяем неравенство Коши-Буняковского и затем применяем неравенства Бесселя (25) и (26). Тогда получаем из заданного итерационного процесса, что справедлива следующая оценка для нулевого приближения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |u_n^0(t)| &\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} [|\varphi_{1,n}| + |\varphi_{2,n}| + |\beta_n|] \leq \\ &\leq C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{1,n}^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{2,n}^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\beta_n^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}} \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+1}}} \left[\left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_1(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_2(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} \right] < \infty. \quad (27)$$

Так как

$$E_{4,n}(t, u) = \sum_{i=1}^p \frac{\Delta_{4i,n}(\nu, u)}{\Delta_{1,n}(\nu)} D_{2,n}(t) = \sum_{i=1}^p \Delta_{4i,n}(\nu, u) F_n(t), \quad (28)$$

где $F_n(t) = \frac{D_{2,n}(t)}{\Delta_{1,n}(\nu)}$, то сначала нам надо получить оценку для $\Delta_{4i,n}(\nu, u^r) - \Delta_{4i,n}(\nu, u^{r-1})$:

$$\begin{aligned} |\Delta_{4i,n}(\nu, u^r) - \Delta_{4i,n}(\nu, u^{r-1})| &\leq |\Psi_{4i,n}(u^r) - \Psi_{4i,n}(u^{r-1})| \cdot |\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu)| \leq \\ &\leq |\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu)| \int_0^T |b_i(s)| \int_0^T |H_n(s, \theta)| \cdot |u_n^r(\theta) - u_n^{r-1}(\theta)| d\theta ds, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu, u) = \det \bar{Z}_{4i,n}(\nu, u)$, $i = \overline{1, p}$,

$$\bar{Z}_{4i,n}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 - \nu \Phi_{11} & \dots & \nu \Phi_{1(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{1(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{1p} \\ \nu \Phi_{21} & \dots & \nu \Phi_{2(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{2(i+1)} & \dots & \nu \Phi_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu \Phi_{p1} & \dots & \nu \Phi_{p(i-1)} & 1 & \nu \Phi_{p(i+1)} & \dots & 1 - \nu \Phi_{pp} \end{pmatrix},$$

$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,n}$. Учитывая представления (28) и оценку (29), аналогично оценке (27), для произвольной разности приближения получим, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |u_n^{r+1}(t) - u_n^r(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} [|E_{4,n}(t, u^r) - E_{4,n}(t, u^{r-1})| + \\ &+ \int_0^T |H_n(t, s)| \cdot |u_n^r(s) - u_n^{r-1}(s)| ds] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} \left[|F_n(t)| \sum_{i=1}^p |\bar{\Delta}_{4i,n}(\nu)| \times \right. \\ &\times \int_0^T |b_i(s)| \int_0^T |H_n(s, \theta)| \cdot |u_n^r(\theta) - u_n^{r-1}(\theta)| d\theta ds + \\ &+ \left. \int_0^T |H_n(t, s)| \cdot |u_n^r(s) - u_n^{r-1}(s)| ds \right] \leq \|F(t)\|_{B_2(T)} \sum_{i=1}^p \|\bar{\Delta}_{4i}(\nu)\|_{\ell_2} \times \\ &\times \int_0^T |b_i(s)| ds \int_0^T \|H(t, s)\|_{B_2(T)} \|u^r(s) - u^{r-1}(s)\|_{B_2(T)} ds + \\ &+ \int_0^T \|H(t, s)\|_{B_2(T)} \|u^r(s) - u^{r-1}(s)\|_{B_2(T)} ds \leq \rho \cdot \|u^r(t) - u^{r-1}(t)\|_{B_2(T)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\rho = C_3 \|F(t)\|_{B_2(T)} \sum_{i=1}^p \|\bar{\Delta}_{4i}(\nu)\|_{\ell_2} \int_0^T |b_i(s)| ds + C_3.$$

Согласно условию теоремы 1, $\rho < 1$. Следовательно, из оценки (30) следует, что оператор в правой части ССФИУ (20) сжимающий. Из оценок (27) и (30) следует, что существует единственная неподвижная точка $u(t) \in B_2(T)$, которая является решением ССФИУ (20) в пространстве $B_2(T)$ для регулярных значений параметра $\nu \in \aleph_1$. Теорема 1 доказана.

Основная неизвестная функция

Теорема 2. Неизвестная функция $U(t, x)$ определяется с помощью ряда (21). При этом данная функция непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u(t) \in B_2(T)$, формул (22)-(26) и оценок (27), (30), получаем для функции (21) оценку

$$\begin{aligned} |U(t, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)| \cdot |\varphi_{1n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \\ &\quad + \beta_n E_{3,n}(t) + E_{4,n}(t, u) + \int_0^T H_n(t, s) u_n(s) ds| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \left\{ C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+1}}} \left[\left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_1(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_2(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} \right] + \|F(t)\|_{B_2(T)} \sum_{i=1}^p \|\Delta_{4i}(\nu, u)\|_{\ell_2} + C_3 \|u(t)\|_{B_2(T)} \right\} < \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (21). Теперь функцию (21) дифференцируем нужное число раз

$$\begin{aligned} U_{tt}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) [\varphi_{1,n} E''_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E''_{2,n}(t) + \\ &\quad + \beta_n E''_{3,n}(t) + E''_{4,n}(t, u) + \int_0^T H''_n(t, s) u_n(s) ds], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} U(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{4k} \vartheta_n(x) [\varphi_{1n} E_{1,n}(t) + \varphi_{2,n} E_{2,n}(t) + \\ &\quad + \beta_n E_{3,n}(t) + E_{4,n}(t, u) + \int_0^T H_n(t, s) u_n(s) ds], \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично () и (), мы определим следующую функцию в виде разложения в ряды Фурье

$$\frac{\partial^{2k+2} U(t, x)}{\partial t^2 \partial x^{2k}}.$$

Доказательство сходимости ряда Фурье (32) сходится с доказательством сходимости ряда (21). Мы покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (33). С этой целью мы используем формулы (22)-(26). Применяем неравенство Коши-Буняковского и неравенство Бесселя. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}} U(t, x) \right| &\leq \frac{\pi^{4k}}{l^{4k}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{4k} |u_n(t)| \cdot |\vartheta_n(x)| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \left\{ C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1} \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \left[\left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_1(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \varphi_2(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| \frac{\partial^{4k+1} \beta(x)}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega_l)} \right] + \|F(t)\|_{B_2(T)} \sum_{i=1}^p \|\Delta_{4i}(\nu, u)\|_{\ell_2} + C_3 \|u(t)\|_{B_2(T)} \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично (34) устанавливаются следующие утверждения

$$\left| \frac{\partial^{2k+2} U(t, x)}{\partial t^2 \partial x^{2k}} \right| < \infty,$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J., Luke J.C.: Interactions of permanent waves of finite amplitude. *Journal Math. Physics*, 43, 1964, pp.309-313.
2. Gordeziani D.G., Avilishbili G.A. Solving the nonlocal problems for one-dimensional medium oscillation, *Math. Model.*, 12 (1), 2000, pp.94-103 (in Russian).
3. Yuldashev T.K. Nonlocal mixed-value problem for a Boussinesq-type integro-differential equation with degenerate kernel. *Ukrainian Math. J.* 68 (8), 2016, pp.1278-1296.
4. Yuldashev T.K. Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type. *Differential Equations*, 54 (10), 2018, pp.1384-1393.
5. Yuldashev T.K. On a boundary-value problem for Boussinesq type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument. *Lobachevskii Journal of Math.* 41 (1), 2020, pp. 111-123.
6. Ashurov R.R., Mukhiddinova A.T. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation. *Differential Equations*, 56 (12), 2020, pp.1550-1563.
7. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Zh.M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order. *Bulletin of the Karaganda university-Mathematics* 97 (1), 2020, pp.6-16.
8. Assanova A. An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order. *Turkish Journal of Math.* 43 (4), 2019, pp.1967-1978.
9. Denisov, A.M., Efimov, A.A. Iterative method for the numerical solution of an inverse coefficient problem for a system of partial differential equations. *Differential Equations*, 56 (7), 2000, pp.900-909.
10. Heydarzade N. A. On one nonlocal inverse boundary problem for the second-order elliptic equation. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics*, 40 (4), 2020, pp.97-109.
11. Isgenderova G.N., Huseynova A. F. On solvability of an inverse boundary value problem for the pseudo hyperbolic equation. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math.* 39 (4), 2019, pp.72-83.
12. Mamedov Kh.R. Uniqueness of the solution to the inverse problem of scattering theory for the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition. *Math. Notes* 74 (1), 2003, pp.136-140.
13. Romanov V.G. Inverse phaseless problem for the electrodynamic equations in an anisotropic medium. *Doklady Math.* 100 (2), 2019, pp.495-500.
14. Romanov V.G., Yamamoto M. Phaseless inverse problems with interference waves. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 26 (5), 2018, pp.681-688.
15. Yuldashev T.K. Inverse problem for a nonlinear Benney–Luke type integro-differential equations with degenerate kernel. *Russian Mathematics* 60 (9), 2016, pp.53-60.
16. Yuldashev T.K. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations. *Axioms* 9 (2), ID 45, 2020, pp.21.
17. Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a boundary value problem for Benney–Luke type differential equation with nonlinear function of redefinition and integral conditions. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics*, 41 (1), 2021, pp.172-183.
18. Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a Benney–Luke type Differential Equation with Nonlinear Boundary Value Conditions. *Lobachevskii Journal of Math.* 2021. 42 (15). 3761-3772.
19. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type differential equation. *AIP Conference Proceedings*. 2021. 2365 (060004). 1-20.
20. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения. *Бюллетень Института математики*, Vol. 4 (6), 2021, стр.100-112.
21. Рахмонов Ф.Д. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром. *Бюллетень Института математики*, Vol. 5 (1), 2022, стр.88-101.
22. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D., Ismoilov A.I. Integro-differential equation of Boussinesk with integral conditions and with a small parameter for mixed derivatives. *Itogi Nauki. VINITI, Moscow*, 2022. 211. P. 114-130. (in Russian).
23. Rakhmonov F. D. Identification of sources in a boundary value problem for Benney-Luke type differential equation with integral conditions. *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and*

Natural Sciences. Tashkent. Uzbekistan. 2023. 6 (3). P. 141-155.

24. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка. Журнал “Вестник НУУЗ”. Ташкент. Узбекистан. 2023. No 1/1. P. 69-78.

25. Onur Alp Ilhan, Danyal Soyba, Shakirbay G Kasimov, Farhod D Rakhmanov, Solvability of mixed problems for heat equations with two nonlocal conditions. Journal Mathematica Slovaca. De Gruyter. 2022. 72 (6). P. 1573-1584.

26. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Mixed problem for an integro-differential equation with a multidimensional pseudoparabolic operator and nonlinear deviation. Itogi Nauki. VINITI, Moscow, 2021. 201. P. 33-43. (in Russian).

27. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D.: Nonlocal Inverse Problem for a Pseudoheperbolic-Pseudoelliptic Type Differential Equation. Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational Models and Technologies (CMT2020)”, 24-25 August, 2020.

28. Рахмонов Ф.Д. Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка с нелинейной функцией переопределения. Журнал “Вестник НУУЗ”. Ташкент. Узбекистан. 2024. No 2/1. P. 152-168.

RESUME

In a rectangular domain, a partial differential equation of the Benney-Luke type of even high order with mixed conditions is considered. The issues of unique solvability of this problem are studied. The solution is studied in the class of regular functions. The Fourier series method of separation of variables is used. When proving the existence and uniqueness of the Fourier coefficient of an unknown function, the method of successive approximations is used in combination with the method of contraction mapping.

Key words: Benny-Luke type equation; integro-differential equation; degenerate kernel; boundary value problem; existence and uniqueness of a solution.

REZYUME

Bu masalada to'g'ri to'rtburchak sohada yuqori tartibli aralash shartli Benney-Lyuk turidagi xususiy hosilali differentsial tenglama ko'rib chiqiladi. Ushbu muammoning o'ziga xos yechilishi masalalari o'rganiladi. Yechim regulyar funksiyalar sinfida o'rganiladi. O'zgaruvchilarni ajratish usuli ya'ni Fur'e qatori usuli qo'llaniladi. Noma'lum funksiya Fur'e koeffisientining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda ketma-ket yaqinlashish usuli qisqartirib akslantirish usuli bilan birgalikda qo'llaniladi.

Kalit so'z Benney-Lyuk tipidagi tenglama; integro-differentsial tenglama; aynigan yadro; chegaraviy masala; yechimning mavjudligi va yagonaligi.

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

Рахмонов Ш. М.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
rahmonovshohruh91@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется дифференциально-геометрическая структура многообразия Грассмана $\text{Gr}(k, n)$, состоящего из всех k -мерных линейных подпространств в n -мерном вещественном векторном пространстве. Основное внимание уделено явному построению атласа гладких карт и анализу свойств функций перехода между ними.

Доказано, что для произвольного набора индексов $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ соответствующее координатное отображение $\phi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ является гомеоморфизмом, где U_I – открытое подмножество в $\text{Gr}(k, n)$. Установлена гладкость (бесконечная дифференцируемость) функций перехода $\psi_{IJ} = \phi_J \circ \phi_I^{-1}$ на пересечениях карт.

На примере многообразия $\text{Gr}(2, 4)$ проведены детальные вычисления, демонстрирующие явный вид функций перехода между различными координатными картами. Показано, что эти функции выражаются в виде рациональных отображений с ненулевыми знаменателями, что гарантирует их корректность и гладкость.

Полученные результаты имеют важное значение для приложений в дифференциальной геометрии, алгебраической топологии и математической физике, где многообразия Грассмана играют ключевую роль.

Ключевые слова: многообразие Грассмана, гладкий атлас, функции перехода, дифференциальная геометрия, координатные карты.

Многообразия Грассмана $\text{Gr}(k, n)$, введенные Германом Грассманом в 1844 году, являются фундаментальными объектами в современной математике. Их значение простирается от алгебраической геометрии до теоретической физики:

Многообразия Грассмана $\text{Gr}(k, n)$, представляющие собой пространства всех k -мерных подпространств в n -мерном векторном пространстве, занимают центральное место в современной дифференциальной геометрии и топологии [1,3]. Их изучение имеет фундаментальное значение как для теоретической математики, так и для приложений в физике, включая теорию струн и квантовую теорию поля.

Анализ топологических свойств многообразий Грассмана был начат в классических работах по алгебраической топологии [1,3]. В монографиях [2,6,8] подробно исследована их риманова геометрическая структура. Современный подход к изучению гладких структур изложен в [4,7], где особое внимание уделено методам дифференциальной топологии.

Однако, как показал наш анализ литературы, существующие исследования содержат несколько существенных пробелов:

- Недостаточно подробно описаны явные конструкции координатных карт для общего случая $\text{Gr}(k, n)$
- Отсутствует систематический анализ гладкости функций перехода между картами
- Недостаточно изучены частные случаи малой размерности (например, $\text{Gr}(2, 4)$)

Основная цель данной работы - восполнить указанные пробелы путем детального исследования гладкой структуры многообразий Грассмана. Конкретные задачи включают:

1. Построение явных координатных карт на $\text{Gr}(k, n)$ с использованием метода проективных координат

2. Доказательство гладкости (бесконечной дифференцируемости) функций перехода
3. Явное вычисление функций перехода для случая $\text{Gr}(2, 4)$
4. Исследование особенностей полученных отображений

Основная гипотеза исследования состоит в том, что функции перехода между любыми двумя координатными картами на $\text{Gr}(k, n)$ являются рациональными отображениями с ненулевыми знаменателями, что гарантирует их бесконечную дифференцируемость.

Определение 1. Многообразие Грассмана $\text{Gr}(k, n)$ есть множество всех k -мерных линейных подпространств n -мерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$:

$$\text{Gr}(k, n) = \{W \subset V \mid \dim W = k\}$$

Фиксируем стандартный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $V \cong \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.[3] Размерность $\text{Gr}(k, n)$ равна $k(n - k)$.

Доказательство. Каждое k -мерное подпространство может быть задано как линейная оболочка k линейно независимых векторов. В матричной форме это соответствует матрице размера $k \times n$ ранга k . Число свободных параметров после учёта эквивалентности при линейных преобразованиях базиса составляет $k(n - k)$.

Для каждого упорядоченного набора индексов $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ определим:

$$L_I = \text{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$$

$$U_I = \{W \in \text{Gr}(k, n) \mid W \cap L_I^\perp = \{0\}\}$$

где $L_I^\perp = \text{span}\{e_j \mid j \notin I\}$

Лемма 2. Семейство $\{U_I\}$ образует открытое покрытие $\text{Gr}(k, n)$. [7]

Доказательство. Для любого $W \in \text{Gr}(k, n)$ найдётся такой набор индексов I , что проекция $\pi_I : W \rightarrow L_I$ является изоморфизмом. Это эквивалентно условию $W \cap L_I^\perp = \{0\}$, то есть $W \in U_I$.

Для $W \in U_I$ определим координатное отображение $\phi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ следующим образом:

1. Выберем базис $\{w_1, \dots, w_k\}$ в W такой, что:

$$w_j = e_{i_j} + \sum_{m \notin I} a_{jm} e_m, \quad j = 1, \dots, k$$

2. Положим $\phi_I(W) = (a_{jm}) \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$

Теорема 1. Для каждого I отображение ϕ_I является гомеоморфизмом.

Доказательство. 1. **Инъективность:** Разные подпространства имеют разные координаты, так как базисы однозначно определяются проекцией на L_I .

2. **Сюръективность:** Любая матрица (a_{jm}) задаёт подпространство:

$$W = \text{span} \left\{ e_{i_j} + \sum_{m \notin I} a_{jm} e_m \right\}_{j=1}^k$$

3. **Непрерывность:** Оба отображения непрерывны, так как коэффициенты a_{jm} непрерывно зависят от подпространства.

Рассмотрим две карты (U_I, ϕ_I) и (U_J, ϕ_J) с $U_I \cap U_J \neq \emptyset$. Пусть $W \in U_I \cap U_J$.

Теорема 2. Функция перехода $\psi_{IJ} = \phi_J \circ \phi_I^{-1}$ является гладкой (бесконечно дифференцируемой).

Доказательство. 1. В карте I подпространство W имеет базис:

$$w_p = e_{i_p} + \sum_{s \notin I} a_{ps} e_s, \quad p = 1, \dots, k$$

2. В карте J тот же W имеет базис:

$$w'_q = e_{j_q} + \sum_{t \notin J} b_{qt} e_t, \quad q = 1, \dots, k$$

3. Выразим базисные векторы e_{i_p} через e_{j_q} :

$$e_{i_p} = \sum_{q=1}^k c_{pq} e_{j_q} + \sum_{t \notin J} d_{pt} e_t$$

4. Подставим в первое представление:

$$w_p = \sum_{q=1}^k c_{pq} e_{j_q} + \sum_{t \notin J} (d_{pt} + \sum_{q=1}^k c_{pq} b_{qt}) e_t + \sum_{s \notin I} a_{ps} e_s$$

5. Приравнявая коэффициенты при e_{j_q} , получаем систему:

$$\sum_{p=1}^k c_{pq} = \delta_{qr} \quad (\text{символ Кронекера})$$

6. Для коэффициентов при e_t ($t \notin J$):

$$d_{pt} + \sum_{q=1}^k c_{pq} b_{qt} = \text{линейная комбинация } a_{ps}$$

7. Решая эту систему методом Крамера, получаем:

$$b_{qt} = \frac{P_{qt}(a_{ps})}{\det(C)}$$

где P_{qt} - многочлены от a_{ps} , а C - матрица коэффициентов.

8. Поскольку $W \in U_I \cap U_J$, определитель $\det(C) \neq 0$, что гарантирует гладкость функции перехода.

Пример. Рассмотрим многообразие Грассмана $\text{Gr}(2, 4)$ - множество всех двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$. Фиксируем стандартный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ пространства $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим конкретный случай $I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 3\}$.

1. Выберем опорное подпространство:

$$L_{12} = \text{span}\{e_1, e_2\}$$

Определим координатную окрестность O_{12} как множество всех плоскостей $\gamma \in \text{Gr}(2, 4)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\gamma = \text{span}\{U_1, U_2\}$$

где

$$\begin{cases} U_1 = e_1 + a_{11}e_3 + a_{12}e_4 \\ U_2 = e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4 \end{cases}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Отображение $\phi_{12} : O_{12} \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданное формулой:

$$\phi_{12}(\gamma) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

является гомеоморфизмом.

2. Выберем другое опорное подпространство:

$$L_{13} = \text{span}\{e_1, e_3\}$$

Определим координатную окрестность O_{13} как множество всех плоскостей $\gamma \in \text{Gr}(2, 4)$, которые могут быть представлены в виде:

$$\gamma = \text{span}\{V_1, V_2\}$$

где

$$\begin{cases} V_1 = e_1 + b_{11}e_2 + b_{12}e_4 \\ V_2 = e_3 + b_{21}e_2 + b_{22}e_4 \end{cases}, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}$$

Аналогично, отображение $\phi_{13} : O_{13} \rightarrow \mathbb{R}^4$ задаётся формулой:

$$\phi_{13}(\gamma) = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$$

3. Рассмотрим плоскость $\gamma \in O_{12} \cap O_{13}$. Она имеет два представления:

$$\gamma = \text{span}\{U_1, U_2\} = \text{span}\{V_1, V_2\}$$

Найдём связь между координатами (a_{ij}) и (b_{ij}) .

Существует матрица $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ такая, что:

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11}U_1 + \alpha_{12}U_2 \\ V_2 = \alpha_{21}U_1 + \alpha_{22}U_2 \end{cases}$$

Подставляя выражения для U_i и V_j , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} e_1 + b_{11}e_2 + b_{12}e_4 = \alpha_{11}(e_1 + a_{11}e_3 + a_{12}e_4) + \alpha_{12}(e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4) \\ e_3 + b_{21}e_2 + b_{22}e_4 = \alpha_{21}(e_1 + a_{11}e_3 + a_{12}e_4) + \alpha_{22}(e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4) \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных векторах, находим:

Для V_1 :

$$e_1 : \alpha_{11} = 1$$

$$e_2 : \alpha_{12} = b_{11}$$

$$e_3 : \alpha_{11}a_{11} + \alpha_{12}a_{21} = 0$$

$$e_4 : \alpha_{11}a_{12} + \alpha_{12}a_{22} = b_{12}$$

Для V_2 :

$$e_1 : \alpha_{21} = 0$$

$$e_2 : \alpha_{22} = b_{21}$$

$$e_3 : \alpha_{21}a_{11} + \alpha_{22}a_{21} = 1$$

$$e_4 : \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} = b_{22}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = -\frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{21}}$$

4. Функция перехода $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ выражается формулами:

$$\begin{cases} b_{11} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} \\ b_{12} = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ b_{21} = \frac{1}{a_{21}} \\ b_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{11}}{a_{21}} & \frac{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{a_{22}}{a_{21}} \end{pmatrix}$$

Функция перехода $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ является гладкой (C^∞) в своей области определения.

1. Все компоненты являются рациональными функциями от a_{ij} .
2. Знаменатель $a_{21} \neq 0$ в области пересечения $O_{12} \cap O_{13}$.
3. Производные всех порядков существуют и непрерывны при $a_{21} \neq 0$.

Из построенного примера следует:

- Атлас на $\text{Gr}(2, 4)$ состоит из карт вида (O_I, ϕ_I) , где I - пары индексов
- Все функции перехода являются гладкими
- Размерность $\text{Gr}(2, 4)$ равна 4, что согласуется с общей формулой $\dim \text{Gr}(k, n) = k(n - k)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. М.: Наука, 1977. 512 с.
2. Бурого Ю.Д., Залгалдин В.А. *Введение в риманову геометрию*. СПб.: Наука, 1994. 318 с.
3. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. *Начальный курс топологии. Геометрические главы*. М.: Наука, 1977. 488 с.
4. Хирш М. *Дифференциальная топология*. М.: Мир.
5. Gopal A., Cogyan A., Ergen E. *Topological Manifolds*. 2008. 512 p.
6. Шарафутдинов В.А. *Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию*. Новосибирск: Учебное пособие, 2018.
7. Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I-II. Wiley Classics Library, 1996.
9. Быков В.М. *Тензорные поля на многообразиях*. М.: МГУ, 1982. 128 с.

REZYUME

Ushbu ishda Grassmann ko'pxilligi $\text{Gr}(k, n)$ ning differensial-geometrik tuzilmasi o'rganiladi. Bu ko'pxillik $\mathbb{R}^n$ da barcha k -o'lchamli chiziqli qismfazolar majmuasidan iborat. Asosiy e'tibor silliq kartalar atlasini aniq qurishga va ular orasidagi o'tish funksiyalarining xossalari tahlil qilishga qaratilgan.

Ixtiyoriy indekslar to'plami $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ uchun mos koordinata akslantirishlari $\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ gomeomorfizm ekani isbotlangan, bu yerda $U_I \rightarrow \text{Gr}(k, n)$ dagi ochiq to'plamdir. Xaritalar kesishmalarida o'tish funksiyasi $\psi_{IJ} = \varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ ning silliqqligi (cheksiz differentiallyanadiganligi) isbotlangan.

$\text{Gr}(2, 4)$ ko'pxilligi misolida turli koordinata akslantirishlari orasidagi o'tish funksiyalarining aniq ko'rinishi hisoblab chiqilgan. Bu funksiyalar noldan farqli maxrajli ratsional akslantirishlar ko'rinishida ifodalanishi ko'rsatilgan, bu esa ularning to'g'riligi va silliqqligini kafolatlaydi.

Olingan natijalar differensial geometriya, algebraik topologiya va matematik fizika sohalarida qo'llanilishi uchun muhim ahamiyatga ega bo'lib, Grassmann ko'pxilligi bu sohalarida asosiy rol o'ynaydi.

Kalit so'zlar: Grassmann ko'pxilligi, silliq atlas, o'tish funksiyalari, differensial geometriya, koordinata akslantirishlari.

RESUME

The work investigates the differential-geometric structure of the Grassmannian manifold $\text{Gr}(k, n)$, consisting of all k -dimensional linear subspaces in an n -dimensional real vector space. The primary focus is on the explicit construction of a smooth atlas and the analysis of the transition functions between its charts.

It is proven that for an arbitrary set of indices $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$, the corresponding coordinate map $\varphi_I : U_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ is a homeomorphism, where U_I is an open subset of $\text{Gr}(k, n)$. The smoothness (infinite differentiability) of the transition functions $\psi_{IJ} = \varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$ on the intersections of the charts is established.

Using the example of the manifold $\text{Gr}(2, 4)$, detailed calculations are performed to demonstrate the explicit form of the transition functions between different coordinate charts. It is shown that these functions are expressed as rational mappings with non-zero denominators, which ensures their correctness and smoothness.

The obtained results are of significant importance for applications in differential geometry, algebraic topology, and mathematical physics, where Grassmannian manifolds play a key role.

Keywords: Grassmannian manifold, smooth atlas, transition functions, differential geometry, coordinate charts.

УДК 517.55+517.51

ОЦЕНКА ГЕССИАНОВ ОГРАНИЧЕННЫХ m -ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

САДУЛЛАЕВ А.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, ТАШКЕНТ

sadullaev@mail.ru

ШАРИПОВ Р.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН,
ТАШКЕНТ

sharipovr80@mail.ru

РЕЗЮМЕ

С уважением посвящается 80-летию Шавката Арифжановича Алимова и 70-летию юбилею Равшана Раджабовича Ашурова в знак признания их выдающегося вклада в науку и образование.

Математиками Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека и Хорезмского отделения Института Математики имени В.И.Романовского, Академии Наук Республики Узбекистан был разработан новый подход к изучению m -выпуклых $(m - cv)$ функций, основанный на связях $m - cv$ функций с m -субгармоническими (sh_m) функциями. Установленная связь позволила определить Гессианы $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, как борелевские меры в классе ограниченных $m - cv$ функций. Были доказаны также ряд простых свойств этих мер. В этой работе мы предлагаем дальнейшие, более тонкие свойства этих мер, в частности, установим оценку в среднем Гессианов $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, в классе ограниченных $m - cv$ функций.

Ключевые слова: m -субгармонические функции, m -выпуклые функции, Борелевские меры, Гессианы.

Введение. Если класс m -субгармонических функций основывается на дифференциальных формах и потоках $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, где $\beta = dd^c |z|^2$ – стандартная форма объема в $\mathbb{C}^n$, то класс m -выпуклых $(m - cv)$ функций связан с операторами совершенной иной природы, а именно с гессианами $H^k(u) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k}$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, собственных векторов $\lambda = \lambda(u) \in \mathbb{R}^n$ симметричной матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} \right)$. Теория sh_m -функций хорошо развита, в данное время является предметом изучения многих математиков (см. З. Блоцкий [6], С. Динев и С. Колодзей [14-15], С. Ли [17], Х.Ч.Лу [18-19] и др). Достаточно полный обзор по этой теории имеется в статье А.Садуллаева и Б. Абдуллаева [11] в Трудах МИРАН.

Напомним, дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, называется m -субгармонической, $u \in sh_m(G)$, если в каждой точке области D имеет место

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (1)$$

Операторы $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k}$ тесно связаны с гессианами: если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения эрмитовой квадратичной дифференциальной формы $dd^c u = \frac{i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ (в фиксированной точке $z^0 \in D$), которые являются вещественными, т.е. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} = k! (n - k)! H^k(u) \beta^n. \quad (2)$$

Следовательно, дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(G)$, $G \subset \mathbb{C}^n$, является m -субгармонической, если в каждой точке $z^0 \in G$ имеют места неравенства

$$H^k(u) = H^k_{z^0}(u) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (3)$$

Отметим, что понятие m -субгармонической функции в обобщенном смысле, определено и в общем случае, для полунепрерывных сверху функций.

Определение 1. Функция $u(z)$, заданная в области $G \subset \mathbb{C}^n$ называется sh_m , если она полунепрерывная сверху и для любых дважды гладких sh_m функций $v_1, \dots, v_{n-m} \in C^2(G) \cap sh_m(G)$ поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$, определяемый как

$$\begin{aligned} & [dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}] (\omega) = \\ & = \int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0}, \end{aligned} \quad (4)$$

положителен, т.е. для $\forall \omega \in F^{0,0}$, $\omega \geq 0$ выполняется неравенство

$$\int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0.$$

Здесь $F^{0,0}(D)$ — семейство бесконечно гладких, финитных функций в G .

1. Связь m - cv функций с sh_m — функциями. Теория m - cv функций является малоизученным и новым направлением теории вещественной геометрии: дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, называется m — cv функций если, гессианы собственных векторов $\lambda = \lambda(u) \in \mathbb{R}^n$ матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_j} \right)$ удовлетворяют условиями $H^k(u) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$.

При $m = n$ класс n — $cv \cap C^2(D) = \{H^1(\lambda) \geq 0\} = \{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq 0\}$ совпадает с классом субгармонических функций, а при $m = 1$ этот класс 1 — $cv \cap C^2(D) = \{H^1(\lambda) \geq 0, \dots, H^n(\lambda) \geq 0\} = \{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$ совпадает с классом выпуклых функций в $\mathbb{R}^n$. Теория субгармонических функций является основным направлением Математической физики и Теории функций. Теория выпуклых функций хорошо изучена и отражена в работах А.Александрова, И.Бакельмана, Г.Буземан, А.Поздняк и др. (см. [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10]). При $m > 1$ этот класс изучен в серии работ Н.Ивочкиной, Н.Трудинера, Х.Вонга и др. (см. [12], [13], [16], [20-22]).

В совместной работе Н.Трудинера и Х.Вонга [21] m — cv функции введены в классе полунепрерывных сверху функций $u(x)$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, используя, так называемое, вязкое определение: что $H^k(q) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, для любого квадратичного полинома $q(x)$: разность $u(x) - q(x)$ имеет только лишь конечное число локальных максимумов в области D .

В предлагаемой работе мы предлагаем другой подход к исследованию m — cv функций, основанный на связях m — cv функций с sh_m — функциями (Предложение 1), с использованием богатых и хорошо изученных свойств sh_m — функций. Для этого вложим вещественное пространство $\mathbb{R}_x^n$ в комплексное пространство $\mathbb{C}_z^n$, $\mathbb{R}_x^n \subset \mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n + i\mathbb{R}_y^n$ ($z = x + iy$), как вещественное n — мерное подпространство. Затем, функцию $u(x)$, заданную в области $D \subset \mathbb{R}_x^n$ поднимаем в область $D \times i\mathbb{R}_y^n \subset \mathbb{C}_z^n$, полагая константой на параллельных плоскостях $\Pi_{x^0} = \{z \in \mathbb{C}^n : x = x^0, y \in \mathbb{R}_y^n\}$, $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$.

Предложение 1. Дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}_x^n$, является m — cv в D тогда и только тогда, когда функция $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$, которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}_y^n$, является sh_m в области $D \times i\mathbb{R}_y^n$.

Предложение 1 позволяет нам определить m -выпуклых функций в классе полунепрерывных сверху функций

Определение 2. Полунепрерывная сверху в области $D \subset \mathbb{R}_x^n$ функция $u(x)$ называется m -выпуклой в D , если функция $u^c(z)$ является m -субгармонической, $u^c(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n)$.

Для исследования m -выпуклой функции $u(x)$, сначала мы ее продолжим в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ как sh_m — функция $u^c(z)$, а затем известные свойства $u^c(z) \in sh_m$ применяем к $u(x)$, чтобы получить аналогичные свойства m -выпуклой функции.

В результате мы существенно дополняем имеющихся прежде свойств в теории m — cv функций и, кроме того получаем ряд новых утверждений. В частности, имеют место следующие простые свойства, нужные нам ниже

1) класс 1 — cv функций совпадает с классом выпуклых функций, причем 1 — $cv \subset \dots \subset m$ — $cv \subset \dots \subset n$ — $cv = sh$;

2) (аппроксимация). Берем стандартное ядро $K_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} K\left(\frac{x}{\delta}\right)$, $\delta > 0$, где

$$-K(x) = K(|x|);$$

$$-K(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$-\text{носитель } \text{supp} K = B(0, 1);$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dx = \int_{B(0,1)} K(x) dx = 1.$$

Тогда свертка

$$u_\delta(y) = \int_D u(x) K_\delta(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) K_\delta(x) dx \quad (5)$$

обладает тем свойством, что $u_\delta(x) \in m - cv(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta)$, где $D_\delta = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > \delta\}$, причем при $\delta \downarrow 0$ функция $u_\delta(x)$ убывающая, поточечно сходится к функции $u(x) \in m - cv(D)$.

3) максимум конечного числа $m - cv$ функций является $m - cv$ функцией; для произвольного локально равномерно ограниченного семейства $\{u_\theta\} \subset m - cv$ регуляризация $u^*(x)$ супремума $u(x) = \left\{ \sup_\theta u_\theta(x) \right\}$ тоже будет $m - cv$ функцией. Так как $m - cv \subset sh$, то множество $\{u(x) < u^*(x)\}$ — полярно в $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$. В частности оно имеет лебегову меру нуль.

Точно также, для локально равномерно ограниченной последовательности $\{u_j\} \subset m - cv$ регуляризация $u^*(x)$ предела $u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$ тоже будет $m - cv$ функцией, причем множество $\{u(x) < u^*(x)\}$ — полярное.

4) если $u(x) \in m - cv(D)$, то для любой гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ сужение $u|_\Pi \in m - cv(D \cap \Pi)$.

В самом деле, считая, без нарушения общности $\Pi_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ напомним сужение как $u|_\Pi = u('x, 0)$, где как обычно $'x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n \times i\mathbb{R}_y^n$ комплексную гиперплоскость $\Pi_z = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$. Поднимая функцию $u(x) \in m - cv(D)$ в $D \times i\mathbb{R}_y^n$ получим $u^c(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n)$. Согласно свойству 8) [11] сужение $u^c(z)|_{\Pi_z} = u('z, 0)$ является sh_m -функцией в $(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap \Pi_z$, $u^c(z, 0) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap \Pi_z$. Так как $u^c('z, 0) = u('x, 0)$, то $u('x, 0)$ является m -выпуклой функцией в $D \cap \Pi_x$.

Следствие. Если $u(x) \in m - cv(D)$, то для любой плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\dim \Pi = m$, сужение $u|_\Pi \in sh(D \cap \Pi)$.

2. Гессианы $H^k(u)$ как борелевские меры. В классе ограниченных sh_m -функций определены операторы $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$ как борелевские меры в области G (см. [6], [11]). Используя связь $m - cv$ функций с sh_m -функциями в этом пункте мы даем определения гессианов $H^k(u)$, $k = 1, \dots, n - m + 1$ для m -выпуклых функций, как борелевские меры.

Пусть $u(x)$ — локально ограниченная $m - cv$ функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда согласно предложению 1 $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$, которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}_y^n$, является sh_m функцией, локально ограниченной в области $D \times i\mathbb{R}_y^n \subset \mathbb{C}^n$, $u^c(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap L_{loc}^\infty(D \times i\mathbb{R}_y^n)$. Следовательно, определены потоки $(dd^c u^c)^k \wedge \beta^{n-k}$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, которые являются борелевскими мерами в $D \times i\mathbb{R}_y^n \subset \mathbb{C}^n$. Если $u_j^c(z) = u^c \circ K_j(w - z)$ — стандартная аппроксимация, то $u_j^c(z)$ — бесконечно гладкая и $u_j^c(z) \downarrow u^c(z)$. Более того имеют место слабая сходимость потоков,

$$(dd^c u_j^c)^k \wedge \beta^{n-k} \mapsto (dd^c u^c)^k \wedge \beta^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (6)$$

Так как $(dd^c u_j^c)^k \wedge \beta^{n-k} = k!(n-k)! H^k(u_j^c) \beta^n$, то (6) влечет за собой сходимость гессианов

$$H^k(u_j^c) \mapsto H^k(u^c), \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (7)$$

(7) определяет для $u^c(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap L_{loc}^\infty(D \times i\mathbb{R}_y^n)$ гессианы $H^k(u^c)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, как борелевские меры, $H^k(u^c) = \mu^k$.

Так как $u^c \in sh_m(D \times \mathbb{R}_y^n)$ не зависит от $y \in \mathbb{R}_y^n$, то для любых борелевских множеств $E_x \subset D$, $E_y \subset \mathbb{R}_y^n$ меры $\frac{4^k}{mes E_y} \mu_k(E_x \times E_y)$ не зависят от множества $E_y \subset \mathbb{R}_y^n$, т.е. $\frac{4^k}{mes E_y} \mu_k(E_x \times E_y) =$

$\nu_k(E_x)$. Борелевские меры

$$\nu_k : \quad \nu_k(E_x) = \frac{4^k}{mes E_y} \mu_k(E_x \times E_y), \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1, \quad (8)$$

естественно называть гессианами $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, для ограниченной, m -выпуклой функции $u(x) \in m - cv(D)$ в области $D \subset \mathbb{R}_x^n$, ибо $H^k(u) = 4^k H^k(u^c)$ для дважды гладкой функции $u(x) \in m - cv(D)$.

Гессианы $H^k(u)$ иногда обозначаются также как $H_u^k(x)$. Отметим, что если последовательность локально равномерно ограниченных функций $\{u_j(x)\} \subset m - cv(D)$ убывая сходится к $u(x)$, имеет место слабая сходимость мер $H^k(u_j) \mapsto H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - k + 1$, что легко вытекает из аналогичного факта для класса $sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n)$.

Основным результатом работы является оценка Гессианов $H^k(u) = H_u^k$ в среднем в классе ограниченных $m - cv$ функций.

Теорема 1. В классе ограниченных m -выпуклых функций $m - cv \cap L_{loc}^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, Гессианы $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, локально ограничены в среднем. Точнее, для любого компакта $K \subset \subset D$ существует константа $C(K) \geq 0$ такая что, имеют места интегральные оценки

$$\int_K H^k(u) \leq C(K) M_u, \quad k = 1, 2, \dots, n - m + 1, \quad (9)$$

где $M_u = \max\{|u(x)|, x \in K\}$.

Доказательство. Теорема локальная. По этому доказательство вытекает из следующих двух Лемм.

Лемма 1. Имеет место следующая оценка Гессиана H_u^k через H_u^{k-1} : пусть $u(x) \in m - cv(B) \cap L^\infty(B)$, где $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — единичный шар. Тогда,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^r dt \int_{|y|^2 \leq 1} dV(y) \int_{|x|^2 \leq 1+t-|y|^2} H_u^k(x) dV(x) \leq \\ & \leq \frac{n-k+1}{k} (1-2) \int_{|y|^2 \leq 1} dV(y) \int_{|x|^2 \leq 1+r-|y|^2} H_u^{k-1}(x) dV(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где $r < 0$, $1 \leq k \leq n - m + 1$ $u_1 = \sup_B u(x)$, $u_2 = \inf_B u(x)$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — локально ограниченная $m - cv$ функция в области $B \subset \mathbb{R}^n$. Нам достаточно рассматривать случай дважды гладких функций $u(x) \in m - cv(B) \cap C^2(\bar{B})$. В общем случае $u(x) \in m - cv(B) \cap L^\infty(B)$, формулу (9) можно получить аппроксимируя $u(x)$ гладкими функциями, $u_j(x) \in m - cv(B) \cap C^\infty(B)$, $u_j(x) \downarrow u(x)$.

Согласно предложению 1 $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$, которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}_y^n$, является sh_m функцией, дважды гладкой в области $D \times i\mathbb{R}_y^n \subset \mathbb{C}^n$, $u^c(z) \in sh_m(D \times i\mathbb{R}_y^n) \cap C^2(D \times i\mathbb{R}_y^n)$. Применяя формулу усреднения (см. [11]) к функции $u^c(z) = u(x) \in sh_m(B \times i\mathbb{R}_y^n) \cap C^2(\bar{B} \times i\mathbb{R}_y^n)$, в шаре $B_z = \{z \in \mathbb{C}^n : |z|^2 < r\}$, $r < 0$, получим

$$\int_{-1}^r dt \int_{|z|^2 \leq 1+t} H_{u^c}^k(z) dV \leq \frac{n-k+1}{k} (C_1 - C_2) \int_{|z|^2 \leq 1+r} H_{u^c}^{k-1}(z) dV. \quad (11)$$

Так как $H_{u^c}^k(z) = \frac{1}{4^k} H_u^k(x)$, $z = x + iy \in B \times i\mathbb{R}_y^n$, то

$$\int_{-1}^r dt \int_{|z|^2 \leq 1+t} H_u^k(x) dV(z) \leq \frac{n-k+1}{k} (C_1 - C_2) \int_{|z|^2 \leq 1+r} H_u^{k-1}(x) dV(z), \quad 1 \leq k \leq n - m + 1.$$

Переходя здесь от кратных интегралов к повторным имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^r dt \int_{|y|^2 \leq 1} dV(y) \int_{|x|^2 \leq 1+t-|y|^2} H_u^k(x) dV(x) \leq \\ & \leq \frac{n-k+1}{k} (C_1 - C_2) \int_{|y|^2 \leq 1} dV(y) \int_{|x|^2 \leq 1+r+|y|^2} H_u^{k-1}(x) dV(x). \end{aligned}$$

Лемма 2. В классе локально равномерно ограниченных функций $L = \{u(x) \in m - cv(D), |u(x)| \leq 1\}$, семейство интегралов $\int_K H_u^k(x) dV(x)$, $u \in L$, равномерно ограничены для любого компакта $K \subset D$, $1 \leq k \leq n - m + 1$,

$$\int_K H_u^k(x) dV(x) \leq C(K), \quad u \in L.$$

В самом деле, достаточно доказать лемме для $L = \{u(x) \in m - cv(B) \cap C^2(\bar{B}), |u(x)| \leq M, \forall x \in B\}$, $K \subset \subset B$, где $B = B(0, 1) \subset \subset D$ — шар. Воспользуемся формулой (10). Применяя ее для $k, k-1, \dots, 1$ получим

$$\int_{-1}^0 dt_1 \dots \int_{-1}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_{-1}^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq 1+t_k} H_u^k(x) dV(z) \leq \frac{(n-k+1)!}{k!} (2M)^k Vol(B_z), \quad 1 \leq k \leq n - m + 1.$$

Левую часть формулы можно оценить снизу (для $\sigma < 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 dt_1 \dots \int_{-1}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_{-1}^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq 1+t_k} H_u^k(x) dV(z) \geq \int_{\sigma}^0 dt_1 \dots \int_{\sigma}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_{\sigma}^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq 1+\sigma} H_u^k(x) dV(z) \geq \\ & \geq \int_{|z|^2 \leq 1+\sigma} H_u^k(x) dV(z) \int_{\sigma}^0 dt_1 \dots \int_{\sigma}^{t_{k-2}} dt_{k-1} \int_{\sigma}^{t_{k-1}} dt_k = \frac{|\sigma|^k}{k!} \int_{|z|^2 \leq 1+\sigma} H_u^k(x) dV(z). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\int_{|z|^2 \leq 1+\sigma} H_u^k(x) dV(z) \leq \frac{(n-k+1)!}{|\sigma|^k} (2M)^k Vol(B_z),$$

а это означает, что семейство интегралов $\int_{|x|^2 \leq r} H_u^k(x) dV(x)$, $u \in L$, $r < 1$, равномерно ограничено. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aleksandrov A.D., Intrinsic geometry of convex surfaces. OGIZ, Moscow, 1948; German transl., Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
2. Aleksandrov A.D., Konvexe Polyeder. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
3. Bakelman I.J., Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.

4. Bakelman I.J., Variational problems and elliptic Monge-Ampere equations. J. Differential Geometry, № 18, 1983, P. 669–999.
5. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.. Введение в дифференциальную геометрию "В целом" М.: Наука, 1973.
6. Blocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation. Ann.Inst. Fourier, Grenoble, V.5, 2005, P. 1735–1756.
7. Брело М., Основы классической теории потенциала. М., ИЛ, 1964.
8. Буземан Г., Выпуклые поверхности, "Наука", 1964.
9. Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, М., 1969.
10. Позняк Э.Г., Примеры регулярных метрик на сфере и в круге, ненереализуемых в классе дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей, Вестник МГУ, сер. матем., 2, 1960, С. 3-5.
11. Садуллаев А., Абдуллаев Б., Теория потенциалов в классе субгармонических функций. Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, N 279, 2012, С. 166-192.
12. Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta Math. 155, 1985, С.261-301.
13. Chou K.S., Wang X.J., Variational theory for Hessian equations. Comm. Pure Appl. Math., 54, 2001, P. 1029-1064.
14. Dinew S., Kolodziej S., A priori estimates for the complex Hessian equation. Anal. PDE, V.7, 2014, P. 227-244.
15. Dinew S., Kolodziej S., Non standard properties of m -subharmonic functions. Dolom. Res. Not. Approx. 11, 2018, P. 35-50.
16. Ivchikina N.M., Trudinger N.S., Wang X.J., The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations. Comm. Partial Difi. Eqns 29, 2004, P. 219-235.
17. Li S.Y., On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian. Asian J.Math., V.8, 2004, P. 87-106.
18. Lu C.H. A variational approach to complex Hessian equations in . Journal of Mathematical Analysis and Applications. V. 431:1, 2015, P. 228-259.
19. Lu H.Ch. Solutions to degenerate Hessian equations. Jurnal de Mathematique Pures et Appliques. V. 100:6, 2013, P. 785-805.
20. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures I. Topol. Methods Non linear Anal. V.19. 1997, P. 225-239.
21. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures II. Ann. Math. V.150 ,1999, P. 1-23.
22. Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures III. Ann. Math. V.150, 2002, P. 579-604.

REZYUME

Shavkat Arifjanovich Alimov tavalludining 80 yilligi va Ravshan Radjabovich Ashurovning 70 yillik yubileyiga, ularning fan va ta'limga qo'shgan ulkan xizmatlari e'tirofiga bag'ishlanadi.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti va O'zbekiston Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm bo'limi matematiklari tomonidan m -qavariq ($m - cv$) funksiyalarni o'rganish uchun yangicha yondashuv ishlab chiqildi. Bu tadqiqot usullari m -qavariq funksiyalarning m -subgarmonik (sh_m) funksiyalar bilan bog'liqligiga asoslanadi. O'rnatilgan bu bog'lanish orqali $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, Gessianlar chegaralangan $m - cv$

funksiyalar sinfida Borel o'lchovlari sifatida aniqlanishi mumkinligi ko'rsatildi. Shuningdek, bu o'lchovlarning bir qator sodda xossalari isbotlandi.

Ushbu ishda bunday o'lchovlarning yanada muhim xossalari isbotlanadi va shu jumladan chegaralangan $m - cv$ funksiyalar sinfida $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, Gessianlarning integral o'rtacha qiymatlari uchun tekis baholashlar olingan.

Kalit so'zlar: m -subgarmonik funksiya, m -qavariq funksiya, Borel o'lchovi, Gessian.

RESUME

Respectfully dedicated to the 80th anniversary of Shavkat Arifzhanovich Alimov and the 70th anniversary of Ravshan Radzhabovich Ashurov in recognition of their outstanding contributions to science and education.

A novel approach to studying m -convex ($m - cv$) functions has been developed by mathematicians from the Khorezm branch of the V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan and the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. This research method is based on the connection between m -convex functions and m -subharmonic (sh_m) functions. Through this established connection, it was shown that $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, can be defined as Borel measures within the class of bounded $m - cv$ functions. Several basic properties of these measures were also proven.

In the present work, more significant properties of such measures are established, including uniform estimates for the integral mean values of the Hessians $H^k(u)$, $k = 1, 2, \dots, n - m + 1$, within the class of bounded $m - cv$ functions.

Key words: m -subharmonic functions, m -convex functions, Borel measures, Hessians.

UDC 519.26

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАГОТОВЛЕННОГО ХЛОПКА СИРДАРЬИНСКОЙ ОБЛАСТИ В РЕСПУБЛИКЕ УЗБЕКИСТАН

Файзиев А. А.ТАШКЕНТСКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, ТАШКЕНТ
fayziev.axtam@bk.ru

Аннотация

Упорядоченных количества случайных явлений, меняющихся во времени, образует временной ряд. В статье, методом статистического анализа временных рядов, изучена статистическая закономерность $\overline{y}_t$ -среднего объема динамики заготовленного хлопка Сирдарьинской области Республика Узбекистан (по материалам ЦСУ РУз за 2003-2024 годы). Построены, с 95% ной гарантией точечные и интервальные оценки для среднего объема динамики заготовленного хлопка Сирдарьинской области, определена явные виды трендов и прогнозирована ожидаемого объема хлопка в области для последующих лет. С помощью статистических критериев Дарбина-Уотсона установлено, что средней объем хлопка в области имеет автокорреляционную зависимость.

Ключевые слова: дискретный, хлопка, динамический, ряд, объем, тренд, сезонность, компонента, линейный, наименьший, нормальный.

Введение. Почти в каждой области встречаются явления, которые важно изучать в их развитии и изменении во времени. Можно, например, стремиться предсказать будущее на основании знания прошлого, управлять процессом, описать характерные особенности ряда на основании ограниченного количества информации. При обработке временных рядов опираются на разработанные математической статистикой, настоящему времени статистика располагает разнообразными методами анализа временных рядов от самых элементарных до весьма сложных ([1, 2, 3, 4]).

Материалы и методы. В настоящей работе, проведена обработка и анализ среднего объема динамики заготовленного хлопка Сирдарьинской области, Республика Узбекистан за период наблюдений 2003-2024 годы, как $\{y_t, t \in T\}$ дискретный стационарный временный ряд.

В общем случае временной ряд $\{y_t, t \in T\}$ состоит из четырех составляющих : тренд; колебания относительно тренда; эффект сезонности; случайная компонента .

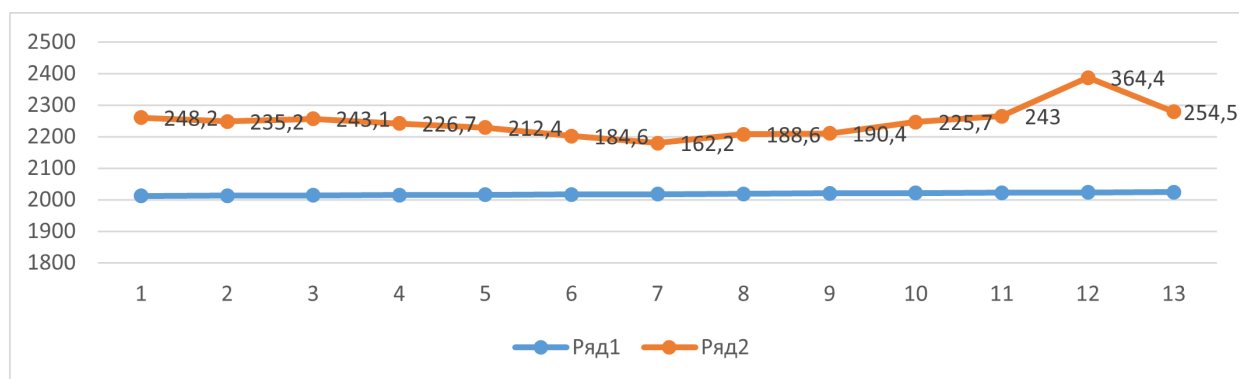
В данной работе использована методы обработки и анализа временных рядов, такие, как методы определения тренда, проверки нормальности и случайности, а также проверка автокорреляции, метод скользящей средней, метод конечных разностей, метод наименьших квадратов, статистическая критерия Дарбина – Уотсона и другие методы.

Используя методы статистического анализа временных рядов построены точечные и интервальные оценки для средней объем хлопка области, определены явные виды трендов и прогнозирована средней объем хлопка области для последующих лет, проверено различные статистические гипотезы.

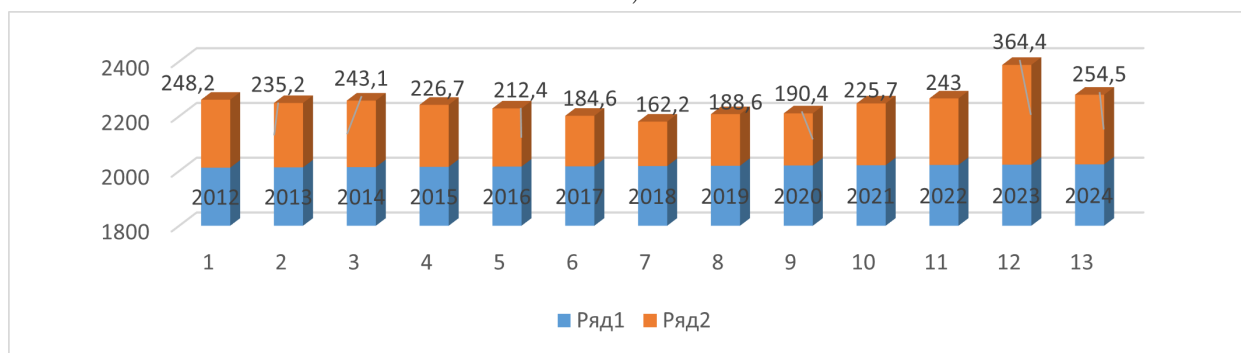
Изучению и анализу динамических рядов посвящены работы: Андерсона[1], Кендала[2], Файзиева [3] и другие.

Результаты и их обсуждение. Предположим, что средней объем хлопка Сирдарьинской области Республика Узбекистан за период наблюдений, 2003-2024 годы образует стационарный дискретный временный ряд. Используя выше изложенных методы статистического анализа временных рядов, построим точечные и интервальные оценки для средней объем хлопка области, определим явные вид тренда и прогнозирована объем хлопка для последующих лет, проверим различные статистические гипотезы.

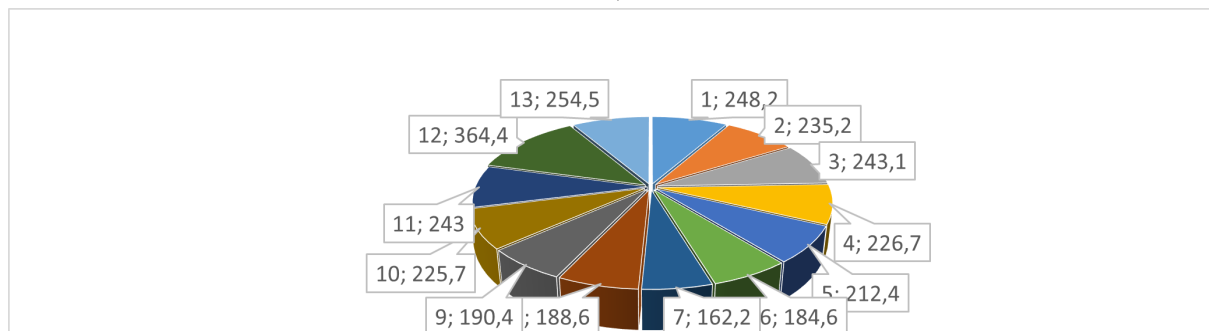
На рисунки-1, с помощи опытных данных (таблица-1, столбца-3) геометрически изображены $\overline{y}_t$ –динамика средней объем заготовленного хлопка в Сирдарьинской области виде а) точечная график, б) гистограмма с) круговая диаграмма :



а)



б)



в)

Рисунок-1.

Геометрическое изображение наблюдаемых данных, система координат дают основание в первом приближении, предполагать гипотезу что, трендовая часть процесса имеет линейную зависимость вида $y(t) = a_1 t + a_0$. Где неизвестные параметры определяются методом наименьших квадратов т.е. на основании опытных данных, решая следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 T + a_1 \sum t = \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t \end{cases} \quad (1)$$

Решая система уравнение (1) и используя, вычисления по таблице-1, имеем

$$\sum y_t = 2\,978,6 \text{ тысяча тонна,} \quad a_0 = \frac{1}{T} \sum y_t = \frac{2\,978,6}{13} = 229,12$$

$$a_1 = \frac{1}{\sum t^2} \sum y_t t = \frac{639}{182} = 3,51 \text{ тысяча тонна.}$$

Отсюда, находим уравнение линейного тренда (тенденция) заготовленного объема хлопка в Сирдарьинской области [1, 2, 3]:

$$y(t) = 3,51 t + 229,12 \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) значение $t = 1$ находим ожидаемые объема хлопка Сирдарьинской области в 2025 году, будет в среднем 232,63 тысячи тонна.

К расчету данных для определения тренда временного ряда.

Таблица-1

№ п/п	Годы наблюдения	y_t – Тысяча тонна	t	t^2	$y_t t$	$y_t t^2$
1	2012	248,2	-6	36	-1 489	8 935
2	2013	235,2	-5	25	-1 176	5 880
3	2014	243,1	-4	16	-972	3 890
4	2015	226,7	-3	9	-680	2 040
5	2016	212,4	-2	4	-425	850
6	2017	184,6	-1	1	-185	185
7	2018	162,2	0	0	0	0
8	2019	188,6	1	1	189	189
9	2020	190,4	2	4	381	762
10	2021	225,7	3	9	677	2 031
11	2022	243	4	16	970	3 882
12	2023	364,4	5	25	1822	9110
13	2024	254,5	6	36	1 527	9 162
Сумма		2 978,6	0	182	639	46 914

С помощью статистических критериев ([1] – [3]) установлено, что в уравнении (2) $y(t) = a_1 t + a_0$ основная гипотеза $H_0 : a_1 = 0$ отвергается и принимается альтернативная гипотеза $H_1 : a_1 \neq 0$ с уровнем значимости $\alpha = 0,05$. Следовательно, объем хлопка в Сирдарьинской области имеет линейный тренд.

Многих задачах наблюдения, выборка наблюдения является статистически независимо, временных рядах они, как правило, зависимы, и характер этой зависимости может определяться положением наблюдений в последовательности. Автокорреляцией представляет собой корреляционную зависимость между последующими и предшествующими членами временного ряда.

Для дальнейшей исследование нам необходима вычислить следующие конечные разности по опытным данным. Обозначим,

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t, \Delta^2 Y_t = \Delta Y_{t+1} - \Delta Y_t, \Delta^3 Y_t = \Delta^2 Y_{t+1} - \Delta^2 Y_t \text{ конечные разности (таблица -2)}.$$

Составим таблица для расчету конечные разности.

Таблица -2

N п/п	Годы наблю- дения	y_t	Y_t^2	ΔY_t	ΔY_t^2	$\Delta^2 Y_t$	$\Delta^2 Y_t^2$	$\Delta^3 Y_t$	$\Delta^3 Y_t^2$
1	2012	248,2	61 603,2						
2	2013	235,2	55 319,0	-13,0	169,0				
3	2014	243,1	59 097,6	7,9	62,4	20,9	436,8		
4	2015	226,7	51 392,9	-16,4	269,0	-24,3	590,5	-45,2	2 043,0
5	2016	212,4	45 113,8	-14,3	204,5	2,1	4,4	26,4	697,0
6	2017	184,6	34 077,2	-27,8	772,8	-13,5	182,3	-15,6	243,4
7	2018	162,2	26 308,8	-22,4	501,8	5,4	29,2	18,9	357,2
8	2019	188,6	35 570,0	26,4	697,0	48,8	2 381,4	43,4	1 883,6
9	2020	190,4	36 252,2	1,8	3,2	-24,6	605,2	-73,4	5 387,6
10	2021	225,7	50 940,5	35,3	1 246,1	33,5	1 122,3	58,1	3 375,6
11	2022	243	58 854,8	16,9	285,6	-18,4	338,6	-51,9	2 693,6
12	2023	364,4	132 787,4	121,8	14 835,2	104,9	11 004,0	123,3	15 202,9
13	2024	254,5	64 770,3	-109,9	12 078,0	-231,7	53 684,9	-336,6	113 299
	Сумма	2 978,6	712 087,5	6,3	31 124,6	-96,9	70 379,4	-252,6	145 183

По таблице- 2 вычислим

$$V_k = \frac{\sum_{t=k}^T (\Delta^k y_t)^2}{(T-k)C_{2k}^k} \quad (3)$$

коэффициенты вариации разностей и установим, что $V_1 \approx V_2 \approx V_3$. Следовательно, конечные разности первого порядка элиминируют линейную тенденцию.

Для определения коэффициентов автокорреляции R_L при $L = 1, 2, 3, 4, 5$ (где: $L_{\text{лаг}}$, временной сдвиг), т.е. промежутков времени отставания одного явления от другого, связанного с ним) составим таблица-3 : Таблица-3

N п/п	Годы наблю- дения	y_t - тысяча тонна	$Y_t \cdot Y_{t+1}$	$Y_t \cdot Y_{t+2}$	$Y_t \cdot Y_{t+3}$	$Y_t \cdot Y_{t+4}$	$Y_t \cdot Y_{t+5}$
1	2012	248,2					
2	2013	235,2	58 376,6				
3	2014	243,1	57 177,1	60 337,4			
4	2015	226,7	55 110,8	53 319,8	60 337,4		
5	2016	212,4	48 151,1	51 634,4	53 319,8	52 717,7	
6	2017	184,6	39 209,0	41 848,8	51 634,4	43 417,9	45 817,7
7	2018	162,2	29 942,1	34 451,3	41 848,8	39 430,8	38 149,4
8	2019	188,6	30 590,9	34 815,6	34 451,3	42 755,6	45 848,7
9	2020	190,4	35 909,4	30 882,9	34 815,6	40 441,0	43 163,7
10	2021	225,7	42 973,3	42 567,0	30 882,9	41 664,2	47 938,7
11	2022	243	54 754,8	46 191,0	42 567,0	39 349,7	44 784,0
12	2023	364,4	88 403,4	82 245,1	46 191,0	68 725,8	59 105,7
13	2024	254,5	92 739,8	61 741,7	82 245,1	48 456,8	47 998,7
	Сумма	2 978,6	633 338,5	540 035,1	478 293,4	416 959,6	372 806,5

Используя таблицу-3, формулы (4) из литературы [1, 2, 3] определяются значения коэффициентов автокорреляции R_L $L = 1, 2, 3, 4, 5$ (где: $L_{\text{лаг}}$, временной сдвиг):

$$R_L = \frac{\sum_{t=1}^{N-L} Y_t Y_{t+L} - \frac{\sum_{t=1}^{N-L} Y_t \sum_{t=L+1}^N Y_t}{N-L}}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^{N-L} Y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{N-L} Y_t \right)^2}{N-L} \right] \left[\sum_{t=L+1}^N Y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=L+1}^N Y_t \right)^2}{N-L} \right]}} \quad (4)$$

Отличие (4) значения R_L от нуля, даёт основание полагать, что между годовая объема хлопка имеется существенная автокорреляционная зависимость.

Проверим статистическую гипотезу, о существования автокорреляционная зависимость между годовая объема хлопка с помощью критерия Дарбина – Уотсона :

$$d = \sum_{t=1}^{T-1} (Y_{t+1} - Y_t)^2 / \sum_{t=1}^T Y_t^2 \quad (5)$$

Используя таблица-2 , по формуле (5) вычислим $d_{\text{наб}} = \frac{31124,6}{712087,5} = 0,044$. Сравнивая их с табличным значением(см. [3]-стр. 194, приложение-9) $d_{\text{крит}} = 1,06$ установим, что $d_{\text{наб}} = 0,044 < d_{\text{крит}} = 1,06$. Следовательно, критерия Дарбина – Уотсона 95% тоже гарантией доказывает, что средние объем заготовленного хлопка в Сирдарьинской области имеет автокорреляционную зависимость

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \rho = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) = M[(Y_t - \bar{y}_t)(Y_{t+1} - \bar{y}_t)].$$

Следовательно, заготовленная объем хлопка области в этом году, зависит от объема прошлых и последующих лет.

Проверка статистическая гипотезы (6) о нормальности $\bar{y}_t$ – среднего объема заготовленного хлопка в Сирдарьинской области ([1] – [3]) :

$$H_0 : P(\bar{y}_t < x) = \Phi_{,\sigma}(x), \quad H_1 : P(\bar{y}_t < x) \neq \Phi_{,\sigma}(x) \quad (6)$$

принимается уровень значимости $\alpha = 0,05$ (Таблица-4).

Тогда с помощью следующие формулы построим интервальные оценка для $\bar{y}_t$ – среднего объема заготовленного хлопка в Сирдарьинской области:

$$\bar{Y}_{T+i} - t(T-2; \alpha) \bar{\sigma}_y \leq a_0 + a_1(T+i) \leq \bar{Y}_{T+i} + t(T-2; \alpha) \bar{\sigma}_y \quad (7)$$

Значение $t_{\text{крит.}} = t(T-2; \alpha)$ определяется по таблице Стьюдента (см. [3]-стр. 190, приложение-3). По формула (6) построим с вероятностью 0.95 интервальная оценка для $\bar{y}_t$ -среднего объема хлопка в Сирдарьинской области :

(199,14 ; 259,16) тысяча тонна.

На основании выборочных данных, используя пакет программа x7.2019 и Excel ЭВМ [3,4,5], вычислим числовые характеристики y_t – среднего объема заготовленного хлопка в Сирдарьинской области (таблица - 4).

Оценка основных параметров динамического ряда.

Таблица - 4

Выборочные характеристики	Статистические оценки для выборочные характеристики
Средний объем ежегодно заготовленного хлопка в Сирдарьинская области $\bar{y}_T$	229,12 тысяча тонна
Дисперсия	2469,371
Среднее квадратичное отклонение σ_T	49,693
Коэффициент вариации v (%)	7,07 %
Асимметрия ζ	1,593
Эксцесса $E_{K\zeta}$	2,309
Ошибка среднего значения $\bar{y}, m_y$	$m_y = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13,765$
Предельная ошибка m'	$m'_y = tm = 2,18 \cdot 13,765 = 30,01$
Интервальная оценка (95%) $\bar{y}_T \pm tm$ для объема хлопка	$\bar{y}_T \pm tm = 229,08 \pm 30,01$ (199,14 ; 259,16) тысяча тонна.
Проверка статистической гипотезы $H_0 : P(\bar{y}_t < x) = \Phi_{,\sigma}(x)$ $H_1 : P(\bar{y}_t < x) \neq \Phi_{,\sigma}(x)$	95% гарантий гипотезы H_0 принимается

Выводы. На основании выше изложенных статистических анализов, динамики ежегодно $\bar{y}_t$ – заготовленного хлопка в Сирдарьинской области республика Узбекистан как дискретный стационарный временный ряда с надежностью $\gamma = 0,95$ (таблица-4) можно сделать следующие выводы:

1. построена точечные 229, тысяча тонна и интервальные (199,14 ; 259,16) тысяча тонна статистические оценки для среднего объема ежегодно $\bar{y}_t$ - заготовленного хлопка в Сирдарьинской области;
2. определены виды тренда и установлена её линейность $(t) = 3,51 t + 229,12$;
3. критерием Дарбина – Уотсона установлены что, средней объем заготовленного хлопка в Сирдарьинской области имеет автокорреляционную зависимость:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{где} \quad \rho = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) = M[(Y_t - \bar{y}_t)(Y_{t+1} - \bar{y}_t)].$$

т.е. объем заготовленного хлопка в этом году, зависит от объема заготовленных прошлых и последующих лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Андерсон “Статистический анализ временных рядов”.Москва: “МИР”,1976. 759 с.
2. М. Кендал, А. Стьюарт “Многомерный статистический анализ и временные ряды”.- Москва: “Наука”, 1976. -736 с.
3. А.А.Файзиёв “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”. Darslik, “METODIST NASHRIYOTI”, 218-bet, Toshkent – 2024.
4. M.U.Achilov, A.A.Fayziev “The analysis of dynamics of fruits and berry productivity grown in Uzbekistan”, EPRA Internatsional journal of Research and Deve lopment (IJRD.Indiya).Volum: 4. Issue: 8. August 2019, pp.5-9. (in English)
5. V. Vahabov, A.A. Fayziev “Statistical analysis and forecasting of cotton yield dynamics Bukhara region”, Tashkent state transport university. 1 st International Scientific Conference “Modern Materials Science: Topical Issues, Achievements and Innovations (ISCMMSIAL-2022)” (Tashkent, Mart 4-5, 2022). p.5. (in English).

Annotatsiya

Vaqt o'tishi bilan o'zgarib turadigan tasodifiy hodisalarning tartiblangan ketma-ketligi vaqtli (dinamik)qatorni hosil qiladi. Maqolada dinamik qatorlarni statistik tahlil qilish usullaridan foydalanib, O'zbekiston Respublikasi Sirdaryo viloyatida $(\bar{y}_t)$ -o'rtacha yillik terib olingan paxta hajmi dinamikasini statistik qonuniyatlari (O'zSTAT boshqarmasining 2003-2024 yillardagi ma'lumotlari asosida) o'rganilgan. Sirdaryo viloyatida terib olingan paxtaning o'rtacha dinamikasi hajmining nuqta va intervalli hisob-kitoblari 95 % li kafolat bilan tuzilib, tendensiyalarning aniq turlari belgilab olindi, keyingi yillar uchun viloyatda paxta yetishtirishning kutilayotgan hajmi prognoz qilindi. Durbin-Vatson statistik mezonlaridan foydalanib, mintaqadagi paxtaning o'rtacha hajmi avtokorrelyatsion bog'liqlikka ega ekanligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: diskret, paxta, dinamik, qator, hajm, trend, mavsumiylik, komponent, chiziqli, eng kichik, normal.

Abstract

An ordered number of random events changing over time forms a time series. In the article, using the method of statistical analysis of time series, the statistical regularity of $(\bar{y}_t)$ -average volume of dynamics of harvested cotton in the Sirdarya region of the Republic of Uzbekistan (based on the materials of the Central Statistical Bureau of the Republic of Uzbekistan for 2003-2024) is studied. Point and interval estimates for the average volume of dynamics of harvested cotton in the Sirdarya region have been constructed with a 95% guarantee, clear types of trends have been determined, and the expected volume of cotton in the region for subsequent years has been predicted. Using the Durbin-Watson statistical criteria, it has been established that the average volume of cotton in the region has an autocorrelation dependence.

Key words: discrete, cotton, dynamic, series, volume, trend, seasonality, component, linear, least, normal.