



O'ZMU XABARLARI

ВЕСТНИК НУУЗ

АСТА NUUZ

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

**JURNAL 1997
YILDAN
CHIQA
BOSHLAGAN**

**2025
2/2
Aniq
fanlar**

Bosh muharrir:

MADJIDOV I. U. – t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

ERGASHOV Y. S. – f.-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------------|
| Ayupov Sh. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Alimov Sh. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Sadullayev A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Roziqov O'. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Aripov M. M. | – f.-m.f.d., prof. |
| Zikirov O. S. | – f.-m.f.d., prof. |
| Abdushukurov A.A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Aloyev R. J. | – f.-m.f.d., prof. |
| Ganixodjayev R. N. | – f.-m.f.d., prof. |
| Narmonov A. Y. | – f.-m.f.d., prof. |
| Raximov A. A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Beshimov R. B. | – f.-m.f.d., prof. |
| Shoimqulov B. A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Axmedov A.B. | – f.-m.f.d. prof. |
| Sharipov O.Sh. | – f.-m.f.d., prof. |
| Mamadaliyev N.A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Xudoyberdiyev A.X. | – f.-m.f.d., prof. |
| Xudoyberganov G. | – f.-m.f.d., prof. |
| Matyakubov A. S. | – f.-m.f.d., prof. |

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) dots. **G'aybullayev R.Q.**

◇ MUNDARIJA ◇ CONTENTS ◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇

Abdullaev O. Kh., Duysenbaev R. S. An inverse problem for a loaded degenerate fractional order diffusion equation with involution perturbation	4
Atajonov Kh. O., Madaminova G. Q., Ibragimova K. O. Local derivation on solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradicals	14
Azizov A. N. An abstract characterization of trace class ideal \mathcal{C}_1	23
Bazarbaev S. U. Large entropy measures and their supports	29
Boymurodov S. I. Large entropy measures of Hénon-like maps	34
Fayazov K. S., Khudayberganov Y. K. Boundary value problems for mixed-type differential equations of the first and second order with respect to the time variable	40
Fayziev Yu. E., Baxriddinova N. A. On the Cauchy problems for Barenblatt-Zheltov-Kochina type fractional equations	50
Gaybullaev R. Q., Urazmatov G. Kh. Maximal solvable extensions of m -dimensional some n -Lie algebras	56
Kobilov H. M. Exponentially weighted optimal quadrature formulas with complex exponential weights in the periodic Sobolev space $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0, 1]$	63
Mirakhmedov Sh. A., Lazareva V. A. On the estimation of the remainder term in the CLT for the number of occupied cells in a multinomial random allocation scheme	68
Mirzaeva M. M. Solving a boundary value problem for the first order differential equation involving the Prabhakar operator	72
Mukhamadiev F. G., Nosirova M. S. Some retractions of n -fold symmetric product of the space X	81
Narmanov A. Ya., Ergashova Sh. R. On the geodesics of smooth manifolds	86
Nishonboyev S. 3-D matritsalarini qo'shish va ko'paytirish	81
Nuratdinov K. D., Gaybullaev R. Q. On the n -Lie algebras of generalized Jacobian and Wronskian	99
Rahmatullaev M. M., Rasulova M. A., Hakimova M. A. On periodic ground states for the Chui-Weeks model	105
Rakhmanov Z. R., Mamatov A. U. Choriyev B. Sh. Global existence results for coupled nonlinear parabolic equations with weighted coefficients	111
Sharipov O. Sh., Khudoykulova H. B. Statistical analysis and forecasting of meteorological data	122
Sheraliyeva S. A. Abelian extensions of solvable Leibniz algebra with naturally graded filiform nilradical of maximal codimension	128
Toshmatova M.M., Azizov A. N. An abstract characterization of Schatten's ideal \mathcal{C}_2	138
Tukhtasinov T. Sh. The extension of a $*$ -isomorphism between two real W^* -algebras to a $*$ -isomorphism of the corresponding $*$ -algebras of all m -measurable operators	145
Xalilov A. Z., Mavlonov I. M., Pardayev Sh. A. Gibbs measures associated with the fully visible Boltzmann machine	148
Акбаров Б. Х Об оценке различий в геноме человека	155
Касимов Ш. Г., Реймбаева Д. К. Об однозначной разрешимости многомерной задачи колебаний пластин с дробными операторами Миллера–Росса, в случае с заделанными и свободно закрепленными условиями в классах Соболева	161
Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х. Я. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными управлениями	171
Манасыпова Р.З. Некоторые свойства пространства τ -замкнутых подмножеств	179
Неъматова Ш. Б. О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированный с обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленном решетке	184
Орипов Д. Д. Начально-краевая задача с граничным условием третьего рода для дифференциального уравнения высокого четного порядка вырождающегося на границе	192

Рахимов К. У., Норкулова Р. Б., Мансурова Г. А. Задача коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе	204
Хайиткулов Б. Х. Численное решение нестационарной задачи оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью	211
Халхаджаев Б. Б. Об однозначной разрешимости регулярного решения уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями периодического типа	220
Элмурадова Х. Б. Обратная задача для псевдопараболических интегро-дифференциальных уравнений	228

UDC 517.95

**AN INVERSE PROBLEM FOR A LOADED DEGENERATE FRACTIONAL ORDER
DIFFUSION EQUATION WITH INVOLUTION PERTURBATION**

ABDULLAEV O. KH.

ALFRAGANUS UNIVERSITY, TASHKENT, UZBEKISTAN
obidjon.mth@gmail.com

DUYSENBAEV R. S.

TASHKENT STATE TECHNICAL UNIVERSITY NAMED AFTER ISLAM KARIMOV, TASHKENT, UZBEKISTAN
ruslanduysenbaev.0299@gmail.com

RESUME

This work deals to the study an inverse problem for the loaded degenerating fractional order diffusion equation with involution perturbation. The existence and uniqueness theorem of solutions to the formulated problem was proved.

Key words: Inverse problems; fractional-order loaded diffusion equation; involution perturbation; existence and uniqueness of solution; series expansion.

1. Introduction

In this paper, we consider an inverse problem for a degenerating diffusion equation with Rimann-Liouville type derivatives involving involution. This inverse problem is close to that investigated in [1, 2]. Together with the solution it is necessary to find an unknown right-hand side of the equation. Unlike the above the mentioned works, considered equation contains the fractional time derivative and an involution with respect to the spatial variable. The conditions for over determination are initial and final states. In work [3], by authors was considered a process that is so slow that it is described by an evolutionary equation with a fractional time derivative. Thus, this process is described by equation

$$t^{-\beta} D_t^\alpha \Phi(x, y)' \Phi_{xx}(x, t) + \varepsilon \Pi_{xx}(-x, t) = f(x),$$

in a rectangular domain. Here, $f(x)$ is the influence of an external source that does not change with time; $\alpha + \beta > 0$; $t = 0$ is an initial time point and $t = T$ is a final one; and the derivative D_t^α is a Caputo derivative.

Different problems for the equations with involutions have been studied by many authors, as A. Ashyralyev [4], M. A. Sadybekov [5], A. Andreev [6], M. Sh. Burlutskayaa [7] and others. Concerning inverse problems for heat equations, some recent works have been implemented by M. Kirane, B. Samet, B. T. Torebek [8], N. Al-Salti, M. Kirane, B. T. Torebek [9], B. T. Torebek., R. Tapdigoglu [10], B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane., R. G. Tapdigoglu [11], B. Turmetov, B. J. Kadirkulov [12] and others.

As far as we know, direct and inverse problems for a degenerating loaded diffusion equations with involution, including fractional derivatives, have not been investigated before.

In this work, we state an inverse problem with the Dirichlet boundary conditions for a degenerating loaded diffusion equation with Rimann-Liouville type derivatives involving involution, in rectangular domain. We seek formal solution to this problem in a form of series expansions using orthogonal basis obtained by separation of variables and we also examine the convergence of the obtained series solution. The main result on existence and uniqueness are formulated in a theorem in the last section of this paper.

Let $J = [a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$ be a finite interval on the real axis \mathbb{R} .

Definition 1. [13] The *Rimann-Liouville fractional integral* $I_{a+}^\alpha f$ of order $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) is defined by

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (x > a; \quad \Re(\alpha) > 0).$$

Here $\Gamma(\alpha)$ is the Gamma function.

Definition 2.[13] The Riman-Liouville fractional derivative $D_{a+}^\alpha y$ of order $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) is defined by

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha y)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; \quad x > a). \end{aligned}$$

Definition 3.[13] A function of generalized Mittag-Leffler type is a function defined by the series

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

with

$$c_0 = 1 \quad \text{and} \quad c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma[\alpha(jm+l)+1]}{\Gamma[\alpha(jm+l+1)+1]}, \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha, l \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Here $\Gamma(\alpha)$ is the Gamma function.

Proposition 1.[15] For every $\alpha \in (0, 1]$, $m > 0$, $l > m - 1/\alpha$ and $x \geq 0$, one has

$$\frac{1}{1 + \frac{\Gamma(1+\alpha(l-m))}{\Gamma(1+\alpha(l-m+1))}x} \leq E_{\alpha,m,l}(-x) \leq \frac{1}{1 + \frac{\Gamma(1+\alpha l)}{\Gamma(1+\alpha(1+l))}x}.$$

We consider

$$(D_{a+}^\alpha u)(t) = \lambda(t-a)^\beta u(t) + \sum_{r=1}^k f_r(t-a)^{\mu_r}, \quad (a < t < b \leq \infty), \tag{1}$$

where $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ and $f_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ ($r = 1, \dots, k$) are given real constants.

Theorem 1.[13] Let $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\beta > -\alpha$, $\mu_r \in \mathbb{R}$ ($r = 1, \dots, k$) be such that

$$\mu_r > -1 - \alpha, \quad \mu_r \neq j \quad (j = 1, \dots, [\alpha] + 1; \quad r = 1, \dots, k), \tag{2}$$

$$(j+1)(\alpha + \beta) + \mu_r \notin \mathbb{Z}^- \quad (r = 1, \dots, k; \quad j \in \mathbb{N}_0), \tag{3}$$

(i) equation (1) is solvable in the space $I_{loc}(a, b)$ if there exists a $j \in \{1, \dots, k\}$ such that $\mu_j < -\alpha$ and in the space $B_{loc}(a, b)$ if $\mu_r \geq -\alpha$ for all $r \in \{1, \dots, k\}$. Furthermore, there is a particular solution of the form

$$u_0(t) = \sum_{r=1}^k \frac{\Gamma(\mu_r + 1)f_r}{\Gamma(\mu_r + \alpha + 1)}(t-a)^{\alpha+\mu_r} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,1+(\beta+\mu_r)/\alpha} \left(\lambda(t-a)^{(\alpha+\beta)} \right), \tag{4}$$

(ii) if $\beta > -\{\alpha\}$, then the general solution to the question (1) is given by

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j (t-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,1+(\beta-j)/\alpha} \left(\lambda(t-a)^{(\alpha+\beta)} \right) + u_0(t), \tag{5}$$

where c_j ($j = 1, \dots, n$) are arbitrary real constants.

2. Statement of problem

Consider the diffusion equation

$$D_{0t}^\alpha u(x, t) - a_1 t^\beta u_{xx}(x, t) + a_2 t^\beta u_{xx}(-x, t) + b_1 u(x, t_0) + b_2 u(-x, t_0) = f(x), \quad (x, t) \in \Omega \tag{6}$$

where D_{0t}^α is Riman-Liouville derivative, α, β a_i, b_i ($i = 1, 2$) are nonzero real numbers such that, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 0$, $a_1 > 0$, $|a_2| < a_1$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega = \{(x, t) : -l < x < l, \quad 0 < t < T\}$, t_0

is any fixed number, and that $t_0 \in (0, T)$. Our aim is to find a regular solution to the following inverse problem: **Problem IP.** Find a pair of functions $u(x, t)$ and $f(x)$ in the domain Ω satisfying equation (6) and the conditions

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), \quad x \in [-l, l], \tag{7}$$

$$u(-l, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{8}$$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given functions, $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[-l, l]$, and that

$$\varphi^i(-l) = \psi^i(l) = 0, \quad (i = 0, 2).$$

3. Solution method

Here, we seek solution to problem *IP* in a form of series expansion, using a set of functions that form orthogonal basis in $L_2(-l, l)$. To find the appropriate set of functions for the problem, we shall solve the homogeneous equation corresponding to equation (6) along with the associated boundary conditions using separation of variables.

3.1. Spectral problem

Separation of variables leads to the following spectral problem for *IP*

$$a_1 X''(x) - a_2 X''(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-l) = X(l) = 0. \tag{9}$$

The eigenvalue problem (9) are self-adjoint and hence they have real eigenvalues and its eigenfunctions form a complete orthogonal basis in $L_2(-l, l)$ [15]. Eigenvalues are given by

$$\lambda_{1k} = (a_1 + a_2) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad \lambda_{2k} = (a_1 - a_2) \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

and the corresponding eigenfunctions are given by

$$X_{1k} = \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad X_{2k} = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Lemma 1. The system of functions (11) are complete and orthogonal in $L_2(-l, l)$. This lemma was proven by E.I. Moiseev [16].

Since the system of eigenfunctions (11) is complete and forms a basis in $L_2(-l, l)$, the solution pair $u(x, t)$ and $f(x)$ of the inverse problem can be expressed in a form of series expansion using the eigenfunctions.

3.2. Existence of solution

Here, we give a full proof of existence of solution to the Inverse Problem *IP*. Using the orthogonal system (11), the functions $u(x, t)$ and $f(x)$ can be represented as follows

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x, \tag{12}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x, \tag{13}$$

where the coefficients $u_{1k}(t), u_{2k}(t), f_{1k}$ and f_{2k} are unknown. Substituting (12) and (13) into equation (6), we obtain the following equations relating the functions $u_{1k}(t), u_{2k}(t)$ and the constants f_{1k}, f_{2k} :

$$D_{0t}^{\alpha} u_{1k}(t) + \lambda_{1k} t^{\beta} u_{1k}(t) = f_{1k} - (b_1 - b_2) u_{1k}(t_0), \tag{14}$$

$$D_{0t}^\alpha u_{2k}(t) + \lambda_{2k} t^\beta u_{2k}(t) = f_{2k} - (b_1 + b_2)u_{2k}(t_0). \tag{15}$$

Solving Cauchy problems for these equations with initial data

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{1k}(t) = \varphi_{1k},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{2k}(t) = \varphi_{2k},$$

respectively, we get (see Theorem 1)

$$u_{1k}(t) = \frac{\varphi_{1k} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}) + \frac{(f_{1k} - \varepsilon_1(b)u_{1k}(t_0))t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}), \tag{16}$$

$$u_{2k}(t) = \frac{\varphi_{2k} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}) + \frac{(f_{2k} - \varepsilon_2(b)u_{2k}(t_0))t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}). \tag{17}$$

Here $\lambda_{1k} = (a_1 + a_2) \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $\lambda_{2k} = (a_1 - a_2) \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$, $\varepsilon_1(b) = b_1 - b_2$, $\varepsilon_2(b) = b_1 + b_2$ and the unknown constants f_{1k}, f_{2k} are to be determined using the second condition in (7), and $u_{1k}(t_0), u_{2k}(t_0)$ are unknown constants which also required to determine.

Let $\varphi_{ik}, \psi_{ik}, i = 1, 2$ be the coefficients of the series expansions of $\varphi(x)$ and $\psi(x)$, respectively, i.e.,

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \varphi_{2k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi(x) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx,$$

$$\psi_{1k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \psi(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \psi_{2k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \psi(x) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx.$$

Then, the second conditions in (7) leads to

$$\begin{aligned} (f_{1k} - \varepsilon_1(b)u_{1k}(t_0)) \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}) &= \\ = \psi_{1k} - \varphi_{1k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} (f_{2k} - \varepsilon_2(b)u_{2k}(t_0)) \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}) &= \\ = \psi_{2k} - \varphi_{2k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}). \end{aligned} \tag{19}$$

Considering, $E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{ik} T^{\alpha+\beta}) \geq \delta > \varepsilon$, $i = 1, 2$ (see Proposition 1), from (18) and (19), respectively we obtain

$$f_{1k} - \varepsilon_1(b)u_{1k}(t_0) = \frac{\psi_{1k} - \varphi_{1k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})}{\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})}, \tag{20}$$

$$f_{2k} - \varepsilon_2(b)u_{2k}(t_0) = \frac{\psi_{2k} - \varphi_{2k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})}{\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})}. \tag{21}$$

On the other hand, from (16) and (17) we find:

$$f_{1k} - \varepsilon_1(b)u_{1k}(t_0) = \frac{u_{1k}(t_0) - \varphi_{1k} \frac{t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta})}{\frac{t_0^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta})}, \tag{22}$$

$$f_{2k} - \varepsilon_2(b)u_{2k}(t_0) = \frac{u_{2k}(t_0) - \varphi_{2k} \frac{t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right)}{\frac{t_0^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right)}. \tag{23}$$

Solving these set of algebraic equations (20)-(23), we get

$$u_{1k}(t_0) = \frac{\varphi_{1k} t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}\right) + \frac{\psi_{1k} - \varphi_{1k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)}{T^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)} \cdot t_0^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}\right), \tag{24}$$

$$u_{2k}(t_0) = \frac{\varphi_{2k} t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right) + \frac{\psi_{2k} - \varphi_{2k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}\right)}{T^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}\right)} \cdot t_0^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right). \tag{25}$$

Hence, substituting $u_{1k}(t_0)$ and $u_{2k}(t_0)$ into (20) and (21), we find

$$f_{1k} = \frac{\psi_{1k} - \varphi_{1k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)}{\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)} \times \left(1 + \frac{\varepsilon_1(b)t_0^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}\right)\right) + \frac{\varphi_{1k} \varepsilon_1(b)t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}\right) \tag{26}$$

and

$$f_{2k} = \frac{\psi_{2k} - \varphi_{2k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}\right)}{\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}\right)} \times \left(1 + \frac{\varepsilon_2(b)t_0^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right)\right) + \frac{\varphi_{2k} \varepsilon_2(b)t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}\right). \tag{27}$$

Further, taking (16),(17) and (20),(21) from (12) we get

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{1k} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}\right) \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} t^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}\right) \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2k} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}\right) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} t^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}\right) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x \tag{28}$$

and from (13),(26) and (27) we get

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k} \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}^* \sin \frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^* \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x, \tag{29}$$

where

$$C_{1k} = \frac{\psi_{1k} - \varphi_{1k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)}{T^\alpha E_{\alpha,1+\frac{\beta}{\alpha},1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}\right)},$$

$$C_{2k} = \frac{\psi_{2k} - \varphi_{2k} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})}{T^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})},$$

and

$$\begin{aligned} F_{1k} &= C_{1k} \left(\Gamma(\alpha + 1) + \varepsilon_1(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}) \right), \\ F_{1k}^* &= \frac{\varphi_{1k} \varepsilon_1(b) t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}) \\ F_{2k} &= C_{2k} \left(\Gamma(\alpha + 1) + \varepsilon_2(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}) \right), \\ F_{2k}^* &= \frac{\varphi_{2k} \varepsilon_2(b) t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}). \end{aligned}$$

3.3. Convergence of series

In order to justify that the obtained formal solution is indeed a true solution, we need to show that the series appeared in $t^{1-\alpha}u(x, t)$ and $f(x)$ as well as the corresponding series representations of $t^{1-\alpha}u_{xx}(x, t)$ and $D_{0t}^\alpha u(x, t)$ converge uniformly in Ω . For this purpose, let

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(-l) &= \varphi^{(i)}(l) = 0, \quad i = 0, 2, \\ \psi^{(i)}(-l) &= \psi^{(i)}(l) = 0, \quad i = 0, 2, \end{aligned}$$

Hence, on integration by parts, φ_{ik}, ψ_{ik} and C_{ik}, F_{ik} ($i = 1, 2$) can now be rewritten as

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \varphi_{1k}^{(4)}, \quad \varphi_{2k} = \frac{16l^4}{(\pi(2k-1))^4} \varphi_{2k}^{(4)}; \\ \psi_{1k} &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \psi_{1k}^{(4)}, \quad \psi_{2k} = \frac{16l^4}{(\pi(2k-1))^4} \psi_{2k}^{(4)}; \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_{1k}^{(4)} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi^{(4)}(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \varphi_{2k}^{(4)} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \varphi^{(4)}(x) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx, \\ \psi_{1k}^{(4)} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \psi^{(4)}(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad \psi_{2k}^{(4)} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \psi^{(4)}(x) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx. \end{aligned}$$

Easy to prove that, the series representations of $t^{1-\alpha}u(x, t)$ and $f(x)$ converge absolutely and uniformly in the region Ω . Actually, considering

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \cdot \frac{\psi_{1k}^{(4)} - \varphi_{1k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})}{T^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})}, \\ C_{2k} &= \frac{16l^4}{(\pi(2k+1))^4} \cdot \frac{\psi_{2k}^{(4)} - \varphi_{2k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})}{T^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})}, \\ F_{1k} &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \cdot C_{1k} \left(\Gamma(\alpha + 1) + \varepsilon_1(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}) \right), \\ F_{1k}^* &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \cdot \frac{\varphi_{1k}^{(4)} \varepsilon_1(b) t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}), \\ F_{2k} &= \frac{l^4}{(\pi k)^4} \cdot C_{2k} \left(\Gamma(\alpha + 1) + \varepsilon_2(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}) \right), \end{aligned}$$

$$F_{2k}^* = \frac{16l^4}{(\pi(2k+1))^4} \cdot \frac{\varphi_{2k}^{(4)} \varepsilon_2(b) t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta} \right).$$

and estimations

$$|C_{1k}| \leq \frac{l^4 \left(c_1 \cdot \left| \psi_{1k}^{(4)} \right| + c_1^* \cdot \left| \varphi_{1k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi k)^4},$$

$$|C_{2k}| \leq \frac{16l^4 \left(c_2 \cdot \left| \psi_{2k}^{(4)} \right| + c_2^* \cdot \left| \varphi_{2k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi(2k-1))^4},$$

$$|F_{1k}| \leq \frac{l^4}{(\pi k)^4} \cdot |C_{1k}| \left| \Gamma(\alpha+1) + \varepsilon_1(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta} \right) \right|,$$

$$|F_{2k}| \leq \frac{16l^4}{(\pi(2k-1))^4} \cdot |C_{2k}| \left| \Gamma(\alpha+1) + \varepsilon_2(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta} \right) \right|,$$

$$|F_{1k}^*| \leq c_3 \cdot \frac{l^4 \left| \varphi_{1k}^{(4)} \right|}{(\pi k)^4}, \quad |F_{2k}^*| \leq c_4 \cdot \frac{16l^4 \left| \varphi_{2k}^{(4)} \right|}{(\pi(2k-1))^4},$$

owing to $\left| E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{ik} t^{\alpha+\beta} \right) \right| \leq \frac{1}{1 + \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(2\alpha+\beta)} \cdot \lambda_{ik} t^{\alpha+\beta}} \leq c_{0i}, \quad i = 1, 2$ (see Proposition 1), from (28) and (29), we find

$$|t^{1-\alpha} u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \left(c_1 \cdot \left| \psi_{1k}^{(4)} \right| + (c_{01} + c_1^*) \cdot \left| \varphi_{1k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi k)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \left(c_2 \cdot \left| \psi_{2k}^{(4)} \right| + (c_{02} + c_2^*) \cdot \left| \varphi_{2k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi(2k-1))^4}$$

and

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \left(|C_{1k}| \left| \Gamma(\alpha+1) + \varepsilon_1(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta} \right) \right| + c_3 \left| \varphi_{1k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi k)^4} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \left(|C_{2k}| \left| \Gamma(\alpha+1) + \varepsilon_2(b) t_0^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta} \right) \right| + c_4 \left| \varphi_{2k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi(2k-1))^4},$$

where

$$c_i = \left| \frac{1}{T^\alpha E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{ik} T^{\alpha+\beta} \right)} \right|, \quad c_i^* = \left| \frac{E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{ik} T^{\alpha+\beta} \right)}{T \Gamma(\alpha) E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}} \left(-\lambda_{ik} T^{\alpha+\beta} \right)} \right|,$$

$$c_{i+2} = \left| \frac{\varepsilon_i(b) t_0^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(-\lambda_{ik} t_0^{\alpha+\beta} \right) \right|, \quad i = 1, 2.$$

The convergence of the series representations of $t^{1-\alpha} u_{xx}(x, t)$ which are obtained by term-wise differentiation of the series representation of $t^{1-\alpha} u(x, t)$ can be shown in a similar way:

$$|t^{1-\alpha} u_{xx}(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2 \left(c_1 \cdot \left| \psi_{1k}^{(4)} \right| + (c_{01} + c_1^*) \cdot \left| \varphi_{1k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi k)^2} \left| \sin \frac{\pi k}{l} x \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4l^2 \left(c_2 \cdot \left| \psi_{2k}^{(4)} \right| + (c_{02} + c_2^*) \cdot \left| \varphi_{2k}^{(4)} \right| \right)}{(\pi(2k-1))^2} \left| \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x \right| < \infty.$$

Finally, owing to class of functions $t^{1-\alpha} u(x, t)$ and $f(x)$, from the absolutely and uniformly convergence of the series representations of $u(x, t)$, $f(x)$ and $t^{1-\alpha} u_{xx}(x, t)$, in the domain Ω , we conclude that a series representations of $D_{0t}^\alpha u$ is absolutely and uniformly converge also, in the domain Ω .

4. Uniqueness of solution

Suppose that there are two solution sets $\{u_1(x, t), f_1(x)\}$ and $\{u_2(x, t), f_2(x)\}$ to the Inverse Problem *IP*. Denote

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

and

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Then, the functions $u(x, t)$ and $f(x)$ clearly satisfy equation (6), the boundary conditions in (7) and the homogeneous conditions

$$\lim_{t \rightarrow +0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = 0, \quad u(x, T) = 0, \quad x \in [-l, l]. \tag{30}$$

If $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, then due to completeness of functions $\sin \frac{\pi k}{l} x$ and $\cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x$, we get $\varphi_{ik} = \psi_{ik} = 0$, ($i = 1, 2$). Hence, from (24) and (25) we infer, that $u_{ik}(t_0) = 0$, respectively. Similarly, from (26) and (27) we obtain $f_{ik} = 0$, ($i = 1, 2$).

Let us now introduce the following:

$$\Omega_\varepsilon = \{-l + \varepsilon < x < l - \varepsilon, \varepsilon < t < T - \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$u_{1k}(t) = \frac{1}{l} \int_{-l+\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, t) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

$$u_{2k}(t) = \frac{1}{l} \int_{-l+\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, t) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

$$f_{1k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

$$f_{2k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Note that the homogeneous conditions in (30) lead to

$$\lim_{t \rightarrow +0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{ik}(t) = 0, \quad u_{ik}(T) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Assume that $u_{xx} \in C(\Omega_\varepsilon)$, and

$$\lim_{x \rightarrow -l} u_x(x, t) \sin \frac{\pi k}{l} x = \lim_{x \rightarrow l} u_x(x, t) \sin \frac{\pi k}{l} x = \lim_{x \rightarrow l} u_x(-x, t) \sin \frac{\pi k}{l} x = 0,$$

applying the Rimann-Liouville differentiate operator to equation (31), we get

$$\begin{aligned} & D_{0t}^\alpha u_{1k}(t) = \\ & = \frac{1}{l} \int_{-l+\varepsilon}^{l-\varepsilon} (a_1 t^\beta u_{xx}(x, t) - a_2 t^\beta u_{xx}(-x, t) - b_1 u(x, t_0) - b_2 u(-x, t_0)) \sin \frac{\pi k}{l} x dx + f_{1k}, \end{aligned}$$

which on integrating by parts and using the conditions in (7), at $\varepsilon \rightarrow 0$ reduces to

$$D_{0t}^\alpha u_{1k}(t) = \lambda_{1k} u_{1k}(t) - \varepsilon_1(b) u_{1k}(t_0) + f_{1k}, \quad 0 < t \leq T.$$

One can then easily show that this equation together with the conditions $\lim_{t \rightarrow +0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{1k}(t) = u_{1k}(T) = 0$ and $u_{1k}(t_0) = 0, f_{1k} = 0$, imply that $u_{1k}(t) \equiv 0$, for $t \in (0, T]$.

Similarly, for u_{2k} and f_{2k} as given in (32) and (34), respectively, one can show that $\lim_{t \rightarrow +0} D_{0t}^{\alpha-1} u_{2k}(t) \equiv 0$, for $t \in (0, T]$.

Therefore, due to the completeness of the system of eigenfunctions (11) in $L_2(-l, l)$, we must have

$$f(t) \equiv 0, \quad t^{1-\alpha} u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

This ends the proof of uniqueness of solution to the Inverse Problem *IP*.

5. Main result

The main result for the Inverse Problem *IP* can be summarized in the following theorem: **Theorem 2.** *Let $\varphi(x), \psi(x) \in C^3[-l, l]$, $\varphi^{(4)}(x), \psi^{(4)}(x) \in L_1(-l, l)$ and $\varphi^{(i)}(-l) = \varphi^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(-l) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$. Then, a unique solution to the inverse problem *IP*, exists and it can be written in the form*

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \varphi_{1k}^{(4)} t^{\alpha-1}}{(\pi k)^4 \Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}) \sin \frac{\pi k}{l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \left(\psi_{1k}^{(4)} - \varphi_{1k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}) \right)}{(\pi k)^4 T^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})} t^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t^{\alpha+\beta}) \sin \frac{\pi k}{l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \varphi_{2k}^{(4)} t^{\alpha-1}}{(\pi(2k-1))^4 \Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \left(\psi_{2k}^{(4)} - \varphi_{2k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}) \right)}{(\pi(2k-1))^4 T^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})} t^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t^{\alpha+\beta}) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \left(\psi_{1k}^{(4)} - \varphi_{1k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta}) \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_1(b) t_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}) \right)}{(\pi k)^4 \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{1k} T^{\alpha+\beta})} \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^4 \varphi_{1k}^{(4)} \varepsilon_1(b) t_0^{\alpha-1}}{(\pi k)^4 \Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{1k} t_0^{\alpha+\beta}) \sin \frac{\pi k}{l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \left(\psi_{2k}^{(4)} - \varphi_{2k}^{(4)} \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta}) \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_2(b) t_0^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}) \right)}{(\pi(2k-1))^4 \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta}{\alpha}}(-\lambda_{2k} T^{\alpha+\beta})} \times \\
 & \quad \times \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16l^4 \varphi_{2k}^{(4)} \varepsilon_2(b) t_0^{\alpha-1}}{(\pi(2k-1))^4 \Gamma(\alpha)} E_{\alpha, 1+\frac{\beta}{\alpha}, 1+\frac{\beta-1}{\alpha}}(-\lambda_{2k} t_0^{\alpha+\beta}) \cos \frac{\pi(2k-1)}{2l} x,
 \end{aligned}$$

where $\lambda_{1k} = (a_1 + a_2) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2$, $\lambda_{2k} = (a_1 - a_2) \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2$.

REFERENCES

1. B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, and R. G. Tapdigoglu, "An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation", *Quaestiones Mathematicae*, vol. 40, no. 2, pp. 151-160, 2017.
2. A. Cabada and A. F. Tojo, "Equations with involutions", in *Proceedings of the Workshop on Differential Equations*, p. 240, Malla Moravka, Czech Republic, March, 2014, <http://users.math.cas.cz/>.
3. M. Kirane., M. A. Sadybekov., A. A. Sarsenbi. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Math Meth Appl Sci.* 2019;1-10. <https://doi.org/10.1002/mma.5498>
4. A. Ashyralyev, A. M. Sarsenbi, Well-posedness of an elliptic equation with involution, *Electron. J. Differ. Equ.* 2015 (284) (2015) 18.
5. M. A. Sadybekov, G. Dildabek, and M.B. Ivanova. On an Inverse Problem of Reconstructing a Heat Conduction Process from Nonlocal. *Data Hindawi Advances in Mathematical Physics* Volume 2018, Article ID 8301656, 8 pages <https://doi.org/10.1155/2018/8301656>

6. M. Kirane, N. Al-Salti, Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation, J. Nonlinear Sci. Appl., 9 (2016) 12431251
7. Burlutskayaa M. Sh., Khromov A. P. Fourier Method in an Initial-Boundary Value Problem for a First-Order Partial Differential Equation 16 with Involution. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51, Issue 1, pp. 2102-2114.
8. M. Kirane, B. Samet, B.T. Torebek. Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data // Electron. J. Diff. Equat.2017:257, 1-13. 2017.
9. Nasser Al-Salti, Mokhtar Kirane, Berikbol T.Torebek. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation. arXiv:1612.01419v2 [math.AP] 23 Aug 2017
10. Torebek, B.T., Tapdigoglu, R.: Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. Math. Methods Appl. Sci. 40, 6468-6479 (2017). <https://doi.org/10.1002/mma.4468>
11. Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., Tapdigoglu, R.G.: An in-verse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. Quaest. Math. 40(2), 151-160 (2017). <https://doi.org/10.2989/16073606.2017.1283370>
12. B. Kh. Turmetov, B. J. Kadirkulov. An Inverse Problem for a Parabolic Equation with Involution. Lobachevskii Journal of Mathematics 42(12).pp.3006-3015. 2021.
13. A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. MR2218073(2007a:34002). Zbl 1092.45003, P. 45-53, 69-79, 242-251.
14. R. Ashurov., B. Kadirkulov., O. Ergashev, Inverse problem of Bitsadze-Samarskii type for a two-dimensional parabolic equation of fractional order. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 2, August, 203.
15. L. Boudabsa., T. Simon. Some Properties of the Kilbas-Saigo Function. Mathematics, 9, 217, 2021, P. 13-19.
16. E.I. Moiseev. The basis property for systems of sines and cosines. In Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume 275, pages 794В-798, 1984.

РЕЗЮМЕ

Ushbu ish involyutsiya bilan buzilgan kasr tartibli diffuziya tenglamasi uchun teskari masalani o'rganishga bag'ishlangan. Qo'yilgan masala uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi teoremasi isbotlandi.

Kalit so'zlar: Teskari masala, buzilgan kasr tartibli diffuziya tenglamasi, involyutsiya, yechimning mavjudligi va yagonaligi, qatorga yoyish.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена изучению обратной задачи для нагруженного вырождающегося диффузионного уравнения дробного порядка с возмущением инволютивного типа. Доказана теорема существования и единственности решения сформулированной задачи.

Ключевые слова: Обратные задачи, нагруженное диффузионное уравнение дробного порядка, возмущение инволютивного типа, существование и единственность решения, разложение в ряд.

UDC 512.554.1

**LOCAL DERIVATION ON SOLVABLE LIE ALGEBRAS WITH NATURALLY GRADED FILIFORM
NILRADICALS**

ATAJONOV KH. O.

DEPARTMENT OF ALGEBRA AND MATHEMATICAL ENGINEERING, URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED
AFTER ABU RAYHON BERUNI. URGENCH, UZBEKISTAN
atajonovxusainboy@gmail.com

MADAMINOVA G. Q.

DEPARTMENT OF ALGEBRA AND MATHEMATICAL ENGINEERING, URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED
AFTER ABU RAYHON BERUNI. URGENCH, UZBEKISTAN
madaminovagulruh0523@gmail.com

IBRAGIMOVA K. O.

DEPARTMENT OF ALGEBRA AND MATHEMATICAL ENGINEERING, URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED
AFTER ABU RAYHON BERUNI. URGENCH, UZBEKISTAN
ibragimovakamola0123@gmail.com

RESUME

In this work, we study derivations and local derivations of finite-dimensional solvable Lie algebras whose nilradicals are naturally graded filiform. Specifically, the general form of the matrices of derivations and local derivations of these algebras is determined. We show that these algebras admit local derivations that are not derivations.

Key words: Lie algebra, derivation, solvable Lie algebra, local derivation.

1. Introduction

In recent developments, the study of local and 2-local maps has attracted considerable interest, particularly within the framework of certain non-associative algebraic systems such as Lie, Jordan, and Leibniz algebras. The idea of local derivations was first introduced in 1990 by Kadison [16], and independently by Larson and Sourour [21]. Later, in 1997, Šemrl expanded this area by defining the concepts of 2-local derivations and 2-local automorphisms related to algebras [22].

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in [7] by Ayupov and Kudaybergenov. They proved that every local derivation on semisimple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations that are not derivations. In [4], local derivations of solvable Lie algebras are investigated, and it is shown that in the class of solvable Lie algebras there exist algebras that admit local derivations that are not derivations and also algebras for which every local derivation is a derivation. Several authors investigated local derivations for the finite or infinite dimensional Lie and Leibniz algebras [2,3,5,8,9,11,14,17,18,26,28]. It was proved that all local derivations of the following algebras are derivations: Borel subalgebras of finite-dimensional simple Lie algebras; Witt algebras; solvable Lie algebras of maximal rank; Cayley algebras; locally finite split simple Lie algebras; the Schrödinger algebras; conformal Galilei algebras.

Several papers have been devoted to similar notions and corresponding problems for 2-local derivations and automorphisms of Lie algebras [6,9,10,12,13,15,24,27]. Specifically, in [6] it is proved that every 2-local derivation on the semisimple Lie algebras is a derivation, whereas each finite-dimensional nilpotent Lie algebra, with dimension larger than two, admits 2-local derivation which is not a derivation. Let us present the list of Lie algebras for which all 2-local derivations are derivations: finite-dimensional semisimple Lie algebras; Witt algebras; locally finite split simple Lie algebras; Virasoro algebras; Virasoro-like algebra; the Schrödinger-Virasoro algebra; Jacobson-Witt algebras; planar Galilean conformal algebras.

The investigation of local and 2-local δ -derivations on Lie algebras was initiated in [19] by A. Khudoyberdiyev and B. Yusupov. Specifically, in [19], they introduced the concepts of local and 2-local δ -derivations and described local and 2-local $\frac{1}{2}$ -derivations on finite-dimensional solvable Lie algebras with filiform,

Heisenberg, and abelian nilradicals. Moreover, they provided descriptions of local $\frac{1}{2}$ -derivations on oscillator Lie algebras, conformal perfect Lie algebras, and Schrödinger algebras. In a recent paper [29], B. Yusupov, V. Vaisova, and T. Madrakhimov obtained similar results regarding local $\frac{1}{2}$ -derivations of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras of type I. They showed that such algebras, in general, admit local $\frac{1}{2}$ -derivations which are not ordinary $\frac{1}{2}$ -derivations. In another work [20], U. Mamadaliyev, A. Sattarov, and B. Yusupov studied local and 2-local $\frac{1}{2}$ -derivations on solvable Leibniz algebras. They proved that any local $\frac{1}{2}$ -derivation on solvable Leibniz algebras with model or abelian nilradicals, where the complementary space of maximal dimension exists, is a $\frac{1}{2}$ -derivation. Furthermore, they showed that solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals and one-dimensional complementary space also admit such derivations. Additionally, 2-local $\frac{1}{2}$ -derivations were investigated for these types of algebras, and an example of a solvable Leibniz algebra was constructed for which every 2-local $\frac{1}{2}$ -derivation is a true $\frac{1}{2}$ -derivation. However, examples were also given of algebras that admit 2-local $\frac{1}{2}$ -derivations which are not $\frac{1}{2}$ -derivations.

In this work, we study derivations and local derivations of finite-dimensional solvable Lie algebras whose nilradicals are naturally graded filiform. Specifically, the common form of the matrices of derivations and local derivations of these algebras is determined. We show that these algebras admit local derivations that are not derivations.

2. Preliminaries

All the algebras below will be over the complex field, and all the linear maps will be \mathbb{C} -linear unless otherwise stated. Omitted products in the multiplication table of an algebra are assumed to be zero. Moreover, due to the anti-commutativity of Lie algebras, symmetric products for these algebras are also omitted.

A derivation on a Lie algebra \mathcal{L} is a linear map $D : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz rule:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \quad \text{for any } x, y \in \mathcal{L}. \tag{1}$$

The set of all derivations of \mathcal{L} is denoted by $\text{Der}(\mathcal{L})$ and with respect to the commutation operation is a Lie algebra.

For any element $y \in \mathcal{L}$ the left multiplication operator $\text{ad}_x : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, defined as $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ is a derivation, and derivations of this form are called inner derivations. The set of all inner derivations of \mathcal{L} , denoted by $\text{Inn}(\mathcal{L})$, is an ideal in $\text{Der}(\mathcal{L})$.

Definition 1. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$. The set of all local derivations on \mathcal{L} we denote by $\text{LocDer}(\mathcal{L})$.

For an arbitrary Lie algebra L we define the **derived** and **central series** as follows:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{[1]} &= \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{[s+1]} = [\mathfrak{L}^{[s]}, \mathfrak{L}^{[s]}], \quad s \geq 1, \\ \mathfrak{L}^1 &= \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{k+1} = [\mathfrak{L}^k, \mathfrak{L}], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Definition 2. An n -dimensional Lie algebra \mathfrak{L} is called **solvable (nilpotent)** if there exists $s \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) such that $\mathfrak{L}^{[s]} = \{0\}$ ($\mathfrak{L}^k = \{0\}$). Such minimal number is called **index of solvability (nilpotency)**.

The maximal nilpotent ideal of a Lie algebra is said to be the nilradical of the algebra.

Definition 3. An n -dimensional Lie algebra \mathfrak{L} is said to be **filiform** if $\dim \mathfrak{L}^i = n - i$, for $2 \leq i \leq n$.

Now let us define a natural gradation for the nilpotent Lie algebras.

Definition 4. Given a nilpotent Lie algebra \mathfrak{L} with nilindex s , put $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}^i / \mathfrak{L}^{i+1}$, $1 \leq i \leq s - 1$, and $\text{Gr}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{L}_{s-1}$. Define the product in the vector space $\text{Gr}(\mathfrak{L})$ as follows:

$$[x + \mathfrak{L}^{i+1}, y + \mathfrak{L}^{j+1}] := [x, y] + \mathfrak{L}^{i+j+1},$$

where $x \in \mathfrak{L}^i / \mathfrak{L}^{i+1}$, $y \in \mathfrak{L}^j / \mathfrak{L}^{j+1}$. Then $[\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_j] \subseteq \mathfrak{L}_{i+j}$ and we obtain the graded algebra $\text{Gr}(\mathfrak{L})$. If $\text{Gr}(\mathfrak{L})$ and \mathfrak{L} are isomorphic, then we say that the algebra \mathfrak{L} is **naturally graded**.

It is well known that there are two types of naturally graded filiform Lie algebras. In fact, the second type will appear only in the case when the dimension of the algebra is even.

Theorem 1.[25] Any naturally graded filiform Lie algebra is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{n,1} : \quad & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n - 1; \\ \mathfrak{Q}_{2n} : \quad & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2n - 2, \quad [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

All solvable Lie algebras whose nilradical is the naturally graded filiform Lie algebra $\mathfrak{n}_{n,1}$ are classified in [23] ($n \geq 4$). Furthermore, solvable Lie algebras whose nilradical is the naturally graded filiform Lie algebra \mathfrak{Q}_{2n} are classified in [1]. It is proved that the dimension of a solvable Lie algebra whose nilradical is isomorphic to an n -dimensional naturally graded filiform Lie algebra is not greater than $n + 2$.

Here we give the list of such solvable Lie algebras. We denote by $\mathfrak{s}_{n,1}^i$ solvable Lie algebras with nilradical $\mathfrak{n}_{n,1}$ and codimension one, and by $\mathfrak{s}_{n,2}$ with codimension two:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta) : & \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_1, h] = e_1, \quad [e_i, h] = (i-2+\beta)e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \mathfrak{s}_{n,1}^2 : & \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_i, h] = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \mathfrak{s}_{n,1}^3 : & \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_1, h] = e_1 + e_2, \quad [e_i, h] = (i-1)e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1}) : & \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad [e_i, h] = e_i + \sum_{l=i+2}^n \alpha_{l+1-i}e_l, \quad 2 \leq i \leq n; \\ \mathfrak{s}_{n,2} : & \quad \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, & [e_1, h_1] = e_1, \\ [e_i, h_1] = (i-2)e_i, \quad 3 \leq i \leq n, & [e_i, h_2] = e_i, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Any solvable complex Lie algebra of dimension $2n + 1$ with nilradical isomorphic to \mathfrak{Q}_{2n} is isomorphic to one of the following algebras:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda) : & \quad \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2n-2, & [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \quad 2 \leq i \leq n, \\ [e_1, h] = e_1, \quad [e_i, x] = (i-2+\lambda)e_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, & [e_{2n}, h] = (2n-3+2\lambda)e_{2n}; \end{cases} \\ \mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon) : & \quad \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2n-2, & [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \quad 2 \leq i \leq n, \\ [e_1, h] = e_1 + \varepsilon e_{2n}, \quad \varepsilon = -1, 1, & [e_i, h] = (i-n)e_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \\ [e_{2n}, x] = e_{2n}; \end{cases} \\ \mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \dots, \lambda_{2n-1}) : & \quad \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2n-2, & [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \quad 2 \leq i \leq n, \\ [e_{2+i}, h] = e_{2+i} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-2-i}{2} \rfloor} \lambda_{2k+1} e_{2k+1+i}, \quad 0 \leq i \leq 2n-6, \\ [e_{2n-i}, h] = e_{2n-i}, \quad i = 1, 2, 3, & [e_{2n}, h] = 2e_{2n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Moreover, the first nonvanishing parameter λ_{2k+1} can be normalized to 1.

Finally, for any $n \geq 3$ there is only one solvable Lie algebra \mathfrak{r}_{2n+2} of dimension $2n + 2$ having a nilradical isomorphic to \mathfrak{Q}_{2n} :

$$\mathfrak{r}_{2n+2} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2n-2, & [e_i, e_{2n+1-i}] = (-1)^i e_{2n}, \quad 2 \leq i \leq n, \\ [e_i, h_1] = i e_i, \quad 1 \leq i \leq 2n-1, & [e_{2n}, h_1] = (2n+1)e_{2n}, \\ [e_i, h_2] = e_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, & [e_{2n}, h_2] = 2e_{2n}. \end{cases}$$

Now we describe derivation of solvable Lie algebras with filiform nilradical algebras.

Theorem 2. Any derivation of the algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$, $\mathfrak{s}_{n,1}^2$, $\mathfrak{s}_{n,1}^3$, $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1})$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$ and $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_{2n-1})$ has the following form:

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= -\beta_3 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_{i+1} (i-2+\beta) e_i + \delta_n e_n, \quad \varphi(e_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \varphi(e_2) = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \\ \varphi(e_i) &= (\beta_2 + (i-2)\alpha_1) e_i + \beta_3 e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \quad \varphi(e_n) = ((n-2)\alpha_1 + \beta_2) e_n, \end{aligned}$$

with the restriction $(\beta-1)\alpha_2 = 0$.

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_{i+1}e_i + \delta_n e_n, \quad \varphi(e_1) = \alpha_1 e_1 + \sum_{i=3}^n \alpha_i e_i, \quad \varphi(e_2) = \sum_{i=2}^n \beta_i e_i, \\ \varphi(e_i) &= ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum_{j=i+1}^n \beta_{j-i+2}e_j, \quad 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- for the algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^3$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= -\beta_3 e_1 + (\alpha_3 - \beta_3)e_2 + \sum_{i=3}^{n-1} (i-1)\alpha_{i+1}e_i + \delta_n e_n, \quad \varphi(e_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \\ \varphi(e_i) &= ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \beta_3 e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1})$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \sum_{i=2}^{n-1} (\beta_{i+1} + \sum_{j=3}^{i-1} \beta_j \alpha_{i-j+2})e_i + \delta_n e_n, \quad \varphi(e_1) = \sum_{i=3}^n \beta_i e_i, \\ \varphi(e_i) &= \mu_2 e_i + \sum_{j=i+1}^n \mu_{j-i+2}e_j, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{t}_{2n+1}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \sum_{i=2}^{2n-1} \alpha_{i+1}(i-2+\lambda)e_i + \delta_{2n} e_{2n}, \\ \varphi(e_1) &= \alpha_1 e_1 + \sum_{i=3}^{2n-1} \alpha_i e_i, \quad \varphi(e_2) = \beta_2 e_2 + \beta_{2n} e_{2n}, \\ \varphi(e_i) &= ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + (-1)^{i-1} \alpha_{2n-i+2} e_{2n}, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \\ \varphi(e_{2n}) &= ((2n-3)\alpha_1 + 2\beta_2)e_{2n}. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{t}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \sum_{i=1}^{2n} \delta_i e_i, \quad \varphi(e_1) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i e_i, \quad \varphi(e_2) = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_{2n} e_{2n}, \\ \varphi(e_i) &= ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \beta_3 e_{i+1} + (-1)^{i-1} \alpha_{2n+2-i} e_{2n}, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \\ \varphi(e_{2n}) &= ((2n-3)\alpha_1 + 2\beta_2)e_{2n}. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{t}_{2n+1}(\lambda_5, \dots, \lambda_{2n-1})$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \sum_{i=2}^{2n-1} (\alpha_{i+1} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \lambda_{2k+1} \alpha_{i-2k+2})e_i + \delta_{2n} e_{2n}, \quad \varphi(e_1) = \alpha_1 e_1 + \sum_{i=3}^{2n-1} \alpha_i e_i, \\ \varphi(e_2) &= \beta_2 e_2 + \beta_{2n} e_{2n}, \quad \varphi(e_i) = ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + (-1)^{i-1} \alpha_{2n-i+2} e_{2n}, \quad 3 \leq i \leq 2n, \\ \varphi(e_{2n}) &= ((2n-3)\alpha_1 + 2\beta_2)e_{2n}. \end{aligned}$$

Proof. The proof follows from straightforward calculations and the definition of derivation.

3. Local derivation on solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradical

In this section, we study local derivations on solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradicals $\mathfrak{n}_{n,1}$ and \mathfrak{Q}_{2n} . In the following theorem, we describe local derivations of solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradicals $\mathfrak{n}_{n,1}$ and \mathfrak{Q}_{2n} .

Theorem 3. *Any local derivation of the algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$, $\mathfrak{s}_{n,1}^2$, $\mathfrak{s}_{n,1}^3$, $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1})$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$ and $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_{2n-1})$ has the following form:*

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=1}^n b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= \sum_{i=1}^n b_{i,1}e_i, \\ \Delta(e_i) &= b_{i,i}e_i + b_{i+1,i}e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

with the restriction $(\beta - 1)b_{2,1} = 0$.

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^2$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=2}^n b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= b_{1,1}e_1 + \sum_{i=3}^n b_{i,1}e_i, \\ \Delta(e_2) &= \sum_{i=2}^n b_{i,2}e_i, & \Delta(e_i) &= \sum_{j=i}^n b_{j,i}e_j, \quad 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- for the algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^3$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=1}^n b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= \sum_{i=1}^n b_{i,1}e_i, \\ \Delta(e_i) &= b_{i,i}e_i + b_{i+1,i}e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n; \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1})$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=2}^n b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= \sum_{i=3}^n b_{i,1}e_i, \\ \Delta(e_i) &= \sum_{j=i}^n b_{j,i}e_j, & 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=2}^{2n} b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= b_{1,1}e_1 + \sum_{i=3}^{2n-1} b_{i,1}e_i, & \Delta(e_2) &= b_{2,2}e_2 + b_{2n,2}e_{2n}, \\ \Delta(e_i) &= b_{i,i}e_i + b_{i,2n}e_{2n}, & 3 \leq i \leq 2n-1, & & \Delta(e_{2n}) &= b_{2n,2n}e_{2n}. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=1}^{2n} b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= \sum_{i=1}^{2n} b_{i,1}e_i, & \Delta(e_2) &= b_{2,2}e_2 + b_{3,2}e_3 + b_{2n,2}e_{2n}, \\ \Delta(e_i) &= b_{i,i}e_i + b_{i+1,i}e_{i+1} + b_{i,2n}e_{2n}, & 3 \leq i \leq 2n-1, & & \Delta(e_{2n}) &= b_{2n,2n}e_{2n}. \end{aligned}$$

- for the algebra $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \dots, \lambda_{2n-1})$:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \sum_{i=2}^{2n} b_{i,0}e_i, & \Delta(e_1) &= b_{1,1}e_1 + \sum_{i=3}^{2n-1} b_{i,1}e_i, \\ \Delta(e_2) &= b_{2,2}e_2 + b_{2n,2}e_{2n}, & \Delta(e_i) &= b_{i,i}e_i + b_{i,2n}e_{2n}, & 3 \leq i \leq 2n, & \Delta(e_{2n}) &= b_{2n,2n}e_{2n}. \end{aligned}$$

Proof. We prove the theorem for the algebra $\mathfrak{s}_{n,1}^2$, and for the algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$, $\mathfrak{s}_{n,1}^3$, $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1})$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$, $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$ and $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_{2n-1})$ the proofs are similar. Let Δ be an arbitrary local derivation on $\mathfrak{s}_{n,1}^2$ and let \mathfrak{B} be the matrix of Δ :

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-1} & b_{0,n} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{2,0} & b_{2,1} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n,0} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

By the definition for all $x = x_0h + \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathfrak{s}_{n,1}^2$ there exists a derivation D_x on $\mathfrak{s}_{n,1}^2$ such that

$$\Delta(x) = D_x(x).$$

By Theorem [2], D_x has the following matrix representation:

$$\mathfrak{B}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_3^x & 0 & \beta_2^x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_4^x & \alpha_3^x & \beta_3^x & \alpha_1^x + \beta_2^x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_5^x & \alpha_4^x & \beta_4^x & \beta_3^x & \alpha_1^x + 2\beta_2^x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1}^x & \alpha_{n-2}^x & \beta_{n-2}^x & \beta_{n-3}^x & \beta_{n-4}^x & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_n^x & \alpha_{n-1}^x & \beta_{n-1}^x & \beta_{n-2}^x & \beta_{n-3}^x & \cdots & \alpha_1^x + (n-3)\beta_2^x & 0 \\ \delta_n^x & \alpha_n^x & \beta_n^x & \beta_{n-1}^x & \beta_{n-2}^x & \cdots & \beta_3^x & \alpha_1^x + (n-2)\beta_2^x \end{pmatrix}.$$

Let \mathfrak{B} be the matrix of Δ then by choosing subsequently $x = h, x = e_1, \dots, x = e_n$ and using $\Delta(x) = D_x(x)$, i.e. $\mathfrak{B}\bar{x} = D_x(\bar{x})$, where \bar{x} is the vector corresponding to x , which implies

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{2,0} & 0 & b_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{4,0} & b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-2,0} & b_{n-2,1} & b_{n-2,2} & b_{n-2,3} & b_{n-2,4} & \cdots & 0 & 0 \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & b_{n,4} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Using again $\Delta(x) = D_x(x)$, i.e. $\mathfrak{B}\bar{x} = \mathfrak{B}_x(\bar{x})$, where \bar{x} is the vector corresponding to $x = x_0h + \sum_{i=1}^n x_i e_i$, we obtain the next system of equalities

$$\begin{aligned} b_{1,1}x_1 &= \alpha_1^x x_1, \\ b_{2,0}x_0 + b_{2,2}x_2 &= \alpha_3^x x_0 + \beta_2^x x_2, \\ \sum_{j=0}^i b_{i,j}x_j &= \alpha_{i+1}^x x_0 + \alpha_i^x x_1 + \sum_{j=3}^i \beta_{i-j+3}^x x_{j-1} + (\alpha_1^x + (i-2)\beta_2^x)x_i, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ \sum_{j=0}^n b_{n,j}x_j &= \delta_n^x x_0 + \alpha_n^x x_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \beta_{n+2-j}^x x_j + (\alpha_1^x + (n-2)\beta_2^x)x_n. \end{aligned}$$

Let us consider the next cases:

Case 1: If $x_0 \neq 0$, then

$$\alpha_3^x = b_{2,0} + \frac{(b_{2,2} - \beta_2^x)x_2}{x_0},$$

$$\alpha_{i+1}^x = \frac{\sum_{j=0}^i b_{i,j}x_j - \alpha_i^x x_1 - \sum_{j=3}^i \beta_{i-j+3}^x x_{j-1} - (\alpha_1^x + (i-2)\beta_2^x)x_i}{x_0}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\delta_n^x = \frac{\sum_{j=0}^n b_{n,j}x_j - \alpha_n^x x_1 - \sum_{j=2}^{n-1} \beta_{n+2-j}^x x_j - (\alpha_1^x + (n-2)\beta_2^x)x_n}{x_0},$$

where $\alpha_1^x, \beta_2^x, \beta_3^x, \dots, \beta_n^x$ defined arbitrary.

Case 2: If $x_0 = 0$ and $x_1 \neq 0$, then $\alpha_1^x = b_{1,1}$,

$$\alpha_i^x = \frac{\sum_{j=1}^i b_{i,j}x_j - \sum_{j=3}^i \beta_{i-j+3}^x x_{j-1} - (\alpha_1^x + (i-2)\beta_2^x)x_i}{x_1}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$$

$$\alpha_n^x = \frac{\sum_{j=1}^n b_{n,j}x_j - \sum_{j=2}^{n-1} \beta_{n+2-j}^x x_j - (\alpha_1^x + (n-2)\beta_2^x)x_n}{x_1},$$

where $\alpha_n^x, \beta_2^x, \beta_3^x, \dots, \beta_n^x, \delta_n^x$ defined arbitrary.

Case 3: If $x_0 = x_1 = 0$ and $x_2 \neq 0$, then $\beta_2^x = b_{2,2}$,

$$\beta_i^x = \frac{\sum_{j=2}^i b_{i,j}x_j - \sum_{j=4}^i \beta_{i-j+3}^x x_{j-1} - (\alpha_1^x + (i-2)\beta_2^x)x_i}{x_2} \quad 3 \leq i \leq n,$$

where $\alpha_1^x, \alpha_3^x, \dots, \alpha_n^x, \delta_n^x$ defined arbitrary.

Case 4: If $x_0 = x_1 = \dots = x_{t-1} = 0$ and $x_t \neq 0$, $3 \leq t \leq n$, then $\beta_2^x = b_{t,t} - (t-2)\alpha_1^x$,

$$\beta_{i-t+2}^x = b_{i,t} + \frac{\sum_{j=t+1}^i b_{i,j}x_j - \sum_{j=t+2}^i \beta_{i-j+3}^x x_{j-1} - (\alpha_1^x + (i-2)\beta_2^x)x_i}{x_t}, \quad t+1 \leq i \leq n,$$

where $\alpha_1^x, \alpha_3^x, \dots, \alpha_n^x, \delta_n^x$ defined arbitrary.

This completes the proof.

In the following table, we give the dimensions of the spaces of derivations and local derivations of solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradical:

Algebra	dim Der	dim LocDer
$\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$	$n + 3$	$6n - 2$
$\mathfrak{s}_{n,1}^2$	$2n - 1$	$\frac{(n-1)(n+4)}{2}$
$\mathfrak{s}_{n,1}^3$	$n + 3$	$4n - 2$
$\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{n-1})$	$2n - 2$	$\frac{n^2+3n-6}{2}$
$\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda)$	$2n + 1$	$8n - 6$
$\mathfrak{r}_{2n+1}(2 - n, \varepsilon)$	$4n + 3$	$10n - 5$
$\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_5, \dots, \lambda_{2n-1})$	$2n + 1$	$8n - 3$

Corollary. Solvable Lie algebras $\mathfrak{s}_{n,1}^1(\beta)$, $\mathfrak{s}_{n,1}^2$, $\mathfrak{s}_{n,1}^3$, $\mathfrak{s}_{n,1}^4(\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1})$, $\mathfrak{v}_{2n+1}(\lambda)$, $\mathfrak{v}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$ and $\mathfrak{v}_{2n+1}(\lambda_5, \lambda_6, \dots, \lambda_{2n-1})$ admit a local derivation which is not a derivation.

Remark.

In this paper, we have considered only those solvable Lie algebras, whose complementary space is one dimensional. Since the classification of local derivations on solvable Lie algebras of maximal rank was obtained in [18], we have restricted our investigation here to the case $\dim(\text{complementary space}) = 1$.

REFERENCES

1. Ancochea Bermúdez J. M., Campoamor-Stursberg R., García Vergnolle L., Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2006, V. 6(39), P. 1339–1355.
2. Alauadinov A. K., Yusupov B. B., Local derivations of conformal Galilei algebra. Communications in Algebra, 2024 V. 6(52), P. 2489–2508.
3. Ayupov Sh., Elduque A. and Kudaybergenov K., Local derivations and automorphisms of Cayley algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 2023 V. 5(227), 107277.
4. Ayupov Sh., Khudoyberdiyev A., Local derivations on solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra, 2021, V.7(69), P. 1286–1301.
5. Ayupov Sh., Khudoyberdiyev A., Yusupov B., Local and 2-local derivations of solvable Leibniz algebras. International Journal of Algebra and Computation, 2020, V. 6(30), P. 1185–1197.
6. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., I. Rakhimov, 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications, 2015, 474, P. 1–11.
7. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra and its Applications, 2016, 493, P. 381–398.
8. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Omirov B., Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43, P. 2199–2234.
9. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Yusupov B., Local and 2-Local Derivations of Locally Simple Lie Algebras. Journal of Mathematical Sciences, 2024, V.4(278), P. 613–622.
10. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Yusupov B., 2-Local derivations on generalized Witt algebras. Linear and Multilinear Algebra, 2021, V. 16(69), P. 3130–3140.
11. Ayupov Sh., Yusupov B., 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras. Journal of Algebra and its Applications, 2020, V. 5(19), 2050100.
12. Chen Q.F., He Y., 2-local derivations on the planar Galilean conformal algebra. International Journal of Mathematics, 2023 V. 5(34), 2350023.
13. Chen Z., Wang D., 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras. Linear Algebra and its Applications, 2015, 486, P. 335–344.
14. Chen Y., Zhao K., Zhao Y., Local derivations on Witt algebras. Linear and Multilinear algebra, 2022, V. 6(70), P. 1159–1172.
15. Jiang Q., Tang X., 2-Local derivations on the Schrödinger-Virasoro algebra. Linear and Multilinear Algebra. 2023, V. 8(72), P. 1328–1345.
16. Kadison R., Local derivations, Journal of Algebra. 1990, 130, P. 494–509.
17. Kaygorodov I., Kudaybergenov K., Yuldashev I., Local derivations of semisimple Leibniz algebras. Communication in Mathematics. 2022, V. 2(30), P. 1–12.

18. Kudaybergenov K., Omirov B., Kurbanbaev T., Local derivations on solvable Lie algebras of maximal rank. Communications in Algebra, 2022, V. 9(50), P. 1-11.
19. Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B., Local and 2-local $\frac{1}{2}$ -derivation on finite-dimensional Lie algebras. Results in Mathematics, 2024, 79,210.
20. Mamadaliyev U. Kh., Sattarov A., Yusupov B. B., Local and 2-local $\frac{1}{2}$ -derivations of solvable Leibniz algebras. Eurasian Mathematical Journal, 2025 V. 16(2), P. 1–14.
21. Larson D., Sourour A., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1990, 51, P. 187–194.
22. Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125, P. 2677–2680.
23. E nobl L., Winternitz P., A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2005, V. 12(38), P. 2687–2700.
24. X. Tang, M. Xiao, P. Wang, Local properties of Virasoro-like algebra. Journal of Geometry and Physics, 2023, 186, 104772.
25. Vergne M., Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1970, 98, P. 81–116,
26. Yao Y. F., Local derivations on the Witt algebra in prime characteristic. Linear and multilinear algebra, 2022, V. 15(70), P. 2919–2933.
27. Yao Y., Zhao K., Local properties of Jacobson-Witt algebras, Journal of Algebra, 2021, 586, P. 1110–1121.
28. Yu Y., Chen Zh., Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Lie algebras. Communications in Algebra, 2020, V. 1(48), P. 1–10.
29. Yusupov B., Vaisova N. and Madrakhimov T. Local $\frac{1}{2}$ -derivation on of n -dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra of type I. AIP Conference Proceedings, 2024, 3147(1), 020008.

REZYUME

Ushbu ishda biz nilradikali tabiiy gradurlangan filiform bo‘lgan chekli o‘lchamli yechiluvchan Li algebralarining differentsiallashlari va lokal differentsiallashlarini o‘rganilgan. Aniq qilib aytganda, bu algebralarining differentsiallashlari va lokal differentsiallashlarining umumiy matritsaviy ko‘rinishlari keltirilgan. Bu algebralarda differentsiallash bo‘lmagan lokal differentsiallashlar mavjudligini ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: Lie algebrasi, differentsiallash, yechiluvchan Li algebrasi, lokal differentsiallash.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе мы исследуем дифференцирования и локальные дифференцирования конечномерных разрешимых алгебр Ли, нильрадикалы, являющиеся естественно градуированными филиформными нильрадикалами. В частности устанавливается общий вид матриц, задающих дифференцирования и локальные дифференцирования этих алгебр. Мы показываем, что в указанных алгебрах существуют локальные дифференцирования, не сводящиеся к дифференцированиям.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференцирования, разрешимые алгебра Ли, локальные дифференцирования.

UDC 517.55

AN ABSTRACT CHARACTERIZATION OF TRACE CLASS IDEAL \mathcal{C}_1

AZIZOV A. N.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN
azizov.07@mail.ru

RESUME

This paper has been devoted to establishing abstract characterizations of the sequence space l^1 and the Schatten ideal \mathcal{C}^1 , demonstrating that both are uniquely determined within their respective classes by natural axiomatic properties.

Key words: non-increasing rearrangement, symmetric sequence space, compact operator, Banach ideals of compact operators, Calkin's construction.

Let l^∞ (respectively, c_0) be the Banach space of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$, where \mathbb{N} is the set of natural numbers.

In l^∞ we consider the natural partial order

$$\{\xi_n\} \leq \{\eta_n\} \iff \xi_n \leq \eta_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, then the *non-increasing rearrangement* $\xi^* : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ of ξ is defined by

$$\xi^*(t) = \inf\{\lambda : \mu\{|\xi| > \lambda\} \leq t\}, \quad t > 0,$$

(see, for example, [1, Ch. 2, Definition 1.5]). As such, the non-increasing rearrangement of a sequence $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ can be identified with the sequence $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, where

$$\xi_n^* = \inf \left\{ \sup_{n \notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N}, |F| < n \right\}.$$

If $\{\xi_n\} \in c_0$, then $\xi_n^* \downarrow 0$; in this case there exists a bijection $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space l^∞ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec \prec \eta = \{\eta_m\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \leq \sum_{n=1}^m \eta_n^* \text{ for all } m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l^\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric (fully symmetric) sequence space* if

$$\eta \in E, \xi \in l^\infty, \xi^* \leq \eta^* \text{ (resp., } \xi^* \prec \prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E.$$

Every fully symmetric sequence space is a symmetric sequence space. The converse is not true in general. At the same time, any separable symmetric sequence space is a fully symmetric space.

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then

$$\|\xi\|_E = \|\xi^*\|_E = \|\xi^*\|_E \text{ for all } \xi \in E.$$

Besides, $(E_h, \|\cdot\|_E)$ is a Banach lattice with respect to the partial order induced from l^∞ .

We say that the norm in a symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ is said to have the *Fatou property* if from the conditions

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)} \in E, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sup_n \|x^{(n)}\|_E < \infty,$$

it follows that

$$\sup_{n \geq 1} x^{(n)} \in E \quad \text{and} \quad \|x\|_E = \sup_{n \geq 1} \|x^{(n)}\|_E.$$

It is known [1, Chapter II, §2.4, Theorem 2.4.2, pp. 44-46] that the norm of every fully symmetric sequence space $((E, \|\cdot\|_E)$ has the Fatou property. But general symmetric sequence spaces (not fully symmetric) do not always have the Fatou property.

Immediate examples of fully symmetric sequence spaces are $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ and the Banach spaces

$$l^p = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

For any symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ the following continuous embeddings hold [1, Ch. 2, §6, Theorem 6.6]: $(l^1, \|\cdot\|_1) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Besides, $\|\xi\|_E \leq \|\xi\|_1$ for all $\xi \in l^1$ and $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_E$ for all $\xi \in E$.

If there is $\xi \in E \setminus c_0$, then $\xi^* \geq \alpha \mathbf{1}$ for some $\alpha > 0$, where $\mathbf{1} = \{1, 1, \dots\}$. Consequently, $\mathbf{1} \in E$ and $E = l^\infty$. Therefore, either $E \subset c_0$ or $E = l^\infty$.

Now, let $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ be an infinite-dimensional separable Hilbert space over \mathbb{C} , and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the C^* -algebra of all bounded linear operators in \mathcal{H} . Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is well known that, for any proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Denote $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty]$ be the *canonical trace* on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is,

$$\tau(x) = \sum_{j \in J} (x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

where $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ is an orthonormal basis in \mathcal{H} (see, for example, [5, Ch. 7, E. 7.5]).

Let $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ be the lattice of projectors in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of x , that is, $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. If $t > 0$, then the t -th *generalized singular number* of x , or the *non-increasing rearrangement* of x , is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}$$

(see [2]).

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called *symmetric* (*fully symmetric*) if the conditions

$$x \in X, \quad y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \mu_t(y) \leq \mu_t(x) \quad \text{for all } t > 0$$

(respectively,

$$x \in X, \quad y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \int_0^s \mu_t(y) dt \leq \int_0^s \mu_t(x) dt \quad \text{for all } s > 0 \quad (\text{writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathcal{C}^p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

are examples of fully symmetric spaces.

It should be noted that for every symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and all $x \in X, a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|x\|_X = \||x|\|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \quad \text{and} \quad \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Remark 1. If $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a symmetric space and there exists a projection $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap X$ such that $\tau(e) = \infty$, that is, $\dim e(\mathcal{H}) = \infty$, then $\mu_t(e) = \mu_t(\mathbf{1}) = 1$ for every $t \in (0, \infty)$. Consequently, $\mathbf{1} \in X$ and $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $X \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $x \in X$, then $e_\lambda(|x|)^\perp = \{|x| > \lambda\}$ is a finite-dimensional projection, that is, $\dim e_\lambda(|x|)^\perp(\mathcal{H}) < \infty$ for all $\lambda > 0$. This means that $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, hence $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Therefore, either $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ or $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

If $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, then $|x| = \sum_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges uniformly), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of singular values of x , that is, the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and p_n is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. Consequently, the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty, s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$, we set $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Let $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a symmetric space. Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} . Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C} \cdot \varphi_n \subset \mathcal{H}$. It is clear that the set

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 : x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X \right\}$$

(the series converges uniformly), is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric subspace $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ uniquely generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ uniquely generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [4, Ch. 3, Section 3.5]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

In addition,

$$E(\mathcal{C}_E) = E, \quad \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E, \quad \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}.$$

The construction described above is known as Calkin’s construction.

We will call the pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ a *Banach ideal of compact operators* (cf. [3, Ch. III]). It is known that $(\mathcal{C}^p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}})$ for all $1 \leq p < \infty$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the Banach ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is defined by

$$x \prec\prec y, \quad x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is *fully symmetric* if conditions $y \in \mathcal{C}_E, x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), x \prec\prec y$ entail that $x \in \mathcal{C}_E$ and $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. It is clear that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal if and only if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

Examples of fully symmetric ideals include $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the Banach ideals $(\mathcal{C}^p, \|\cdot\|_p)$ for all $1 \leq p < \infty$. It is clear that $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ for every symmetric sequence space $E \subset c_0$ with $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_1$ and $\|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ for all $x \in \mathcal{C}^1$ and $y \in \mathcal{C}_E$.

Abstract characterizations of spaces l^1 and \mathcal{C}^1

Let us consider

$$E = l^1 = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty \right\}.$$

In the linear space l^1 we define coordinate-wise multiplication

$$x \cdot y = \{x_n y_n\}_{n=1}^\infty, \quad x, y \in l^1,$$

and let $|x| = \{|x_n|\}_{n=1}^\infty$.

Proposition 2. *If $x, y \in l^1$ and $x \cdot y = \theta$, then*

$$\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Proof. Since $x_n y_n = 0$ for each n , at least one of x_n, y_n vanishes for each coordinate. Thus

$$|x_n + y_n| = |x_n| + |y_n|.$$

Summing over n yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|,$$

that is, $\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$. □

Motivated by Proposition 2, we would like to characterize all symmetric sequence spaces $(E, \|\cdot\|_E)$ for which this additivity property holds.

Theorem 3. *Let $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ be a fully symmetric space such that*

$$\|x + y\|_E = \|x\|_E + \|y\|_E, \quad \forall x, y \in E, \quad x \cdot y = \theta.$$

Then $E = l^1$ and $\|x\|_E = \|x\|_1$ or $\|x\|_E = \alpha \cdot \|x\|_1$ for all $x \in E$, where α some positive number, depending on $\|\cdot\|_E$.

Proof. Pick any nonzero $x \in E$. Then $x^* \in E$, and $x_1^* > 0$. Consider $y = (x_1^*, 0, 0, \dots)$. Clearly $y \prec\prec x^*$, hence $y \in E$. Therefore $e_1 = \frac{1}{x_1^*} y = \{1, 0, 0, \dots\} \in E$. By permutation invariance, all unit vectors $e_n = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \in E$, where 1 in the n -th position, $n \in \mathbb{N}$.

Set $\alpha := \|e_n\|_E$ (independent of n). If $\alpha = 0$, then $E = \{0\}$, which we exclude. Rescale the norm if necessary so that $\alpha = 1$.

Now for any $x \in E$, with decreasing rearrangement $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots\}$, define partial sums

$$x^{(k)} = \sum_{n=1}^k x_n^* e_n.$$

Since the vectors $x_n^* e_n$ are supported on disjoint coordinates, then from the condition of theorem we get

$$\|x^{(k)}\|_E = \sum_{n=1}^k \|x_n^* e_n\|_E = \sum_{n=1}^k x_n^* \|e_n\|_E = \sum_{n=1}^k x_n^*.$$

Thus $\|x^{(k)}\|_E = \sum_{n=1}^k x_n^*$.

Because $x^{(k)} \uparrow x^*$ and E has the Fatou property,

$$\|x^*\|_E = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\|_E = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*.$$

Hence $x^* \in l^1$ and $\|x^*\|_E = \|x\|_1$. Therefore $x \in l^1$ and $\|x\|_E = \|x\|_1$.

This shows $E = l^1$ as sets, and $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_1$ after normalization. Without normalization, $\|\cdot\|_E = \alpha \|\cdot\|_1$ with $\alpha > 0$. □

Now, using the Calkin's construction, we pass to operator ideals.

Theorem 4. *Let $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ be a fully symmetric ideal in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ such that*

$$\|A + B\|_{\mathcal{C}_E} = \|A\|_{\mathcal{C}_E} + \|B\|_{\mathcal{C}_E}$$

for all $A, B \in \mathcal{C}_E$ with $A = A^$, $B = B^*$, and $AB = 0$. Then*

$$(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) = (\mathcal{C}^1, \alpha \|\cdot\|_1), \quad \text{where } \alpha > 0.$$

Proof. Let take $x, y \in E$ with $x \cdot y = \theta$. Choose an orthonormal basis $\{\varphi_n\}$ in \mathcal{H} and define diagonal operators

$$A(\varphi_n) = |x_n|\varphi_n, \quad B(\varphi_n) = |y_n|\varphi_n.$$

Then A, B are compact, self-adjoint, and $AB = 0$. Their singular values sequences are $\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty = |x|^*$, $\{s_n(B)\}_{n=1}^\infty = |y|^*$, and $\{s_n(A+B)\}_{n=1}^\infty = |x+y|^* = (|x| + |y|)^*$.

The condition of theorem gives

$$\|A+B\|_{\mathcal{C}_E} = \|A\|_{\mathcal{C}_E} + \|B\|_{\mathcal{C}_E},$$

which translates to

$$\|x+y\|_E = \|x\|_E + \|y\|_E.$$

By Theorem 3, it follows that $E = l^1$ and $\|\cdot\|_E$ is (up to a constant) the l^1 norm. Hence $\mathcal{C}_E = \mathcal{C}^1$ and $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ coincides with the norm $\alpha\|\cdot\|_1$ for some $\alpha > 0$. \square

Conclusion. In the framework of Banach lattice theory, a norm is said to be *disjointly additive* if

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad (x \perp y),$$

that is, whenever x and y are disjointly supported.

The results established above show that, within the class of fully symmetric sequence spaces, this property uniquely characterizes l^1 . Thus, l^1 emerges as the only symmetric sequence space in which disjointness of elements is precisely encoded by additivity of the norm.

On the other hand, in the setting of operator ideals, the analogous additivity condition

$$\|A+B\| = \|A\| + \|B\| \quad (A, B \text{ self-adjoint, } AB = 0)$$

uniquely characterizes the trace class \mathcal{C}^1 equipped with the trace norm (up to a constant factor). Hence, \mathcal{C}^1 appears as the only fully symmetric ideal in which orthogonality of operators is exactly reflected by additivity of the norm.

REFERENCES

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press Inc., 1988.
2. T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s -numbers of τ -measurable operators*, Pacific. J. Math., **123** (1986), 269–300.
3. I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 02904, 1969.
4. S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, *Singular Traces*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2013.
5. B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, **120**, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
6. S. Stratila, L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, Editura Academiei, Bucharest, 1979. Revision of the 1975 original, Translated from the Romanian by Silviu Teleman.

REZYUME

Ushbu maqola l^1 ketma-ketlik fazosining va \mathcal{C}^1 Shatten idealining abstrakt xarakterizatsiyalarini berishga bag'ishlangan bo'lib, ularning har ikkisi ham o'z sinflarida tabiiy aksiomatik xossalari orqali yagona tarzda aniqlanishi ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: o'smaydigan o'rin almashtirish, simmetrik ketma-ketlik fazosi, kompakt operator, kompakt operatorlar Banax ideali, Kalkin munosabati.

РЕЗЮМЕ

Настоящая статья посвящена установлению абстрактных характеристик пространства последовательностей l^1 и идеала Шаттена \mathcal{C}^1 , показывая, что оба они уникально определяются в своих классах естественными аксиоматическими свойствами.

Ключевые слова: невозрастающая перестановка, симметричное пространство последовательностей, банаховы компактный оператор, Банаховы идеалы компактных операторов, соответствие Калкина.

UDC 517.55

LARGE ENTROPY MEASURES AND THEIR SUPPORTS

BAZARBAEV S. U.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN
uzedu.bazarbaev@gmail.com

RESUME

In this article, the theorem of de Thélin and Dinh stating that the support of measures with large entropy for endomorphisms lies in the Julia set is proved by a new method, via the rate of convergence to the equidistributed measure.

Key words: Ergodic measure, entropy and endomorphism.

1. Introduction

The study of the dynamics of holomorphic endomorphisms of complex projective spaces $\mathbb{P}^k := \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ is a central topic in complex dynamics, see for instance [7, 12] for an overview of the subject. Let $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ be an endomorphism of algebraic degree $d \geq 2$. There exists a canonical positive closed f^* -invariant $(1, 1)$ -current T , called the *Green current of f* , with the property that the sequence $d^{-n}(f^n)^*\omega_0$ converges to T for every smooth positive closed $(1, 1)$ -form ω_0 of mass 1. The current T has strong geometric properties, in particular, it has Hölder continuous potentials. As a consequence, the measure $\mu := T^{\wedge k}$ is well-defined, and it is the unique measure of maximal entropy $k \ln d$ of f [2, 10]. Its support is called the *Julia set* of f . By a result of de Thélin and Dinh [8, 9], every ergodic measure whose measure-theoretic entropy is strictly larger than $(k - 1) \ln d$ is also supported on the Julia set of f .

Theorem 1. *Let f be a holomorphic endomorphism of algebraic degree $d \geq 2$ of \mathbb{P}^k . If ν is a f -invariant measure with entropy $h_\nu(f) > (k - 1) \ln d$ then the support of ν is supported on the Julia set J .*

The proof given in [8, 9] of the above property crucially relies on the existence of the Green current. In particular, it follows from a delicate induction which makes use of the successive self-intersections $T^{\wedge j}$ of the Green current T . In this paper, we provide an alternative proof based on the rate of convergence towards the measure of maximal entropy.

2. Preliminary notions and a proof of Theorem 1.

Let ω be the Fubini-Study metric on \mathbb{P}^k . The distance dist which we use below is with respect to the Fubini-Study metric. Let us recall some notions and definitions which we use in sequel. Let $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ be an endomorphism of degree $d \geq 2$ and ν be an ergodic f -invariant probability measure on \mathbb{P}^k . For $n \geq 0$, the Bowen metric defines as follows:

$$d_n(z, w) = \max_{0 \leq j \leq n-1} \text{dist}(f^j(z), f^j(w)).$$

For $z \in \mathbb{P}^k$, let

$$B_n(z, r) := \{w \in \mathbb{P}^k : d_n(z, w) \leq r\}$$

be the closed ball of radius r with respect to d_n . Then, the quantity

$$\sup_{r>0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \ln \nu(B_n(z, r))$$

takes a constant value $c = c(f, \nu)$ ν -almost everywhere. We then define the metric entropy $h_\nu(f)$ of ν (with respect to f) as $h_\nu(f) := c$. It is easy to see that $h_\nu(f) \geq 0$. As we mentioned above, the Green measure μ is the measure of maximal entropy $k \ln d$ for f . An ergodic f -invariant probability measure ν is called the measure with large entropy if $h_\nu(f) > (k - 1) \log d$. Before studying the measures of large entropy, we need to recall some result which we use in sequel.

We use the following theorem, which is proven by Dinh and Sibony (see [6, Theorem 1.1]).

Theorem 2. *Let f be a holomorphic endomorphism of algebraic degree $d \geq 2$ of \mathbb{P}^k . Let μ be the equilibrium measure of f and $1 < \lambda < d$ a constant. There is a invariant proper analytic subset E_λ , possibly empty, of \mathbb{P}^k such that if a is a point out of E_λ and $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{P}^k)$ function, then*

$$|\langle d^{-nk}(f^n)^*\delta_a - \mu, \psi \rangle| \leq A\|\psi\|_2 \left(1 + \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(a, E_\lambda)}\right) \lambda^{-n} \tag{2}$$

where A is a constant independent of a and n .

We call the set E_λ which is given in Theorem 2 is λ -exceptional set of f . We have the following corollary of the above theorem.

Lemma 3. *Let f, λ, ψ and E_λ be as in Theorem and ν be a finite measure on \mathbb{P}^k . Then for any ψ with $\text{supp}\psi \cap \text{supp}\mu = \emptyset$ there exists a constant $A > 0$ such that*

$$|\langle d^{-nk}(f^n)^*\nu, \psi \rangle| \leq A\|\psi\|_2 \lambda^{-n} \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\text{dist}(a, E_\lambda)}\right) d\nu. \tag{3}$$

Proof. If $\nu = 0$ then (3) is clear. If ν is a probability measure on \mathbb{P}^k then (3) directly follows from (2) by writing ν as a limit of a sum of Dirac measures. Assume now $\nu(\mathbb{P}^k) \neq 0$. Define $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{\nu(\mathbb{P}^k)}$. Since $\tilde{\nu}$ is a probability measure we have

$$|\langle d^{-nk}(f^n)^*\tilde{\nu} - \mu, \psi \rangle| \leq A\|\psi\|_2 \lambda^{-n} \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\text{dist}(a, E_\lambda)}\right) d\tilde{\nu}.$$

Since $\text{supp}\psi \cap \text{supp}\mu = \emptyset$ we have

$$\begin{aligned} |\langle d^{-nk}(f^n)^*\nu, \psi \rangle| &= |\langle d^{-nk}(f^n)^*\nu - \nu(\mathbb{P}^k)\mu, \psi \rangle| \\ &= \nu(\mathbb{P}^k) |\langle d^{-nk}(f^n)^*\tilde{\nu} - \mu, \psi \rangle| \\ &\leq A\|\psi\|_2 \lambda^{-n} \nu(\mathbb{P}^k) \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\text{dist}(a, E_\lambda)}\right) d\tilde{\nu} \\ &\leq A\|\psi\|_2 \lambda^{-n} \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\text{dist}(a, E_\lambda)}\right) d\nu. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

We recall the definition of box-counting dimension. Let $E \subset \mathbb{P}^k$ be a set and $E_t := \{z \in \mathbb{P}^k : \text{dist}(z, E) \leq t\}$ with $t > 0$. The upper box-counting dimension of E is defined as

$$\overline{\dim}_B E = 2k - \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \text{vol}(E_t)}{\ln t}.$$

From the definition we can see the following properties (for more details see [11]):

1. if upper box-counting dimension is less than $2k$ then there exists $\alpha > 0$ such that for small t we have $\text{vol}(E_t) < t^\alpha$.
2. if E is a p -dimensional analytic set then $\overline{\dim}_B E = 2p$.

Let us prove the following lemma.

Lemma 4. *Let $E \subset \mathbb{P}^k$ be a set with upper box-counting dimension strictly less than $2k$. Then $\ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \in L^1(\mathbb{P}^k, \omega^k)$.*

Proof. Since upper box-counting dimension of E is less than $2k$ there exists $\alpha > 0$ so that if E_t is a t -neighbourhood of E with $t > 0$ small enough we have $\text{vol}(E_t) < t^\alpha$ (see [11]). We claim that

$$\int_{E_t} \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \omega^k = o(t^{\alpha/2}), \quad t \rightarrow 0.$$

Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{E_t} \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \omega^k &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \int_{E_{\frac{t}{2^l}} \setminus E_{\frac{t}{2^{l+2}}}} \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \omega^k \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} ((l+2) \ln 2 - \ln t) \int_{E_{\frac{t}{2^l}} \setminus E_{\frac{t}{2^{l+2}}}} \omega^k \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} ((l+2) \ln 2 - \ln t) \frac{t^\alpha}{2^{l\alpha}} \\ &\leq t^{\alpha/2} \sum_{l=0}^{\infty} ((l+2) \ln 2 - \ln t) \frac{t^{\alpha/2}}{2^{l\alpha}} \\ &= o(t^{\alpha/2}), \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Since $\ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)}$ is continuous outside E_t , the above claim follows $\ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E)} \in L^1(\mathbb{P}^k)$. The proof is complete. \square

Proof of Theorem 1. Let $F \subset \mathbb{P}^k \setminus J$ such that $\bar{F} \cap J = \emptyset$ and W be an open neighbourhood of F with $\bar{W} \cap J = \emptyset$. By using Gromov’s construction [10] we have

$$h_t(f, F) = h_t(f, F \cap K) \leq \text{lov}(f, W) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{volume}(\Gamma_n^W)$$

where

$$\Gamma_n^W := \{(z, f(z), \dots, f^{n-1}(z)), z \in W \cap \mathbb{P}^k\}.$$

Note that

$$\text{vol}(\Gamma_n^W) = \sum_{0 \leq n_i \leq n-1} \int_{W \cap \mathbb{P}^k} (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_k})^* \omega.$$

We shall estimate above each term of the sum in the right hand side of the last equation. Without lost of generality assume $n_1 \leq n_i$ for $1 \leq i \leq k$. Let $\Omega = \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_k - n_1})^* \omega$. Take a smooth function $0 \leq \psi \leq 1$ so that $\psi|_W = 1$ and $\bar{W} \cap J = \emptyset$ where $\bar{W} = \text{supp} \psi$. For λ with $1 < \lambda < d$, let E_λ be the λ -exceptional set of f . Since $\mu|_{\bar{W}} = 0$ by Lemma 3 we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^k} \psi \cdot (f^{n_1})^* \Omega &= |\langle (f^{n_1})^* \Omega - d^{kn_1} \mu, \psi \rangle| \\ &\leq A d^{kn_1} \|\psi\|_2 \lambda^{-n_1} \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E_\lambda)}\right) \Omega \\ &\leq A (d^{k-1})^{n-n_1} (d^k/\lambda)^{n_1} \|\psi\|_2 \int_{\mathbb{P}^k} \left(1 + \ln^+ \frac{1}{\text{dist}(z, E_\lambda)}\right) \omega^k. \end{aligned}$$

In the last estimate we used $\Omega \leq d^{n_k - n_1 + n_{k-1} - n_1 + \dots + n_2 - n_1} \omega^k \leq (d^{k-1})^{n-n_1} \omega^k$. Since upper box-counting dimension of E_λ is less than $2k$ by using Lemma 4 we deduce that there exists A_0 independent of n so that

$$\int_{\mathbb{P}^k} \psi \cdot (f^{n_1})^* \Omega \leq A_0 (d^{k-1})^{n-n_1} (d^k/\lambda)^{n_1} \leq A_0 (d^k/\lambda)^n. \tag{4}$$

From (4) it follows that

$$\int_{W \cap \mathbb{P}^k} (f^{n_1})^* \omega \wedge \dots \wedge (f^{n_k})^* \omega \leq A_0 (d^k/\lambda)^n.$$

Finally, we have

$$\text{vol}(\Gamma_n^W) \leq A_0 n^k (d^k/\lambda)^n$$

and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \text{vol}(\Gamma_n^W) \leq \ln(d^k/\lambda).$$

Consequently, we have

$$(k-1) \ln d < h_\nu(f) \leq \ln\left(\frac{d^k}{\lambda}\right).$$

Since λ is an arbitrary constant such that $1 < \lambda < d$, this leads to a contradiction. \square

REFERENCES

1. Sardor Bazarbaev, Fabrizio Bianchi and Karim Rakhimov, On the support of measures of large entropy for polynomial-like maps. *Anal.Math.Phys.* 15, 69 (2025).
2. Jean-Yves Briend and Julien Duval, Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, *Publications mathématiques de l'IHÉS*, **93** (2001), 145-159.
3. Fabrizio Bianchi and Tien-Cuong Dinh, Equilibrium states of endomorphisms of \mathbb{P}^k I: existence and properties, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **172** (2023), 164-201.
4. Fabrizio Bianchi and Tien-Cuong Dinh, Equilibrium states of endomorphisms of \mathbb{P}^k : spectral gap and limit theorems, *Geometric And Functional Analysis (GAFA)* **34** (2024), 1006-1051.
5. Christophe Dupont, Large entropy measures for endomorphisms of $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, *Israel Journal of Mathematics* **192** (2012), 505-533.
6. Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces. *Mathematische Annalen* **347** (2010), 613-626.
7. Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, *Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings*, in *Holomorphic dynamical systems*, Eds. G. Gentili, J. Guenot, G. Patrizio, Lect. Notes in Math. 1998 (2010), Springer, Berlin, 165-294.
8. Henry de Thélin, Sur la construction de mesures selles, *Annales de l'institut Fourier* **56** (2006), no. 2, 337-372.
9. Tien-Cuong Dinh, Attracting current and equilibrium measure for attractors on \mathbb{P}^k , *Journal of Geometric Analysis* **17** (2007), 227-244.
10. Mikhael Gromov, On the entropy of holomorphic maps, *L'Enseignement Mathématique* **49** (2003) no. 3-4, 217-235.
11. Kenneth Falconer, Fractal geometry (book). *Mathematical Foundations and Applications*. Second Edition.
12. Nessim Sibony, Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , *Panoramas et Synthèses*, **8** (1999), 97-185.
13. Michał Szostakiewicz, Mariusz Urbański, and Anna Zdunik, Stochastics and thermodynamics for equilibrium measures of holomorphic endomorphisms on complex projective spaces, *Monatshefte für Mathematik* **174** (2014), no. 1, 141-162.
14. Mariusz Urbański and Anna Zdunik, Equilibrium measures for holomorphic endomorphisms of complex projective spaces, *Fundamenta Mathematicae* **220** (2013) 23-69.

REZYUME

Ushbu maqolada endomorfizmlar uchun de Thélin hamda Dinh tomonidan isbotlangan katta entropiyali o'lchovlarning havzasi Julia to'plamida yotishi haqidagi teorema tekis taqsimlangan o'lchovga yaqinlashish tezligi orqali yangicha usulda isbotlangan.

Kalit so'zlar: Ergodik o'lchov, entropiya, endomorfizm.

РЕЗЮМЕ

В данной статье приведено новое доказательство теоремы de Thélin и Dinh о том, что бассейн мер с большой энтропией для эндоморфизмов лежит в множестве Жюлиа. Доказательство основано на скорости сходимости к равномерно распределённой мере.

Ключевые слова: Эргодическая мера, энтропия, эндоморфизм.

UDC 517.55

LARGE ENTROPY MEASURES OF HÉNON-LIKE MAPS

BOYMURODOV S. I.

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES, TASHKENT,
UZBEKISTAN
sboymurodov.research@gmail.com

RESUME

We study the Lyapounov exponent of ergodic invariant measures for Henon-like maps under appropriate entropy conditions. Specifically, we consider an ergodic measure ν for a Henon-like map f satisfying $h_\nu(f) > \log d_{p-1}^+$ when $d_{p-1}^+ < d$. We establish that ν has at least p strictly positive Lyapounov exponents bounded below by $(h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)/2k$. These results provide insight into the interplay between entropy, degree growth, and Lyapounov exponents in the dynamical behavior of Henon-like maps.

Key words: Entropy, Horizontal-like map, Lyapounov exponent.

Introduction

In this paper, we investigate invertible horizontal-like in higher dimension. A horizontal-like map is essentially a holomorphic map defined on a bounded convex domain $D \subset \mathbb{C}^k$, exhibiting an expanding behavior in p directions while contracting in the remaining $k - p$ directions. Precise information is formally provided in Definition 1. The dynamical degrees of horizontal-like maps play an important role in our work. Consider convex, bounded open subsets $M' \Subset M$ and $N' \Subset N$, and let $D := M \times N$ and $D' := M' \times N'$ such that $f^{-1}(D) \subset M' \times N$ and $f(D) \subset M \times N'$. For each $0 \leq s \leq p$, we define the dynamical degree d_s^+ of f as follows:

$$d_s^+ = d_s(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_S \|(f^n)_* S\|_{M' \times N} \right\}^{1/n}$$

where the supremum is taken over all positive closed horizontal currents S of bidegree $(k - s, k - s)$ on $D' = M' \times N'$ with the mass $\|S\|_{D'} = 1$. For a precise behaviour of these dynamical degrees, see [1, 3] and [2] for the case of polynomial-like maps. In this work we show that when the main dynamical degree of Hénon-like map f is larger than other ones, the ergodic, f -invariant measure ν with satisfying $h_\nu > \log d_{p-1}^+$ is hyperbolic: it admits p strictly positive and $k - p$ strictly negative Lyapounov exponents.

Preliminaries

In this section, we recall several fundamental definitions and preliminary results that will be used in the subsequent sections of the paper.

Let p and k be integers with $k \geq 2$ and $1 \leq p < k - 1$. Let $M \subset \mathbb{C}^p$ and $N \subset \mathbb{C}^{k-p}$ be two bounded, convex domains. Consider the product domain $D := M \times N \subset \mathbb{C}^k$. We define the *vertical boundary* of D as $\partial_v D := \partial M \times N$ and the *horizontal boundary* as $\partial_h D := M \times \partial N$. A subset $E \subset D$ is said to be *vertical* if its closure \bar{E} does not intersect $\partial_v D$, and *horizontal* if \bar{E} does not intersect $\partial_h D$.

We now proceed to introduce the concept of a *horizontal-like map* f on the domain D .

Let π_1 and π_2 be the canonical projections of the product space $D \times D$ onto its first and second factors, respectively.

Definition 1. A map f in D is said to be a horizontal-like map if it satisfies the following properties:

1. The graph Γ of f forms an irreducible submanifold of $D \times D$;

2. The restriction of the first projection $\pi_1|_\Gamma$ is injective, while the second projection $\pi_2|_\Gamma$ has finite fibers;
3. The closure $\bar{\Gamma}$ does not intersect either $\overline{\partial_v D} \times \bar{D}$ or $\bar{D} \times \overline{\partial_h D}$.

Generally, such a map is not defined on the whole of D , but rather on a vertical subset $f^{-1}(D) \subset D$. The map f then takes values within a horizontal subset $f(D) \subset D$.

An invertible horizontal-like map f is referred to as a *Henon-like map* when the restriction of π_2 to the graph Γ , i.e., $\pi_2|_\Gamma$, is injective. In the following, we focus our analysis on Henon-like maps. Let us denote by $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$ (applied n times) the n -th iterate of the map f , and similarly, by $f^{-n} := f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ (applied n times) its inverse. Define the *filled Julia sets* \mathcal{K}_+ and \mathcal{K}_- as

$$\mathcal{K}_+ := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D), \quad \mathcal{K}_- := \bigcap_{n \geq 0} f^n(D).$$

These sets describe the regions of points that remain confined within D under repeated iteration by f and f^{-1} , respectively. The boundaries of \mathcal{K}_+ and \mathcal{K}_- are known as the *Julia sets* of f and f^{-1} . Additionally, define $\mathcal{K} := \mathcal{K}_+ \cap \mathcal{K}_-$, which is a compact subset of D . This set satisfies the invariance properties:

$$f^{-1}(\mathcal{K}_+) = \mathcal{K}_+, \quad f(\mathcal{K}_-) = \mathcal{K}_-, \quad f^\pm(\mathcal{K}) = \mathcal{K}.$$

The operator $f_* := (\pi_2|_\Gamma)_* \circ (\pi_1|_\Gamma)^*$ acts continuously on horizontal currents. According to [1, Proposition 3.2], there exists an integer $d \geq 1$ such that for any horizontal positive closed current S , we have the relation

$$\|f_*(S)\|_h = d\|S\|_h,$$

The integer d is referred to as the *main dynamical degree* of the map f .

We now define the other dynamical degrees of the map f in relation to currents. Consider convex, bounded open subsets $M' \Subset M$ and $N' \Subset N$, and let $D := M \times N$ and $D' := M' \times N'$ such that $f^{-1}(D) \subset M' \times N$ and $f(D) \subset M \times N'$. Thus, the restriction of f to $M' \times N'$ remains a horizontal-like map. A current on D is classified as *vertical* (resp. *horizontal*) if its support lies in a vertical (resp. horizontal) in D . For each $0 \leq s \leq p$, we define the dynamical degree d_s^+ of f as follows:

$$d_s^+ = d_s(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_S \|(f^n)_* S\|_{M' \times N} \right\}^{1/n}$$

where the supremum is taken over all positive closed horizontal currents S of bidimension (s, s) on $D' = M' \times N'$ with the mass $\|S\|_{D'} = 1$. Similarly, for each $0 \leq s \leq k - p$, we define the dynamical degree d_s^- of f^{-1} as:

$$d_s^- = d_s(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_R \|(f^n)^* R\|_{M \times N'} \right\}^{1/n}$$

where the supremum is taken over all positive closed vertical currents R of bidimension (s, s) on $D' = M' \times N'$ such that $\|R\|_{D'} = 1$.

Below are some properties of dynamical degrees identified above. It is proved in [1], Lemma 3.5 that the dynamical degrees $d_0^+ = d_0^- = 1$ and $d_p^+ = d_{k-p}^- = d$. Moreover, the limsup in the definition of d_s^+ and d_s^- can be replaced by lim; see [3], Lemma 3.6. The monotonicity of the dynamical degrees d_s^+ and d_s^- is established in [3], that is, $d_s^+ \leq d_{s+1}^+$ for $0 \leq s \leq p - 1$ and $d_s^- \leq d_{s+1}^-$ for $0 \leq s \leq k - p - 1$. We fix integers $1 \leq p < k$, a bounded and convex domain $D = M \times N \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{k-p}$ and the convex open sets $M'' \Subset M' \Subset M$ and $N'' \Subset N' \Subset N$ are assumed to be sufficiently close to M and N . Use $\omega|_{M'' \times N}$ denotes the restriction to $M'' \times N$ of the standart Kähler form ω on \mathbb{C}^k .

Lemma 2. (See [1], Lemma 5.5) *Let f be a Hènon-like map on $D = M \times N \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{k-p}$, and M', M'', N', N'', d_s^+ be as above. Let $0 \leq s \leq p - 1$ be arbitrary integer and σ be a constant such that $\sigma > d_s^+$. Then, there exists a constant $A > 0$ such that for any positive closed current Φ of bidimension (s, s) , supported on $M \times N'$, and for all integers $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s \geq 0$ the following inequality holds:*

$$\int \Phi \wedge (f^{m_1})^* \omega|_{M'' \times N} \wedge \dots \wedge (f^{m_s})^* \omega|_{M'' \times N} \leq A \sigma^{m_1} \|\Phi\|_D.$$

This result demonstrates the exponential growth control of iterates of the vertical forms $\omega|_{M'' \times N}$ under the pullback by f , where Φ is bounded by the constant A and the exponential factor σ^{m_1} , depending on the current's norm $\|\Phi\|_D$. We now introduce some concepts related to the entropy of Henon-like maps, which will play a central role in this part.

Definition 3. Let f be a Hénon-like map on D , and let n be an integer.

1. A subset E of D is called (n, ε) -separated if the map f^j is well-defined on E such that $f^j(E) \subset D'' := M'' \times N''$ for $0 \leq j \leq n$ and for any two distinct points $x, y \in E$, $\text{dist}(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$ for at last one $0 \leq j \leq n$.
2. For $X \subset D$, the topological entropy of the map f restricted to X is defined as:

$$h_{top}(f, X) := \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \max \#\{E \subset X \mid E \text{ is } (n, \varepsilon)\text{-separated}\}}{n}.$$

We have the following version of the Gromov inequality; see [2, 4].

Proposition 4. ([1], Proposition 5.7) Let f be a Hénon-like map on D , and let $0 \leq s \leq p-1$ be arbitrary integer. If σ is a constant satisfying $\sigma > d_s^+$ and X is a horizontal subvariety of D of dimension s , then for every $\varepsilon > 0$, there exists a constant $A_\varepsilon > 0$ such that every (n, ε) -separated subset in X contains at most $A_\varepsilon \sigma^n$ points. Consequently, it follows that the topological entropy of f restricted to X satisfies:

$$h_{top}(f, X) \leq \log d_s^+.$$

Let X be a complex manifold of dimension k . Consider a smooth dynamical system $T : X \rightarrow X$ and an invariant ergodic probability measure ν . The map T induces a linear map H from the tangent space at z to the tangent space of $T(z)$, i.e. $H : X \rightarrow GL(\mathbb{C}, k)$. For $n \geq 0$ define

$$H_n(z) := H(z) \cdot H(T(z)) \cdots H(T^{n-1}(z)).$$

We call H_n the multiplicative cocycle over X generated by H . For $n, m \geq 0$ it is satisfy the identity

$$H_{n+m}(z) = H_n(T^m(z))H_m(z).$$

Let us recall famous Oseledec theorem.

Theorem 5.(Oseledec) Let $T : X \rightarrow X$, ν and the cocycle H_n be as above. Assume that ν is ergodic and that $\log^+ \|H^\pm(z)\|$ are in $L^1(\nu)$, where $\log^+ := \max\{\log, 0\}$. Then there is an integer l , real numbers $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots < \Lambda_l$, and for ν -almost every z , a unique decomposition of \mathbb{C}^k into a direct sum of linear subspaces

$$\mathbb{C}^k = \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{E}_i(z)$$

such that

1. $\dim \mathcal{E}_i$ does not depend on z .
2. The decomposition $H : \mathcal{E}_i \mapsto \mathcal{E}_i \circ T$ is invariant.
3. For any vector $v \in \mathcal{E}_i(z) \setminus \{0\}$ we have locally uniformly:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|H_n(z) \cdot v\| = \Lambda_i.$$

4. For $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \dots, l\}$, define $\mathcal{E}_{\mathcal{J}} := \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{E}_i(z)$. The angle between $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(z)$ and $\mathcal{E}_{\mathcal{J}'}(z)$ is a tempered while $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$ are disjoint, i.e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sin |\angle(\mathcal{E}_{\mathcal{J}}(T^n(z)), \mathcal{E}_{\mathcal{J}'}(T^n(z)))| = 0.$$

If T is invertable, above decomposition is the same for T^{-1} and exponents Λ_i are replased by $-\Lambda_i$. The corresponding constants Λ_i are called *Lyapounov exponents* of T with respect to ν and $\dim \mathcal{E}_i$ is the multiplicity of Λ_i .

Now we construct s dimensional complex subspace \mathcal{F} in the sequel. According to the Oseledec-Pesin theory, there is a decomposition $\mathcal{T}_z = \mathcal{E}_z \oplus \mathcal{F}_z$ for ν almost every z and there exists Borel set $\mathcal{M} \in \Omega$ that is $\nu(\mathcal{M}) \geq 1/2$ with satisfy

$$\|DT^{-1}(v)\| \geq e^{-\lambda_1} \|v\|, \|DT^{-1}(u)\| \leq e^{-\lambda_2} \|u\|, \angle(\mathcal{E}_{T^{-n}(z)}, \mathcal{F}_{T^{-n}(z)}) \geq \beta e^{-n\alpha}$$

for $v \in \mathcal{E}_z, u \in \mathcal{F}_z, z \in \mathcal{M}$, and $n \geq 0$. We will establish precise conditions in the next lemma for the positive parameters $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$, and β , defining λ_2 as $\lambda_1 + 7\alpha$. Let γ be a small positive constant such that $\gamma \ll \beta$ and $\gamma \ll \varepsilon$, where ε is the constant associated with α as mentioned earlier. Define $\mathcal{D}_{z_{-n}}$ as the small ball centered at $z_{-n} := T^{-n}(z)$ with radius $\gamma e^{-n\lambda_2}$ within $\mathcal{E}_{z_{-n}}$. Our focus is on the graphs in $\mathcal{T}_{z_{-n}} = \mathcal{E}_{z_{-n}} \oplus \mathcal{F}_{z_{-n}}$ of holomorphic maps over $\mathcal{D}_{z_{-n}}$.

Lemma 6. *For every $z \in \mathcal{M}$, there exist holomorphic maps $g_n : \mathcal{D}_{z_{-n}} \rightarrow \mathcal{F}_{z_{-n}}$ with graph $\Gamma_{z_{-n}}$ such that $g_n(0) = 0, \|Dg_n\| \leq e^{-4n\alpha}$, and T maps $\Gamma_{z_{-n-1}}$ into $\Gamma_{z_{-n}}$.*

Proof. The proof of this lemma proceeds by induction. For $n = 0$, it suffices to select $g_0 = 0$. The subspace $\Gamma_{z_{-n}}$ will be obtained as an open subset within $T^{-1}(\Gamma_{z_{-n+1}})$. Consider the map T^{-1} defined on a small neighborhood of z_{-n+1} , which maps into a neighborhood of z_{-n} . In the dynamical coordinates associated with $\mathcal{T}_{z_{-n+1}}$ and $\mathcal{T}_{z_{-n}}$, the map T^{-1} can be expressed as:

$$T^{-1}(z) = \mathcal{L}(z) + \mathcal{R}(z) \quad \text{where} \quad \mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \quad \text{and} \quad \mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$$

Here, $\mathcal{L}(z)$ represents the linear component of T , specifically the differential DT^{-1} at z_{-n+1} , while $\mathcal{R}(z)$ denotes the remainder, which is of order ≥ 2 in z . Let $\mathcal{L}_1 : \mathcal{E}_{z_{-n+1}} \rightarrow \mathcal{E}_{z_{-n}}$ and $\mathcal{L}_2 : \mathcal{F}_{z_{-n+1}} \rightarrow \mathcal{F}_{z_{-n}}$. We have the following bounds:

$$\|\mathcal{L}_1(z')\| \geq e^{-\lambda_1} \|z'\|, \quad \|\mathcal{L}_2(z'')\| \leq e^{-\lambda_2} \|z''\|$$

for $z' \in \mathcal{E}_{z_{-n+1}}$, and for $z'' \in \mathcal{F}_{z_{-n+1}}$, respectively. The derivatives of T^{-1} are uniformly bounded in standard coordinates. Considering the distortions in dynamical coordinates, we obtain $\|D\mathcal{R}(z)\| \leq Ae^{6n\alpha} \|z\|$, where $A > 0$ is independent of γ, n , and α . Let $z = (z', z'')$ and $w = (w', w'')$ be points in $\mathcal{E}_{z_{-n+1}} \oplus \mathcal{F}_{z_{-n+1}}$ contained in $\mathcal{D}_{z_{-n+1}}$. Hence, $\|z\|$ and $\|w\|$ are smaller than $2\gamma e^{-(n-1)\lambda_2}$. Set $\tilde{z} = (z', \tilde{z}'') = T^{-1}(z)$ and $\tilde{w} = (w', \tilde{w}'') = T^{-1}(w)$. Utilizing the estimates for $\mathcal{L}_1, D\mathcal{R}$, and Dg_{n-1} , we derive:

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}' - \tilde{w}'\| &\geq \|\mathcal{L}_1(z') - \mathcal{L}_1(w')\| - \|\mathcal{R}_1(z) - \mathcal{R}_1(w)\| \geq \\ &\geq e^{-\lambda_1} \|z' - w'\| - 2\gamma Ae^{6n\alpha} e^{-(n-1)\lambda_2} \|z - w\| \geq \\ &\geq e^{-\lambda_1} \|z' - w'\| - 4\gamma Ae^{6n\alpha} e^{-(n-1)\lambda_2} \|z' - w'\|, \end{aligned}$$

leading to

$$\|\tilde{z}' - \tilde{w}'\| \geq e^{-(\lambda_1 + \alpha)} \|z' - w'\|$$

since γ and α are small and $\alpha \ll \lambda_1$. Consequently, $T^{-1}(\mathcal{D}_{z_{-n+1}})$ is the graph of a holomorphic map g_n over an open subset \mathcal{D} of $\mathcal{E}_{z_{-n}}$. The final estimate for $w' = 0$ implies that \mathcal{D} includes the ball $\mathcal{D}_{z_{-n}}$. Furthermore, we have

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}'' - \tilde{w}''\| &\leq \|\mathcal{L}_2(z'') - \mathcal{L}_2(w'')\| + \|\mathcal{R}_2(z) - \mathcal{R}_2(w)\| \\ &\leq e^{-\lambda_2} \|z'' - w''\| + 2\gamma Ae^{6n\alpha} e^{-(n-1)\lambda_2} \|z - w\| \\ &\leq e^{-\lambda_2} e^{-4(n-1)\alpha} \|z' - w'\| + 4\gamma Ae^{6n\alpha} e^{-(n-1)\lambda_2} \|z' - w'\|, \end{aligned}$$

implying that $\|\tilde{z}'' - \tilde{w}''\| \leq e^{-4n\alpha} \|\tilde{z}' - \tilde{w}'\|$ given that $\alpha \ll \lambda_1$ and γ is small. This concludes the proof of the lemma. \square

Let \mathcal{F}'_z denote the orthogonal complement of \mathcal{E}_z . We use coordinate systems on \mathcal{F}'_z that induce the standard metric. Define $\mathcal{D}'_{z_{-n}}$ as the ball centered at 0 with radius $\gamma' e^{-n\lambda_3}$ in $\mathcal{E}_{z_{-n}}$, where $\gamma' > 0$ is suitably small and $\lambda_3 = \lambda_1 + 10\alpha$. We show that that $\Gamma_{z_{-n}}$ contains a flat graph $\Gamma'_{z_{-n}}$.

Corollary 7. *For every $z \in \mathcal{M}$, the set $\Gamma_{z_{-n}}$ contains the graph $\Gamma'_{z_{-n}}$ of a holomorphic map $g'_n : \mathcal{D}'_{z_{-n}} \rightarrow \mathcal{F}'_{z_{-n}}$ such that $g'_n(0) = 0$ and $\|Dg'_n\| \lesssim e^{-n\alpha}$.*

Proof. Using the coordinate systems on $\mathcal{E}_{z_{-n}}$, $\mathcal{F}_{z_{-n}}$, and $\mathcal{F}'_{z_{-n}}$, let $\tau : \mathcal{E}_{z_{-n}} \oplus \mathcal{F}_{z_{-n}} \rightarrow \mathcal{E}_{z_{-n}} \oplus \mathcal{F}'_{z_{-n}}$ denote the linear map of coordinate change. Given that the angle between $\mathcal{E}_{z_{-n}}$ and $\mathcal{F}_{z_{-n}}$ exceeds $\beta e^{-n\alpha}$, we can express τ as (τ', τ'') with $\|\tau'(z) - z'\| \lesssim e^{n\alpha} \|z''\|$ and $\|\tau''(z)\| \leq \|z''\|$ for $z = (z', z'')$ in $\mathcal{E}_{z_{-n}} \oplus \mathcal{F}_{z_{-n}}$. This corollary can be proved similarly to apply previous lemma, but by replacing T^{-1} with τ . We omit the details here. \square

Main result

In this section we give our main result with is as following.

Main Theorem. *Let f be an Hénon-like map with $d_{p-1}^+ < d$ and let ν be an ergodic f -invariant measure satisfying $h_\nu(f) > \log d_{p-1}^+$. Then ν admits p strictly positive Lyapounov exponents larger than or equal to $(h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+) / 2k$. In particular, if $d_{k-p-1}^- < d$ and $h_\nu(f) > \log d_{k-p-1}^-$ then ν admits $k - p$ strictly negative ones with are smaller than or equal to $-(h_\nu(f) - \log d_{k-p-1}^-) / 2k$.*

Let $\mathcal{D}_{-n}(z_0, \varepsilon)$ denote the Bowen $(-n, \varepsilon)$ -ball with center z_0 , i.e. the set of the points z such that $f^{-j}(z)$ is defined and $\|f^{-j}(z) - f^{-j}(z_0)\| \leq \varepsilon$ for $0 \leq j \leq n$. The entropy $h(\nu)$ for f^{-1} can be obtained by the following Brin-Katok formula

$$h(\nu) := \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(\mathcal{D}_{-n}(z, \varepsilon))$$

for ν -almost every z . So, for every $\alpha > 0$, there are positive constants A, ε and a Borel set \mathcal{M}_0 with $\nu(\mathcal{M}_0) > 3/4$ such that $\nu(\mathcal{D}_{-n}(z, 6\varepsilon)) \leq Ae^{-n(\log d - \alpha)}$ for $z \in \mathcal{M}_0$ and $n \geq 0$.

Proof of Main Theorem . Assume, for the sake of contradiction, that the measure ν possesses at least $k-p+1$ Lyapounov exponents that are strictly less than $\frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)$. Let $s \leq p-1$ be an integer, and let λ be a positive constant where $\lambda < \frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)$. Assume that ν has exactly $k-s$ Lyapounov exponents strictly less than λ , with the remaining exponents being greater than or equal to $\frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)$. We will construct a complex subspace \mathcal{F} of dimension s , which will contradict the estimate given in Proposition 4 by having too many (n, ε) -separated points. Fix a positive constant α such that $\alpha \ll \lambda$ and $\alpha \ll \frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+) - \lambda$.

Note that all constructed graphs are localized within a compact neighborhood \mathcal{U} surrounding the filled Julia set \mathcal{K} . Returning now to the standard metric on \mathbb{C}^k , let \mathcal{N} be a subset of $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_0$ such that the balls $\mathcal{D}_{-n}(z, 3\varepsilon)$, centered at points $z \in \mathcal{N}$, are mutually disjoint. We take \mathcal{N} to be maximal under this disjointness constraint. As a result, the balls $\mathcal{D}_{-n}(z, 6\varepsilon)$ with centers $z \in \mathcal{N}$ provide a covering of $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_0$. Given that $\nu(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_0) \geq \frac{1}{4}$ and $\nu(\mathcal{D}_{-n}(z, 6\varepsilon)) \leq Ae^{-n(h_\nu(f) - \alpha)}$, it follows that \mathcal{N} must contain at least $(4A)^{-1} e^{n(h_\nu(f) - \alpha)}$ points. Now consider the graphs $\Gamma_{z_{-n}}$ and $\Gamma'_{z_{-n}}$, previously constructed for each $z \in \mathcal{N}$. Since the balls $\mathcal{D}_{-n}(z, 3\varepsilon)$ are disjoint, the set $\{z_{-n}\}$ is $(n, 3\varepsilon)$ -separated. By Lemma 6, we have that the diameter of each $\Gamma_{z_{-n}}$ is less than ε for $\lambda_1 = \lambda$. Consequently, replacing each z_{-n} with a point $z'_{-n} \in \Gamma_{z_{-n}}$ yields a set that remains (n, ε) -separated.

Let Π be an orthogonal projection of $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{k-p}$ onto a subspace \mathcal{E} of dimension $k - s$. If \mathcal{E} is a product of a subspace of \mathbb{C}^p with \mathbb{C}^{k-p} , then the fibers of Π that are sufficiently close to \mathcal{K} (in particular, those intersecting \mathcal{U}) are horizontal in D . This property holds for the projection onto any sufficiently small perturbation of \mathcal{E} . Therefore, we can select a finite number of projections Π_1, \dots, Π_N onto $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ that satisfy this property, and a constant $\alpha_0 > 0$ such that any subspace \mathcal{F} of dimension s in \mathbb{C}^k makes an angle $\geq \alpha_0$ with at least one of \mathcal{E}_i . From Corollary 7, for each graph $\Gamma'_{z_{-n}}$, we find following estimate:

$$\text{vol}(\Pi_i(\Gamma'_{z_{-n}})) \geq \gamma'' e^{-2n(k-s)\lambda_3}$$

for some projection Π_i with a fixed constant $\gamma'' > 0$. Select an i such that this property holds for at least $N^{-1} \#\mathcal{N}$ graphs $\Gamma'_{z_{-n}}$. Since $\#\mathcal{N} \geq (4A)^{-1} e^{n(h_\nu(f) - \alpha)}$, we have

$$\sum_{i=1}^N \text{vol}(\Pi_i(\Gamma'_{z_{-n}})) \gtrsim e^{n(h_\nu(f) - \alpha) - 2n(k-s)\lambda_3}$$

Consequently, there exists a fiber \mathcal{F} of Π_i that intersects $\gtrsim e^{n(h_\nu(f) - \alpha) - 2n(k-s)\lambda_3}$ graphs $\Gamma_{z_{-n}}$. This implies that \mathcal{F} contains an (n, ε) -separated subset of $\gtrsim e^{n(h_\nu(f) - \alpha) - 2n(k-s)\lambda_3} \geq e^{n(\log d_{p-1}^+ + \alpha)}$ points since $\alpha \ll \frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+) - \lambda$. This contradicts Proposition 4 for $X = \mathcal{F}$ as $d_{p-1}^+ \geq d_s^+$, thus concluding the proof of Theorem. \square

Remark. The bound $\frac{1}{2k} (h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)$ can be replaced by the

$$\inf_{s \leq p-1} \left\{ \frac{1}{2(k-s)} (h_\nu(f) - \log d_s^+) \right\}.$$

REFERENCES

1. Tien-Cuong Dinh, Viet-Anh Nguyen and Nessim Sibony. *Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension*. Advances in Mathematics, V.219, N.5, 2008, P.1689-1721.
2. Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. *Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings*. Springer, Berlin, 2010, P.165-294.
3. Fabrizio Bianchi, Tien-Cuong Dinh and Karim Rakhimov. *Monotonicity of dynamical degrees for Hénon-like and polynomial-like maps*. Transactions of the American Mathematical Society, V.93, 2024, P.1-23.
4. Mikhael Gromov. *On the entropy of holomorphic maps*. Enseignement math, Manuscript, 2003, p.217-235.

REZYUME

Ushu maqolada Hénon akslantirishlari uchun berilgan invariant ergodik o'lchovlarning Lyapunov eksponentialari entropiyaga qo'yilagn ma'lum shart asosida o'rganildi. Boshqacha aytganda, $d_{p-1}^+ < d$ shartni qanoatlantiruvchi f Hénon akslantirishi berilgan bo'lsin. Agar ν ergodik o'lchov entropiyasi uchun $h_\nu(f) > \log d_{p-1}^+$ o'rinli bo'lsa, ν o'lchovga bog'liq kamida p ta musbat Lyapunov eksponentialari topilib, quyidan $(h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)/2k$ bilan chegaralangan ekanligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Entropiya, Gorizontalsimon akslantirishlar, Lyapunov eksponentialari.

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуются показатели Ляпунова эргодических инвариантных мер для отображений Энона при выполнении определённого условия на энтропию. Иными словами, пусть f – отображение Энона, удовлетворяющее условию $d_{p-1}^+ < d$. Тогда для всякой эргодической меры ν , энтропия которой удовлетворяет неравенству $h_\nu(f) > \log d_{p-1}^+$, показано, что у меры ν имеется как минимум p положительных показателей Ляпунова. Более того, эти показатели снизу ограничены выражением $(h_\nu(f) - \log d_{p-1}^+)/2k$.

Ключевые слова: Энтропия, отображения горизонтального типа, показатели Ляпунова.

UDC 519.496

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MIXED-TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDER WITH RESPECT TO THE TIME VARIABLE**FAYAZOV K. S.**

TURIN POLYTECHNIC UNIVERSITY IN TASHKENT

kudratillo52@mail.ru

KHUDAYBERGANOV Y. K.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

komilyashin89@mail.ru

RESUME

This work is devoted to the study of boundary value problems for mixed-type differential equations of the first and second order with respect to the time variable. Boundary value problems for mixed-type equations arise in various fields of natural sciences, including laser physics, plasma modeling, and mathematical biology. In this paper, we establish theorems on the uniqueness and conditional stability of the solution to the problem under consideration within a set of well-posedness. An a priori estimate of the solution is obtained using the method of logarithmic convexity and spectral decomposition.

Key words: Boundary value problem, ill-posed problem, mixed-type equation, a priori estimate, estimate of conditional stability, uniqueness of solution, set of correctness.

Introduction

The paper studies boundary value problems for differential equations of mixed-type of the first and second order with respect to the time variable. The problem studied in this paper belongs to the class of ill-posed problems of mathematical physics, namely, in this problem there is no continuous dependence of the solution on the initial data.

Boundary value problems for equations of mixed-type have practical applications, they arise in solving problems of gas dynamics, momentless theory of shells with curvature of variable sign, in the theory of infinitesimal bending of surfaces, in magneto hydrodynamics, in the theory of electron scattering, in predicting groundwater levels and in other areas of physics and engineering (see [1], [2], [3])

Correct boundary value problems for equations of mixed-type with two degenerate lines were studied by such mathematicians as A.M. Nakhushev, M.M. Zainulabidov, V.F. Volkodavov, V.V. Azovsky, O.I. Marichev, A.M. Ezhov, N.I. Polivanov, He Kan Cher [4], S.I. Makarov, S.S. Isamukhamedov, Zh. Oramov, M.S. Salakhitdinov and his students, K.B. Sabitov, A.A. Gimaltdinova [5], O.A. Repin and others.

In the works of E. M. Landis, S. G. Krein, S. P. Shishatsky, H. A. Levine and others, ill-posed boundary value problems for a parabolic equation with backward time flow were studied. In these works, the inverse and non-characteristic Cauchy problem for conditional well-posedness were considered for a parabolic equation. S. G. Krein and H. A. Levine generalized these results for abstract evolution equations with self-adjoint operator coefficients.

The works of S.P. Shishatsky, K.S. Fayazov and M. Kh. Alaminov, in which ill-posed boundary value problems for degenerate parabolic and elliptic equations were investigated, also deserve special attention.

The subject of K.S. Fayazov's works were ill-posed boundary value problems for parabolic equations with changing time direction and mixed-type equations. Research close to our topic was conducted in the works of K. S. Fayazov [6], I. O. Khazhiev [7], Y. K. Khudayberganov [8].

Formulation of the problem

Let $Q = \Omega_0 \times \Omega_1$, $\Omega_0 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : -1 < x_j < 1, j = \overline{1, n} \}$, $\Omega_1 = \{ 0 < t < T, T < \infty \}$.
 Let's consider the equation

$$\frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i} + \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} = 0, \tag{1}$$

in the domain $Q \setminus \{x_j \neq 0, j = \overline{1, n}\}$, where $i = 1, 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Problem. Find a solution to equation (1) in the domain Q so that the following conditions:
 initial

$$\begin{aligned} \text{a) } i = 1, \quad u(x, t)|_{t=0} &= \varphi_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0, \\ \text{b) } i = 2, \quad \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} &= \varphi_{k+1}(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0, \quad k = 0, 1, \end{aligned} \tag{2}$$

boundary

$$u(x, t)|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad t \in \bar{\Omega}_1, \tag{3}$$

and gluing

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x_j^k} \Big|_{x_j=-0} = \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x_j^k} \Big|_{x_j=+0}, \quad t \in \bar{\Omega}_1, \quad k = 0, 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

conditions, where $\varphi_m(x)$, $m = \overline{1, 3}$ is a given sufficiently smooth function, and $\varphi_m(x)|_{\partial\Omega_0} = 0$.

In this paper, a priori estimates for the solution of equation (1) are established, and theorems on the uniqueness and conditional stability of the solution of the desired problems are proved.

Spectral problem. Find such values for which the following problem

$$\sum_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \vartheta_{x_j x_j}(x) + \lambda \vartheta(x) = 0, \quad x \in \Omega_0 \setminus \{x_j \neq 0\}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \vartheta(x) |_{\partial\Omega_0} &= 0, \\ \frac{\partial^k \vartheta(x)}{\partial x_j^k} \Big|_{x_j=-0} &= \frac{\partial^k \vartheta(x)}{\partial x_j^k} \Big|_{x_j=+0}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (k = \overline{0, 1}), \end{aligned} \tag{6}$$

has non-trivial solutions.

We will seek the solution to problem (5), (6) using the method of separation of variables, assuming

$$\vartheta(x) = \prod_{j=1}^n X_j(x_j). \tag{7}$$

From conditions (7) we obtain:

$$\begin{aligned} X_j(\pm 1) &= 0, \\ X_j(-0) &= X_j(+0), \\ X'_j(-0) &= X'_j(+0), \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \tag{8}$$

We find the second-order partial derivatives of the function $\vartheta(x)$:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(x)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \prod_{j=1}^n X_j(x_j), \quad k = \overline{1, n}.$$

Substituting into (5) and separating the variables, we obtain:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\text{sign}(x_j) X''_j(x_j)}{X_j(x_j)} = -\lambda.$$

Thus, we have

$$\frac{\text{sign}(x_j)X''_j(x_j)}{X_j(x_j)} = -\lambda_j, j = \overline{1, n}.$$

As a result, to find the functions $X_j(x_j)$ we obtain the equations:

$$\text{sign}(x_j)X''_j(x_j) = -\lambda_j X_j(x_j). \tag{9}$$

Let us consider equations (9) with the corresponding conditions (8)

$$\begin{aligned} \text{sign}(x_j)X''_j(x_j) &= -\lambda_j X_j(x_j), \\ X_j(\pm 1) &= 0, X_j(-0) = X_j(+0), \\ X'_j(-0) &= X'_j(+0), j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Thus, the solutions to problems (10) have the form:

if $\lambda_j > 0$,

$$X_{jl_j}^{(1)}(x_j) = \begin{cases} \sin \mu_{l_j}(x_j - 1)/\cos \mu_{l_j}, & 0 \leq x_j \leq 1, \\ \text{sh} \mu_{l_j}(x_j + 1)/\text{ch} \mu_{l_j}, & -1 \leq x_j \leq 0, \end{cases} \quad l_j \in N,$$

and also $\lambda_j < 0$,

$$X_{jl_j}^{(2)}(x_j) = \begin{cases} \text{sh} \mu_{l_j}(x_j - 1)/\text{ch} \mu_{l_j}, & 0 \leq x_j \leq 1, \\ \sin \mu_{l_j}(x_j + 1)/\cos \mu_{l_j}, & -1 \leq x_j \leq 0, \end{cases} \quad l_j \in N,$$

where $\lambda_j = \mu_{l_j}^2 > 0$, $\lambda_j = -\mu_{l_j}^2 < 0$, $j = \overline{1, n}$. In both cases, μ_{l_j} are positive roots of the transcendental equation $\text{tg} \alpha = -\text{th} \alpha$.

Thus, the eigenvalues of the spectral problem (5), (6) have the form

$$\begin{aligned} \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(1)} &= \sum_{j=1}^n \mu_{k_j}^2, \\ \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{k_j}^2 - \mu_{k_n}^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(2^n)} &= -\sum_{j=1}^n \mu_{k_j}^2 \end{aligned}$$

and the corresponding eigenfunctions

$$\begin{aligned} \vartheta_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{(1)}(x) &= \prod_{j=1}^n X_{l_j}^{(1)}(x_j), \\ \vartheta_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{(2)}(x) &= X_{l_n}^{(2)}(x_n) \prod_{j=1}^{n-1} X_{l_j}^{(1)}(x_j), \\ &\dots\dots\dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ \vartheta_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{(2^n)}(x) &= \prod_{j=1}^n X_{l_j}^{(2)}(x_j), \end{aligned}$$

Let $\|u\|^2 = (u, u)$, where the scalar product is $(u, v) = \int_{\partial\Omega_0} uv d\Omega_0$. Besides,

$$\left(\vartheta_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{(p)}(x), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(q)}(x) \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \right) = 0, p \neq q, (p, q = \overline{1, 2^n}), \forall l_j, k_j,$$

$$\left| \left(\vartheta_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{(p)}(x), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \right) \right| = \begin{cases} 1, & l_1 = k_1 \wedge \dots \wedge l_n = k_n \\ 0, & l_1 \neq k_1 \vee \dots \vee l_n \neq k_n \end{cases}, (p = \overline{1, 2^n}),$$

where $l_j, k_j \in N$.

The norm

$$\|u(x, t)\|_0^2 = \sum_{p=1}^{2^n} \left(\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{\infty} \left| \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) u(x, t), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right) \right|^2 \right), \tag{11}$$

defined by the following formula is equivalent to the original norm in the space H_0 . Let us denote by H_0 the closure of the linear shells of the systems of functions $\vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x), p = \overline{1, 2^n}$ according to the norms $W_2^0(\Omega_0)$.

In [10], [11] it is proved that the eigenfunctions $\vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x), p = \overline{1, 2^n}$ of problem (5) - (6) normalized in $L_2((-1; 1)^n)$ form a Rissa basis in $L_2((-1; 1)^n)$.

Main results

a) $i = 1$.

Definition 1. By a generalized solution of the boundary value problem (1) - (4) we mean a function $u(x, t)$ such that $u(x, t) \in (L_2(-1, 1)^n, [0; T])$ and

$$\int_{\partial Q} u(x, t) \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) V_t(x, t) - \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{sign}(x_i) V_{x_i x_j}(x, t) \right) dQ =$$

$$- \int_{\partial\Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) V(x, 0) \varphi_0(x) d\Omega_0,$$
(12)

for any function $V(x, t) \in W_2^{2,1}((-1; 1)^n, \bar{\Omega}_0)$ satisfying conditions $V(x, T) = 0, V(x, t)|_{\partial\Omega_0} = 0$.

Let

$$M = \{u : \|u(x, T)\|_0 \leq m, m < \infty\}.$$

Lemma 1. Let $u(x, t)$ satisfy equation (1) and conditions (2) - (4). Then for any solution $u(x, t) \in (L_2(-1, 1)^n, \Omega_1)$ the inequality

$$\|u(x, t)\|_0 \leq 2^{\frac{n}{2}} \|u(x, 0)\|_0^{\frac{T-t}{T}} \cdot \|u(x, T)\|_0^{\frac{t}{T}} \tag{13}$$

holds.

Proof. The solution to problem (1) - (4), if it exists and $u(x, t) \in M$ we have the form

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(t) \vartheta_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(x), \tag{14}$$

where $\vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x), p = \overline{1, 2^n}$ are the eigenfunctions of problem (5)-(6). Let $V(x, t) = \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x), (p = \overline{1, 2^n})$, and $\mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}(T) = 0, \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \in W_2^1(\bar{\Omega}_1)$. Then

$$0 = \int_{\partial Q} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) u(x, t) \left(\mu'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) + \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right) dQ$$

$$+\mu_{k_1,k_2,\dots,k_n}(0) \int_{\partial\Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \vartheta_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(x) \varphi_0(x) d\Omega_0.$$

From this we have

$$\int_0^T u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t) \left(\mu'_{k_1,k_2,\dots,k_n}(t) + \lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)} \mu_{k_1,k_2,\dots,k_n}(t) \right) dt = -\mu_{k_1,k_2,\dots,k_n}(0) \varphi_{0k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)},$$

where

$$u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t) = \pm \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) u(x, t), \vartheta_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(x) \right),$$

$$\varphi_{0k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)} = \pm \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \varphi_0(x), \vartheta_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(x) \right), \quad (p = \overline{1, 2^n}), \quad k_j \in N.$$

Therefore, for $u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t)$ the equalities are true

$$\left(u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t) \right)_t = \lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)} u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t), \tag{15}$$

$$u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(0) = \varphi_{0k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}, \quad (p = \overline{1, 2^n}), \quad k_j \in N. \tag{16}$$

The solution to problem (15), (16) has the form

$$u_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)}(t) = \varphi_{0k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)} e^{\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{(p)} t}, \quad (p = \overline{1, 2^n}), \quad k_j \in N. \tag{17}$$

Taking into account (14), (17), from (11) we have

$$\|u(x, t)\|_0^2 = \sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{\infty} \left(u_{k_1,\dots,k_n}^{(p)}(t) \right)^2.$$

Let's consider the function

$$\phi_{k_1,\dots,k_n}(t) = \left(\varphi_{0k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 e^{2\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} t}.$$

Let's calculate the derivatives of function $\phi_{k_1,\dots,k_n}(t)$

$$\phi'_{k_1,\dots,k_n}(t) = 2\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} \left(\varphi_{0k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 e^{2\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} t},$$

$$\phi''_{k_1,\dots,k_n}(t) = 4 \left(\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 \left(\varphi_{0k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 e^{2\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} t} = 4 \left(\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 \phi_{k_1,\dots,k_n}(t).$$

Let's introduce function $\psi(t) = \ln(\phi_{k_1,\dots,k_n}(t))$.

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \frac{\phi''_{k_1,\dots,k_n}(t) \phi_{k_1,\dots,k_n}(t) - (\phi'_{k_1,\dots,k_n}(t))^2}{\phi_{k_1,\dots,k_n}^2(t)} = \\ &= \frac{4 \left(\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 \phi_{k_1,\dots,k_n}(t) \cdot \phi_{k_1,\dots,k_n}(t) - 4 \left(\lambda_{k_1,\dots,k_n}^{(1)} \right)^2 \phi_{k_1,\dots,k_n}^2(t)}{\phi_{k_1,\dots,k_n}^2(t)} = 0, \end{aligned}$$

or

$$\psi''(t) \geq 0. \tag{18}$$

From (18) we have

$$\psi(t) \leq \left(1 - \frac{t}{T} \right) \psi(0) + \frac{t}{T} \psi(T).$$

From this it easily follows that

$$|u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(t)|^2 \leq \left(|u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(0)|^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \cdot \left(|u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(T)|^2 \right)^{\frac{t}{T}}, \quad (p = \overline{1, 2^n}). \tag{19}$$

Summing the inequalities (19) over $k_1, \dots, k_n \in N$ and using Holder's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(t) \right)^2 &\leq 2^n \left(\sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(0) \right)^2 \right)^{1 - \frac{t}{T}} \times \\ &\times \left(\sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(T) \right)^2 \right)^{\frac{t}{T}}, \quad t \in \Omega_0 \end{aligned}$$

or

$$\|u(x, t)\|_0 \leq 2^{\frac{n}{2}} \|u(x, 0)\|_0^{1 - \frac{t}{T}} \cdot \|u(x, T)\|_0^{\frac{t}{T}}.$$

Lemma 1 is proven.

Theorem 1. If a solution to problem (1) - (4) exists and $u(x, t) \in M$, then the solution to problem (1) - (4) is unique.

Proof. Let equation (1) with conditions (2)-(4) have solutions $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$, i.e. 2 solutions. Then the function $U(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ is a solution with zero data. For the last function, estimate (13) is true. Using the results of lemma 1, we have $U(x, t) = 0$ for all $(x, t) \in Q$, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Theorem 1 is proven.

Let $u(x, t)$ be the solution to problem (1) - (4) with exact data, and $u_\varepsilon(x, t)$ be the solution to problem (1) - (4) with approximate data.

Theorem 2. Let the solution of the original problem exist and $u(x, t), u_\varepsilon(x, t) \in M$, in addition $\|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\|_0 \leq \varepsilon$. Then for the function $U(x, t) = u(x, t) - u_\varepsilon(x, t)$ at $t \in \Omega_1$ the following inequality

$$\|U(x, t)\|_0 \leq 2^{\frac{n}{2}} (\varepsilon)^{1 - \frac{t}{T}} \cdot (2m)^{\frac{t}{T}}$$

is true.

Proof. Let the function $U(x, t)$ be the solution of the corresponding problem (1) - (4), and $U(x, 0) = \varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)$. In addition, $\|U(x, T)\|_0^2 \leq 4m^2$. For the function $U(x, t)$, using the results of lemma 1, we have

$$\|U(x, t)\|_0 \leq 2^{\frac{n}{2}} (\varepsilon)^{1 - \frac{t}{T}} \cdot (2m)^{\frac{t}{T}}.$$

Theorem 2 is proven.

b) $i = 2$.

Definition 2. By a generalized solution of problem (1) - (4) we mean a function $u(x, t), u_t(x, t) \in C(L_2(-1; 1)^n; \bar{Q})$, which for any arbitrary function $V(x, t) \in W_2^2((-1; 1)^n, \bar{\Omega}_1)$, $\left. \frac{\partial^k V(x, t)}{\partial t^k} \right|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots$ satisfies the following integral identity

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} u(x, t) \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) V_{tt}(x, t) + \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{sign}(x_i) V_{x_j x_j}(x, t) \right) dQ = \\ \int_{\partial \Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) V(x, 0) \varphi_2(x) d\Omega_0 - \int_{\partial \Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) V_t(x, 0) \varphi_1(x) d\Omega_0. \end{aligned}$$

Lemma 2. (See pp. 825-826, [9]) Let $v(t)$ be a solution to equation

$$v''(t) - \lambda v(t) = 0$$

and satisfy conditions $v(0) = p_1, v'(0) = p_2$. Then for the solution of this equation for $t \in \Omega_1$ the inequality holds

$$v^2(t) \leq e^{2t(T-t)} (v^2(0) + |\alpha|)^{1 - \frac{t}{T}} (v^2(T) + |\alpha|)^{\frac{t}{T}} - |\alpha|,$$

where $\lambda-$ is some constant, $\alpha = \frac{1}{2} (\lambda v^2(0) - v_t^2(0))$.

Lemma 3. Let $u(x, t)$ be a solution to the equation

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} = 0,$$

and satisfy conditions (2) - (4). Then for the solution of this equation at $t \in \Omega_1$ the inequality

$$\|u(x, t)\|_0^2 \leq 2^n e^{2t(T-t)} \left(\|u(x, 0)\|_0^2 + \alpha \right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\|u(x, T)\|_0^2 + \alpha \right)^{\frac{t}{T}} - \alpha,$$

holds, where $\alpha = \frac{1}{2} \left(\|\varphi_1\|_1^2 + \|\varphi_2\|_0^2 \right)$.

Proof. If a solution to problem (1)-(4) exists and belongs to M , then it has the form (14), where $\vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x)$, $p = \overline{1, 2^n}$ are eigenfunctions of problem (5)-(6). In addition,

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t) = \pm \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) u(x, t), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right),$$

$$\varphi_{1k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} = \pm \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \varphi_1(x), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right),$$

$$\varphi_{2k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} = \pm \left(\prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \varphi_2(x), \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right), \quad (p = \overline{1, 2^n}), \quad k_j \in N.$$

Let in (20) $V(x, t) = \omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x)$, $p = \overline{1, 2^n}$, where $\omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(T) = 0$, $\omega'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(T) = 0$, $\omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \in W_2^2(\bar{\Omega}_1)$. Then

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} u(x, t) \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \left(\omega''_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) - \omega(t) \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \right) dQ = \\ \omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(0) \int_{\partial \Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \varphi_2(x) d\Omega_0 \\ - \omega'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(0) \int_{\partial \Omega_0} \prod_{j=1}^n \text{sign}(x_j) \vartheta_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(x) \varphi_1(x) d\Omega_0 \end{aligned} \tag{21}$$

From (21) we have

$$\begin{aligned} \int_0^T u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t) \left(\omega''_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) - \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(t) \right) dt = \\ \omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}(0) \varphi_{2k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} - \omega'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(0) \varphi_{1k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}, \quad p = \overline{1, 2^n}, \quad k_j \in N. \end{aligned}$$

Thus, for $u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t)$, $(p = \overline{1, 2^n})$ we have the following sequence of solutions

$$\left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t) \right)_{tt} = \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t) \tag{22}$$

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0) = \varphi_{1k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}, \quad \left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0) \right)_t = \varphi_{2k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}, \quad k_j \in N. \tag{23}$$

$$u_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}(t) = \begin{cases} \varphi_{1k_1, \dots, k_n}^{(p)} ch \sqrt{\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}} t + \frac{\varphi_{2k_1, \dots, k_n}^{(p)} sh \sqrt{\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}} t}{\sqrt{\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}}}, & \lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)} > 0, \\ \varphi_{2k_1, \dots, k_n}^{(p)} t + \varphi_{1k_1, \dots, k_n}^{(p)}, & \lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)} = 0, \\ \varphi_{1k_1, \dots, k_n}^{(p)} \cos \sqrt{-\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}} t + \frac{\varphi_{2k_1, \dots, k_n}^{(p)} \sin \sqrt{-\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}} t}{\sqrt{-\lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)}}}, & \lambda_{k_1, \dots, k_n}^{(p)} < 0. \end{cases}$$

Let's introduce a norm

$$\|\varphi_1(x)\|_1^2 = \sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n}^{\infty} \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \left(\varphi_{1k, l, n}^{(p)}\right)^2, p = \overline{1, 2^n}, k_j \in N.$$

According to Lemma 2, for solutions of problems (22) - (23), for each fixed $k_j \in N$, the following inequalities are true:

$$\begin{aligned} \left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t)\right)^2 &\leq e^{2t(T-t)} \left(\left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0)\right)^2 + \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ &\left(\left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(T)\right)^2 + \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right)^{\frac{t}{T}} - \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}, \quad t \in \Omega_1, \end{aligned} \tag{24}$$

where

$$\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} = \frac{1}{2} \left(\lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0)\right)^2 - \left((u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0))_t \right)^2 \right), \quad (p = \overline{1, 2^n}). \tag{25}$$

After an elementary transformation from (25) we can write

$$\alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \leq \frac{1}{2} \left(\left| \lambda_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right| \left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0)\right)^2 + \left((u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0))_t \right)^2 \right), \quad (p = \overline{1, 2^n}).$$

We sum up the inequalities (24) and (25) by $k_j \in N$ and taking into account the Holder inequality we get

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{2^n} \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(t)\right)^2 \leq \\ &2^n e^{2t(T-t)} \left(\sum_{p=1}^{2^n} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(\left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(0)\right)^2 + \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right) \right) \right)^{1-\frac{t}{T}} \times \\ &\times \left(\sum_{p=1}^{2^n} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \left(\left(u_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)}(T)\right)^2 + \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right) \right) \right)^{\frac{t}{T}} - \sum_{p=1}^{2^n} \left(\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \alpha_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{(p)} \right) \end{aligned}$$

and summing up the above inequalities we finally get

$$\|u(x, t)\|_0^2 \leq 2^n e^{2t(T-t)} \left(\|u(x, 0)\|_0^2 + \alpha \right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\|u(x, T)\|_0^2 + \alpha \right)^{\frac{t}{T}} - \alpha,$$

where $\alpha = \frac{1}{2} \left(\|\varphi_1\|_1^2 + \|\varphi_2\|_0^2 \right)$. Lemma 3 has been proved.

Theorem 3. If a solution to problem (1) - (4) exists and belongs to M , then it is unique.

Proof. Let $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ be solutions of problems (1) - (4). Then their difference $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ will be a solution of the homogeneous problem (1) - (4). Applying the estimates of Lemma 3, we obtain $\|u(x, t)\|_0 = 0$, and from this it follows that $u(x, t) = 0$ for any for $\forall(x, t) \in \Omega$, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. holds. Theorem 3 is proved.

Theorem 4. Let the solution of problem (1) - (4) exist and $u(x, t), u_\varepsilon(x, t) \in M$, in addition $\|\varphi_1(x) - \varphi_{1\varepsilon}(x)\|_1 \leq \varepsilon$, $\|\varphi_2(x) - \varphi_{2\varepsilon}(x)\|_0 \leq \varepsilon$. Then for the function $U(x, t) = u(x, t) - u_\varepsilon(x, t)$ at $t \in Q$ the following inequality is true

$$\|U(x, t)\|_0^2 \leq 2^n e^{2t(T-t)} (2\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}} (4m^2 + \varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} - \varepsilon^2.$$

Proof. Let the function $U(x, t)$ be a solution of equation (1) satisfying the boundary conditions and gluing conditions (3)-(4) with initial data $U(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_{1\varepsilon}(x)$, $U_t(x, 0) = \varphi_2(x) - \varphi_{2\varepsilon}(x)$, where $\|\varphi_1(x) - \varphi_{1\varepsilon}(x)\|_1 \leq \varepsilon$, $\|\varphi_2(x) - \varphi_{2\varepsilon}(x)\|_0 \leq \varepsilon$. Then, using the estimates of Lemma 3 and elementary transformations for the norm of the function $U(x, t)$, we have

$$\|U(x, t)\|_0^2 \leq 2^n e^{2t(T-t)} (2\varepsilon^2)^{1-\frac{t}{T}} (4m^2 + \varepsilon^2)^{\frac{t}{T}} - \varepsilon^2.$$

Theorem 4 is proven.

REFERENCES

1. Bers, L., Mathematical Problems of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. Moscow: Foreign Literature Publishing House, 1961. - 206 p.
2. Kuzmin A.G., Nonclassical Equations of Mixed Type and Their Applications in Gas Dynamics. Leningrad: Leningrad State University Publishing, 1990. - 280 p.
3. Frankl F.I., Selected Works on Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1973. - 711 p.
4. He Kan Cher., The Singular Tricomi Problem for Equations of Mixed Type with Two Degeneracy Lines: PhD Thesis in Physical and Mathematical Sciences. Novosibirsk, 1976.
5. Sabitov, K.B., Karamova, A.A., Spectral Properties of Solutions to the Tricomi Problem for a Mixed-Type Equation with Two Type-Changing Lines and Their Applications. Izvestiya RAN. Seriya Matematicheskaya, 2001. Vol. 65, No. 4, pp. 133-150.
6. Fayazov, K.S., An Ill-posed Boundary Value Problem for a Second-Order Equation of Mixed Type. Uzbek Mathematical Journal, 1995, No. 2, pp. 89-93.
7. Fayazov K.S., Khajiev I.O., Fayazova Z.K., Ill-posed Boundary Value Problem for Operator-Differential Equation of Fourth Order. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2018, Vol. 1, Issue 2, Article 3.
8. Fayazov K.S., Khudaybergenov Y.K., Ill-posed Boundary Value Problem for a System of Mixed-Type Equations with Two Degeneracy Lines. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2020, Vol. 17, pp. 647-660.
9. Lavrent'ev M.M., Saveliev L.Y., Theory of operators and ill-posed problems., Publishing House of the Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010.
10. Krein M. G., Gohberg I. T., Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Moscow: Nauka, 1965, 448 pages.
11. Pyatkov S. G., Some Properties of Eigenfunctions and Associated Functions of Indefinite Sturm-Liouville Problems. In: Nonclassical Equations of Mathematical Physics: Collected Scientific Works. Novosibirsk: Institute of Mathematics Publishing, 2005, pp. 240-251.

REZYUME

Ushbu ish yo'nalishini vaqt bo'yicha o'zgartiruvchi birinchi va ikkinchi tartibli aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan. Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar lazer fizikasi, plazmani modellashtirish va matematik biologiya kabi tabiiy fanlarning turli sohalarida uchraydi. Mazkur maqolada qaralgan masalaning

yechimi uchun yagonalik va shartli turg'unlik teoremlari isbotlangan. Yechimning a priori bahosi logarifmik qavariqlik usuli va spektral yoyilma yordamida olingan hamda shartli turg'unlik teoremlari isbotlangan.

Kalit so'zlar: Chegaraviy masala, nokorrekt masala, aralash tipdagi tenglama, parabolik tipdagi tenglama, a priori baho, shartli turg'unlik bahosi, yechimning yagonaligi, korrektilik to'plami.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена изучению краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа первого и второго порядка по временной переменной. Краевые задачи для уравнений смешанного типа возникают в различных областях естественных наук, включая лазерную физику, моделирование плазмы и математическую биологию. В данной статье доказаны теоремы об единственности и условной устойчивости решения рассматриваемой задачи в классе корректности. Априорная оценка решения получена с использованием метода логарифмической выпуклости и спектрального разложения.

Ключевые слова: Краевая задача, некорректная задача, уравнение смешанного типа, уравнение параболического типа, априорная оценка, оценка условной устойчивости, единственность решения, множество корректности.

UDC 517.55

ON THE CAUCHY PROBLEMS FOR BARENBLATT-ZHELTOV-KOCHINA TYPE FRACTIONAL EQUATIONS

FAYZIEV YU. E.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT, UZBEKISTAN
V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES, TASHKENT,
UZBEKISTAN

fayziev.yusuf@mail.ru

BAXRIDINOVA N. A.

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES, TASHKENT,
UZBEKISTAN

baxriddinovanigorabonu@gmail.com

RESUME

In this article, the Cauchy problem for a homogeneous fractional-order equation of the Barenblatt–ZheltoV–Kochina type with the Caputo derivative is studied. The existence of a solution to the given Cauchy problem is demonstrated using the Fourier method, and the continuity of the obtained solution is proved by employing the properties of functional series. Furthermore, the uniqueness of the solution is established. The properties of the Mittag-Leffler function are extensively used in the process of proving the existence and uniqueness of the solution to the proposed problem.

Keywords: The Cauchy problem, the Caputo derivatives, Mittag-Liffler function, Parseval equality.

Let consider the following equation:

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \Delta \left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right) - \nu^2 \Delta u = 0 \quad (1)$$

where $\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ —Laplas operator. If $k = 1$, then this equation is called a partial differential equation of the Barenblatt-ZheltoV-Kochina type, if $k = 2$, then it is called a partial differential equation of the Boussinesq type. Equations of the form (1) are encountered in modeling various processes. For example, equations of the Barenblatt-ZheltoV-Kochina type are the basic equations for the filtration of homogeneous liquids. This was first noticed in the work of G. I. Barenblatt, Yu. P. ZheltoV and I. N. Kochina [1]. Later, such equations were studied in the papers [2,3,4,5,6,7].

Let $A : H \rightarrow H$ be a self-adjoint, positive, unbounded arbitrary operator defined in a separable Hilbert space H . Suppose that operator A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ in H and the corresponding set of positive eigenvalues $\{\lambda_k\}$. Using the renumbering of eigenvalues, we can number them non-decreasing, and write as $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

Let the function $h(t)$ be defined in the interval $[0, +\infty)$ with values in H . The Caputo fractional derivative of order $0 < \rho < 1$ is defined as formula (see, [8]):

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t-\xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Let $C((a,b);H)$ denote the set of continuous functions $u(t)$ on the interval $t \in (a,b)$ with values in H . Now, recall the concept of the degree of an operator A in a Hilbert space H . Let τ is an arbitrary real number. We introduce the degree of the operator A in H as follows:

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k,$$

where $h_k = (h, v_k)$ Fourier coefficients of the element $h \in H$. Obviously, the domain of this operator has the form:

$$D(A^\tau) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty\}.$$

For element $h \in D(A^\tau)$ we introduce the norm as follows:

$$\|h\|_\tau^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 = \|A^\tau h\|^2.$$

Together with this norm $D(A^\tau)$ turns into a Hilbert space.

Recall, the Mittag-Leffler function $E_{\rho,\mu}(t)$ has the form

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + \mu)},$$

where $\rho > 0$ and μ complex number.

Let $AC[0, T]$ be the set of absolute continuous functions defined on $[0, T]$ and let $AC([0, T]; H)$ stand for a space of absolute continuous functions $u(t)$ with values in H (see, [9] p 339).

Let us present the following properties:

Lemma 1. *Let $0 < \rho < 1$. Then the following equality holds:*

$$D_t^\rho [t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\lambda t^\rho)] = E_{\rho,1}(-\lambda t^\rho). \tag{2}$$

Proof of Lemma 1 you can find, for example, [14].

Lemma 2. *Let $0 < \rho < 1$. Then the following equality holds:*

$$D_t^\rho [E_{\rho,1}(-\lambda t^\rho)] = -\lambda E_{\rho,1}(-\lambda t^\rho). \tag{3}$$

Proof of Lemma 2 you can find, for example, [14].

Consider the following problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A^a (D_t^\rho u(t)) + A^b u(t) = 0, & 0 < t \leq T; \\ u(+0) = \varphi, \end{cases} \tag{4}$$

where $\varphi \in H$.

This (4) problem is called the Cauchy problem for fractional equations of Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type.

Definition 1. *A function $u(t) \in AC([0, T]; H)$ with the properties $D_t^\rho u(t)$, $A^a (D_t^\rho u(t))$, $A^b u(t) \in C([0, T]; H)$ and satisfying conditions [4] is called the solution of the Cauchy problem [4].*

We note that problems similar to [4], in the case $a = 1, b = 1$ were studied in [14] as the Cauchy problem and in [15],[16] as non-local problems.

When $a = 2, b = 1$, problem (4) is referred to as a Benney–Luke type problem. Problem of this type have been studied in the work [17].

When $a = 0, b = 1$, problem [4] was studied in the work [18] as a non-local problem.

Theorem 1. *Let $0 < \rho < 1$, If $c = \min \{a, b\}$, $\varphi \in D(A^c)$, then problem (4) has a unique solution and this solution has the form:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) v_k, \tag{5}$$

where are φ_k - the Fourier coefficients of the function φ and $\mu_k = \frac{\lambda_k^b}{1+\lambda_k^a}$.

Proof. Existence of the solution. Due to the completeness of the system $\{v_k\}$ in H , the arbitrary solution of (4) can be written in the form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k.$$

Substituting into the first equation of (4) we have the following equation:

$$D_t^\rho T_k(t) (1 + \lambda_k^a) + T_k(t) \lambda_k^b = 0,$$

Therefore,

$$D_t^\rho T_k(t) + \mu_k T_k(t) = 0, \quad \mu_k = \frac{\lambda_k^b}{1 + \lambda_k^a}.$$

Using the second condition of (4), we obtain the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho T_k(t) + \mu_k T_k(t) = 0, \\ T_k(+0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6}$$

This problem has a unique solution (see, [28] p. 231):

$$T_k(t) = \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho). \tag{7}$$

Then we get the formal solution (5).

From this, in particular, it follows that if a solution to the forward problem exists, then it is unique. Indeed, for this it is sufficient to prove that the solution $u(t)$ to the forward problem with the homogeneous condition (4) is identically zero. But from (7) it follows that $T_k(t) \equiv 0$ for all $k \geq 1$. Taking into account the definition $T_k(t)$ and the completeness of the system $\{v_k\}$, we obtain $u(t) \equiv 0$.

It remains to prove that the constructed formal solution satisfies all the requirements of Definition 1 is indeed a solution to problem (4). We will analyze the proof of the theorem separately for the cases $b \leq a$ and $b > a$.

1) Let $b \leq a$.

Denote by $S_n(t)$ be the partial sums of (5):

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) v_k.$$

Then by using the following estimate of the Mittag-Liffler function $0 < |E_{\rho,\mu}(-t)| < 1$ and Parseval equality:

$$\|S_n(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n [\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2.$$

Therefore, if $\varphi \in H$ then $u(t) \in C((0, T]; H)$.

Now we estimate $A^b u(t)$:

$$\|A^b S_n(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n [\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] \lambda_k^b v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2b} |\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2b} |\varphi_k|^2.$$

Thus, if $\varphi \in D(A^b)$, then $A^b u(t) \in C((0, T]; H)$.

Then, we estimate $A^a (D_t^\rho u(t))$. By using Lemma 2:

$$\begin{aligned} \|A^a (D_t^\rho S_n(t))\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n [-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] \lambda_k^a v_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} |-\mu_k \varphi_k|^2 = \\ &= C \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} \left| \frac{\lambda_k^b}{1 + \lambda_k^a} \varphi_k \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} \cdot \frac{\lambda_k^{2b}}{\lambda_k^{2a}} |\varphi_k|^2 = C \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2b} |\varphi_k|^2. \end{aligned}$$

From this, if $\varphi \in D(A^b)$, we obtain $A^a (D_t^\rho u(t)) \in C((0, T]; H)$.

Finally, we estimate $D_t^\rho u(t)$:

$$\begin{aligned} \|D_t^\rho S_n(t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n [-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] v_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |-\mu_k \varphi_k|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2. \end{aligned}$$

If $\varphi \in H$, then $D_t^\rho u(t) \in C((0, T]; H)$.

2) Let $b > a$.

Now we estimate $A^b u(t)$, for that by using the following estimate of the Mittag-Liffler function

$$0 < |E_{\rho,\mu}(-t)| \leq \frac{C}{1+t}$$

and Parseval equality:

$$\begin{aligned} \|A^b S_n(t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n [\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] \lambda_k^b v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2b} |\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2b} \left| \frac{C}{1+\mu_k t^\rho} \right|^2 |\varphi_k|^2 \leq \frac{C}{t^{2\rho}} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} |\varphi_k|^2. \end{aligned}$$

From this, if $\varphi \in D(A^a)$, then $A^b u(t) \in C((0, T]; H)$.

Then we estimate $A^a (D_t^\rho u(t))$. By using Lemma 2:

$$\begin{aligned} \|A^a (D_t^\rho S_n(t))\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n [-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] \lambda_k^a v_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} \left| \mu_k \varphi_k \cdot \frac{C}{1+\mu_k t^\rho} \right|^2 \leq \frac{C}{t^{2\rho}} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{2a} |\varphi_k|^2. \end{aligned}$$

Thus, if $\varphi \in D(A^a)$, we obtain $A^a (D_t^\rho u(t)) \in C((0, T]; H)$.

Finally, we estimate $D_t^\rho u(t)$:

$$\begin{aligned} \|D_t^\rho S_n(t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n [-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)] v_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 \leq \sum_{k=1}^n \left| \mu_k \varphi_k \cdot \frac{C}{1+\mu_k t^\rho} \right|^2 \leq \frac{C}{t^{2\rho}} \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2. \end{aligned}$$

If $\varphi \in H$, then $D_t^\rho u(t) \in C((0, T]; H)$. Existence of the solution of problem (4) is proved.

REFERENCES

1. G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, and I. N. Kochina, "On finiteness conditions in the mechanics of continuous media. Static problems of the theory of elasticity", Prikl. Mat. Meh. 24, 316-322 (1960).
2. G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, and I. N. Kochina, "On finiteness conditions in the mechanics of continuous media. Static problems of the theory of elasticity", Prikl. Mat. Meh. 24, 316-322 (1960).
3. G. I. Barenblatt and Yu. P. Zheltov, "Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks", Sov. Phys. Dokl. 132, 522-525 (1960).

4. P. Ya. Kochina et al., Development of Research on the Theory of Filtration in the USSR (1917-1967) (Nauka, Moscow,1969) [in Russian].
5. G. I. Barenblatt, V. M. Yentov, and V. M. Ryzhik, Movement of Liquids and Gases in Natural Reservoirs (Nedra, Moscow, 1984) [in Russian].
6. K. S. Basniev, I. N. Kochina, and V. M. Maksimov, Underground Hydromechanics (Nedra, Moscow,1993) [in Russian].
7. P. Ya. Polubarinova-Kochina, The Theory of Groundwater Movement (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
8. C. Lizama, "Abstract linear fractional evolution equations," in Handbook of Fractional Calculus with Applications, Ed. by J. A. T. Machado (De Gruyter, Berlin, 2019), Vol. 2, pp. 465-497.
9. Kolmogorov A., Fomin S., Introductory real analysis. Courier Corporation, (1975)
10. G. A. Sviridyuk and D. E. Shafranov, "The Cauchy problem for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina equation on a smooth manifold," Vestn. ChelGU 9, 171-177 (2003).
11. Kh. G. Umarov, "Explicit solution of the mixed problem in an anisotropic half-space for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina equation," Vladikavk. Mat. Zh. 15 (1), 51-64 (2013).
12. M. A. Sagadeeva and F. L. Hasan, "Bounded solutions of Barenblatt-Zhel'tov-Kochina model in Quasi-Sobolev spaces," Bull. South Ural Univ., Ser. Math. Model., Program. Comput. Software 8 (4), 138-144, (2015).
13. Yu. M. Berezanskii, Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Vol. 17 of Translations of Mathematical Monographs (Am. Math. Soc., Providence, RI, 1968).
14. R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziyev, and N. Kh. Khushvaktov, "Some problems for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equations," Bull. Inst. Math. 5, 97-104 (2022).
15. R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, N. Kh. Khushvaktov, "Forward and inverse problems for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equations," Lobachevskii J. Math. 44, 2563-2572 (2023).
16. R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, N. Kh. Khushvaktov, "Non-Local Problem in Time for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina Type Fractional Equations," Lobachevskii Journal of Mathematics, 44, 5164-5178 (2023).
17. Yu. E. Fayziyev, Sh. T. Pirmatov, Kh. T. Dekhkonov, "Forward and Inverse Problems for the Benney-Luke Type Fractional Equations," Russian Mathematics, 68, 70-78 (2024)
18. R. Ashurov, Yu. Fayziev, "On the uniqueness of solutions of two inverse problems for the subdiffusion equation," arXiv:2205.03405 [math.AP] , (2022) PROBLEMS FOR THE SUBDIFFUSION EQUATION
19. M. Ruzhansky, N. Tokmagambetov, and B. T. Torebek, "Inverse source problems for positive operators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations," J. Inverse Ill-Posed Probl. 27, 891-911 (2019).
20. R. Ashurov and Yu. Fayziev, "On the nonlocal problems in time for subdiffusion equations with the Riemann-Liouville derivatives," Bull. Karag. Univ., Math. Ser. 2, 106 (2022).
21. R. Ashurov and M. Shakarova, "Time-dependent source identification problem for fractional Schrodinger type equations," Lobachevskii J. Math. 43, 1053-1064 (2022).
22. R. Ashurov and Yu. Fayziev, "Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation," Lobachevskii J. Math. 42, 508-516 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030069>
23. R. Ashurov and Yu. Fayziev, "Inverse problem for determining the order of the fractional derivative in the wave equation," Math. Notes 110, 824-836 (2021).
24. Y. Zhang and X. Xu, "Inverse source problem for a fractional differential equations," Inverse Prob. 27 (3), 31-42 (2011).

25. R. Ashurov and O. Muhiddinova, "Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator," Lobachevskii J. Math. 42, 517-525 (2021).
26. R. Ashurov and Yu. Fayziev, "On construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients and the fractional derivatives," Bull. Inst. Math., №3, 3-21 (2017).
27. R. Ashurov and Yu. Fayziev, "On the nonlocal boundary value problems for time-fractional equations," Fract. Fraction. 41 (6), (2022).
28. A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam (2006).

РЕЗЮМЕ

Ushbu maqolada Caputo hosilasi bilan berilgan Barenblatt-Jeltov-Kochina tipidagi bir jinsli kars tartibli tenglama uchun Koshi masalasi o'rganiladi. Berilgan Koshi masalasining yechimi mavjudligi Furiye usuli yordamida ko'rsatiladi, topilgan yechimning uzluksizligi esa funksional qatorlar xossalariidan foydalangan holda isbotlanadi. Shuningdek, yechimning yagona ekanligi ham isbotlanadi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligini ko'rsatish jarayonida Mittag-Leffler funksiyasining xossalariidan keng foydalaniladi.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, Caputo hosilalari, Mittag-Leffler funksiyasi, Parseval tengligi.

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуется задача Коши для однородного дробного уравнения типа Баренблатта-Жельтова-Кочина с производной Капуто. Существование решения поставленной задачи Коши показано с использованием метода Фурье, а непрерывность найденного решения доказывается на основе свойств функциональных рядов. Кроме того, устанавливается единственность решения. В процессе доказательства существования и единственности решения задачи широко используются свойства функции Миттага-Лефлера.

Ключевые слова: Задача Коши, производные Капуто, функция Миттага-Лефлера, равенство Парсеваля.

UDC 512.554

MAXIMAL SOLVABLE EXTENSIONS OF m -DIMENSIONAL SOME n -LIE ALGEBRAS

GAYBULLAEV R. Q.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT

r_gaybullaev@mail.ru

URAZMATOV G. KH.

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES. TASHKENT,

UZBEKISTAN

gulmurod0405@gmail.com

RESUME

This paper is devoted to the construction of maximal solvable extensions of m -dimensional n -Lie algebras. The study provides a systematic approach to identifying and classifying such extensions within the framework of higher-order Lie structures. The results contribute to the deeper understanding of the algebraic properties of n -Lie algebras and their solvable extensions, and may serve as a basis for further applications in both mathematics and theoretical physics.

Key words: n -Lie algebras, solvable algebras, nilpotent algebras, derivations, nil-independent derivations.

Introduction

The investigation of finite-dimensional n -Lie algebras has introduced an innovative perspective in the study of Lie algebras. Exploring these algebras is significant due to their potential applications in diverse areas, including dynamical systems, geometry, and physics.

Nambu extended the Poisson bracket while studying the classical dynamics of three particles as a foundation for quantum statistics in the quark model, introducing the trilinear product $[-, -, -]$ defined by: $\frac{dx}{dy} = [H_1, H_2, x]$ for Hamiltonians H_1 and H_2 [5]. Subsequently, in 1994, Takhtajan built upon Nambu's geometric framework and introduced the fundamental identity, analogous to the Jacobi identity [6]. This development allowed him to establish a connection between generalized Nambu mechanics and the theory of n -Lie algebras proposed by Filippov [3].

An analogue of Engel's theorem exists for finite-dimensional n -Lie algebras, but the Levi decomposition does not generally apply. This highlights the significance of studying finite-dimensional n -Lie algebras, which necessitates additional constraints. One such constraint is the imposition of a hyponilpotency condition on the maximal ideal when analyzing solvable n -Lie algebras, such as in the description of solvable n -Lie algebras or the extension of a given n -Lie algebra.

In 2009, the notion of a hyponilpotent ideal in n -Lie algebras was introduced. Certain characterizations of solvable ternary Filippov algebras featuring a specific m -dimensional maximal filiform hyponilpotent ideal were presented in [1]. Specifically, [1] described solvable 3-Lie algebras with an m -dimensional filiform 3-Lie algebra N , where $m \geq 5$, as a maximal hyponilpotent ideal. It was further demonstrated that this m -dimensional filiform 3-Lie algebra N cannot serve as the nilradical of any solvable 3-Lie algebra. Additionally, [1] identified several classes of solvable 3-Lie algebras obtained as one-dimensional extensions of given nilpotent n -Lie algebras. Furthermore, the studies in [4] and [7] also explore the properties of n -Lie algebras.

In this work we focus on the description of maximal solvable m -dimensional n -Lie algebras with maximal rank.

Preliminaries

A vector space \mathcal{A} over a field \mathbb{F} is an n -Lie algebra (sometimes called by Filippov algebra) provided that \mathcal{A} is equipped with some n -ary multilinear operation $[-, -, \dots, -]$ satisfying the two identities

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = (-1)^{sign(\sigma)} [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \sigma \in S_n,$$

$$[[x_1, x_2, \dots, x_n], y_2 \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, y_2, \dots, y_n], x_{i+1}, \dots, x_n].$$

We introduce the notation

$$Lie_n((x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, y_2, \dots, y_n], x_{i+1}, \dots, x_n] - [[x_1, x_2, \dots, x_n], y_2 \dots, y_n]$$

to use it later and $Lie_n((x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 \dots, y_n) = 0$ is called as n -Lie identity.

Definition 1. Let \mathcal{N} be an n -Lie algebra. A subspace \mathcal{B} of \mathcal{N} is an n -Lie subalgebra if

$$[\mathcal{B}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{B}.$$

A subspace \mathcal{I} of \mathcal{N} is an ideal if $[\mathcal{I}, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{I}$.

Given an arbitrary ideal \mathcal{I} of \mathcal{N} , we define the lower central series and the derived series as follows:

$$\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}, \mathcal{I}^{k+1} = [\mathcal{I}^k, \mathcal{I}, \mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}], k \geq 1,$$

$$\mathcal{I}^{(1)} = \mathcal{I}, \mathcal{I}^{(s+1)} = [\mathcal{I}^{(s)}, \mathcal{I}^{(s)}, \mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}], s \geq 1.$$

Definition 2. An ideal \mathcal{I} is called solvable if there exists a natural r such that $\mathcal{I}^{(r)} = 0$. An n -Lie algebra \mathcal{N} is solvable if $\mathcal{N}^{(r)} = 0$ for some $r \in \mathbb{N}$.

An ideal \mathcal{I} is called *nilpotent* if there exists a natural r such that $\mathcal{I}^r = 0$. An n -Lie algebra \mathcal{N} is said to be *solvable* if $\mathcal{N}^r = 0$ for some $r \in \mathbb{N}$.

Definition 3. A linear mapping $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is said to be a *derivation* of an n -Lie algebra \mathcal{A} provided that

$$D([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [x_1, x_2, \dots, D(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n]$$

for all $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{A}$. The vector space of all derivations is denoted by $Der(\mathcal{A})$.

One can check that $Der(\mathcal{A})$ is a subalgebra of the Lie algebra $gl(\mathcal{A})$ which is called the derivation algebra of \mathcal{A} .

Definition 4. A linear mapping $ad(x_2, x_3, \dots, x_n) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, defined as

$$ad(x_2, x_3, \dots, x_n)(y) = [y, x_2, x_3, \dots, x_n] \text{ for all } y \in \mathcal{A},$$

is the right multiplication operator. It is easy to verify $ad(x_2, x_3, \dots, x_n)$ is a derivation of \mathcal{A} .

The set of all finite linear combinations of the operators ad forms an ideal of the Lie algebra $Der(\mathcal{A})$ which is denoted by $Inder(\mathcal{A})$. Since derivations play crucial role in the variety of algebras, it is important to find out for which types of algebras $Der(\mathcal{A}) = Inder(\mathcal{A})$.

Due to result of [2] (see Lemma 3.3) for a derivation d of n -Lie algebra \mathcal{A} we have

$$d^k([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \frac{k!}{i_1!i_2!\dots i_n!} [d^{i_1}(x_1), d^{i_2}(x_2), \dots, d^{i_n}(x_n)]. \tag{5}$$

Let d be a nilpotent derivation. Then there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $d^{k+1} = 0$.

Then for the map

$$exp(d) = 1 + d + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \dots + \frac{d^k}{k!}$$

applying (6) similar to the Lie algebras case one can prove:

$$[exp(d)(x_1), exp(d)(x_2), \dots, exp(d)(x_n)] = exp(d)([x_1, \dots, x_n]).$$

Consequently, $exp(d)$ is an automorphism of n -Lie algebra \mathcal{A} . Such kind of automorphisms and their products are called inner automorphisms.

Let \mathcal{N} be an n -Lie algebra.

Definition 5. A torus on an n -Lie algebra \mathcal{N} (denoted by $\mathcal{T}(\mathcal{N})$) is a commutative subalgebra of $Der(\mathcal{N})$ which consists of semisimple endomorphisms. A torus is said to be maximal, denoted by $\mathcal{T}_{max}(\mathcal{N})$, if it is not contained strictly in any other torus.

Let \mathcal{N} be an m -dimensional n -Lie algebra, such that $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}] = \sum_{s=1}^m \gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^s x_s$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq m$, $\gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k \in \mathbb{C}$. Let $D(x_i) = \alpha_i x_i$, $1 \leq i \leq m$.

$$D([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]) = \sum_{k=1}^n [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, D(x_{i_k}), \dots, x_{i_n}] = (\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$$

Thus, $D \in Der(\mathcal{N})$.

Let

$$D([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]) = \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}]$$

then

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n} = \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \text{ if } \gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^s \neq 0.$$

For (i_1, \dots, i_n, k) which $\gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k \neq 0$, we consider the system of the linear equations

$$S_e : \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j} = \alpha_k, \end{cases}$$

in the variables α_{i_j} , $1 \leq j \leq n$, as i_j, k run from 1 to m .

We denote by $r\{e_1, \dots, e_m\}$ the rank of the system S_e . Setting $r\{\mathcal{N}\} = \min r\{x_1, \dots, x_m\}$ as $\{x_1, \dots, x_m\}$ runs over all bases of \mathcal{N} , similar to Lie algebras case, for a nilpotent n -Lie algebra \mathcal{N} over an algebraically closed field one can establish the equality $dim \mathcal{T}_{max} = dim \mathcal{N} - r\{\mathcal{N}\}$.

Note that a diagonal transformation $d = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ is a derivation of \mathcal{N} if and only if α_i are solutions of the system S_e .

Denote the free parameters in the solutions to the system S_e by $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Then we get

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{i,j} \alpha_j, \quad s + 1 \leq i \leq m.$$

Consider a basis $\{(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{m,i}) | 1 \leq i \leq s\}$ of fundamental solutions of the system S_e . Then the diagonal matrices $\{diag(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{m,i}) | 1 \leq i \leq s\}$ forms the basis of a maximal torus of \mathcal{N} .

Definition 6. A nilpotent n -Lie algebra \mathcal{N} satisfying the condition $dim \mathcal{T}_{max} = dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$ is called of maximal rank.

Let \mathcal{N} be an n -Lie algebra, and let \mathcal{I} be an ideal of \mathcal{N} . Note that the notions of nilpotency of \mathcal{I} as a subalgebra and nilpotency of \mathcal{I} as an ideal differ in general.

Definition 7. Let \mathcal{N} be an n -Lie algebra, and let \mathcal{I} be an ideal of \mathcal{N} . If \mathcal{I} is a nilpotent subalgebra that is not nilpotent as an ideal, then \mathcal{I} is a hyponilpotent ideal of \mathcal{N} . If \mathcal{I} is not a proper subset of another hyponilpotent ideal then \mathcal{I} is a maximal hyponilpotent ideal of \mathcal{N} .

Main part

Let \mathcal{N} be an m -dimensional nilpotent n -Lie algebra satisfying the condition $n + 1 = \dim \mathcal{T}_{\max} = \dim(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$. The algebra \mathcal{N} is defined by the following multiplications:

$$\mathcal{N} : \begin{cases} [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_{i+1}, & n + 1 \leq i \leq m - 2, \\ [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n] = e_m, \end{cases}$$

with $\mathcal{N} = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ and $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$.

Theorem. Let $\mathcal{R} = \mathcal{N} \rtimes \mathcal{T}_{\max}$ be a maximal solvable n -Lie algebra with given hyponilpotent ideal \mathcal{N} and let \mathcal{T}_{\max} be a maximal torus of \mathcal{N} . Then \mathcal{R} is unique (up to isomorphism), and it is isomorphic to an algebra with the following multiplications table:

$$\begin{cases} [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_{i+1}, & n + 1 \leq i \leq m - 2, \\ [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n] = e_m, \\ [x, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_i, & i \in \{1, m\}, \\ [x, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = (i - n - 1)e_i, & n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [y, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_i, & i \in \{n, m\}, \\ [z, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_i, & n + 1 \leq i \leq m - 1, \end{cases}$$

where $\{e_1, e_2, \dots, e_m, x, y, z\}$ is a basis of \mathcal{R} .

Proof. Let consider the system S_e for \mathcal{N} .

$$S_e : \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_i = \alpha_{i+1}, & n + 1 \leq i \leq m - 2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_m, \end{cases}$$

From this system, we derive that the maximal torus \mathcal{T}_{\max} has the following matrix form: $\mathcal{T}_{\max} = \text{Span}\{d_1, d_2, \dots, d_{n+1}\}$, where

$$\begin{cases} d_1 = \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 2, 3, \dots, m - n - 2, 1), \\ d_2 = \text{diag}(0, 1, 0, \dots, 0, 0, 1, 2, 3, \dots, m - n - 2, 1), \\ \dots \\ d_s = \text{diag}(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{s\text{-term}} \dots 0, 0, 1, 2, 3, \dots, m - n - 2, 1), & 1 \leq s \leq n - 1, \\ d_n = \text{diag}(0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-term}}, 0, 0, \dots, 0, 1), \\ d_{n+1} = \text{diag}(0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n+1\text{-term}}, 1, 1, \dots, 1, 0), \end{cases}$$

Let suppose $\dim(\mathcal{R}) = m + 3$. We need to select three nil-independent derivations. Below, we consider all possible choices:

Case 1. Let us choose the following derivations:

$$d_1 := ad(x, e_2, \dots, e_{n-1}), \quad d_n := ad(y, e_2, \dots, e_{n-1}), \quad d_{n+1} := ad(z, e_2, \dots, e_{n-1}).$$

Then, we obtain the following solvable algebra, denoted by $\mathcal{R}_{n,n+1}^1$:

$$\mathcal{R}_{n,n+1}^1 : \begin{cases} [x, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1] = e_1, \\ [x, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = (i - n - 1)e_i, & n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [x, e_2, \dots, e_{n-1}, e_m] = e_m, \\ [y, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n] = e_n, \\ [y, e_2, \dots, e_{n-1}, e_m] = e_m, \\ [z, e_2, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_i, & n + 1 \leq i \leq m - 1, \\ [\mathcal{N}, \mathcal{N}]. \end{cases}$$

This is an algebra provided in the theorem.

Case 2. Let us choose the following derivations for $2 \leq s \leq n - 1$:

$$d_s := \text{ad}(x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}), \quad d_n := \text{ad}(y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}), \quad d_{n+1} := \text{ad}(z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}),$$

where \widehat{e}_s denotes the omitted element. Then, we obtain the following solvable algebra, denoted by $\mathcal{R}_{n,n+1}^s$:

$$\mathcal{R}_{n,n+1}^s : \begin{cases} [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_s] = e_s, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = (i - n - 1)e_i, \quad n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_m] = e_m, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_n] = e_n, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_m] = e_m, \\ [z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = e_i, \quad n + 1 \leq i \leq m - 1, \\ [\mathcal{N}, \mathcal{N}]. \end{cases}$$

By applying the basis transformation:

$$e'_1 = (-1)^s e_s, \quad e'_s = e_1, \quad e'_i = e_i \text{ for } 2 \leq i \neq s \leq m,$$

we obtain the algebra described in the theorem.

In both of the above cases, we selected the derivations d_n and d_{n+1} together. The cases below address what happens when only one of them is chosen.

Case 3. Let us choose the following derivations for $1 \leq s < t \leq n - 1$:

$$d_s := \text{ad}(x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n), \quad d_t := \text{ad}(y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n), \\ d_{n+1} := \text{ad}(z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n),$$

where \widehat{e}_s and \widehat{e}_t denote the omitted basis elements. Then, we obtain the following solvable algebra, denoted by $\mathcal{R}_{t,n+1}^s$:

$$\mathcal{R}_{t,n+1}^s : \begin{cases} [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_s] = e_s, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_i] = (i - n - 1)e_i, \quad n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_m] = e_m, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_t] = e_t, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_i] = (i - n - 1)e_i, \quad n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_m] = e_m, \\ [z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_i] = e_i, \quad n + 1 \leq i \leq m - 1, \\ [\mathcal{N}, \mathcal{N}]. \end{cases}$$

However,

$$\begin{aligned} & [[x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_s], e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = \\ & = [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, [e_s, e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i]] = \\ & = [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, (-1)^s e_{i+1}] = (-1)^s (i - n) e_{i+1}, \end{aligned}$$

On the other hand

$$[[x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_n, e_s], e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = (-1)^s e_{i+1}.$$

This implies that $e_{i+1} = 0$ for $n + 2 \leq i \leq m - 1$, which is a contradiction. Therefore, $\mathcal{R}_{t,n+1}^s$ is not an n -Lie algebra.

Case 4. Let us choose the following derivations for $1 \leq s < t \leq n - 1$:

$$d_s := \text{ad}(x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}), \quad d_t := \text{ad}(y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}),$$

$$d_n := ad(z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}),$$

where \widehat{e}_s and \widehat{e}_t denote the omitted basis elements. Then, we obtain the following solvable algebra, denoted by $\mathcal{R}_{t,n}^s$:

$$\mathcal{R}_{t,n}^s : \begin{cases} [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_s] = e_s, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_i] = (i - n - 1)e_i, \quad n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_m] = e_m, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_t] = e_t, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_i] = (i - n - 1)e_i, \quad n + 2 \leq i \leq m - 1, \\ [y, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_m] = e_m, \\ [z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_n] = e_n, \\ [z, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_m] = e_m, \\ [\mathcal{N}, \mathcal{N}]. \end{cases}$$

However,

$$\begin{aligned} & [[x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_s], e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = \\ & = [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, [e_s, e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i]] = \\ & = [x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, (-1)^s e_{i+1}] = (-1)^s (i - n) e_{i+1}, \end{aligned}$$

On the other hand

$$[[x, e_1, \dots, \widehat{e}_s, \dots, \widehat{e}_t, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_s], e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_s, \dots, e_{n-1}, e_i] = (-1)^s e_{i+1}.$$

This implies that $e_{i+1} = 0$ for $n + 2 \leq i \leq m - 1$, which is a contradiction. Therefore, $\mathcal{R}_{t,n}^s$ is not an n -Lie algebra.

Suppose that $\dim(\mathcal{R}) > m + 3$. Assume $\dim(\mathcal{R}) = m + 4$. In Case 1, we define:

$$d_1 := ad(x, e_2, \dots, e_{n-1}), \quad d_n := ad(y, e_2, \dots, e_{n-1}), \quad d_{n+1} := ad(z, e_2, \dots, e_{n-1}),$$

and obtain an n -Lie algebra. In this case, we introduce a fourth element as follows:

$$d_i := ad(t, e_1, e_2, \dots, \widehat{e}_i, \dots, \widehat{e}_j, \dots, \widehat{e}_k, \dots, e_{n+1}), \quad 2 \leq i \leq n - 1.$$

Next, consider the following change of basis:

$$e'_i = e_1, \quad e'_1 = e_i, \quad e'_j = e_n, \quad e'_n = e_j, \quad e'_k = e_{n+1}, \quad e'_{n+1} = e_k.$$

This change of basis leads to $x = t$, which contradicts the assumption that $\dim(\mathcal{R}) = m + 4$. Therefore, the maximal solvable n -Lie algebra with a hyponilpotent ideal \mathcal{N} is unique up to isomorphism.

REFERENCES

1. Bai R., Shen C., and Zhang Y., 3-Lie algebras with an ideal \mathcal{N} , Linear Algebra Appl., 2009, vol. 431, No. 5-7, pp. 673-700.
2. Camacho L.M., Casas J.M., Gomez J.R., Ladra M., Omirov B.A. On Nilpotent Leibniz n -algebras, J. Algebra Appl. 2012. vol. 11 No. 3 , 1250062 (17 pages)
3. V.T.Fillipov, n -Lie algebras, Sibirsk. Mat. Zh., 1985, Vol. 26, No 6, pp 126-140.
4. Kasymov, S.M., On a theory of n -Lie algebras. Algebra and Logic, 1987, Vol. 26, No 3, pp 155-166.
5. Nambu Y., Generalized Hamiltonian dynamics, Phys. Rev., 1973. vol. 7, No. 8, pp 2405-2412.
6. Takhtajan L., On foundation of the generalized Nambu mechanics, Commun. Math. Phys., 1994. vol. 160, No. 2, pp 295-315.

7. Liu, J., Chen, Z., Wang, Y., Structure and classification of nilpotent 3-Lie algebras. Communications in Algebra, 2015. Vol. 43, No 3, pp 1053-1068.

АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена построению максимальных разрешимых расширений m -мерных n -Лиевых алгебр. Исследование предлагает систематический подход к выявлению и классификации таких расширений в рамках n -арных структур Ли. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию алгебраических свойств n -Лиевых алгебр и их разрешимых расширений, а также могут служить основой для дальнейших приложений как в математике, так и в теоретической физике.

Ключевые слова: n -алгебры Ли, разрешимые алгебры, нильпотентные алгебры, дифференцирование, ниль-независимые дифференцирование.

ANNOTATSIIYA

Ushbu maqola m -o'lchamli n -Li algebraarning maksimal yechiluvchi kengaytmalarini qurishga bag'ishlangan. Tadqiqot bunday kengaytmalarni aniqlash va tasniflashning tizimli yondashuvini taklif etadi hamda yuqori tartibli Li tuzilmalarining doirasida olib boriladi. Olingan natijalar n -Li algebraarning hamda ularning yechiluvchi kengaytmalarining algebraik xossalarini chuqurroq anglashga xizmat qiladi va matematika hamda nazariy fizikaning keyingi qo'llanmalariga asos bo'lishi mumkin.

Kalit so'zlar: n -Li algebra, yechiluvchi algebra, nilpotent algebra, differentsiallashlar, nil-erkli differentsiallashlar.

UDC 519.651, 519.652

EXPONENTIALLY WEIGHTED OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH COMPLEX EXPONENTIAL WEIGHTS IN THE PERIODIC SOBOLEV SPACE $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1]$

KOBILOV H. M.

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY, TASHKENT INTERNATSIONAL UNIVERSITY, TASHKENT
khoji1997@mail.ru

RESUME

This paper is devoted to the construction of optimal quadrature formulas for the approximate evaluation of integrals of periodic functions in the Sobolev space $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1]$. The quadrature formulas involve a complex exponential weight function $e^{2\pi i\omega x}$. The coefficients of the formulas are obtained by minimizing the norm of the corresponding error functional in the conjugate space. Using Fourier analysis and extremal function methods, explicit expressions for the optimal coefficients are derived. These results extend the classical theory of quadrature formulas to exponentially weighted and oscillatory cases, yielding efficient schemes for the numerical integration of periodic functions.

Key words: Optimal quadrature formula, exponential weight, complex exponential function, periodic Sobolev space, Fourier transform.

Introduction Optimal quadrature formulas are fundamental tools in approximation theory and numerical integration. Classical quadrature formulas such as Gaussian or Newton-Cotes rules are effective for polynomial approximation in unweighted spaces. However, in many applications involving oscillatory phenomena or exponential modulation, weighted quadrature formulas provide better accuracy. $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1] = \{\varphi : (0,1] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi\text{-absolutely continuous and } \varphi'' \in \widetilde{L}_2\}$ and for $\forall \varphi \in \widetilde{W}_2^{(2,1,0)}$ The function satisfies the 1-periodicity condition: $\varphi(x + \beta) = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{Z}$.

The inner product in this space is defined as follows: .

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1)} = \int_0^1 \varphi''(x)\psi''(x)dx + 2 \int_0^1 \varphi'(x)\psi'(x)dx + \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx. \tag{1}$$

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk), \tag{2}$$

with the error

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk), \tag{3}$$

and the corresponding error functional is:

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta). \tag{4}$$

Here C_k are the coecients of formula (2), $h = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}, \omega \in \mathbb{Z}$.

Statement of the problem Our goal is to estimate the error of the considered quadrature formula (3) from above, for which it is sufficient to calculate the norm of the error functional (4) . This leads to the solution of the following two problems, and we will first consider this for $m = 2$. Now, we consider the following problem.

Problem 1: (4) Find the analytical representation of the error functional norm in $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}$ space.

Problem 2: Finding the optimal coefficients of $C_k = C_k^0$ that minimize

To solve problem 1, we use the concept of an extremal function introduced by Sobolev. Using Riesz’s theorem for the space $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0, 1)$, we can write the following

$$\begin{aligned}
 (\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1)} &= \int_0^1 \varphi''(x)\psi''(x)dx + 2 \int_0^1 \varphi'(x)\psi'(x)dx + \int_0^1 \varphi(x)\psi(x) = \\
 &= \int_0^1 (\psi^{(4)}(x) - 2\psi^{(2)}(x) + \psi(x))\varphi(x)dx
 \end{aligned}$$

From the above equation we get the following equation

$$\bar{\psi}_\ell^{(4)}(x) - 2\bar{\psi}_\ell^{(2)}(x) + \bar{\psi}_\ell(x) = \ell(x) \tag{5}$$

Theorem 1. In the Sobolev space of $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0, 1)$ periodic functions, the extremal function of the quadratic formula (2) has the following form:

$$\psi_\ell(x) = \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{(2\pi \omega)^4 + 2(2\pi \omega)^2 + 1} - \sum_{k=1}^N \bar{C}_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta(x-hk)}}{(2\pi \beta)^4 + 2(2\pi \beta)^2 + 1} \tag{6}$$

Proof: To find the generalized periodic solution of the differential equation (5), we apply the Fourier transform to both sides of the equation and use the following properties of the Fourier transform:

$$\begin{aligned}
 F[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{2\pi i p x} dx. \\
 F^{-1}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p)e^{-2\pi i p x} dp. \\
 F[\varphi^{(\alpha)}] &= (-2\pi i p)^\alpha F[\varphi], \quad (\alpha \in \mathbb{N}). \\
 F[\phi_0(x)] &= \phi_0(p). \\
 F^{-1}[F[\varphi(x)]] &= \varphi(x).
 \end{aligned}$$

Here * is the convolution operation.

We apply Fourier Transform to both sides of equation (5).

$$F[\bar{\psi}_\ell^{(4)}(x) - 2\bar{\psi}_\ell^{(2)}(x) + \bar{\psi}_\ell(x)] = F[\ell(x)].$$

Since, the Fourier Transform is linear operator, we have

$$((2\pi p)^2 + 1)^2 F[\bar{\psi}_\ell] = F\left[e^{2\pi i \omega x} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta) \right],$$

where

$$F[\delta(x - hk - \beta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta) e^{2\pi i p x} dx = e^{2\pi i p(hk + \beta)}.$$

$$F[e^{2\pi i \omega x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega x} e^{2\pi i p x} dx = \delta(p + \omega).$$

$$F[\bar{\psi}_\ell] = \frac{\delta(p + \omega)}{((2\pi\omega)^2 + 1)^2} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta h k} \delta(p - \beta)}{(2\pi\beta)^4 + 2(2\pi\beta)^2 + 1}.$$

Then, we apply the Inverse Fourier Transform to the above equality and we obtain the following

$$\bar{\psi}_\ell(x) = \frac{e^{2\pi i \omega x}}{(2\pi\omega)^4 + 2(2\pi\omega)^2 + 1} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta(x - hk)}}{(2\pi\beta)^4 + 2(2\pi\beta)^2 + 1}.$$

$$\psi_\ell(x) = \frac{e^{-2\pi i \omega x}}{(2\pi\omega)^4 + 2(2\pi\omega)^2 + 1} - \sum_{k=1}^N \bar{C}_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta(x - hk)}}{(2\pi\beta)^4 + 2(2\pi\beta)^2 + 1}.$$

And so, theorem 1 is proved from the last equality.

We calculate the analytical form of the error functional norm

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1)^*}^2 &= \int_0^1 \ell(x) \psi_\ell(x) dx = \int_0^1 \left(e^{2\pi i \omega x} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta) \right) \times \\ &\times \left(\frac{e^{-2\pi i \omega x}}{(2\pi\omega)^4 + 2(2\pi\omega)^2 + 1} - \sum_{k=1}^N \bar{C}_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta(x - hk)}}{(2\pi\beta)^4 + 2(2\pi\beta)^2 + 1} \right) dx. \end{aligned}$$

From the above equality, we obtain the following:

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1)^*}^2 &= \frac{1}{((2\pi\omega)^2 + 1)^2} - \sum_{k'=1}^N \bar{C}_{k'} \frac{e^{2\pi i \omega h k'}}{((2\pi\omega)^2 + 1)^2} - \sum_{k=1}^N C_k \frac{e^{-2\pi i \omega h k}}{((2\pi\omega)^2 + 1)^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N \bar{C}_{k'} C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta h(k - k')}}{((2\pi\beta)^2 + 1)^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

So problem 1 is solved. **Finding the coefficient of the quadrature formula (4) Theorem 2.** The coefficients of the quadrature formula in the form (2) that minimizes the norm of the error functional are as follows:

$$C_k^0 = C(\omega, h) \cdot e^{2\pi i \omega h k} = \frac{8 \cdot e^{2\pi i \omega h k}}{((2\pi\omega)^2 + 1)^2} \cdot \left[\frac{2h\lambda e^h + \lambda^2 e^{2h} - 1}{(\lambda e^h - 1)^2} - \frac{\lambda^2 - e^{2h} - 2h\lambda e^h}{(\lambda - e^h)^2} \right]^{-1}. \tag{9}$$

Here $\lambda = e^{2\pi i \omega h}$.

Proof: Taking the first derivative of the coefficient from equality (8) and equating it to zero, we obtain the following equality

$$-\frac{e^{2\pi i \omega h k'}}{(2\pi\omega)^4 + 2(2\pi\omega)^2 + 1} + \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta h(k - k')}}{(2\pi\beta)^4 + 2(2\pi\beta)^2 + 1} = 0. \tag{10}$$

Assume the optimal coefficients are as follows: $C_k^0 = C(\omega, h) \cdot e^{2\pi i \omega h k}$

$$-\frac{e^{2\pi i \omega h k'}}{(2\pi \omega)^4 + 2(2\pi \omega)^2 + 1} + C(\omega, h) \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \omega h k} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta h(k-k')}}{(2\pi \beta)^4 + 2(2\pi \beta)^2 + 1} = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A &= C(\omega, h) \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \omega h k} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \beta h(k-k')}}{(2\pi \beta)^4 + 2(2\pi \beta)^2 + 1} = C(\omega, h) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta h k'}}{\left((2\pi \beta)^2 + 1\right)^2} \cdot \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \omega h k} e^{2\pi i \beta h k} = \\ &= C(\omega, h) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta h k'}}{\left((2\pi \beta)^2 + 1\right)^2} \cdot \sum_{k=1}^N e^{2\pi i h k(\beta + \omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= C(\omega, h) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \beta h k'}}{\left((2\pi \beta)^2 + 1\right)^2} \cdot \sum_{k=1}^N e^{2\pi i h k(\beta + \omega)} = C(\omega, h) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(tN - \omega) h k'}}{\left((2\pi(tN - \omega))^2 + 1\right)^2} \cdot N = \\ &= \frac{1}{16\pi^4 h} C(\omega, h) e^{2\pi i \omega h k'} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left((tN - \omega)^2 - \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\right)^2} \end{aligned}$$

By substituting A from the previous equation into equation (11), we derive the following:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi^4 h} C(\omega, h) e^{2\pi i \omega h k'} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left((tN - \omega)^2 - \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\right)^2} - \frac{e^{2\pi i \omega h k'}}{(2\pi \omega)^4 + 2(2\pi \omega)^2 + 1} &= 0 \\ C(\omega, h) &= \frac{16\pi^4 h}{\left((2\pi \omega)^2 + 1\right)^2} \left(\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{h^4}{\left((t - \omega h)^2 - \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^2\right)^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

In order to compute $C(\omega, h)$, it suffices to evaluate the infinite series

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{h^4}{\left((t - \omega h)^2 - \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^2\right)^2}$$

This infinite series is computed by means of the residue theorem [5].

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{h^4}{\left((t - \omega h)^2 - \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^2\right)^2} = 2\pi h^4 \left[\frac{2h\lambda e^h + \lambda^2 e^{2h} - 1}{(\lambda e^h - 1)^2} - \frac{\lambda^2 - e^{2h} - 2h\lambda e^h}{(\lambda - e^h)^2} \right] \tag{12}$$

$$\begin{aligned} C(\omega, h) &= \frac{16\pi^4 h}{\left((2\pi \omega)^2 + 1\right)^2} \left(\sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{h^4}{\left((t - \omega h)^2 - \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^2\right)^2} \right)^{-1} = \frac{16\pi^4 h}{\left((2\pi \omega)^2 + 1\right)^2} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi^4 h} \left[\frac{2h\lambda e^h + \lambda^2 e^{2h} - 1}{(\lambda e^h - 1)^2} - \frac{\lambda^2 - e^{2h} - 2h\lambda e^h}{(\lambda - e^h)^2} \right]^{-1} = \\ &= \frac{8 \cdot e^{2\pi i \omega h k'}}{\left((2\pi \omega)^2 + 1\right)^2} \cdot \left[\frac{2h\lambda e^h + \lambda^2 e^{2h} - 1}{(\lambda e^h - 1)^2} - \frac{\lambda^2 - e^{2h} - 2h\lambda e^h}{(\lambda - e^h)^2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

The theorem has been proven.

REFERENCES

1. J.Ahlberg, E.Nilson, J.Walsh, The theory of splines and its application, Academic press Inc., New York.
2. S.L.Sobolev, The coefficients of optimal quadrature formulas, in: Selected Works of S.L.Sobolev. Springer, pp. 561-566 (2006).
3. S.L.Sobolev, “Введение в теорию кубатурных формул”, Москва, издательство “Наука”.
4. Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov, Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in space. Numerical mathematics 53(2). 2012
5. Shadimetov Kh.M., Azamov S.S. ,Kobilov H.M. Optimization of approximate integration formulas for periodic function classes Problems of computational and applied mathematics no. 3(67) 2025
6. Azamov S.S., Qobilov H.M. Optimal quadrature formulas in the space of periodic functions journal of International scientific journal of computing technologies and mathematical modeling
7. Hayotov A.R., Khayriev U.N, Makhkamova D. 2021. Optimal quadrature formula for approximate calculation of integrals with exponential weight and its application. Bulletin of the Institute of Mathematics, №2. Vol. 4. P. 99-108.
8. Shadimetov M.Kh. 2019. Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces. Monograph, Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan, Tashkent P. 97-104. ISBN 978-9943-5958-2-8.
9. Shadimetov M.Kh. 1998. Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space. Uzbek Math. Zh., №2. P. 76-86.
10. Sard A. 1949. Best approximate integration formulas; best approximation formulas, Amer. J. Math., №71. P. 80-91.

REZYUME

Ushbu maqola Sobolev fazosida $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1]$ davriy funksiyalar integrallarini yaqin hisoblash uchun optimal kvadratur formulalarini qurishga bag‘ishlangan. Kvadratur formulalar murakkab eksponensial og‘irlik funksiyasini $e^{2\pi i\omega x}$ o‘z ichiga oladi. Formulalarning koeffitsiyentlari mos keluvchi xatolik funksionalining konjugat fazodagi normasini minimallashtirish orqali aniqlanadi. Furiye tahlili va ekstremal funksiya usullaridan foydalanib, optimal koeffitsiyentlarning aniq ifodalari keltirib chiqariladi. Ushbu natijalar kvadratur formulalarining klassik nazariyasini eksponensial og‘irlikli va osillatsion hollarga kengaytiradi hamda davriy funksiyalarni sonli integrallash uchun samarali sxemalarni beradi.

Kalit so‘zlar: Optimal kvadratur formulasi, eksponensial og‘irlik, murakkab eksponensial funksiya, davriy Sobolev fazosi, Furiye o‘zgartirish.

РЕЗЮМЕ

Данная статья посвящена построению оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления интегралов периодических функций в пространстве Соболева $\widetilde{W}_2^{(2,1,0)}(0,1]$ Квадратурные формулы включают комплексную экспоненциальную весовую функцию $e^{2\pi i\omega x}$ Коэффициенты формул определяются путём минимизации нормы соответствующего функционала ошибки в сопряжённом пространстве. С использованием методов Фурье-анализа и экстремальной функции выводятся точные выражения для оптимальных коэффициентов. Полученные результаты расширяют классическую теорию квадратурных формул на случай экспоненциальных весов и осциллирующих функций, а также обеспечивают эффективные схемы для численного интегрирования периодических функций.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула; экспоненциальный вес; комплексная экспоненциальная функция; периодическое пространство Соболева; преобразование Фурье.

UDC 517.55

ON THE ESTIMATION OF THE REMAINDER TERM IN THE CLT FOR THE NUMBER OF OCCUPIED CELLS IN A MULTINOMIAL RANDOM ALLOCATION SCHEME

MIRAKHMEDOV SH. A.

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, ACADEMY OF SCIENCES OF UZBEKISTAN, TASHKENT
shmirakhmedov@yahoo.com

LAZAREVA V. A.

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, ACADEMY OF SCIENCES OF UZBEKISTAN, TASHKENT
1748mailbox@mail.ru

RESUME

In this paper the best estimate for the remainder term in the central limit theorem for the number of occupied cells in the multinomial random allocation scheme is established.

Key words: Random allocation, Poisson distribution, central limit theorem.

1. Introduction

We consider a model with n balls and N cells (urns) numbered $1, 2, \dots, N$, where $N = N(n) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Balls are allocated at random independently of each other. The probability of a ball falling into the m th cell is $p_m > 0$, where $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$. Let η_m be the number of balls in the m th cell after allocation of all balls, where $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$.

In specific applications, instead of cells, one has types or species of sampling units, and the sample array η is of interest because it reveals population frequencies p_j . Such species sampling problems arise in ecology, also in database query optimization, where the sampling units maybe entries in columns of a database while the species consist of all of distinct values appearing in the column; in literature, where the sampling units may be words appearing in a given author's known works while the species consist of all words known to that author; in disclosure risk limitation, where the sampling units may be people or firms listed in a microdata file, without names or other overtly identifying information, while the types are unique combinations of values of variables with which the people or firms might be implicitly identified; and in many other areas.

The subject of our interest here is the following important in practice count statistic: the number of occupied i.e.,

$$K_N = \sum_{m=1}^N \mathbf{I}\{\eta_m > 0\},$$

where $\mathbf{I}(A) = 1$ if event A occurred, otherwise zero.

The occupancy counts statistic K_N has been given many names, such as the "profile" (in information theory) or the "fingerprint" (in theoretical computer science) of the probability distribution $\{p_m\}$. Our goal in this paper is to establish the best estimate of the remainder term when approximating the distribution function of K_N with a normal distribution.

2. Results and Proof.

We adopt the following notation: ξ_1, ξ_2, \dots is a sequence of independent random variables, where ξ_m is a Poisson random variable with parameter $\lambda_m := np_m$, $\Phi(x)$ is standard normal distribution function,

$$\Lambda_N = \sum_{m=1}^N (1 - e^{-\lambda_m}), \quad \gamma_N = n^{-1} \sum_{m=1}^N \lambda_m e^{-\lambda_m},$$

$$\sigma_N^2 = \sum_{m=1}^N e^{-\lambda_m} (1 - e^{-\lambda_m}) - n\gamma_N^2,$$

$$g_m(\xi_m) = \mathbf{I}\{\xi_m > 0\} - (1 - e^{-\lambda_m}) - \gamma_N(\xi_m - \lambda_m)$$

We assume that

$$N \max_m p_m \leq C_0 \tag{6}$$

where, hereafter, C_k denotes a positive universal constant, which may vary across instances.

Theorem. There exists a constant $C > 0$ such that

$$\Delta_N := \sup_{-\infty < x < \infty} |P\{K_N < x\sigma_N + \Lambda_N\} - \Phi(x)| \leq \frac{C}{\sigma_N}.$$

Proof. Write

$$\sigma_N^2 = \sum_{m=1}^N e^{-\lambda_m} (1 - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m}) + \sum_{m=1}^N \lambda_m (\gamma_N - e^{-\lambda_m})^2,$$

$$\begin{aligned} g_m(\xi_m) &= -(\mathbf{I}\{\xi_m = 0\} + \xi_m e^{-\lambda_m}) + (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m} - (\gamma_N - e^{-\lambda_m})(\xi_m - \lambda_m). \\ &= -[(\mathbf{I}\{\xi_m = 0\} + \xi_m e^{-\lambda_m} - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m}) + (\gamma_N - e^{-\lambda_m})(\xi_m - \lambda_m)]. \end{aligned}$$

We have for arbitrary $\nu \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N E|g_m(\xi_m)|^\nu &\leq 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N E|\mathbf{I}\{\xi_m = 0\} + \xi_m e^{-\lambda_m} - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m}|^\nu \\ &\quad + 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N |\gamma_N - e^{-\lambda_m}|^\nu E|\xi_m - \lambda_m|^\nu =: J_1 + J_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Next,

$$\begin{aligned} J_1 &= 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N ((1 - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m})^\nu) e^{-\lambda_m} + 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N \lambda_m^\nu e^{-\nu\lambda_m} \\ &\quad + 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N \sum_{j=2}^\infty |j - 1 - \lambda_m|^\nu e^{-(\nu+1)\lambda_m} \frac{\lambda_m^j}{j!} =: J_{11} + J_{12} + J_{13}. \end{aligned} \tag{8}$$

We have

$$J_{11} \leq 2^{\nu-1} \sum_{m=1}^N (1 - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m}) e^{-\lambda_m} \leq 2^{\nu-1} \sigma_N^2. \tag{9}$$

By using inequalities $xe^{-x} \leq e^{-1}$ and $2^{-1}x^2e^{-x} \leq 1 - (1 + x)e^{-x}$ we obtain

$$J_{12} \leq 2^\nu e^{-(\nu-2)} \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} \lambda_m^2 e^{-2\lambda_m} \leq 2^\nu e^{-(\nu-2)} \sum_{m=1}^N (1 - (1 + \lambda_m)e^{-\lambda_m}) e^{-\lambda_m} \leq 2^\nu e^{-(\nu-2)} \sigma_N^2. \tag{10}$$

Assume $\nu \geq 4$ is an even integer. We have

$$2^{1-\nu} J_{13} = \sum_{m=1}^N \sum_{j=2}^\infty |j - 1 - \lambda_m|^\nu e^{-(\nu+1)\lambda_m} \frac{\lambda_m^j}{j!} = \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} \sum_{j=2}^\infty (j - 1 - \lambda_m)^\nu e^{-\lambda_m} \frac{\lambda_m^j}{j!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (j-1-\lambda_m)^\nu e^{-\lambda_m} \frac{\lambda_m^j}{j!} - (1+\lambda_m)^\nu e^{-\lambda_m} - \lambda_m^{\nu+1} e^{-\lambda_m} \right] \\
 &= \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} [E(\xi_m - \lambda_m - 1)^\nu - (1+\lambda_m)^\nu e^{-\lambda_m} - \lambda_m^{\nu+1} e^{-\lambda_m}] \\
 &= \sum_{m=1}^N e^{-(\nu-1)\lambda_m} [E(\xi_m - \lambda_m - 1)^\nu e^{-\lambda_m} - (1+\lambda_m)^\nu e^{-2\lambda_m} - \lambda_m^{\nu+1} e^{-2\lambda_m}] \\
 &\leq \sum_{m=1}^N e^{-(\nu-1)\lambda_m} \left[\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} C_\nu^k E(\xi_m - \lambda_m)^k e^{-\lambda_m} - (1+\lambda_m)^{\nu-1} e^{-\lambda_m} + (1+\lambda_m)^{\nu-1} e^{-\lambda} (1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}) \right] \\
 &= \sum_{m=1}^N e^{-(\nu-1)\lambda_m} \left[\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} C_\nu^k E(\xi_m - \lambda_m)^k e^{-\lambda_m} - \sum_{k=0}^{\nu-1} C_{\nu-1}^k \lambda_m^k e^{-\lambda_m} \right] \\
 &\quad + \sum_{m=1}^N [(1+\lambda_m)e^{-\lambda_m}]^{\nu-1} e^{-\lambda} (1 - (1+\lambda)e^{-\lambda}) =: J'_{13} + J''_{13}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

We have,

$$\begin{aligned}
 J'_{13} &= \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} \left[\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu-k} C_\nu^k E(\xi_m - \lambda_m)^k - \sum_{k=0}^{\nu-1} C_{\nu-1}^k \lambda_m^k \right] \\
 &= \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} \left[-\frac{1}{6}(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\lambda_m + \sum_{k=4}^{\nu} (-1)^{\nu-k} C_\nu^k E(\xi_m - \lambda_m)^k - \sum_{k=2}^{\nu-1} C_{\nu-1}^k \lambda_m^k \right].
 \end{aligned}$$

It is known that $E(\xi_m - \lambda_m)^k = \lambda_m + \sum_{l=2}^{[k/2]} c(l)\lambda_m^l$. Furthermore, $\sum_{k=0}^3 (-1)^{\nu-k} C_\nu^k - (\nu-1) = (\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)/6$. Applying these facts at the last formula we obtain

$$J'_{13} \leq c(\nu) \sum_{m=1}^N e^{-\nu\lambda_m} (\lambda_m^{\nu/2} + \lambda_m^2) \leq c_1(\nu) \sum_{m=1}^N \lambda_m^2 e^{-2\lambda_m} \leq c_2(\nu)\sigma^2(n)$$

since $2^{-1}x^2e^{-x} \leq 1 - (1+x)e^{-x}$. Also $J''_{13} \leq c(\nu)\sigma^2(n)$ since $(1+\lambda_m)e^{-\lambda_m} \leq 1$. So, by (6) $J_{13} \leq c_3(\nu)\sigma^2(n)$. This together with (4), (5) imply

$$J_1 \leq c_3(\nu)\sigma_N^2. \tag{12}$$

Under condition (1) by reasoning similar to those of [2] one can show that $J_2 \leq c(\nu)\sigma^2(n)$. Thus by (2), (7)

$$\sum_{m=1}^N E|g_m(\xi_m)|^\nu \leq c(\nu)\sigma_N^2.$$

On using this inequality with $\nu = 4$ and well-known inequality between Liyapunov's ratio we obtain

$$\frac{1}{\sigma_N^3} \sum_{m=1}^N E|g_m(\xi_m)|^3 \leq \left[\frac{1}{\sigma_N^4} \sum_{m=1}^N E|g_m(\xi_m)|^4 \right]^{1/2} \leq \frac{c}{\sigma_N}. \tag{13}$$

On the other hand it follows from Theorem 1 of [1] that

$$\Delta_N \leq c \frac{1}{\sigma_N^3} \sum_{m=1}^N E|g_m(\xi_m)|^3.$$

Applying here (8) we complete the proof of Theorem.

REFERENCES

1. Mirakhmedov S.M.. An approximations of multiple randomized divisible statistics by means of Normal distribution, Theory Probabl. and Appl., 32, 761-771 .
2. Quine, M.P., Robinson, J., A Berry-Esseen bound for an occupancy problem, Ann. Probabl., 10, 663-671, 1982.

REZYUME

Ushbu maqolada zarrachalarni qutichalarga tasodifiy joylashtirishning multinomial modelida band bo'lgan qutichalar uchun markaziy limit teoremasidagi qoldiq hadga eng yaxshi baho olingan.

Kalit so'zlar: tasodifiy joylash, Puasson taqsimoti, normal taqsimot, markaziy limit teorema.

РЕЗИОМЕ

В работе устанавливается наилучшая оценка остаточного члена в центральной предельной теореме для числа занятых ячеек в полиномиальной схеме случайного размещения.

Ключевые слова: случайное размещение, распределение Пуассона, нормальное распределение, центральная предельная теорема.

UDC 517.926

SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATION INVOLVING THE PRABHAKAR OPERATOR

MIRZAEVA M. M.

FERGANA STATE UNIVERSITY, UZBEKISTAN

maftuna.mirzaeva@outlook.com

RESUME

In this study, a first order partial differential equation involving the Prabhakar fractional derivative is examined within a rectangular domain. A boundary value problem associated with this equation is investigated, and the existence and uniqueness of its solution are established. To construct the solution, the Riemann method is employed. An auxiliary problem is formulated in terms of the Riemann function. By applying the Laplace transform, the auxiliary problem is reduced to a Cauchy problem for an ordinary differential equation. Subsequently, the inverse Laplace transform is utilized to derive an explicit expression for the solution of the auxiliary problem, which corresponds to the Riemann function of the original equation. The solution to the initial boundary value problem is then obtained using the Riemann method. Furthermore, sufficient conditions are derived for the given functions to ensure that the obtained solution satisfies the problem's constraints.

Key words: Prabhakar fractional derivative, Prabhakar fractional integral, three-parameter Mittag-Leffler function, regular solution, Laplace transform, two-variable Mittag-Leffler function.

1. Introduction

Fractional differential equations (FDEs) have emerged as a powerful mathematical tool to describe systems with memory and hereditary properties, extending classical integer-order differential equations. Their ability to capture anomalous dynamics and nonlocal behaviors has been widely recognized across various scientific disciplines, including mechanics, finance, biology, and engineering [1-5]. The fractional operators, by incorporating non-integer order derivatives, offer a richer framework for modeling complex phenomena where classical models fail to provide adequate accuracy.

Boundary value problems (BVPs) for first order partial differential equations (PDEs) form a foundational topic in applied mathematics, underpinning models in heat transfer, wave propagation, and transport phenomena. Consequently, the investigation of existence, uniqueness, and regularity of solutions for fractional PDEs has garnered increasing interest [6-9]. For instance, in [8], the solution of a BVP involving a fractional PDE was thoroughly analyzed. In this problem, the existence and uniqueness of the solution were established, and the solution was expressed in closed form using a special function of the Wright type. Similarly, in [9], the author addressed a BVP for a first order partial differential equation within a rectangular domain, where the differentiation involved a discretely distributed fractional operator defined by the Dzhrbashyan-Nersesyan framework. They derived an explicit representation of the solution and established theorems concerning its existence and uniqueness.

In addition, the Prabhakar fractional derivative has attracted significant attention in recent years, owing to its applicability in modeling complex relaxation and diffusion processes in various media [10-14]. Despite growing literature on fractional differential equations involving Prabhakar derivatives, the study of BVPs for first order PDEs with such operators remains relatively unexplored and mathematically intriguing. Therefore, there is a need for more comprehensive and in-depth research in this area, which would open up new opportunities for both theoretical investigations and practical applications.

In this paper, we consider a boundary value problem for a first order PDE involving the Prabhakar fractional derivative. We aim to investigate the existence and uniqueness of the regular solution under given boundary conditions, thereby contributing to the theoretical understanding of fractional PDEs with generalized fractional operators.

2. Formulation of the problem

Let us consider the following equation

$${}^{PRL}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} u(t, x) - u_x(t, x) = f(t, x) \tag{1}$$

in a domain $\Omega = \{(t, x) : 0 < t < T, 0 < x < a\}, 0 < a, T \leq \infty$. Here

$${}^{PRL}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} y(t) = \frac{d^m}{dt^m} {}^P I_{0t}^{\alpha, m-\beta, -\gamma, \delta} y(t)$$

represents Prabhakar fractional derivative [15] and

$${}^P I_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} y(t) = \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma} [\delta(t-s)^{\alpha}] y(s) ds, \quad t > 0$$

represents Prabhakar fractional integral, also

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma} [z] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!}$$

symbolizes the three-parameter Mittag-Leffler function. We note that above-given definitions are valid for $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ such that $\alpha > 0$ and $m - 1 < \beta < m, m \in \mathbb{N}$. We see in the particular case $0 < \beta < 1$.

Problem. Find the regular solution $u(t, x)$ of the equation (1) that satisfies the following boundary conditions:

$$\lim_{t \rightarrow 0} {}^P I_{0t}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} u(t, x) = \tau(x), \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

Definition. A regular solution of the equation (1) in the domain Ω is called a function $u(t, x)$ with the regularity $t^{1-\beta} u(t, x) \in C(\overline{\Omega}), u_x(t, x), {}^{PRL}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} u(t, x) \in C(\Omega)$ that satisfies the equation (1) at all points $(t, x) \in \Omega$.

3. Existence and Uniqueness Theorem

Theorem. Let $\tau(x) \in C[0; a], t^{1-\beta} \varphi(t) \in C[0, T], t^{1-\beta} f(t, x) \in C(\overline{\Omega}), f(t, x)$ satisfies the Hölder condition with respect to at least one of its variables and the following compatibility condition is satisfied:

$$\lim_{t \rightarrow 0} {}^P I_{0t}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} \varphi(t) = \tau(0).$$

Then there exists a unique regular solution of the equation (1) in the domain Ω , satisfying the boundary conditions (2) and (3). Moreover, this solution has the form

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^t \varphi(\eta) (t-\eta)^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{x(t-\eta)^{-\beta}}{\delta(t-\eta)^{\alpha}} \right) d\eta + \\ & + \int_0^x \tau(\xi) t^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x-\xi)t^{-\beta}}{\delta t^{\alpha}} \right) d\xi + \\ & + \int_0^t \int_0^x f(\eta, \xi) (t-\eta)^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x-\xi)(t-\eta)^{-\beta}}{\delta(t-\eta)^{\alpha}} \right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Before proving the theorem, let us give some information about the function $E_{12}(x, y)$. $E_{12}(x, y)$ is the bivariate Mittag-Leffler type function [16]:

$$E_{12} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \delta_1; \\ \alpha_2, \beta_2, \delta_2; \alpha_3, \delta_3; \alpha_4, \delta_4; \beta_3, \delta_5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 n + \beta_1 m + \delta_1) x^n y^m}{\Gamma(\alpha_2 n + \beta_2 m + \delta_2) \Gamma(\alpha_3 n + \delta_3) \Gamma(\alpha_4 n + \delta_4) \Gamma(\beta_3 m + \delta_5)},$$

$$(x, y, \alpha_i, \beta_i, \delta_j \in \mathbb{R}; \min\{\alpha_i, \beta_i\} > 0; (l = \{1, \dots, 4\}, i = \{1, 2, 3\}, j = \{1, \dots, 5\})),$$

in which the double series converges for $x, y \in \mathbb{R}$, if $\Delta_1 > 0$, and $\Delta_2 > 0$. Here $\Delta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1$, $\Delta_2 = \beta_2 + \beta_3 - \beta_1$.

Proof.

Let $V(t, x; \eta, \xi)$ be a Riemann function of the variables η and ξ in a domain $\{(\eta, \xi) : 0 < \eta < t, 0 < \xi < x\}$, which satisfies the following equation for any fixed (t, x) :

$$V_\xi(t, x; \eta, \xi) - {}^{PC}D_{\eta t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x; \eta, \xi) = 1, \tag{4}$$

where

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} y(t) = {}^PI_{0t}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} \frac{d}{dt} y(t)$$

represents regularized Prabhakar Caputo fractional derivative [17].

$V(t, x; \eta, \xi)$ also satisfies these conditions

$$V(t, x; \eta, \xi)|_{\eta=t} = 0, \quad V(t, x; \eta, \xi)|_{\xi=x} = 0. \tag{5}$$

First, we rewrite the equation (1) by replacing the variables x and t with ξ and η :

$${}^{PRL}D_{0\eta}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} u(\eta, \xi) - u_\xi(\eta, \xi) = f(\eta, \xi).$$

Then, we multiply both sides of the last equation by $V(t, x; \eta, \xi)$, integrate with respect to ξ over the interval $[0, x]$, and with respect to η over the interval $[0, t]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^x {}^{PRL}D_{0\eta}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} u(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta - \int_0^t \int_0^x u_\xi(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta = \\ = \int_0^t \int_0^x f(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{6}$$

For convenience, let us denote the first integral in (4) by I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \int_0^x {}^{PRL}D_{0\eta}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} u(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta = \\ &= \int_0^t \int_0^x V(t, x; \eta, \xi) \frac{\partial}{\partial \eta} I_{0\eta}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} u(\eta, \xi) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Applying integration by parts with respect to η and considering the conditions (2) and (5), we obtain the following result:

$$I_1 = - \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_0^x d\xi \int_0^t V_\eta(t, x; \eta, \xi) I_{0\eta}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} u(\eta, \xi) d\eta.$$

Now, we express the Prabhakar fractional integral and change the order of integration:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \\
 &- \int_0^x d\xi \int_0^t V_\eta(t, x; \eta, \xi) d\eta \int_0^\eta (\eta - s)^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta(\eta - s)^\alpha] u(s, \xi) ds = \\
 &= - \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \\
 &- \int_0^x d\xi \int_0^t u(s, \xi) ds \int_s^t (\eta - s)^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta(\eta - s)^\alpha] V_\eta(t, x; \eta, \xi) d\eta = \\
 &= - \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_0^x \int_0^t u(\eta, \xi) I_{\eta t}^{\alpha, 1-\beta, -\gamma, \delta} V_\eta(t, x; \eta, \xi) d\eta d\xi = \\
 &= - \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_0^x \int_0^t u(\eta, \xi) {}^{PC}D_{\eta t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x; \eta, \xi) d\eta d\xi.
 \end{aligned}$$

Let us evaluate I_2 that is the second integral of (6). We integrate by parts with respect to ξ and consider the conditions (3) and (5), then we get the following result:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^t \int_0^x u_\xi(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta = \\
 &= - \int_0^t V(t, x; \eta, 0) \varphi(\eta) d\eta - \int_0^t \int_0^x u(\eta, \xi) V_\xi(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Substituting the results of the integrals I_1 and I_2 into the equation (6), we obtain the following expression:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \int_0^x u(\eta, \xi) \left[V_\xi(t, x; \eta, \xi) - {}^{PC}D_{\eta t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x; \eta, \xi) \right] d\xi d\eta = \\
 &= \int_0^t \int_0^x f(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta + \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_0^t V(t, x; \eta, 0) \varphi(\eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

According to (4), we get the following result:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \int_0^x u(\eta, \xi) d\xi d\eta = \int_0^t \int_0^x f(\eta, \xi) V(t, x; \eta, \xi) d\xi d\eta + \\
 &+ \int_0^x V(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi - \int_0^t V(t, x; \eta, 0) \varphi(\eta) d\eta.
 \end{aligned}$$

To find the unknown function $u(t, x)$ from the final expression, we first differentiate with respect to x , then with respect to t , and arrive at the following result:

$$u(t, x) = \int_0^t \int_0^x V_{xt}(t, x; \eta, \xi) f(\eta, \xi) d\xi d\eta + \int_0^x V_{xt}(t, x; 0, \xi) \tau(\xi) d\xi + \int_0^t V_{xt}(t, x; \eta, 0) \varphi(\eta) d\eta. \tag{7}$$

Our goal is to find the function $V(t, x; \eta, \xi)$. Next, we will assume that the function $V(t, x; \eta, \xi)$ can be represented as a function of the difference of the arguments t, η and x, ξ : $V(t, x; \eta, \xi) = V(t - \eta, x - \xi)$. In that case, it follows from (4) and (5) that $V = V(t, x)$ is the solution of the following problem:

$$V_x(t, x) - {}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x) = 1, \tag{8}$$

$$V(0, x) = 0, \quad V(t, 0) = 0 \tag{9}$$

We apply the Laplace transform to the both sides of the equation (8) with respect to t :

$$L_t [V_x(t, x) - {}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x)] = L_t [V_x(t, x)] - L_t [{}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x)] = L_t [1].$$

If we denote $L_t [V(t, x)] = \omega(x; p)$, then we get

$$\omega_x(x; p) - L_t [{}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x)] = \frac{1}{p}. \tag{10}$$

Now, we apply the Laplace transform to the operator:

$$\begin{aligned} L_t [{}^{PC}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} V(t, x)] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t (t-z)^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta(t-z)^\alpha] V_z(z, x) dz = \\ &= \int_0^{+\infty} V_z(z, x) dz \int_z^{+\infty} e^{-pt} (t-z)^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta(t-z)^\alpha] dt = \{t = s + z\} = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pz} V_z(z, x) dz \int_0^{+\infty} e^{-ps} s^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta s^\alpha] ds. \end{aligned}$$

First, we evaluate the integral with respect to s :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ps} s^{-\beta} E_{\alpha, 1-\beta}^{-\gamma} [\delta s^\alpha] ds &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma)_k \delta^k}{\Gamma(\alpha k + 1 - \beta) k!} \int_0^{+\infty} e^{-ps} s^{\alpha k - \beta} ds = \{ps = y\} = \\ &= p^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma)_k \delta^k p^{-\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1 - \beta) k!} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha k - \beta} dy = p^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma)_k (\delta p^{-\alpha})^k}{k!} = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} = (1-x)^{-a} \right\} = p^{\beta-1} \left(1 - \frac{\delta}{p^\alpha} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

Now, we integrate by parts with respect to z :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pz} V_z(z, x) dz = p \int_0^{+\infty} e^{-pz} V(z, x) dz = p L_t [V(t, x)].$$

As a result, we have identified

$$L_t \left[{}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta} V(t, x) \right] = p^\beta \left(1 - \frac{\delta}{p^\alpha} \right)^\gamma L_t [V(t, x)],$$

so we can rewrite (10) and get the linear differential equation:

$$\omega_x(x; p) - \lambda \omega(x; p) = \frac{1}{p},$$

where $\lambda = p^\beta \left(1 - \frac{\delta}{p^\alpha} \right)^\gamma$.

We solve this linear differential equation and determine that $\omega(x; p) = -\frac{1}{p\lambda} + Ce^{\lambda x}$. Since $V(t, 0) = 0$, it follows that $\omega(0; p) = 0$. By using $\omega(0; p) = 0$, we can find that $C = \frac{1}{p\lambda}$. Consequently, we obtain the following

$$L_t [V(t, x)] = \omega(x; p) = \frac{e^{\lambda x}}{p\lambda} - \frac{1}{p\lambda}.$$

Now it is time for the inverse Laplace transform:

$$L_t^{-1} [\omega] = L_t^{-1} \left[\frac{e^{\lambda x}}{p\lambda} - \frac{1}{p\lambda} \right] = L_t^{-1} \left[\frac{e^{\lambda x}}{p\lambda} \right] - L_t^{-1} \left[\frac{1}{p\lambda} \right]. \tag{11}$$

Let us take a function of this form

$$V_1(t, x) = t^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^{-\beta n}}{n!} E_{\alpha, -\beta n + 1 + \beta}^{-\gamma n + \gamma} [\delta t^\alpha]$$

and apply the Laplace transform to it:

$$\begin{aligned} L_t [V_1(t, x)] &= L_t \left[t^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^{-\beta n}}{n!} E_{\alpha, -\beta n + 1 + \beta}^{-\gamma n + \gamma} [\delta t^\alpha] \right] = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^{-\beta n}}{n!} E_{\alpha, -\beta n + 1 + \beta}^{-\gamma n + \gamma} [\delta t^\alpha] dt = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma n + \gamma)_k \delta^k}{k! \Gamma(\alpha k - \beta n + 1 + \beta)} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\beta - \beta n + \alpha k} dt = \{pt = s\} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma n + \gamma)_k \delta^k p^{-\alpha k + \beta n + 1 - \beta}}{k!} = \\ &= p^{-\beta - 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n p^{\beta n}}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\gamma n + \gamma)_k [\delta p^{-\alpha}]^k}{k!}. \end{aligned}$$

Using the formula $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k x^k}{k!} = (1 - x)^{-a}$, we get

$$\begin{aligned} L_t [V_1(t, x)] &= p^{-\beta - 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n p^{\beta n}}{n!} (1 - \delta p^{-\alpha})^{\gamma n - \gamma} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \left[p^\beta \left(1 - \frac{\delta}{p^\alpha} \right)^\gamma \right]^n}{n! \left[p^\beta \left(1 - \frac{\delta}{p^\alpha} \right)^\gamma \right]^n} = \frac{1}{p\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} = \frac{e^{\lambda x}}{p\lambda}. \end{aligned}$$

For $x = 0$, we define

$$L_t [V_1(t, 0)] = L_t \left[t^\beta E_{\alpha, 1+\beta}^\gamma [\delta t^\alpha] \right] = \frac{1}{p\lambda}.$$

According to (11) and the results $L_t [V_1(t, x)]$ and $L_t [V_1(t, 0)]$, we conclude

$$\begin{aligned} V(t, x) &= L_t^{-1} [\omega] = t^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^{-\beta n}}{n!} E_{\alpha, -\beta n+1+\beta}^{-\gamma n+\gamma} [\delta t^\alpha] - t^\beta E_{\alpha, 1+\beta}^\gamma [\delta t^\alpha] = \\ &= t^\beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n t^{-\beta n}}{n!} E_{\alpha, -\beta n+1+\beta}^{-\gamma n+\gamma} [\delta t^\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} t^{-\beta n}}{(n+1)!} E_{\alpha, -\beta n+1}^{-\gamma n} [\delta t^\alpha]. \end{aligned}$$

To find the solution (7), we take the derivatives of the function $V(t - \eta, x - \xi)$ with respect to x and t :

$$\begin{aligned} V_x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} (t - \eta)^{-\beta n} E_{\alpha, -\beta n+1}^{-\gamma n} [\delta(t - \eta)^\alpha] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} (t - \eta)^{-\beta n} E_{\alpha, -\beta n+1}^{-\gamma n} [\delta(t - \eta)^\alpha]; \\ V_{xt} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} (t - \eta)^{-\beta n-1} E_{\alpha, -\beta n}^{-\gamma n} [\delta(t - \eta)^\alpha] = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - \xi)^n}{n!} (t - \eta)^{-\beta n-1} E_{\alpha, -\beta n}^{-\gamma n} [\delta(t - \eta)^\alpha]. \end{aligned}$$

We can write the function $V_{xt}(t, x)$ using $E_{12}(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_{xt} &= (t - \eta)^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(-\gamma n + k) \left[(x - \xi) (t - \eta)^{-\beta} \right]^n [\delta(t - \eta)^\alpha]^k}{\Gamma(-\beta n + \alpha k) \Gamma(-\gamma n) \Gamma(n + 1) \Gamma(k + 1)} = \\ &= (t - \eta)^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x - \xi) (t - \eta)^{-\beta}}{\delta(t - \eta)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Here $\Delta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 = 1 - \beta > 0$ and $\Delta_2 = \beta_2 + \beta_3 - \beta_1 = \alpha > 0$.

Finally, we obtain the following solution:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t \varphi(\eta) (t - \eta)^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{x(t - \eta)^{-\beta}}{\delta(t - \eta)^\alpha} \right) d\eta + \\ &+ \int_0^x \tau(\xi) t^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x - \xi) t^{-\beta}}{\delta t^\alpha} \right) d\xi + \\ &+ \int_0^t \int_0^x f(\eta, \xi) (t - \eta)^{-1} E_{12} \left(\begin{matrix} -\gamma, 1, 0; \\ -\beta, \alpha, 0; -\gamma, 0; 1, 1; 1, 1 \end{matrix} \middle| \frac{(x - \xi) (t - \eta)^{-\beta}}{\delta(t - \eta)^\alpha} \right) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

The theorem is proved.

Remark. If $\delta = 0$ or $\gamma = 0$ in the considered problem, these cases have been studied in [18].

REFERENCES

1. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 2006.

2. F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, 2010.
3. R. Metzler and J. Klafter, "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach," *Physics Reports*, vol. 339, no. 1, pp. 1-77, 2000.
4. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
5. C. A. Monje et al., *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer, 2010.
6. V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, 2011.
7. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
8. A.V. Pskhu, Solution of a Boundary Value Problem for a Fractional Partial Differential Equation. *Differential Equations* 39, 1150-1158 (2003). <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000011289.79263.02>
9. A.V. Pskhu, Boundary value problem for a first-order partial differential equation with a fractional discretely distributed differentiation operator. *Diff Equat* 52, 1610-1623 (2016). <https://doi.org/10.1134/S0012266116120089>
10. T. R. Prabhakar, "A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel," *Yokohama Mathematical Journal*, vol. 19, pp. 7-15, 1971.
11. A. Giusti, F. Mainardi, and C. Colombaro, "The Prabhakar or three-parameter Mittag-Leffler function: theory and applications," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 23, no. 4, pp. 856-887, 2020.
12. F. Mainardi and R. Garrappa, "The Mittag-Leffler function and the Prabhakar function," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 426, no. 1, pp. 124-145, 2015.
13. Z. Raza, T. Muhammad, Z. Han, and M. Nawaz, "Influence of Newtonian heating and Brinkman type nanofluid flow with Prabhakar fractional derivatives," *Fluids*, vol. 6, no. 5, p. 265, 2022.
14. M. Asjad, S. Shehzad, and I. Khan, "Modeling anomalous heat and mass transfer in porous media via Prabhakar fractional operators," *Thermal Science*, vol. 25, Suppl. 2, pp. 509-518, 2021.
15. R. Garra, R. Gorenflo, F. Polito, Z. Tomovski. Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications. *Appl. Math. Comput.* 242, (2014), 576-589.
16. Turdiev Kh.N., Usmonov D.A. The Goursat's problem for generalized (fractional) hyperbolic-type equation. *Uzbek Mathematical Journal*, 2025, Volume 69, Issue 2, pp.300-306.
17. D'Ovidio, M., Polito, F. (2018). Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions. *Theory Probab. Appl.*, 62(4), 552-574.
18. A.V. Pskhu, *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*. - Moskva: Nauka, 2005. - 200 s. - ISBN 5-02-033721-8.

REZYUME

Ushbu ishda Prabhakar kasr tartibli hosilasi qatnashgan birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama to'g'ri to'rtburchakli sohada qaralgan. Bu tenglama uchun bir chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi o'rganilgan. Bu masalaning yechimini topish uchun Riman usulidan foydalanilgan. Riman funksiyasiga nisbatan yordamchi masala hosil qilingan. Yordamchi masalani Laplas almashtirishi yordamida oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasiga olib kelingan va teskari Laplas almashtirishini qo'llab yordamchi masalaning yechim formulasi, ya'ni berilgan masalaning Riman funksiyasi topilgan. So'ngra Riman metodidan foydalanib dastlabki masalaning yechimi topilgan. Topilgan yechim masalaning shartlarini qanoatlantirishi uchun berilgan funksiyalarga yetarli shartlar topilgan.

Kalit so‘zlar: Prabhakar kasr tartibli hosilasi, Prabhakar kasr tartibli integrali, uch parametrli Mittag-Leffler funksiyasi, regular yechim, Laplas almashtirishi, ikki o‘zgaruvchili Mittag-Leffler funksiyasi.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, включающего дробный оператор Прабхакара, в правильной прямоугольной области. Изучается существование и единственность решения данной задачи. Для построения решения применяется метод Римана. Формулируется вспомогательная задача относительно функции Римана. С использованием преобразования Лапласа вспомогательная задача сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Затем, применяя обратное преобразование Лапласа, получена явная формула решения вспомогательной задачи, которая одновременно является функцией Римана исходной задачи. На основе метода Римана получено решение исходной краевой задачи. Кроме того, устанавливаются достаточные условия на заданные функции, при которых найденное решение удовлетворяет условиям поставленной задачи.

Ключевые слова: Производная дробного порядка Прабхакара, интеграл дробного порядка Прабхакара, функция Миттаг-Леффлера с тремя параметрами, регулярное решение, преобразование Лапласа, двухпеременная функция Миттаг-Леффлера.

UDC 517.55

SOME RETRACTIONS OF n -FOLD SYMMETRIC PRODUCT OF THE SPACE X

MUKHAMADIEV F. G.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, KIMYO INTERNATIONAL UNIVERSITY IN TASHKENT, UZBEKISTAN
farhodgm@nuu.uz

NOSIROVA M. S.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, UZBEKISTAN
mirsaidovamaftuna94@gmail.com

RESUME

In this paper, we study some retractions of the space n -fold symmetric product of the space X . We prove that if a set A is a retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$. Also shown that if a set A is a weak retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a weak retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$. Besides proved that if a set A is a deformation retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

Key words: Retract, n -fold symmetric product, weak retract, deformation retract.

Recently, the topological properties on hyperspaces with the Vietoris topology and the homotopy properties of the topological spaces have been studied by many authors ([1], [2], [3], [4], [5], [6]).

In [1] the connection between a finally compact, pseudocompact, extremely disconnected, \aleph -space and its hyperspace is studied. And in the work [2] have been studied the connection between a uniformly connected, uniformly pseudocompact, P -precompact and its hyperspace. In the works [3] and [4] have been studied some cardinal and homotopy properties of the superextension λX of a topological space X . And in [4] proved that the superextension functor λ preserves homotopy, i.e. that it is a homotopy functor. In [5] showed that the functor of Permutation Degree SP_C^n preserves the homotopy and the retraction of topological spaces. And in [6] have been studied some homotopy properties of the space of complete linked systems.

Recall that a covariant functor is a mapping \mathcal{F} which assigns to a topological space X the space $\mathcal{F}(X)$, and to a continuous mapping $f : X \rightarrow Y$, the mapping $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ satisfying the following conditions:

- 1) \mathcal{F} preserves identity, that is, if id_X is the identity mapping of X , then $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$;
- 2) \mathcal{F} preserves composition, that is, if $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow Z$ are continuous mappings, then we have

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

We refer the reader to the book [7] and the article [8] for more information about functors. Some metric properties of n -fold symmetric product of the space X is studied in the work [9]. In this paper we study some homotopy properties and retractions of n -fold symmetric product of the space X .

All of our space are Hausdorff unless otherwise indicated. The symbol N stands for the set of positive integers and R stands for the set of real numbers. Given a space X , we define its hyperspaces as the following sets:

- 1) $CL(X) = \{A \subset X \mid A \text{ is closed and nonempty}\}$;
- 2) $2^X = \{A \in CL(X) \mid A \text{ is compact}\}$;
- 3) $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ has at most } n \text{ points}\}$, $n \in N$ (see [9, 10]).

$CL(X)$ is topologized by the Vietoris topology defined as the topology generated by

$$\beta = \{\langle U_1, \dots, U_k \rangle \mid U_1, \dots, U_k \text{ are open subsets of } X, k \in N\},$$

where $\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in CL(X) \mid A \subset \bigcup U_j \text{ and } A \cap U_j \neq \emptyset \text{ for each } j \in \{1, \dots, k\}\}$.

Note that, by definition, 2^X , $\mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}(X)$ are subsets of $CL(X)$. Hence, they are topologized with the appropriate restriction of the Vietoris topology. Moreover,

- 1) $CL(X)$ is called the *hyperspace of nonempty closed subsets of X* ;
- 2) 2^X is called the *hyperspace of nonempty compact subsets of X* ;
- 3) $\mathcal{F}_n(X)$ is called the *n -fold symmetric product of X* ;
- 4) $\mathcal{F}(X)$ is called the *hyperspace of finite subsets of X* .

On the other hand, it is obvious that $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$ and $\mathcal{F}_n(X) \subset \mathcal{F}_{n+1}(X)$ for each $n \in \mathbb{N}$ (see [9, 10]).

Remark 1. Let X be a space and let $n \in \mathbb{N}$.

- 1) $\mathcal{F}_n(X)$ is closed in $\mathcal{F}(X)$;
- 2) $f_1 : X \rightarrow \mathcal{F}_1(X)$, $(x \mapsto \{x\})$, is a homeomorphism;
- 3) Every $\mathcal{F}_m(X)$ is a closed subset of $\mathcal{F}_n(X)$ for each $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ (see [11]).

Notation 1. If U_1, U_2, \dots, U_n are open subsets of a space X , then $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}$ denotes the intersection of the open set $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ of the Vietoris topology, with $\mathcal{F}(X)$ (see [12]).

Notation 2. Let X be a space. If $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ is a point of $\mathcal{F}(X)$ and $\{x_1, x_2, \dots, x_r \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle_{\mathcal{F}(X)}\}$, then for each $j \leq r$, we let $U_{x_j} = \bigcap \{U \in \{U_1, U_2, \dots, U_s\} : x_j \in U\}$. Observe that $\langle U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_r} \rangle_{\mathcal{F}(X)} \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_s \rangle_{\mathcal{F}(X)}$ (see [13]).

For some undefined or related concepts, we refer the reader to [14], [15] and [16].

Now we will consider some retractions of n -fold symmetric product of the space X . We begin with definitions of notions that will be used in this section. We mainly follow terminology from [15] and [16].

A subset A of a topological space X is called a *retract* of X if there exists a continuous mapping $r : X \rightarrow A$ such that $r|_A = id_A$. The mapping r is called a *retraction* [15].

For the functor of n -fold symmetric product \mathcal{F}_n the following theorem holds.

Theorem 1. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ is correct. If a set A is a retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

Proof. Suppose that A is a retract of X . Then there exists a continuous mapping $r : X \rightarrow A$ such that $r(a) = a$ for all $a \in A$. Now we consider the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$. It is clear that for every $A' \in \mathcal{F}_n A$ we have that $(\mathcal{F}_n r)(A') = r(A') = A'$. It means that the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ is a retraction. Hence, the set $\mathcal{F}_n(A)$ is a retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$. Theorem 1 is proved.

From the Theorem 1 we get the following corollary.

Corollary 1. If the mapping $r : X \rightarrow A$ is a retraction, then the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ is also a retraction.

A subset $A \subseteq X$ is said to be a *weak retract* of X if there exists a continuous map $r : X \rightarrow A$ such that $r \circ i \simeq id_A$ where $i : A \rightarrow X$ is the inclusion map (see [15]).

Proposition 1. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ is correct. If a set A is a weak retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a weak retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

Proof. Suppose that A is a weak retract of X , then there exists a continuous map $r : X \rightarrow A$ such that $r \circ i \simeq id_A$ where $i : A \rightarrow X$ is the inclusion map. Now we consider the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ such that $\mathcal{F}_n r \circ \mathcal{F}_n i \simeq \mathcal{F}_n id_{\mathcal{F}_n A}$ where $\mathcal{F}_n i : \mathcal{F}_n A \rightarrow \mathcal{F}_n X$ is the inclusion map. Proposition 1 is proved.

Corollary 2. If the mapping $r : X \rightarrow A$ is a weakly retraction, then the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ is also a weakly retraction.

A space X is said to be *contractible* if it is homotopy equivalent to a point [16]. In [4, 6], some propositions about homotopy properties of topological spaces were given. For instance, contractibility is a homotopy property of the spaces. We have the following.

Proposition 2. If a topological space X is contractible, then the space $\mathcal{F}_n X$ is also contractible.

Proof. Assume that X is a contractible space. It means that $X \simeq \{a\}$. By proposition 1 [17] it implies immediately that $\mathcal{F}_n X \simeq \mathcal{F}_n \{a\}$, which means that $\mathcal{F}_n X$ is homotopy equivalent to the point $\mathcal{F}_n \{a\}$. Proposition 2 is proved.

Corollary 3. If a topological space X is homotopy equivalent to a point, then the space $\mathcal{F}_n X$ is also homotopy equivalent to a point.

A subset A of a topological space X is called a *deformation retract* of X if there exists a retraction $r : X \rightarrow A$ such that $i \circ r \simeq id_X$ where $i : A \rightarrow X$ is the inclusion.

In other words A is a deformation retract of X if there is a homotopy $F : X \times I \rightarrow X$ such that $F(x, 0) = x$ for all $x \in X$ and $F(x, 1) \in A$ for all $x \in X$.

Theorem 2. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ is correct. If a set A is a deformation retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

Proof. Suppose that A is a deformation retract of X . Then there is a homotopy $F : X \times I \rightarrow X$ such that $F(x, 0) = x$ for all $x \in X$ and $F(x, 1) \in A$ for all $x \in X$. Now we consider the mapping $\mathcal{F}_n F : \mathcal{F}_n X \times I \rightarrow \mathcal{F}_n X$ is a homotopy such that $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 0) = \{x\}$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$ and $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 1) \in \mathcal{F}_n A$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$. By theorem 1 [17] if the mapping $F : X \times I \rightarrow X$ is a homotopy, then the mapping $\mathcal{F}_n F : \mathcal{F}_n X \times I \rightarrow \mathcal{F}_n X$ is also homotopy. Clearly that $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 0) = F(\{x\}, 0) = \{x\}$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$ and $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 1) = F(\{x\}, 1) \in \mathcal{F}_n A$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$. Hence, the set $\mathcal{F}_n(A)$ is a deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$. Theorem 2 is proved.

Corollary 4. If the mapping $r : X \rightarrow A$ is a deformation retraction, then the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ is also a deformation retraction.

A subset A of X is a *strong deformation retract* if there is a retraction $r : X \rightarrow A$ such that $i \circ r \simeq_{rel A} id_X$.

In other words A is a strong deformation retract of X if there is a homotopy $F : X \times I \rightarrow X$ such that $F(x, 0) = x$ for all $x \in X$, $F(a, t) = a$ for all $a \in A$, $t \in I$ and $F(x, 1) \in A$ for all $x \in X$.

Proposition 3. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ is correct. If a set A is a strong deformation retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a strong deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

Proof. Suppose that A is a strong deformation retract of X . Then there is a homotopy $F : X \times I \rightarrow X$ such that $F(x, 0) = x$ for all $x \in X$, $F(a, t) = a$ for all $a \in A$, $t \in I$ and $F(x, 1) \in A$ for all $x \in X$. Now we consider the mapping $\mathcal{F}_n F : \mathcal{F}_n X \times I \rightarrow \mathcal{F}_n X$ is a homotopy such that $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 0) = \{x\}$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$, $(\mathcal{F}_n F)(\{a\}, t) = \{a\}$ for all $\{a\} \in \mathcal{F}_n A$, $t \in I$ and $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 1) \in \mathcal{F}_n(A)$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$. Clearly that $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 0) = F(\{x\}, 0) = \{x\}$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$, $(\mathcal{F}_n F)(\{a\}, t) = F(\{a\}, t) = \{a\}$ for all $\{a\} \in \mathcal{F}_n A$, $t \in I$ and $(\mathcal{F}_n F)(\{x\}, 1) = F(\{x\}, 1) \in \mathcal{F}_n(A)$ for all $\{x\} \in \mathcal{F}_n X$. Hence, the set $\mathcal{F}_n(A)$ is a strong deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$. Proposition 3 is proved.

Corollary 4. If the mapping $r : X \rightarrow A$ is a strongly deformation retraction, then the mapping $\mathcal{F}_n r : \mathcal{F}_n X \rightarrow \mathcal{F}_n A$ is also a strongly deformation retraction.

A subset $A \subseteq X$ is said to be a *weak deformation retract* of X if the inclusion map $i : A \rightarrow X$ is a homotopy equivalence.

By Proposition 1 and Proposition 2 we will get the following result.

Corollary 5. Let for a subset $A \subseteq X$ the relation $\mathcal{F}_n(A) \subseteq \mathcal{F}_n(X)$ is correct. If a set A is a weak deformation retract of a topological space X , then the set $\mathcal{F}_n(A)$ is also a weak deformation retract of the space $\mathcal{F}_n(X)$.

A continuous mapping $f : [0, 1] \rightarrow X$ is called a *path* in X . The point $f(0)$ is called the initial point and $f(1)$ is called the final or terminal point of this path. If $x \in X$, then one defines $e_x : I \rightarrow X$ as the constant path, i.e. $e_x(t) = x$ for any $t \in I$. A topological space X is said to be *path-connected* if given any two points x_0, x_1 in X there is a path in X from x_0 to x_1 .

Proposition 4. If the mapping $f : I \rightarrow X$ is path in X from the point x_0 to the point x_1 , then a mapping $\mathcal{F}_n f : I \rightarrow \mathcal{F}_n X$ defined by $\mathcal{F}_n f(t) = \bigcap \{A \in \mathcal{F}_n X : f(t) \in A, \forall t \in [0, 1]\}$ is a path from the point $A_0 = \bigcap \{A \in \mathcal{F}_n : f(0) \in A\}$ to the point $A_1 = \bigcap \{A \in \mathcal{F}_n : f(1) \in A\}$ in $\mathcal{F}_n X$.

Corollary 6. If a topological space X is path-connected, then the space $\mathcal{F}_n X$ is also path-connected.

REFERENCES

1. Beshimov R. B., Safarova D. T. Some Topological Properties of a Functor of Finite Degree. Lobachevskii of Journal Mathematics, 2021, V.42, P.2744–2753.
2. Beshimov R. B., Safarova D. T. Uniformly linked space and its hyperspace. AIP Conference Proceedings, 2024, V.3004(1), P.020003.
3. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. On some properties of the superextension functor. Herald of Institute Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, 2022, V.2, P.5–18.
4. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. On the superextension functor. AIP Conference Proceedings, 2023, V.2879(1), P.020004.
5. Kočinac Lj. D. R., Mukhamadiev F. G., Sadullaev A. K. Some Cardinal and Geometric Properties of the Space of Permutation Degree. Axioms, 2022, V.11(6), P.290.
6. Mukhamadiev F. G. Some homotopy properties of the space of complete linked systems. Selected papers of the 2023 International Conference on Topology and its Applications. In press.
7. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. Topology of Hyperspaces and Its Applications. Znanie: Moscow, Russia, 1989. (In Russian)
8. Shchepin E. V. Functors and uncountable powers of compacta. Math. Surveys. 1981, V.36:3, P.1–7.
9. Good C., Macias S. Symmetric products of generalized metric spaces. Topology Appl. 2016, V.206, P.93–114.
10. Tuyen L. Q., Tuyen O. V., Kočinac Lj. D. R. The Vietoris hyperspace $F(X)$ and certain generalized metric properties. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2024, V.53(2), P.356–366.
11. Tang Z., Lin S., Lin F. Symmetric products and closed finite-to-one mappings. Topology and its Applications, 2018, V.234, P.6–45.
12. Peng L. X., Sun Y. A study on symmetric products of generalized metric spaces. Topology and its Applications, 2017, V.231, P.411–429.
13. Tuyen L. Q., Tuyen O. V. A note on the hyperspace of finite subsets. Fasciculi Math. 2021, V.65, P.67–73.
14. Yuldashev T. K., Mukhamadiev F. G. The local density and the local weak density in the space of permutation degree and in Hattori space. Ural Mathematical Journal, 2020, V.6(2), P.108–116.
15. Kosniowski C. A First Course in Algebraic Topology. Cambridge University Press, 1980.

16. Munkres J. Topology, Second ed. Pearson Education Limited, Edinburgh, 2014.
17. Mukhamadiev F. G., Meyliev Sh. U. Some homotopy properties of n -fold symmetric product of the space X . ACTA NUUZ, 2025, V.2(1.1), P.88–91.

REZYUME

Ushbu maqolada biz X fazoning n -darajali simmetrik ko'paytma fazosining ba'zi retraktlik xossalarini o'rganamiz. Agar A to'plam X fazo uchun retrakt bo'lsa, u holda unga mos $\mathcal{F}_n(A)$ to'plam ham $\mathcal{F}_n(X)$ fazo uchun retrakt bo'lishi isbotlangan. Bundan tashqari, agar A to'plam X fazo uchun kuchsiz retrakt bo'lsa, u holda unga mos $\mathcal{F}_n(A)$ to'plam ham $\mathcal{F}_n(X)$ fazo uchun kuchsiz retrakt ekanligi ko'rsatilgan. Shu bilan birga, agar A to'plam X fazo uchun deformatsion retrakt bo'lsa, u holda unga mos $\mathcal{F}_n(A)$ to'plam ham $\mathcal{F}_n(X)$ fazo uchun deformatsion retrakt ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Retrakt, n -darajali simmetrik ko'paytma, kuchsiz retrakt, deformatsion retrakt.

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучаются некоторые ретракции пространства n -кратного симметрического произведения пространства X . Доказывается, что если множество A является ретрактом топологического пространства X , то множество $\mathcal{F}_n(A)$ также является ретрактом пространства $\mathcal{F}_n(X)$. Также показано, что если множество A является слабым ретрактом топологического пространства X , то множество $\mathcal{F}_n(A)$ также является слабым ретрактом пространства $\mathcal{F}_n(X)$. Кроме того, доказано, что если множество A является деформационным ретрактом топологического пространства X , то множество $\mathcal{F}_n(A)$ также является деформационным ретрактом пространства $\mathcal{F}_n(X)$.

Ключевые слова: Ретракт, n -кратное симметричное произведение, слабый ретракт, деформационный ретракт.

UDC 514

ON THE GEODESICS OF SMOOTH MANIFOLDS

NARMANOV A. YA.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN
narmanov@yandex.com

ERGASHOVA SH. R.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN
shohida.ergashova@mail.ru

RESUME

This paper is devoted to the study of geodesics on smooth manifolds such as elliptical paraboloid and sphere in three-dimensional Euclidean space. The main result is finding equations of the geodesic on the $SO(3)$ group, which is the smooth three-dimensional manifold in \mathbb{R}^9 .

Key words: Geodesics, Hamiltonian system, Hamiltonian vector field, 3D rotation group.

INTRODUCTION

Let M^n be a smooth Riemannian manifold of dimension n with a Riemannian metric $g_{ij}(x)$.

Definition. The geodesics of the given metric are defined as smooth parameterized curves

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

that are solutions to the system of differential equations

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0,$$

where $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$ is the velocity vector of the curve γ , and ∇ is the covariant derivation operator related to the symmetric connection associated with the metric g_{ij} . In local coordinates, these equations can be rewritten in the form

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

where $\Gamma_{jk}^i(x)$ are smooth functions called the Christoffel symbols of the connection ∇ and defined by the following explicit formulas [1]:

$$\Gamma_{jk}^i(x) = \frac{1}{2} \sum g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^s} \right).$$

Geodesics can be interpreted as the trajectories of a single mass point that moves on the manifold without any external action, i.e. by inertia. Indeed, the equation of geodesics means exactly that the acceleration of the point is equal to zero.

The equation of geodesics can be considered as a Hamiltonian system [3] in the cotangent bundle T^*M , and the geodesics themselves can be regarded as projections of the trajectories of this Hamiltonian system on M . To this end, consider the natural coordinates x and p on the cotangent bundle T^*M , where $x = (x^1, \dots, x^n)$ are the coordinates of a point on M and $p = (p_1, \dots, p_n)$ are the coordinates of a covector from the cotangent space T_x^*M on the basis dx^1, \dots, dx^n . Take the standard symplectic structure $\omega = dx \wedge dp$ on T^*M and consider the following function as a Hamiltonian:

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum g^{ij}(x) p_i p_j = \frac{1}{2} |p|^2. \quad (1)$$

It is well known the following proposition [1,4].

Proposition. a) Let $\gamma(t) = (x(t); p(t))$ be an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = sgradH$ on T^*M . The curve $x(t)$ is then a geodesic, and its velocity vector $\dot{x}(t)$ is connected to $p(t)$ by the following relation:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \sum g^{ij}(x)p_j(t).$$

b) Conversely, if a curve $x(t)$ is a geodesic on M , then the curve $(x(t); p(t))$, where $p_i(t) = \sum g_{ij}(x)p_j(t)$, is an integral trajectory of the Hamiltonian system $v = sgradH$.

I. Geodesics on the elliptical paraboloid

Let F be an elliptical paraboloid on \mathbb{R}^3 given with the equations

$$\begin{cases} x = \sqrt{z}\cos\phi \\ y = \sqrt{z}\sin\phi \\ z = z \end{cases} \tag{2}$$

To write the equation of a geodesic on the surface F according to Proposition, we first find the Hamiltonian system on the cotangent bundle of the surface F . To do this, we should find the tangent vectors

$$r_z = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{z}\cos\phi}, \frac{1}{2\sqrt{z}\cos\phi}, 1 \right\},$$

$$r_\phi = \{ -\sqrt{z}\sin\phi, \sqrt{z}\cos\phi, 0 \}.$$

We get the first quadratic form matrix and the inverse matrix of the first quadratic form, which are shown below, respectively.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 4z+1 & 0 \\ 4z & 4z \end{pmatrix} \text{ and } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 4z & 0 \\ 0 & \frac{1}{4z} \end{pmatrix}$$

Now, we are ready to write the Hamiltonian system on the T^*F

$$\begin{cases} p_1' = \frac{dp_1}{dt} = -\frac{2p_1^2}{(4z+1)^2} + \frac{p_2^2}{2z^2} \\ p_2' = \frac{dp_2}{dt} = 0 \\ z' = \frac{dz}{dt} = \frac{4zp_1}{4z+1} \\ \phi' = \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_2}{z} \end{cases} \tag{3}$$

which corresponds to the Hamiltonian,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{4z}{4z+1} p_1^2 + \frac{1}{z} p_2^2 \right). \tag{4}$$

Theorem 1. The curve with the equation

$$\phi(z) = -\frac{2C}{C_1} \ln \left| \frac{C_1\sqrt{4z+1} - 2\sqrt{C_1^2z - C^2}}{C_1\sqrt{4z+1} + 2\sqrt{C_1^2z - C^2}} \right| - \arctan C \frac{\sqrt{4z+1}}{\sqrt{C_1^2z - C^2}} + C_2,$$

where $C_1^2z - C^2 \neq 0$ and $C, C_1 \neq 0$ is a geodesic line on the elliptical paraboloid with equation (2).

Proof. Let us find an integral trajectory of the Hamiltonian system (3).

Using the equations of the system, we have the following.

$$p_1 = \frac{z'(4z+1)}{4z}, \quad p_2 = C, \quad p_1' = \frac{4z+1}{4z}z'' - \frac{1}{4z^2}z'^2,$$

and

$$\frac{4z+1}{4z}z'' - \frac{1}{8z^2}z'^2 = \frac{C^2}{2z^2}.$$

As a result of the ODE we get

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{2\sqrt{C_1^2z - C^2}}{\sqrt{4z+1}}$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{2\sqrt{C_1^2z - C^2}}{\sqrt{4z+1}}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{C}{z}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{2C_1^2}{4z+1} - \frac{8(C_1^2z - C^2)}{(4z+1)^2}, \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{C}{z^2} \cdot \frac{2\sqrt{C_1^2z - C^2}}{\sqrt{4z+1}}. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Let us now check that the curve that satisfies the system (5) is geodesic.

We know that curve with the equations

$$\begin{cases} z = z(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \tag{6}$$

is geodesic if only if it satisfies the following system by Definition:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{2z(4z+1)}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{2z}{4z+1}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}\frac{d\phi}{dt} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

It is easy to check that if curve (6) satisfies the system (5) then it satisfies the system (7) also.

We have the following ODE from the equations in the system (5):

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{C}{2z} \cdot \frac{\sqrt{4z+1}}{\sqrt{C_1^2z - C^2}}.$$

if we replace the variables as:

$$x = \frac{\sqrt{4z+1}}{\sqrt{C_1^2z - C^2}}, \quad z = \frac{C^2x^2 + \frac{1}{C^2}}{C_1^2x^2 - \frac{4}{C_1^2}} \text{ and } dz = -\frac{2C^2}{C_1^2} \frac{\left(\frac{4}{C_1^2} + \frac{1}{C^2}\right)xdx}{\left(x^2 - \frac{4}{C_1^2}\right)^2},$$

where $C_1^2z - C^2 \neq 0$ and $C, C_1 \neq 0$, we get following ODE

$$d\phi = -C \left(\frac{4}{C_1^2} + \frac{1}{C^2} \right) \frac{x^2 dx}{\left(x^2 - \frac{4}{C_1^2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{C^2}\right)}$$

or

$$d\phi = -\frac{4C}{C_1^2} \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{C_1^2}} - \frac{1}{C} \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{C^2}},$$

then

$$d\phi = -\frac{2C}{C_1} \left(\frac{dx}{x - \frac{2}{C_1}} - \frac{dx}{x + \frac{2}{C_1}} \right) - \frac{1}{C} \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{C^2}}.$$

By solving it, we find the following

$$\phi(x) = -\frac{2C}{C_1} \ln \left| \frac{C_1 x - 2}{C_1 x + 2} \right| - \arctan Cx + C_3,$$

if we replace the old variables, we get a function

$$\phi(z) = -\frac{2C}{C_1} \ln \left| \frac{C_1 \sqrt{4z+1} - 2\sqrt{C_1^2 z - C^2}}{C_1 \sqrt{4z+1} + 2\sqrt{C_1^2 z - C^2}} \right| - \arctan C \frac{\sqrt{4z+1}}{\sqrt{C_1^2 z - C^2}} + C_2.$$

This function represents the explicit equation of the geodesic we are looking for. Theorem 1 has been proven.

II. Geodesics on the Sphere

Let us now find a geodesics on the unit sphere \mathbf{S}^2 on \mathbb{R}^3 .

Let us

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin v \end{cases} \tag{8}$$

is a parametric equation of \mathbf{S}^2 .

Theorem 2. The curve with the equation

$$\text{a) } v(u) = -\frac{2}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \arctan \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} (\tan u) \right) + C_2,$$

where $\frac{2C_1^2}{C^2} < 1$ and $C, C_1 \neq 0$;

$$\text{b) } v(u) = -\frac{1}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \ln \left| \frac{C \tan u + \sqrt{C^2 - 2C_1^2}}{C \tan u - \sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \right| + C_2,$$

where $\frac{2C_1^2}{C^2} > 1$ and $C \neq 0$. is a geodesic line on the sphere \mathbf{S}^2 with equation (8).

Proof. According to the proposition, a projection of the trajectories of this Hamiltonian system is geodesic on \mathbf{S}^2 . Let us find it.

In this case, the tangent vectors are

$$r_u = \{-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u\},$$

$$r_v = \{-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0\}.$$

We get the first quadratic form matrix and the inverse matrix of the first quadratic form, they are shown below, respectively:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix} \text{ and } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 u} \end{pmatrix}.$$

Hamiltonian system in the cotangent bundle $T^*\mathbf{S}^2$ is the following system :

$$\begin{cases} p_1' = -\frac{\sin u}{\cos^3 u} p_2^2, \\ p_2' = 0, \\ u' = p_1, \\ v' = \frac{p_2}{\cos^2 u}. \end{cases} \tag{9}$$

The corresponding Hamiltonian function is

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{1}{\cos^2 u} p_2^2 \right).$$

Using the equations of the system, we have the following

$$p_2 = C, \quad u'' = p_1' = -\frac{\sin u}{\cos^3 u} C^2, \quad u' = p_1 = -\frac{C^2}{2 \cos^2 u} + C_1^2$$

and

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\sin u}{\cos^3 u} C^2, \\ \frac{dp_2}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dt} = \frac{2C_1^2 \cos^2 u - C^2}{2 \cos^2 u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{C}{\cos^2 u}. \end{cases} \tag{10}$$

Let us find the projection of the trajectories of the system (10).

If we consider the following equalities as

$$\frac{dt}{du} = \frac{2 \cos^2 u}{2C_1^2 \cos^2 u - C^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{C}{\cos^2 u} \quad \text{and} \quad \frac{dv}{du} = \frac{C}{C_1^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u - \frac{C^2}{2C_1^2}},$$

then we can write the explicit equation of the geodesic as $v = v(u)$.

If we replace the variables as: $x = \tan u$, $du = \frac{dx}{x^2 + 1}$ and $\cos^2 u = \frac{1}{x^2 + 1}$, we get

$$dv = -\frac{2}{C} \cdot \frac{dx}{x^2 + 1 - \frac{2C_1^2}{C^2}}. \tag{11}$$

Let us solve the differential equation (11).

When $\frac{2C_1^2}{C^2} < 1$ and $C, C_1 \neq 0$, we have

$$v(x) = -\frac{2}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \arctan \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} x \right) + C_2,$$

or if $\frac{2C_1^2}{C^2} > 1$ and $C, C_1 \neq 0$, then we get

$$v(u) = -\frac{1}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \ln \left| \frac{Cx + \sqrt{C^2 - 2C_1^2}}{Cx - \sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \right| + C_2.$$

Now we replace the old variables and we get equation of the geodesic with the following equation which we seek

$$\text{a) } v(u) = -\frac{2}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \arctan \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} (\tan u) \right) + C_2,$$

where $\frac{2C_1^2}{C^2} < 1$ and $C, C_1 \neq 0$;

$$\text{b) } v(u) = -\frac{1}{\sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \ln \left| \frac{C \tan u + \sqrt{C^2 - 2C_1^2}}{C \tan u - \sqrt{C^2 - 2C_1^2}} \right| + C_2,$$

where $\frac{2C_1^2}{C^2} > 1$ and $C \neq 0$.

Theorem 2 has been proven.

III. Geodesics of the SO(3)

Any rotation of a rigid heavy body around a fixed point in the case of Euler can be described by a rotation matrix belonging to SO(3). The group $SO(3)$ is a compact and smooth three-dimensional manifold \mathbb{R}^9 .

The parametric equations of the matrix $A \in SO(3)$ and the Hamiltonian function on the cotangent bundle of the SO(3) smooth manifold are given in work [2]. We use them to find an equation of geodesic on SO(3).

The Hamiltonian in the cotangent bundle $T^*SO(3)$ is a function

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cos^2 v} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2 \cos^2 v} p_3^2 - \frac{\sin v}{\cos^2 v} p_1 p_3 \right). \tag{12}$$

Hamiltonian system corresponding to the Hamiltonian function (12) is

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = 0 \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\sin v}{2 \cos^3 v} (p_1^2 + p_3^2) + \frac{1 + \sin^2 v}{2 \cos^3 v} p_1 p_3 \\ \frac{dp_3}{dt} = 0 \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{2 \cos^2 v} p_1 - \frac{\sin v}{2 \cos^2 v} p_3 \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} p_2 \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{2 \cos^2 v} p_3 - \frac{\sin v}{2 \cos^2 v} p_1 \end{array} \right. \tag{13}$$

Consider the projection of the trajectory of this system (13). From the system, we know that

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} p_2, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\sin v}{4 \cos^3 v} (p_1^2 + p_3^2) + \frac{1 + \sin^2 v}{4 \cos^3 v} p_1 p_3$$

when coefficients C, p_1, p_3 are non-zero. After solving this ODE, we have

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{p_1^2 + p_3}{8} \frac{1}{\cos^2 v} + \frac{p_1 p_3}{4} \frac{\sin v}{\cos^2 v} + C^2 \tag{14}$$

or

$$\frac{dt}{dv} = \frac{8 \cos^2 v}{8C^2 \cos^2 v + 2p_1 p_3 \sin v - (p_1^2 + p_3^2)}.$$

As a result of ODE (14), we obtain the following ODEs.

$$du = \frac{4(p_1 - \sin v \cdot p_3)dv}{8C^2 \cos^2 v + 2p_1 p_3 \sin v - (p_1^2 + p_3^2)},$$

$$dw = \frac{4(p_3 - \sin v \cdot p_1)dv}{8C^2 \cos^2 v + 2p_1 p_3 \sin v - (p_1^2 + p_3^2)}.$$

or

$$du = \frac{p_3}{2C^2} \frac{\sin v dv}{\sin^2 v - \frac{p_1 p_3}{4C^2} \sin v + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 8C^2}{8C^2}} - \frac{p_1}{2C^2} \frac{dv}{\sin^2 v - \frac{p_1 p_3}{4C^2} \sin v + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 8C^2}{8C^2}},$$

$$dw = \frac{p_1}{2C^2} \frac{\sin v dv}{\sin^2 v - \frac{p_1 p_3}{4C^2} \sin v + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 8C^2}{8C^2}} - \frac{p_3}{2C^2} \frac{dv}{\sin^2 v - \frac{p_1 p_3}{4C^2} \sin v + \frac{p_1^2 + p_3^2 - 8C^2}{8C^2}}.$$

We find the integral curve of the system when the new coefficients a, b satisfy the following conditions $a = \frac{p_1 p_3}{4C^2} > 0, b = \frac{p_1^2 + p_3^2}{8C^2} - 1 > 0,$ and $a^2 - 4b = \frac{p_1^2 p_3^2}{16C^4} - 4 \cdot \frac{p_1^2 + p_3^2 - 8C^2}{8C^2} > 0.$

Our ODEs obtain the following view.

$$du = \frac{p_3}{2C^2} \frac{\sin v dv}{\sin^2 v - a \sin v + b} - \frac{p_1}{2C^2} \frac{dv}{\sin^2 v - a \sin v + b},$$

$$dw = \frac{p_1}{2C^2} \frac{\sin v dv}{\sin^2 v - a \sin v + b} - \frac{p_3}{2C^2} \frac{dv}{\sin^2 v - a \sin v + b}.$$

Leave the replacement as $x = \tan \frac{v}{2}$

$$du = \frac{2p_3}{bC^2} \cdot \frac{xdx}{(x^2 - \frac{a}{b}x + 1)^2 - \frac{a^2 - 4b}{b^2}x^2} - \frac{p_1}{bC^2} \cdot \frac{(1 + x^2)dx}{(x^2 - \frac{a}{b}x + 1)^2 - \frac{a^2 - 4b}{b^2}x^2},$$

$$dw = \frac{2p_1}{bC^2} \cdot \frac{xdx}{(x^2 - \frac{a}{b}x + 1)^2 - \frac{a^2 - 4b}{b^2}x^2} - \frac{p_3}{bC^2} \cdot \frac{(1 + x^2)dx}{(x^2 - \frac{a}{b}x + 1)^2 - \frac{a^2 - 4b}{b^2}x^2}.$$

Finally, we obtain the following geodesic equations with the parameter v ;

$$\left\{ \begin{array}{l} u(v) = \frac{2p_3b - p_1(\sqrt{a^2 - 4b} + a)}{C^2\sqrt{a^2 - 4b}\sqrt{4b^2 - (a + \sqrt{a^2 - 4b})^2}} \cdot \arctan \frac{2b \tan \frac{v}{2} - a - \sqrt{a^2 - 4b}}{\sqrt{4b^2 - (a + \sqrt{a^2 - 4b})^2}} - \\ - \frac{2p_3b + p_1(\sqrt{a^2 - 4b} - a)}{C^2\sqrt{a^2 - 4b}\sqrt{4b^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}} \cdot \arctan \frac{2b \tan \frac{v}{2} - a + \sqrt{a^2 - 4b}}{\sqrt{4b^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}} + C_2, \\ w(v) = \frac{2p_1b - p_3(\sqrt{a^2 - 4b} + a)}{C^2\sqrt{a^2 - 4b}\sqrt{4b^2 - (a + \sqrt{a^2 - 4b})^2}} \cdot \arctan \frac{2b \tan \frac{v}{2} - a - \sqrt{a^2 - 4b}}{\sqrt{4b^2 - (a + \sqrt{a^2 - 4b})^2}} - \\ - \frac{2p_1b + p_3(\sqrt{a^2 - 4b} - a)}{C^2\sqrt{a^2 - 4b}\sqrt{4b^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}} \cdot \arctan \frac{2b \tan \frac{v}{2} - a + \sqrt{a^2 - 4b}}{\sqrt{4b^2 - (a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}} + C_3 \end{array} \right. \quad (15)$$

After all calculations we obtained parametric equations of the curve on SO(3) and we have already proved the following theorem.

Theorem 4. The curve given with equations (15) is a geodesic on SO(3).

REFERENCES

1. Bolsinov A. and Fomenko A. Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification, Ijevsk: Chapman and Hall, 2004.
2. Narmanov A. and Ergashova Sh. On the geometry of SO(3). J. Geom. Symmetry Phys. **72** (2025) 83–94.
3. Narmanov A. and Ergashova Sh. Geometry of some completely integrable Hamiltonian systems. Uzbek Mathematical Journal **69** (2025) 110–119.
4. Trofimov V. and Fomenko A. Algebra and geometry of integrable Hamiltonian differential equations. Faktorial, Moscow 1995.

REZYUME

Bu maqolada uch o'lchamli Yevklid fazosida joylashgan elliptik paraboloid va ikki o'lchamli sfera kabi silliq ko'pxilliklardagi geodezik chiziqlar o'rganilgan. Asosiy natija \mathbb{R}^9 da joylashgan 3 o'lchamli silliq ko'pxillik bo'lgan $SO(3)$ gruppining geodezik chiziq tenglamasi topilgan.

Kalit sozlar: Geodezik chiziq, Hamilton sistemasi, Hamilton vektor maydoni, 3D aylanishlar gruppasi

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена изучению геодезических на гладких многообразиях, таких как эллиптический параболоид и сфера, в трёхмерном евклидовом пространстве. Основным результатом является нахождение уравнений геодезических на группе $SO(3)$, представляющей собой гладкое трёхмерное многообразие в \mathbb{R}^9 .

Ключевые слова: геодезические, Гамильтонова система, Гамильтонова векторные поля, 3D группа вращения.

UDC 512.643

3-D MATRITSALARNI QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH

NISHONBOYEV S.

SERGELI TUMAN IXTISOSLASHTIRILGAN MAKTABI MATEMATIKA FANI O'QITUVCHISI, TOSHKENT,
O'ZBEKISTON
nishanboyevsanjar99@gmail.com

ANNOTATSIYA:

Hozirgi kunda 3-D matritsalarining bir qancha amaliy tadbirlari mavjud bo'lib matematikadan tashqari tibbiyot, fizika, kompyuter grafikasi hamda boshqa turli sohalarda sezilarli ahamiyatga ega. Xususan ushbu maqolada 3-D matritsalarining berilish usullari va ularni qo'shish va ko'paytirish qoidalari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: 3-D matritsa, yuqori belgilash, old belgilash, belgilashni o'zgartirish, ustun vektori, satr vektori, qatlam, satr, ustun, 3-D matritsalarini qo'shish, 3-D matritsalarini ko'paytirish.

3-D matritsalarini qo'shish 2-D matritsalar kabi aniq va tabiiydir. Ammo, ko'paytirishga keladigan bo'lsak, bir qancha holatlar bor. Biz bu maqolada Don Vo kiritgan usulni batafsil ko'rib chiqamiz.

1-ta'rif. Bizga $k \times n$ - tartibli va elementlari haqiqiy sonlar bo'lgan T_1, T_2, \dots, T_m matritsalar berilgan bo'lsin. T_1, T_2, \dots, T_m larni 3-D matritsa ko'rinishda yuqoridan pastga qarab joylashtirib chiqamiz. Biz $A = \{T_1|T_2|\dots|T_m\}$ deb A matritsaning yuqori belgilash ko'rinishi deb aytamiz [1].

A matritsani quyidagi ko'rinishda ham yoza olamiz:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & \cdots & a_{1,1,n} & a_{2,1,1} & a_{2,1,2} & \cdots & a_{2,1,n} & a_{m,1,1} & a_{m,1,2} & \cdots & a_{m,1,n} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} & \cdots & a_{1,2,n} & a_{2,2,1} & a_{2,2,2} & \cdots & a_{2,2,n} & a_{m,2,1} & a_{m,2,2} & \cdots & a_{m,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,k,1} & a_{1,k,2} & \cdots & a_{1,k,n} & a_{2,k,1} & a_{2,k,2} & \cdots & a_{2,k,n} & a_{m,k,1} & a_{m,k,2} & \cdots & a_{m,k,n} \end{array} \right]_T$$

$A - m \times n \times k$ matritsa.

$a_{i,j,r}$ ning birinchi indeksi T_i dagi i -qatlamni bildiradi ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq k$).

1-Misol. Aytaylik, quyidagi matritsa berilgan bo'lsa,

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 20 & 30 & 40 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 50 & 60 & 70 & -5 & -6 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 80 & 90 & 50 & -9 & -8 & -9 \end{array} \right]_T$$

bu matritsaning yuqori belgilash ko'rinishini hosil qilish uchun uchta 3×3 matritsalarini tartibini saqlagan holda yuqoridan pastga qarab joylashtirib chiqishimiz zarur.

2-Ta'rif. Elementlari haqiqiy sonlar bo'lgan $m \times n$ - tartibli F_1, F_2, \dots, F_k matritsalar berilgan bo'lsin. F_1, F_2, \dots, F_k larni 3-D matritsa ko'rinishda oldindan orqaga qarab joylashtirib chiqamiz. Biz $B = [F_1 | F_2 | \dots | F_k]_F$ va B matritsaning old belgilash ko'rinishi deb ataymiz.

B matritsani quyidagi ko'rinishda ham yoza olamiz.

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} b_{1,1,1} & b_{1,1,2} & \cdots & b_{1,1,n} & b_{1,2,1} & b_{1,2,2} & \cdots & b_{1,2,n} & b_{1,k,1} & b_{1,k,2} & \cdots & b_{1,k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1,1} & b_{m,1,2} & \cdots & b_{m,1,n} & b_{m,2,1} & b_{m,2,2} & \cdots & b_{m,2,n} & b_{m,k,1} & b_{m,k,2} & \cdots & b_{m,k,n} \end{array} \right]_F$$

Bu yerda $B - m \times n \times k$ matritsa.

$b_{i,j,r}$ ning birinchi indeksi F_i dagi i -qatlamni bildiradi.

2-misol.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 20 & 30 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 40 & 50 & 60 & 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 70 & 80 & 90 & 14 & 16 & 18 \end{array} \right]_F.$$

Yuqoridagi matritsa 3 ta 3×3 matritsalaridan iborat bo'lib, uning old ko'rinishini topish uchun mos ravishda, olddan orqaga qarab joylashtirib chiqishimiz lozim.

BELGILASHNI O'ZGARTIRISH

Belgilashni o'zgartirish yuqoridan oldga va olddan yuqoriga bo'ladi.

Eslatma: Matritsani biz yuqori belgilash yoki old belgilash ko'rinishida ifodalay olamiz.

Bizga $A_{k \times n \times m}$ 3-D matritsa berilgan bo'lsin.

Demak,

$$A = [T_1 | T_2 | \dots | T_m]_T = [F_1 | F_2 | \dots | F_k]_F.$$

Hozir biz ko'rsatmoqchimiz yuqori belgilash ko'rinishidan old belgilash ko'rinishiga qanday qilib o'tishni yoki aksincha.

Agar biz T_i ni quyidagicha yozib olsak:

$$T_i = \begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ \vdots \\ T_k^i \end{bmatrix}$$

T_i matritsa satr vektorlari bo'yicha yozilgan.

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & \dots & a_{1,1,n} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} & \dots & a_{1,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,k,1} & a_{1,k,2} & \dots & a_{1,k,n} \end{pmatrix}$$

va F_j ni ham quyidagicha yozib olsak:

$$F_j = \begin{bmatrix} F_1^j \\ F_2^j \\ \vdots \\ F_m^j \end{bmatrix}$$

F_j matritsa satr vektorlari bo'yicha yozilgan:

$$F_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1,1} & b_{1,1,2} & \dots & b_{1,1,n} \\ b_{2,1,1} & b_{2,1,2} & \dots & b_{2,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1,1} & b_{m,1,2} & \dots & b_{m,1,n} \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi A matritsamizga yuqoridan qarasak m ta qatlam, k ta satr va n ta ustun bor.

Agar olddan qarasak k ta qatlam, m ta satr va n ta ustun bor. Umuman olganda, $F_i^j = T_j^i$ ya'ni i -qatlarning j -satri F_i da, j -qatlarning i -satri T_j ga tengdir.

$$\begin{bmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \cdots & T_m^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & \cdots & T_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^k & T_2^k & \cdots & T_m^k \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} F_1^1 & F_2^1 & \cdots & F_k^1 \\ F_1^2 & F_2^2 & \cdots & F_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1^n & F_2^n & \cdots & F_k^n \end{bmatrix}_F$$

Demak yuqoridagi oxirgi tenglikdan:

$$[T_1 | T_2 | \cdots | T_m]_T = [F_1 | F_2 | \cdots | F_k]_F.$$

ga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \right]_T = \\ &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 40 & 50 & 60 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 70 & 80 & 90 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \right]_F. \end{aligned}$$

NATIJALAR

Bizga bir xil o'lchamli ikkita $A = [A_1|A_2|A_3|\dots|A_m]_T$ va $B = [B_1|B_2|B_3|\dots|B_m]_T$ 3-D matritsalar berilgan bo'lsin, ularning yig'indisi quyidagicha bo'ladi:

$$A + B = [A_1 + B_1|A_2 + B_2|\dots|A_m + B_m]_T$$

Xuddi shunga o'xshash, bizga bir xil o'lchamli ikkita $A = [A_1|A_2|A_3|\dots|A_m]_F$ va $B = [B_1|B_2|B_3|\dots|B_m]_F$ 3-D matritsalar berilgan bo'lsin, ularning yig'indisini avvalgi holdagi kabi quyidagicha ifodalaymiz:

$$A + B = [A_1 + B_1|A_2 + B_2|\dots|A_m + B_m]_F$$

1-Teorema. Aytaylik, $1 \leq m_0 \leq m$, $1 \leq k_0 \leq k$, $1 \leq n_0 \leq n$ bo'lsin. $A + B$ ning (m_0, k_0, n_0) elementini ko'rib chiqadigan bo'lsak, bu ikkala belgilashda ham $a_{m_0 \times k_0 \times n_0} + b_{m_0 \times k_0 \times n_0}$ dan kelib chiqadi. Shu sababli, $A_F + B_F$ va $A_T + B_T$ larning (m_0, k_0, n_0) elementlari aynan mos keladi.

Isbot: $A_T + B_T$ ni hisoblaydigan bo'lsak, biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{1,1,1} + b_{1,1,1} & a_{1,1,2} + b_{1,1,2} & \cdots & a_{1,1,n} + b_{1,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,k,1} + b_{1,k,1} & a_{1,k,2} + b_{1,k,2} & \cdots & a_{1,k,n} + b_{1,k,n} \end{bmatrix} \cdots \\ &\begin{bmatrix} a_{m,1,1} + b_{m,1,1} & a_{m,1,2} + b_{m,1,2} & \cdots & a_{m,1,n} + b_{m,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,k,1} + b_{m,k,1} & a_{m,k,2} + b_{m,k,2} & \cdots & a_{m,k,n} + b_{m,k,n} \end{bmatrix}_T. \end{aligned}$$

Shuni ta'kidab o'tamizki:

$$A = \left[\begin{bmatrix} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & \cdots & a_{1,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,k,1} & a_{1,k,2} & \cdots & a_{1,k,n} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{m,1,1} & a_{m,1,2} & \cdots & a_{m,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,k,1} & a_{m,k,2} & \cdots & a_{m,k,n} \end{bmatrix} \right]_T$$

Bundan ko'rish mumkinki:

$$A = \left[\left[\begin{array}{cccc} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & \cdots & a_{1,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1,1} & a_{m,1,2} & \cdots & a_{m,1,n} \end{array} \right] \cdots \left[\begin{array}{cccc} a_{1,k,1} & a_{1,k,2} & \cdots & a_{1,k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,k,1} & a_{m,k,2} & \cdots & a_{m,k,n} \end{array} \right] \right]_F.$$

Shuning uchun $A_F + B_F = A_T + B_T$ ekanligi kelib chiqadi.

3-D matritsalarini qo'shish tabiiy va aniq, ammo ko'paytirishga keladigan bo'lsak unday emas. 3-D matritsalarini ko'paytirishning bir necha xil usullari bor. Lekin biz Don Vo kiritgan usuldan foydalanamiz. E'tibor beradigan bo'lsak ko'paytirishni bajarish uchun uchta o'lchovlardan tashqarilari mos bo'lishi kerak.

Bizga yuqori belgilash ko'rinishidagi $A_{k \times n \times m} = [T_1 | T_2 | T_3 | \dots | T_m]_T$ 3-D matritsa berilgan bo'lsin. $T_1, T_2, T_3, \dots, T_m$ lar $k \times n$ -tartibli 2-D matritsalar. T_i ni ustunlari bo'yicha yozib chiqamiz, $T_i = [T_1^i, T_2^i, \dots, T_n^i]$. Har bir ustunda k tadan element mavjud.

Shuningdek old belgilash ko'rinishidagi $B_{t \times n \times m} = [F_1 | F_2 | F_3 | \dots | F_t]_F$ 3-D matritsa berilgan bo'lsin. $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$ lar $k \times n$ tartibli 2-D matritsalar. F_j ni ustunlari bo'yicha yozib chiqamiz, $F_j = [F_1^j, F_2^j, \dots, F_n^j]$. Har bir ustunda k tadan element mavjud.

$T_1^i - T_i$ ning birinchi ustuni, $F_1^j - F_j$ ning birinchi ustuni.

Shuni eslatib o'tish kerakki T_i va F_j larning har bir ustunlarida k tadan element mavjud.

2-Teorema. Ixtiyoriy $k, m, n, t \in \mathbb{N}$, uchun $A_{k \times n \times m} \cdot B_{t \times n \times k} = C_{t \times n \times m} = [\widehat{T}_1 \widehat{T}_2 \widehat{T}_3 \dots \widehat{T}_m]_T$ tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda T_i ($1 < i < m$) quyidagiga teng:

$$\widehat{T}_i = \begin{bmatrix} T_i^1 \cdot F_1^1 & T_i^2 \cdot F_1^2 & \cdots & T_i^n \cdot F_1^n \\ T_i^1 \cdot F_2^1 & T_i^2 \cdot F_2^2 & \cdots & T_i^n \cdot F_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_i^1 \cdot F_t^1 & T_i^2 \cdot F_t^2 & \cdots & T_i^n \cdot F_t^n \end{bmatrix}_{t \times n}$$

Eslatma: $T_1^i \cdot F_1^j - T_i$ va F_j larning ustun vektorlarining skalyar ko'paytmasi.

$A(k)$ ning 1-koordinatasi $B(k)$ ning 3-koordinatasi bilan, ikkinchi koordinatasi $B(n)$ ning ikkinchi koordinatasi bilan mos tushishi kerak.

Isbot: Eslatmadan foydalangan holda \widehat{T}_i lar uchun matematik induksiya metodini qo'llasak uning yuqoridagi kabi ko'rinishiga ega bo'lamiz va T_i larni yuqori belgilash ko'rinishida yozib chiqsak $C_{t \times n \times m}$ matritsani hosil qilamiz.

3-Misol. $A_{4 \times 3 \times 2} \cdot B_{3 \times 3 \times 4} = C_{3 \times 3 \times 2}$ ni hisoblaymiz.

$$A_{4 \times 3 \times 2} = [T_1 | T_2]_T = \left[\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \right]_T$$

$$B_{3 \times 3 \times 4} = [F_1 | F_2 | F_3]_F = \left[\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \right]_F.$$

A va B matritsalarimizning ko'paytmasi ya'ni C matritsamiz quyidagiga teng:

$$\widehat{T}_1 = \begin{bmatrix} T_1^1 \cdot F_1^1 & T_1^2 \cdot F_1^2 & T_1^3 \cdot F_1^3 \\ T_1^1 \cdot F_2^1 & T_1^2 \cdot F_2^2 & T_1^3 \cdot F_2^3 \\ T_1^1 \cdot F_3^1 & T_1^2 \cdot F_3^2 & T_1^3 \cdot F_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 64 & 21 \\ 66 & 68 & 18 \\ 24 & 39 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{T}_2 = \begin{bmatrix} T_2^1 \cdot F_1^1 & T_2^2 \cdot F_1^2 & T_2^3 \cdot F_1^3 \\ T_2^1 \cdot F_2^1 & T_2^2 \cdot F_2^2 & T_2^3 \cdot F_2^3 \\ T_2^1 \cdot F_3^1 & T_2^2 \cdot F_3^2 & T_2^3 \cdot F_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 22 & 25 \\ 16 & 27 & 11 \\ 16 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C_{3 \times 3 \times 2} = [\widehat{T}_1 \widehat{T}_2]_T = \left[\left[\begin{array}{ccc} 55 & 64 & 21 \\ 66 & 68 & 18 \\ 24 & 39 & 1 \end{array} \right] \middle| \left[\begin{array}{ccc} 18 & 22 & 25 \\ 16 & 27 & 11 \\ 16 & 6 & 8 \end{array} \right] \right]_T .$$

XULOSA

Bizga ma'lumki 2-D matritsalar algebrasida $(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$, 3-D matritsalar algebrasida esa $(k \times n \times m) \cdot (t \times n \times k) = (t \times n \times m)$, ya'ni birinchi matritsamizning birinchi koordinatasi bilan ikkinchi matritsamizning uchinchi koordinatasi mos tushishi kerak, birinchi matritsamizning ikkinchi koordinatasi bilan ikkinchi matritsamizning ikkinchi koordinatasi bilan mos tushishi lozim hamda natijaviy matritsamizning ikkinchi koordinatasi ham birinchi va ikkinchi matritsalarimizniki kabi bo'lishi zarur. Birinchi matritsamizning uchinchi koordinatasi natijaviy matritsamizning uchinchi, shuningdek ikkinchi matritsamizning birinchi koordinatasi natijaviy matritsamizning birinchi koordinatalari bilan bilan mos ravishda bir xil bo'lishi lozim.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Don D.Vo, 3-Dimensional Matrix Mathematical Operations, California state university-channel Islands 2017, 8-41-betlar
2. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov, Algebra va sonlar nazariyasi (o'quv qo'llanma) Toshkent-2019, 44-46 hamda 68-bet.
3. P.Selinger, Matrix Theory and Linear Algebra 2018, 131-132-betlar.

Rezyume

At present, there are a number of practical applications of three-dimensional matrices, which are of considerable importance not only in mathematics, but also in medicine, physics, computer graphics, and various other fields. In particular, this article examines the methods of representing three-dimensional matrices, as well as the rules for their addition and multiplication.

Key words: 3-D matrix, top representation, front representation, change of representation, column vector, row vector, layer, row, column, addition of 3-D matrices, multiplication of 3-D matrices.

Rezyume

В настоящее время существует ряд практических приложений трёхмерных матриц, которые имеют значительное значение не только в математике, но и в медицине, физике, компьютерной графике, а также в других различных областях. В частности, в данной статье рассмотрены способы представления трёхмерных матриц, а также правила их сложения и умножения.

Ключевые слова: 3-D матрица, верхняя индексация, передняя индексация, изменение индексации, вектор-столбец, вектор-строка, слой, строка, столбец, сложение 3-D матриц, умножение 3-D матриц.

UDC 512.554

ON THE n -LIE ALGEBRAS OF GENERALIZED JACOBIAN AND WRONSKIAN

NURATDINOV K. D.

TASHKENT TECHNICAL UNIVERSITY NAMED AFTER I. KARIMOV, TASHKENT

kazbeknur11@gmail.com

GAYBULLAEV R. Q.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT

r_gaybullaev@mail.ru

RESUME

In this paper, we introduce skew-symmetric n -ary brackets on an associative commutative algebra, constructed by extending the Jacobian and Wronskian determinants with two additional columns. We determine the necessary and sufficient conditions under which the resulting n -ary algebras are n -Lie algebras. Moreover, we present several new examples of n -Lie algebras.

Key words: n -Lie algebras, Jacobian, Wronskian, derivation.

Introduction.

Lie algebras play a significant role in various areas of physics, including general relativity, quantum field theory, quantum mechanics, and string theory. As a central topic in mathematics, Lie theory has been the subject of extensive research for many years. The study of Lie algebras has led to numerous notable results and plentiful generalizations, highlighting their fundamental importance and wide-ranging applicability.

Building on the general concept of Ω -algebras introduced by Kurosh in [9], V.T. Phillipov proposed a broad extension of Lie algebras known as n -Lie algebras [5]. As an infinite-dimensional example, he introduced the n -Lie algebras defined by Jacobians [6]. Later, L. Takhtajan in [14] observed that this construction had already appeared in Nambu's generalization of Hamiltonian mechanics. Specifically, it involves the space $C^\infty(M)$ of C^∞ -functions on a finite-dimensional manifold M , equipped with an n -ary bracket defined via the Jacobian determinant.

Another notable example of an infinite-dimensional n -Lie algebra was provided by Dzhumadil'daev in [4]. Specifically, any commutative associative algebra equipped with $n - 1$ mutually commuting derivations, and endowed with an n -ary bracket defined via the Wronskian, forms an n -Lie algebra. These two constructions—the Jacobian and the Wronskian—constitute the primary known methods for constructing of infinite-dimensional n -Lie algebras. For a comprehensive overview of the structural theory of finite-dimensional n -Lie algebras, we refer the reader to [1-3,11-13,15] and the references therein.

Subsequently, the concepts of n -Lie algebras defined by Poisson and contact brackets were introduced. Both constructions endow an associative commutative algebra with an n -Lie algebra structure, subject to certain additional conditions. A comprehensive survey of these types of brackets can be found in [7].

It is worth noting that the n -Lie algebra defined by Wronskians serves as an n -ary analogue of the contact bracket. Motivated by this observation, in the present paper we introduce a new n -ary bracket and establish necessary and sufficient conditions under which it defines an n -contact bracket. Using these criteria, we construct several examples; for one of them, we prove simplicity and describe its ideals. Additionally, we propose an n -ary bracket formed by appending an extra column to the Jacobian, and we determine the conditions under which it defines an n -Lie Poisson algebra. We also note that simple subalgebras of the n -Lie algebra of Jacobians were previously investigated in [13].

Preliminaries.

Definition 1. A vector space L equipped with skew-symmetric ternary bracket $[-, -, \dots, -]$ is called an n -Lie algebra if the following identity holds for any $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in L$:

$$[[x_1, x_2, \dots, x_n], y_1, \dots, y_{n-1}] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_1, \dots, y_{n-1}], \dots, x_n].$$

Definition 2. A derivation of an n -Lie algebra is a linear transformation D of L into itself satisfying

$$D([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, D(x_i), \dots, x_n],$$

for any $x_1, \dots, x_n \in L$. All the derivations of L generate a subalgebra of Lie algebra $gl(L)$ which is called the derivation algebra of L and denoted by $Der(L)$.

Here is a result from [5].

Theorem 1. The algebra of Jacobians $\mathcal{A}^*(d_1, \dots, d_n)$ for any associative and commutative \mathbb{F} -algebra \mathcal{A} with its commuting derivations d_1, \dots, d_n is an n -Lie algebra.

It is easy to see that the following equality holds true

$$[ab, x_2, \dots, x_n]_J = a[b, x_2, \dots, x_n]_J + b[a, x_2, \dots, x_n]_J.$$

This gives an example of n -Lie-Poisson algebras (see [4]).

Similarly, if one considers an associative commutative \mathbb{F} -algebra \mathcal{A} and its commuting derivations d_1, \dots, d_{n-1} , then due to the result of [4] the vector space \mathcal{A} with the following n -ary bracket $[x_1, \dots, x_n]_W := Wr(x_1, \dots, x_n)$, where

$$Wr(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ d_1(x_1) & d_1(x_2) & \dots & d_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-1}(x_1) & d_{n-1}(x_2) & \dots & d_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

forms an n -Lie algebra, which is called the n -Lie algebra of Wronskians.

Note that the n -ary bracket $[-, -]_W$ satisfies the following equality

$$[ab, x_2, \dots, x_n]_W = a[b, x_2, \dots, x_n]_W + b[a, x_2, \dots, x_n]_W - ab[\mathbf{1}, x_2, \dots, x_n]_W.$$

Let A be a commutative associative algebra over \mathbb{F} and g be a Lie algebra of derivations of A , such that A contains no non-trivial g -invariant ideals.

Example 1. $S(A, g) = A$, where g is an n -dimensional Lie algebra with a basis D_1, \dots, D_n , being $[f_1, \dots, f_n]_J$ the n -ary Lie bracket.

Example 2. $W(A, g) = A$, where g is an $(n - 1)$ -dimensional Lie algebra with a basis D_1, \dots, D_{n-1} , being $[f_1, \dots, f_n]_W$ the n -ary Lie bracket.

Example 3. $SW(A, D) = A^{<1>} \oplus \dots \oplus A^{<n-1>}$ is the sum of $n - 1$ copies of A and $g = \mathbb{F}D$, the n -ary Lie bracket is defined as follows: let $h \in A$ with $h^{<k>} \in A^{<k>}$. Define

$$\begin{aligned} [f_1^{<j_1>}, \dots, f_n^{<j_n>}] &= 0, \text{ unless } \{j_1, \dots, j_n\} \supset \{1, \dots, n - 1\}; \\ [f_1^{<1>}, \dots, f_{k-1}^{<k-1>}, f_k^{<k>}, f_{k+1}^{<k>}, f_{k+2}^{<k+1>}, \dots, f_n^{<n-1>}] &= \\ (-1)^{k+n-1} (f_1 \dots f_{k-1} (D(f_k) f_{k+1} - f_k D(f_{k+1})) f_{k+2} \dots f_n)^{<k>. \end{aligned}$$

In [10] it was claimed that Examples (1) - (3) above are only known infinite-dimensional simple n -Lie algebras over an algebraically closed field \mathbb{F} of characteristic 0 for $n \geq 3$.

Generalization of Jacobian.

Let \mathcal{A} be an associative commutative \mathbb{F} -algebra and d_1, d_2, \dots, d_{n+2} be pairwise commuting derivations of \mathcal{A} . Then, define the following n -ary bracket on \mathcal{A} :

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} d_1(x_1) & \dots & d_1(x_n) & \alpha_1 & \beta_1 \\ d_2(x_1) & \dots & d_2(x_n) & \alpha_2 & \beta_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n+1}(x_1) & \dots & d_{n+1}(x_n) & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ d_{n+2}(x_1) & \dots & d_{n+2}(x_n) & \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} \end{vmatrix} \tag{1}$$

where $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, \dots, n + 2\}$.

Our aim is to define necessary and sufficient conditions, under which $\langle \mathcal{A}, [-, -, \dots, -]_{\alpha\beta}$ forms an n -Lie algebra. Assume that $\beta_i \in \mathbb{F}$, $i \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$. Then at least one parameter β_i is supposed to be nonzero. Without loss of generality, assume that $\beta_{n+2} \neq 0$. Then we make some elementary operations on (1) and obtain the following:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]_{\alpha\beta} = c \begin{vmatrix} \beta_{n+2}d_1(x_1) - \beta_1d_{n+2}(x_1) & \beta_{n+2}d_1(x_2) - \beta_1d_{n+2}(x_2) & \dots & \beta_{n+2}\alpha_1 - \beta_1\alpha_{n+2} & 0 \\ \beta_{n+2}d_2(x_1) - \beta_2d_{n+2}(x_1) & \beta_{n+2}d_2(x_2) - \beta_2d_{n+2}(x_2) & \dots & \beta_{n+2}\alpha_2 - \beta_2\alpha_{n+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n+2}d_{n+1}(x_1) - \beta_{n+1}d_{n+2}(x_1) & \beta_{n+2}d_{n+1}(x_2) - \beta_{n+1}d_{n+2}(x_2) & \dots & \beta_{n+2}\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}\alpha_{n+2} & 0 \\ & d_{n+2}(x_1) & d_{n+2}(x_2) & \dots & \alpha_{n+2} & \beta_{n+2} \end{vmatrix}.$$

Set $D_k = \beta_{n+2}d_k - \beta_kd_{n+2}$ and $\alpha_k^* = \alpha_k\beta_{n+2} - \beta_k\alpha_{n+2}$, ($k = \overline{1, n + 1}$), then we obtain the following generalized Jacobian:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]_{\alpha^*} = c \begin{vmatrix} D_1(x_1) & D_1(x_2) & \dots & D_1(x_n) & \alpha_1^* \\ D_2(x_1) & D_2(x_2) & \dots & D_2(x_n) & \alpha_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D_{n+1}(x_1) & D_{n+1}(x_2) & \dots & D_{n+1}(x_n) & \alpha_{n+1}^* \end{vmatrix},$$

where $c = (-1)^{n+1} \frac{1}{\beta_{n+2}^{n+1}}$. In [8], it is presented the criterion for n -ary brackets defined as above to be an n -Lie algebra. Applying that, we obtain the following equality:

$$\left| \begin{matrix} \alpha_i^* & \alpha_j^* \\ D_k(\alpha_i^*) & D_k(\alpha_j^*) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_j^* & \alpha_k^* \\ D_i(\alpha_j^*) & D_i(\alpha_k^*) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_k^* & \alpha_i^* \\ D_j(\alpha_k^*) & D_j(\alpha_i^*) \end{matrix} \right| = 0$$

Expanding the equality above, we get the following relation:

$$\begin{aligned} & (\alpha_i\beta_{n+2} - \alpha_{n+2}\beta_i) d_k(\alpha_j) + (\alpha_j\beta_i - \alpha_i\beta_j) d_k(\alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+2}\beta_j - \alpha_j\beta_{n+2}) d_k(\alpha_i) \\ & + (\alpha_k\beta_i - \alpha_i\beta_k) d_{n+2}(\alpha_j) + (\alpha_j\beta_{n+2} - \alpha_{n+2}\beta_j) d_i(\alpha_k) + (\alpha_k\beta_j - \alpha_j\beta_k) d_i(\alpha_{n+2}) \\ & + (\alpha_{n+2}\beta_k - \alpha_k\beta_{n+2}) d_i(\alpha_j) + (\alpha_j\beta_k - \alpha_k\beta_j) d_{n+2}(\alpha_i) + (\alpha_k\beta_{n+2} - \alpha_{n+2}\beta_k) d_j(\alpha_i) \\ & + (\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i) d_j(\alpha_{n+2}) + (\alpha_{n+2}\beta_i - \alpha_i\beta_{n+2}) d_j(\alpha_k) + (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) d_{n+2}(\alpha_k) = 0 \end{aligned}$$

With language of determinants, the relation above can be written in the following form:

$$\left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ d_{n+2}(\alpha_i) & d_{n+2}(\alpha_j) & d_{n+2}(\alpha_k) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_{n+2} & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_{n+2} & \beta_k \\ d_j(\alpha_i) & d_j(\alpha_{n+2}) & d_j(\alpha_k) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_{n+2} & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_{n+2} & \beta_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_{n+2}) & d_k(\alpha_j) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_j & \alpha_{n+2} & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_{n+2} & \beta_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_{n+2}) & d_i(\alpha_k) \end{matrix} \right| = 0$$

This proves the following theorem for generalized Jacobians:

Theorem 2. Let $\beta_i \in \mathbb{F}$ for $i \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$. Then the n -algebra $\langle L, [-, -, \dots, -]_{\alpha,\beta}$ is an n -Lie algebra if and only if

$$\left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ d_{n+2}(\alpha_i) & d_{n+2}(\alpha_j) & d_{n+2}(\alpha_k) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_{n+2} & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_{n+2} & \beta_k \\ d_j(\alpha_i) & d_j(\alpha_{n+2}) & d_{n+2}(\alpha_k) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_i & \alpha_{n+2} & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_{n+2} & \beta_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_{n+2}) & d_k(\alpha_j) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} \alpha_j & \alpha_{n+2} & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_{n+2} & \beta_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_{n+2}) & d_i(\alpha_k) \end{matrix} \right| = 0$$

for all $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$.

Here, we provide some examples for generalized n -Lie algebra.

Example 4. Consider a unitary associative commutative algebra A . Let d_i , $1 \leq i \leq n + 2$ be pairwise commuting derivations of A and $\alpha_i \in \mathbb{F}$ for all $1 \leq i \leq n + 2$. Then, $\langle A, [-, \dots, -]_{\alpha,\beta}$ is an n -Lie algebra.

Example 5. Consider a unitary associative commutative algebra A with mutually permuting derivations d_i , $1 \leq i \leq n + 2$. Let $\alpha_i = d_i(\alpha)$, $\alpha \in A$, $1 \leq i \leq n + 2$, then, $\langle A, [-, \dots, -]_{\alpha,\beta}$ is an n -Lie algebra.

Generalization of Wronskian.

In this section we construct another n -ary bracket on associative commutative algebra with given mutually commuting derivations of the algebra. Furthermore, we provide conditions for an n -algebra with the n -ary bracket constructed to be an n -Lie algebra.

Let \mathcal{A} be an associative commutative \mathbb{F} -algebra and d_1, \dots, d_{n+1} be pairwise commuting derivations of \mathcal{A} . Fix $x_1, \dots, x_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in \mathcal{A}$ define the following n -ary bracket on \mathcal{A} as follows:

$$\{x_1, \dots, x_n\}_{\alpha, \beta} = Wr(x)_{\alpha, \beta} = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & \alpha_0 & \beta_0 \\ d_1(x_1) & \dots & d_1(x_n) & \alpha_1 & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n(x_1) & \dots & d_n(x_n) & \alpha_n & \beta_n \\ d_{n+1}(x_1) & \dots & d_{n+1}(x_n) & \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \end{vmatrix}.$$

We present a condition under which the n -ary algebra defined as above forms an n -Lie algebra. For this, let us first define a relation between generalized Jacobian and Wronskian. Consider the tensor algebra $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathbb{F}[t^{\pm}]$. Define the following maps on $\tilde{\mathcal{A}}$:

$$d_0(a \otimes f(t)) = a \otimes t \frac{\partial f}{\partial t}, \quad d_i(a \otimes f(t)) = d_i(a) \otimes f(t), 1 \leq i \leq n + 1.$$

Clearly d_0, d_i are commuting derivations of $Der(\tilde{\mathcal{A}})$. Let us define generalized Jacobian on $\tilde{\mathcal{A}}$ as follows:

$$Jac(x_1 \otimes f_1(t), \dots, x_n \otimes f_n(t))_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} = \begin{vmatrix} d_0(x_1 \otimes f_1(t)) & \dots & d_0(x_n \otimes f_n(t)) & \alpha_0 \otimes t & \beta_0 \otimes t^{-n} \\ d_1(x_1 \otimes f_1(t)) & \dots & d_1(x_n \otimes f_n(t)) & \alpha_1 \otimes t & \beta_1 \otimes t^{-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n(x_1 \otimes f_1(t)) & \dots & d_n(x_n \otimes f_n(t)) & \alpha_n \otimes t & \beta_n \otimes t^{-n} \\ d_{n+1}(x_1 \otimes f_1(t)) & \dots & d_{n+1}(x_n \otimes f_n(t)) & \alpha_{n+1} \otimes t & \beta_{n+1} \otimes t^{-n} \end{vmatrix}$$

where $\tilde{\alpha} = (\alpha_0 \otimes t, \dots, \alpha_{n+1} \otimes t), \tilde{\beta} = (\beta_0 \otimes t^{-n}, \dots, \beta_{n+1} \otimes t^{-n})$.

Then, for $x_1 \otimes t, \dots, x_n \otimes t, y_1 \otimes t, \dots, y_{n-1} \otimes t \in \tilde{\mathcal{A}}$ one has

$$\begin{aligned} & Jac(x_1 \otimes t, \dots, x_{s-1} \otimes t, Jac(x_s \otimes t, y_1 \otimes t, \dots, y_{n-1} \otimes t)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}, x_{s+1} \otimes t, \dots, x_n \otimes t)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \\ &= Jac(x_1 \otimes t, \dots, x_{s-1} \otimes t, Wr(x_s, y_1, \dots, y_{n-1})_{\alpha\beta} \otimes t, x_{s+1} \otimes t, \dots, x_n \otimes t)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \\ &= Wr(x_1, \dots, x_{s-1}, Wr(x_s, y_1, \dots, y_{n-1})_{\alpha\beta}, x_{s+1}, \dots, x_n)_{\alpha\beta} \otimes t, \end{aligned}$$

where $1 \leq s \leq n$. This gives the direct relation between the generalized Jacobian and Wronskian.

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n Jac(x_1 \otimes t, \dots, x_{s-1} \otimes t, Jac(x_s \otimes t, y_1 \otimes t, \dots, y_{n-1} \otimes t)_{\tilde{\alpha}}, x_{s+1} \otimes t, \dots, x_n \otimes t)_{\tilde{\alpha}} \\ & \quad - Jac(Jac(x_1 \otimes t, \dots, x_n \otimes t)_{\tilde{\alpha}}, y_1 \otimes t, \dots, y_{n-1} \otimes t)_{\tilde{\alpha}} = \\ & \left(\sum_{s=1}^n \{x_1, \dots, x_{s-1}, \{x_s, y_1, \dots, y_{n-1}\}_{\alpha}, x_{s+1}, \dots, x_n\}_{\alpha} - \{\{x_1, \dots, x_n\}_{\alpha}, y_1, \dots, y_{n-1}\}_{\alpha} \right) \otimes t \end{aligned}$$

Therefore, we can state the following theorem:

Theorem 3. Let $\beta_i \in \mathbb{F}$ for $i \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$. Then the n -algebra $\langle \mathcal{A}, \{-, \dots, -\}_{\alpha, \beta} \rangle$ is an n -Lie algebra if and only if

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_p & \alpha_q \\ \beta_0 & \beta_p & \beta_q \\ d_{n+1}(\alpha_0) & d_{n+1}(\alpha_p) & d_{n+1}(\alpha_q) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n+1} & \alpha_q \\ \beta_0 & \beta_{n+1} & \beta_q \\ d_p(\alpha_0) & d_p(\alpha_{n+1}) & d_p(\alpha_q) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n+1} & \alpha_p \\ \beta_0 & \beta_{n+1} & \beta_p \\ d_q(\alpha_0) & d_q(\alpha_{n+1}) & d_q(\alpha_p) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ d_{n+1}(\alpha_i) & d_{n+1}(\alpha_j) & d_{n+1}(\alpha_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{n+1} & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_{n+1} & \beta_k \\ d_j(\alpha_i) & d_j(\alpha_{n+1}) & d_{n+1}(\alpha_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_{n+1} & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_{n+1} & \beta_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_{n+1}) & d_k(\alpha_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_j & \alpha_{n+1} & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_{n+1} & \beta_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_{n+1}) & d_i(\alpha_k) \end{vmatrix} = 0$$

for all $\alpha_i \in \mathcal{A}, 1 \leq p < q \leq n + 2, 1 \leq i < j < k \leq n + 2$.

Proof. By the equality above the statement of the theorem we can conclude that $\langle \mathcal{A}, \{-, \dots, -\}_{\alpha, \beta} \rangle$ is an n -Lie algebra if and only if $\langle \tilde{\mathcal{A}}, [-, \dots, -]_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} \rangle$ is an n -Lie algebra. Therefore, by Theorem 2 the algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ is n -Lie algebra if and only if

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i \otimes t & \alpha_j \otimes t & \alpha_k \otimes t \\ \beta_i \otimes t & \beta_j \otimes t & \beta_k \otimes t \\ d_{n+1}(\alpha_i \otimes t) & d_{n+1}(\alpha_j \otimes t) & d_{n+1}(\alpha_k \otimes t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i \otimes t & \alpha_{n+1} \otimes t & \alpha_k \otimes t \\ \beta_i \otimes t & \beta_{n+1} \otimes t & \beta_k \otimes t \\ d_j(\alpha_i \otimes t) & d_j(\alpha_{n+1} \otimes t) & d_{n+1}(\alpha_k \otimes t) \end{array} \right| \\ & + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i \otimes t & \alpha_{n+1} \otimes t & \alpha_j \otimes t \\ \beta_i \otimes t & \beta_{n+1} \otimes t & \beta_j \otimes t \\ d_k(\alpha_i \otimes t) & d_k(\alpha_{n+1} \otimes t) & d_k(\alpha_j \otimes t) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_j \otimes t & \alpha_{n+1} \otimes t & \alpha_k \otimes t \\ \beta_j \otimes t & \beta_{n+1} \otimes t & \beta_k \otimes t \\ d_i(\alpha_j \otimes t) & d_i(\alpha_{n+1} \otimes t) & d_i(\alpha_k \otimes t) \end{array} \right| = 0 \end{aligned}$$

But, this is equivalent to the following relations:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} \alpha_0 & \alpha_p & \alpha_q \\ \beta_0 & \beta_p & \beta_q \\ d_{n+1}(\alpha_0) & d_{n+1}(\alpha_p) & d_{n+1}(\alpha_q) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_0 & \alpha_{n+1} & \alpha_q \\ \beta_0 & \beta_{n+1} & \beta_q \\ d_p(\alpha_0) & d_p(\alpha_{n+1}) & d_p(\alpha_q) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_0 & \alpha_{n+1} & \alpha_p \\ \beta_0 & \beta_{n+1} & \beta_p \\ d_q(\alpha_0) & d_q(\alpha_{n+1}) & d_q(\alpha_p) \end{array} \right| = 0 \\ & \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_j & \beta_k \\ d_{n+1}(\alpha_i) & d_{n+1}(\alpha_j) & d_{n+1}(\alpha_k) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i & \alpha_{n+1} & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_{n+1} & \beta_k \\ d_j(\alpha_i) & d_j(\alpha_{n+1}) & d_{n+1}(\alpha_k) \end{array} \right| \\ & + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_i & \alpha_{n+1} & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_{n+1} & \beta_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_{n+1}) & d_k(\alpha_j) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \alpha_j & \alpha_{n+1} & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_{n+1} & \beta_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_{n+1}) & d_i(\alpha_k) \end{array} \right| = 0 \end{aligned}$$

for all $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $\beta_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq p < q \leq n + 2$, $1 \leq i < j < k \leq n + 2$.

Below, we provide some examples of generalized Wronskian.

Example 6. Consider an associative commutative algebra \mathcal{A} with mutually permuting derivations d_i , $1 \leq i \leq n + 1$. Let $\alpha_i = d_i(\alpha_0)$ for $1 \leq i \leq n + 1$. Then, $\langle \mathcal{A}, [-, \dots, -]_{\alpha, \beta} \rangle$ is an n -Lie algebra.

Remark A. It should be noted that if $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}$, then, $\langle \mathcal{A}, [-, \dots, -]_{\alpha, \beta} \rangle$ and $\langle \mathcal{A}, \{-, \dots, -\}_{\alpha, \beta} \rangle$ are n -Lie algebras.

Remark B. We should note that if the vectors $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2})$, and $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+2}) \in \mathbb{F}^{n+2}$ are collinear, then, the n -Lie algebra $\langle \mathcal{A}, [-, \dots, -]_{\alpha, \beta} \rangle$ is abelian. Similarly, we can claim the same statement for the n -Lie algebra $\langle \mathcal{A}, \{-, \dots, -\}_{\alpha, \beta} \rangle$.

Acknowledgement: We would like to thank to Professor Bakhrom Omirov as we have been motivated and taken beautiful ideas from his article titled “New examples infinite-dimensional n -Lie algebras”.

REFERENCES

1. R. Bai, L. Chen, D. Meng, *The Frattini subalgebra of n -Lie algebras*, Acta. Math. Sinica (English Series) 235 (2007), 847 - 856.
2. R. Bai, G. Song, Y. Zhang, *On classification of n -Lie algebras*, Front. Math. China, 6(4) (2011), 581 - 606.
3. D.W. Barnes, *Engel subalgebras of n -Lie algebras*, Acta Math. Sinica (English Series) 24(1) (2008), 159 - 166.
4. A.S. Dzhumadil'daev, *Identities and derivations for Jacobian algebras*, Contemp. Math. 315 (2002), 245 - 278.
5. V.T. Filippov, *n -Lie algebras*, Sibirsk. Mat. Zh., 26(6) (1985), 126 - 140.
6. V.T. Filippov, *On n -Lie algebras of Jacobians*, Sib. Mat. Zh. 39(3) (1998), 660 - 669 (translation in Sib. Math. J. 39(3) (1998), 573 - 581).
7. C. Martínez, E. Zelmanov, *Brackets, superalgebras and spectral gap*, São Paulo J. Math. Scien. 13 (2019), 112 - 132.
8. D. Jumaniyozov, B. Omirov, *New examples infinite-dimensional n -Lie algebras*, Linear and Multilinear algebra, 71(2) (2023), 206 - 225.
9. A.G. Kurosh, *Multioperator rings and algebras*, Uspekhi Math. Nauk. 24(1) (1969), 3-15.
10. N. Cantarini, V. Kac, *Classification of Simple Linearly Compact n -Lie Superalgebras*, Commun. Math. Phys., 298 (2010) 833 - 853.

11. Sh.M. Kasymov, *On a theory of n -Lie algebras*, Algebra i Logika, 26(3) (1987), 277 - 297, (translation in Algebra and Logic 26(3) (1987), 155-166).
12. W. X. Ling, *On the structure of n -Lie algebras*, PhD thesis, Siegen, 1993.
13. A.P. Pozhidaev, *Simple factor algebras and subalgebras of algebras of Jacobians*, Siberian Mathematical Journal, 39(3), (1998) 512 - 517.
14. L. Takhtajan, *On foundations of generalized Nambu mechanics*, Comm. Math. Phys. 160 (1994), 295 - 315.
15. M.P. Williams, *Nilpotent n -Lie algebras*, PhD thesis, North Carolina State University, 2004.

REZYUME

Ushbu maqolada biz assotsiativ kommutativ algebra orqali Yakobian va Vronskian determinantlariga ikkita qo'shimcha ustun qo'shish orqali tuzilgan koso-simmetrik n -ar qavslar bilan tanishamiz. Hosil bo'lgan n -ar algebralari n -Li algebralari bo'lishi uchun zarur va etarli shartlarni aniqlaymiz. Bundan tashqari, biz n -Li algebralarga bir nechta yangi misollarini keltiramiz.

Kalit so'zlar: n -Li algebralari, Yakobian, Vronskian, differentsiallash.

РЕЗЮМЕ

В данной работе мы вводим кососимметричные n -арные скобки на ассоциативной коммутативной алгебре, построенные путем расширения определителей Якобиана и Вронского двумя дополнительными столбцами. Мы определяем необходимые и достаточные условия, при которых полученные n -арные алгебры являются n -Ли алгебрами. Кроме того, приводим несколько новых примеров n -Ли алгебр.

Ключевые слова: n -Лиевы алгебры, Якобиан, Вронскиан, дифференцирование.

UDC 519.172, 536.714

ON PERIODIC GROUND STATES FOR THE CHUI-WEEKS MODEL

RAHMATULLAEV M. M.

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, UZBEKISTAN
mrahmatullaev@rambler.ru

RASULOVA M. A.

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, UZBEKISTAN
m_rasulova_a@rambler.ru

HAKIMOVA M. A.

NAMANGAN STATE UNIVERSITY, UZBEKISTAN
hakimovamuslimaxon@gmail.com

RESUME

In this paper, we consider the three-state Chui–Weeks model on the Cayley tree of arbitrary order not less than four. For this model, all translation-invariant and all periodic ground states with respect to any normal divisor of index two are described.

Key words: Cayley tree, Chui-Weeks model, ground state, translation-invariant ground state, periodic ground state.

1. Introduction

The study of statistical mechanics models on non-Euclidean structures, particularly on the Cayley tree, has attracted considerable attention during the last decades. Unlike the traditional lattice \mathbb{Z}^d , the Cayley tree possesses a hierarchical and cycle-free structure that provides a convenient framework for the rigorous analysis of various physical phenomena. Many classical models of statistical physics, such as the Ising model, Potts model, SOS model, and Chui-Weeks model, have been extensively investigated on Cayley trees [1-11], revealing rich behaviors that differ significantly from those observed on Euclidean lattices.

One of the central problems in this area is the description of ground states and Gibbs measures associated with these models. Ground states represent configurations that minimize the system's Hamiltonian and play a crucial role in understanding the structure of Gibbs measures, especially at low temperatures [8-11]. In particular, the classification of translation-invariant and periodic ground states provides valuable insights into the symmetry and long-range order of the system.

The Chui-Weeks model, originally introduced to describe surface phenomena and wetting transitions [2], is of particular interest when studied on the Cayley tree. This model exhibits non-trivial ground state structures depending on the number of spin states, the interaction parameters, and the geometry of the underlying tree. While the two-state and three-state versions of the Chui-Weeks model on Cayley trees of lower orders have been studied in detail, the investigation of higher-order trees remains an open and challenging direction.

In this paper, we investigate all translation-invariant and periodic ground states with respect to arbitrary two-index normal subgroups of the Cayley tree group of the three-state Chui–Weeks model. The ground states on the Cayley tree of order two were described in [6], while those on the Cayley tree of order three were presented in [7]. In this paper, we solve these problems for the Chui–Weeks model on a Cayley tree of arbitrary order greater than or equal to four.

2. Preliminaries and Model Description

The Cayley tree Γ^k (see, e.g., [3,8]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k + 1$ edges issue. Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k , L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l = \langle x, y \rangle$.

It is known (see [3]) that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k + 1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, \dots, k + 1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) with generators a_1, a_2, \dots, a_{k+1} .

We consider model where the spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$. For $A \subseteq V$ a spin configuration σ_A on A is defined as a function $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations coincides with $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

Definition 2.1. A configuration $\sigma \in \Omega$ is called G_k^* -periodic, if $\sigma(yx) = \sigma(x)$ for any $x \in G_k$ and $y \in G_k^* \subset G_k$.

For a given periodic configuration the index of the subgroup is called the *period of the configuration*.

Definition 2.2. A configuration that is invariant with respect to all shifts is called *translation-invariant*.

The Chui-Weeks model (see [2]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{\sigma(x),0}, \tag{1}$$

where $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α is an external field and $\sigma \in \Omega$.

Remark 2.1. Recall that model (1) coincides with the SOS model under the condition $\alpha = 0$ (see, e.g., [1,2,8]).

Let M be the set of all unit balls with vertices in V and $S_1(x)$ be the set of all nearest neighboring vertices of $x \in V$.

We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b . The energy of configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{J}{2} \sum_{x \in S_1(c_b)} |\sigma(x) - \sigma(c_b)| + \frac{\alpha}{k+2} \sum_{x \in b} \delta_{\sigma(x),0}, \tag{2}$$

where $J = (J, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ and c_b is the center of the unit ball b .

The Hamiltonian (1) can be written as

$$H(\sigma) = \sum_{b \in M} U(\sigma_b).$$

3. Ground states

In this section, we study the ground states of the three-state Chui-Weeks model on the Cayley tree of arbitrary order not less than four. These ground states were described on the Cayley tree of order two in [6], and on the Cayley tree of order three in [7].

We have the following lemma.

Lemma 3.1. Let $k \geq 4$. Then for each configuration φ_b , we have the following

$$U(\varphi_b) \in \{U_i : i \in I\},$$

where I denotes the set of natural numbers from 1 to $|L|$, and L represents the collection of all distinct $U(\sigma_b)$. In particular, for $k = 4$ the following relations hold:

$$\begin{aligned} I &= \{U_i : i = 1, 2, 3, \dots, 40\}; \quad |L| = 40; \\ U_1 &= 0; \quad U_2 = \alpha; \quad U_3 = \frac{J}{2}; \quad U_4 = \frac{J}{2} + \frac{\alpha}{6}; \quad U_5 = \frac{J}{2} + \frac{5\alpha}{6}; \quad U_6 = J; \quad U_7 = J + \frac{\alpha}{6}; \\ U_8 &= J + \frac{\alpha}{3}; \quad U_9 = J + \frac{2\alpha}{3}; \quad U_{10} = J + \frac{5\alpha}{6}; \quad U_{11} = \frac{3J}{2}; \quad U_{12} = \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{6}; \\ U_{13} &= \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{3}; \quad U_{14} = \frac{3J}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad U_{15} = \frac{3J}{2} + \frac{2\alpha}{3}; \quad U_{16} = 2J; \quad U_{17} = 2J + \frac{\alpha}{6}; \\ U_{18} &= 2J + \frac{\alpha}{3}; \quad U_{19} = 2J + \frac{\alpha}{2}; \quad U_{20} = 2J + \frac{2\alpha}{3}; \quad U_{21} = \frac{5J}{2}; \quad U_{22} = \frac{5J}{2} + \frac{\alpha}{6}; \\ U_{23} &= \frac{5J}{2} + \frac{\alpha}{3}; \quad U_{24} = \frac{5J}{2} + \frac{\alpha}{2}; \quad U_{25} = \frac{5J}{2} + \frac{2\alpha}{3}; \quad U_{26} = \frac{5J}{2} + \frac{5\alpha}{6}; \quad U_{27} = 3J + \frac{\alpha}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{28} &= 3J + \frac{\alpha}{3}; & U_{29} &= 3J + \frac{\alpha}{2}; & U_{30} &= \frac{7J}{2} + \frac{\alpha}{6}; & U_{31} &= \frac{7J}{2} + \frac{\alpha}{3}; & U_{32} &= \frac{7J}{2} + \frac{\alpha}{2}; \\
 U_{33} &= 4J + \frac{\alpha}{6}; & U_{34} &= 4J + \frac{\alpha}{3}; & U_{35} &= 4J + \frac{\alpha}{2}; & U_{36} &= 4J + \frac{2\alpha}{3}; & U_{37} &= \frac{9J}{2} + \frac{\alpha}{6}; \\
 U_{38} &= \frac{9J}{2} + \frac{2\alpha}{3}; & U_{39} &= 5J + \frac{\alpha}{6}; & U_{40} &= 5J + \frac{5\alpha}{6}.
 \end{aligned}$$

For the case $k > 4$, we have

$$U_1 = 0; \quad U_2 = \alpha; \quad U_3 = \frac{J}{2}; \quad \dots; \quad U_{|I|} = (k+1)J + \frac{(k+1)\alpha}{k+2},$$

here $|I|$ denotes the cardinality of the set I .

Definition 3.1. A configuration φ is called a ground state for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_i : i \in I\}$$

for any $b \in M$.

We denote $A_\xi = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : U_\xi = \min\{U_i : i \in I\}\}$.

For $k = 4$, calculations show that:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha \geq 0\}; \\
 A_2 &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 30J \geq \alpha, \alpha \leq 0\}; \\
 A_3 &= A_6 = A_{11} = A_{16} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha \geq 0\}; \\
 A_4 &= A_5 = A_7 = \dots = A_{10} = A_{12} = \dots = A_{15} = A_{17} = \dots = A_{20} \\
 &= A_{22} = \dots = A_{38} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha = 0\}; \\
 A_{21} &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : -\alpha \leq 15J \leq 0\}; \\
 A_{39} &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \alpha \leq -15J\}; \\
 A_{40} &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : 30J \leq \alpha \leq 0\}
 \end{aligned}$$

and $\bigcup_{i=1}^{40} A_i = \mathbb{R}^2$.

For the case $k > 4$, we obtain the following sets:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha \geq 0\}; \\
 A_2 &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : (k+1)(k+2)J \geq \alpha, \alpha \leq 0\}; \\
 A_3 &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha \geq 0\}; \\
 &\dots \\
 A_{|I|} &= \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : (k+1)(k+2)J \leq \alpha \leq 0\}
 \end{aligned}$$

and $\bigcup_{i=1}^{|I|} A_i = \mathbb{R}^2$.

3.1. Translation-invariant ground states

In this subsection we study all translation-invariant ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of arbitrary order not less than four. The following theorem describes all translation-invariant ground states for the three-state Chui-Weeks model.

Theorem 3.1. For the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order $k \geq 4$, the following assertions hold

- i) the configurations $\sigma(x) = 1 \quad \forall x \in V$ and $\sigma(x) = 2 \quad \forall x \in V$ are translation-invariant ground states iff $(J, \alpha) \in A_1$;
- ii) the configuration $\sigma(x) = 0 \quad \forall x \in V$ is a translation-invariant ground state iff $(J, \alpha) \in A_2$;
- iii) if $(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{A_1 \cup A_2\}$, then no translation-invariant ground state exists.

Proof. *i)* Let $k \geq 4$. We consider the configuration $\sigma(x) = i, i \in \{1, 2\}, \forall x \in V$. For any $b \in M$ by Lemma 3.1 we have $U(\sigma_b) = U_1 = 0$. Thus the configuration $\sigma(x) = i, i \in \{1, 2\}, \forall x \in V$ is a ground state iff $(J, \alpha) \in A_1$;

ii) Let $k \geq 4$. We consider the configuration $\sigma(x) = 0 \forall x \in V$. For any $b \in M$ by Lemma 3.1 we have $U(\sigma_b) = U_2 = \alpha$. Thus the configuration $\sigma(x) = 0 \forall x \in V$ is a ground state iff $(J, \alpha) \in A_2$;

iii) It is obvious. Theorem 3.1 is proved.

Remark 3.1. *It is known from [1] that for the SOS model with a non-zero external field, the configuration $\sigma(x) = 1 \forall x \in V$ is not a translation-invariant ground state. From Theorem 3.1, we can see that this configuration is a translation-invariant ground state for the Chui-Weeks model.*

3.2. $G_k^{(2)}$ -periodic ground states

In this subsection we study all $G_k^{(2)}$ -periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of arbitrary order not less than four, where

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \text{ is even}\},$$

where $|x|$ means length of the word x .

All $G_k^{(2)}$ -periodic configurations have the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ \sigma_1, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

where $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$.

The following theorem describes all $G_k^{(2)}$ -periodic ground states for the three-state Chui-Weeks model.

Theorem 3.2. *Let $k \geq 4$. Then for the Chui-Weeks model the following assertions hold*

I. *i) if $(J, \alpha) \in \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : -2\alpha \leq (k+1)(k+2)J \leq 0\}$, then $G_k^{(2)}$ -periodic configurations*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ 2, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ 1, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)} \end{cases}$$

are $G_k^{(2)}$ -periodic ground states;

ii) if $(J, \alpha) \in \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha = 0\}$, then $G_k^{(2)}$ -periodic configurations

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ 2, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \in G_k^{(2)}, \\ 0, & \text{if } x \in G_k \setminus G_k^{(2)} \end{cases}$$

are $G_k^{(2)}$ -periodic ground states.

II. *All $G_k^{(2)}$ -periodic ground states, except for points i) and ii) above, are translation-invariant.*

Proof. **I.** *i)* Let $k = 4$. We consider the following $G_4^{(2)}$ -periodic configuration

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in G_4^{(2)}, \\ 2, & \text{if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)}. \end{cases}$$

Then we have $\sigma(c_b) = 1$ or $\sigma(c_b) = 2, \forall b \in M$. If $\sigma(c_b) = 1$ then $\forall x \in S_1(c_b)$ we have $\sigma(x) = 2$. In this case by Lemma 3.1 we get $U(\sigma_b) = \frac{5J}{2} = U_{21}$. If $\sigma(c_b) = 2$ then $\forall x \in S_1(c_b)$ we have $\sigma(x) = 1$. In this case by Lemma 3.1 we get $U(\sigma_b) = \frac{5J}{2} = U_{21}$. From these cases, it follows that the $G_4^{(2)}$ -periodic configuration we have considered is a ground state, if $(J, \alpha) \in A_{21}$.

ii) Let $k = 4$. We consider the following $G_4^{(2)}$ -periodic configuration

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in G_4^{(2)}, \\ 2, & \text{if } x \in G_4 \setminus G_4^{(2)}. \end{cases}$$

Then we have $\sigma(c_b) = 0$ or $\sigma(c_b) = 2, \forall b \in M$. If $\sigma(c_b) = 0$ then $\forall x \in S_1(c_b)$ we have $\sigma(x) = 2$. In this case by Lemma 3.1 we get $U(\sigma_b) = 5J + \frac{\alpha}{6} = U_{39}$. If $\sigma(c_b) = 2$ then $\forall x \in S_1(c_b)$ we have $\sigma(x) = 0$. In this case by Lemma 3.1 we get $U(\sigma_b) = 5J + \frac{5\alpha}{6} = U_{40}$. From these cases, it follows that the $G_4^{(2)}$ -periodic configuration we have considered is a ground state, if

$$(J, \alpha) \in A_{39} \cap A_{40} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha = 0\}.$$

The remaining cases are proved as above. Theorem 3.2 is proved.

3.3. H_A -periodic ground states

In this subsection we study all H_A -periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order $k \geq 4$, where

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is an even number}\},$$

where $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, 3, \dots, k + 1\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x \in G_k$. Note that $|x| = \sum_{j=1}^{k+1} w_j(x)$. It is known that the sets H_A and $G_k^{(2)}$ are normal groups of index two of G_k , and also any normal group of index two in G_k is of the form H_A (see [3, 8]). If $A = \{1, 2, 3, \dots, k + 1\}$, then the normal subgroup H_A coincides with the group $G_k^{(2)}$.

All H_A -periodic configurations have the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{if } x \in H_A, \\ \sigma_1, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, \end{cases}$$

where $\sigma_0, \sigma_1 \in \Phi$.

The following theorem describes all H_A -periodic ground states for the three-state Chui-Weeks model.

Theorem 3.3. *For the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order $k \geq 4$, the following assertions hold*

i) *if $(J, \alpha) \in A_3$, then the following H_A -periodic configurations*

$$\sigma(x) = \begin{cases} i, & \text{if } x \in H_A, \\ j, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, \end{cases} \quad \text{where } i \neq j, \quad i, j \in \Phi \setminus \{0\}, \quad |A| = 1, 2, 3, \dots, k$$

are H_A -periodic ground states;

ii) *if $(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_3$, then all H_A -periodic ground states are either translation-invariant or $G_k^{(2)}$ -periodic.*

Proof. Let $B_i = \{x \in S_1(c_b) : \sigma_b(x) = i\}, i \in \Phi$.

i) Let $k = 4$ and $|A| = 1$. We consider the following H_A -periodic configuration

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in H_A, \\ 2, & \text{if } x \in G_4 \setminus H_A. \end{cases}$$

If $c_b \in H_A$, then we have

$$\sigma(c_b) = 1, \quad |B_1| = 4, \quad |B_2| = 1,$$

thus $U(\sigma_b) = U_3$.

If $c_b \in G_4 \setminus H_A$, then we have

$$\sigma(c_b) = 2, \quad |B_1| = 1, \quad |B_2| = 4,$$

thus $U(\sigma_b) = U_3$.

Consequently, the configuration σ we have considered is an H_A -periodic ground state if $(J, \alpha) \in A_3$.

The remaining cases are proved as above. Theorem 3.3 is proved.

Remark 3.2. *Recall that when $k \geq 4$ and $|A| = k + 1$, all H_A -periodic ground states are identical to the $G_k^{(2)}$ -periodic ground states described in Theorem 3.2.*

Remark 3.3. *In this work, we have provided a complete characterization of all translation-invariant and periodic ground states with respect to any two-index normal subgroup for the three-state Chui-Weeks model on the*

Cayley tree of arbitrary order greater than or equal to four. An important observation is that, by employing the contour method [5,7-11], one can rigorously prove the existence of Gibbs measures associated with the translation-invariant ground states described here. This connection highlights the fundamental role of ground state analysis in the study of phase transitions and equilibrium properties of lattice models on non-amenable graphs such as the Cayley tree.

REFERENCES

1. Abraev B.U. On weakly periodic ground states for the SOS model. Scientific Bulletin of Namangan State University, 2020, V.2, No. 3, pp. 14–21.
2. Cuesta, Jose A., Sanchez A. General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions. Journal of Statistical Physics, 2004, V.115, Issue 3, pp. 869–893.
3. Ganikhodzhaev N.N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree. Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan, 1994, Issue 4, pp. 3–5.
4. Rahmatullaev M.M., Abdusalomova M.R., Rasulova M.A. Ground states for the SOS model with an external field on the Cayley tree. Uzbek Mathematical Journal, 2020, No. 2, pp. 145–156.
5. Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A. Ground States and Gibbs Measures for the Potts-SOS Model with an External Field on the Cayley Tree. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024. DOI: 10.1134/S1995080224010451.
6. Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A., Hakimova M.A. Periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order two. Acta NUUZ: Exact Sciences, 2024, 2/2.1, pp. 104–110.
7. Rasulova M.A., Hakimova M.A. Periodic Ground States for the Chui-Weeks Model on the Cayley Tree of Order Three. Letters in Mathematical Physics [accepted].
8. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, Singapore, 2013. DOI: 10.1142/8841.
9. Rozikov U.A. Gibbs Measures in Biology and Physics: The Potts Model. World Scientific, Singapore, 2023. DOI: 10.1142/12694.
10. Rozikov U.A. On q -component models on Cayley tree: contour method. Letters in Mathematical Physics, 2005. DOI: 10.1007/s11005-004-5117-2.
11. Rozikov U.A. A Contour method on Cayley trees. Journal of Statistical Physics, 2008. DOI: 10.1007/s10955-007-9455-1.

REZYUME

Bu ishda tartibi to'rt dan kichik bo'lmagan ixtiyoriy tartibli Keli daraxtida uch holatli Chui-Weeks modeli qaraladi. Ushbu model uchun barcha translatsion-invariant va ixtiyoriy ikki indeksli normal bo'luvchiga nisbatan barcha davriy asosiy holatlar tavsiflanadi.

Kalit so'zlar: Keli daraxti, Chui-Weeks modeli, asosiy holat, translatsion-invariant asosiy holat, davriy asosiy holat.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается трехсостоятельная модель Чуи–Уикса на дереве Кэли произвольного порядка не меньше четырех. Для этой модели описаны все трансляционно-инвариантные и все периодические основные состояния относительно любого нормального делителя индекса два.

Ключевые слова: Дерево Кэли, модель Чуи–Уикса, основное состояние, трансляционно-инвариантное основное состояние, периодическое основное состояние.

UDC 519.55

GLOBAL EXISTENCE RESULTS FOR COUPLED NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH WEIGHTED COEFFICIENTS

RAKHMANOV Z. R.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT
zraxmanov@inbox.ru

MAMATOV A. U.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT
mmtovabrорjon1995@gmail.com

CHORIYEV B. SH.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT
choriyev.behruz@gmail.com

RESUME

In this paper, we investigate a class of nonlinear weighted parabolic systems describing the coupled dynamics of two interacting scalar fields. We establish sufficient conditions for the global existence of weak solutions in appropriate weighted Sobolev spaces by employing energy estimates and integral inequalities. Furthermore, we develop a numerical scheme based on the Peaceman-Rachford splitting method combined with the Thomas algorithm to approximate the solutions efficiently. The proposed computational framework is implemented and illustrated with two and three-dimensional numerical simulations, including dynamic surface plots and animated profiles. The results demonstrate the qualitative features of the global solution, confirm the analytical findings, and provide additional insight into the interplay between nonlinear diffusion, weighted heterogeneity, and inter-component coupling.

Key words: Nonlinear parabolic system, variable coefficients, global existence, finite difference method, inhomogeneous medium, numerical simulation.

We focus on a class of nonlinear parabolic systems in divergence form that describe the coupled dynamics of two interdependent scalar fields, denoted by $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$. Such models are relevant, for instance, in describing dust concentration in the atmosphere and on surfaces, or in the interaction of chemical or biological species in a heterogeneous medium.

The governing equations are formulated as a weighted system with nonlinear diffusion and mutual coupling effects. Specifically, the model incorporates spatially dependent density functions, nonlinear exponents in the diffusion terms, and time-dependent coefficients that regulate the transfer between the two components. This framework generalizes a wide spectrum of classical equations such as the porous medium equation [26,27], the p -Laplacian [6], the heat equation [16], and Boussinesq-type models arising in fluid filtration and transport theory. Applications extend to resistive diffusion phenomena in force-free magnetic fields, population dynamics, and the spread of airborne particles, where diffusion interacts with nonlinear growth and coupling effects [11,22].

A broad range of studies has addressed related nonlinear diffusion problems. For instance, Martynenko, Tedeev, and Shramenko [15] studied the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density of the type

$$\rho(x) \partial_t u = \nabla \cdot (|u|^{m-1} \nabla u) + f(u),$$

under slowly decaying initial data. Their results highlight the delicate interplay between density inhomogeneity and global solvability. Similarly, DiBenedetto [6] analyzed local behavior for degenerate parabolic equations with measurable coefficients of p -Laplacian type

$$\partial_t u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

which serve as prototypes for nonlinear diffusion operators.

Nicolosi, Skrypnik, and Skrypnik [18], as well as Hui [9], examined removable singularities for quasilinear parabolic equations of the form

$$\partial_t u - \Delta_p u = 0,$$

while Nurumova [19] focused on blow-up behavior for nonlinear differential inequalities related to parabolic equations. Matyakubov and Raupov [17] obtained explicit estimates for blow-up in nonlinear systems with variable density, typically modeled by

$$\rho(x) \partial_t u = \Delta(u^m) + g(u).$$

Giachetti and Porzio [8] considered global existence for nonlinear parabolic equations with damping, such as

$$\partial_t u - \Delta(u^m) + \lambda u = 0,$$

and Punzo [20] analyzed the well-posedness of degenerate elliptic and parabolic problems of porous medium type.

Closer to our setting, Mamatov [16] studied qualitative properties of solutions for a reaction–diffusion system with variable density

$$\begin{cases} \rho_1(x) \partial_t u_1 = \nabla \cdot (D_1(u_2) \nabla u_1) + f_1(u_1, u_2), \\ \rho_2(x) \partial_t u_2 = \nabla \cdot (D_2(u_1) \nabla u_2) + f_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

highlighting how density heterogeneity affects the dynamics. Abdugapor and Mamatov [1] investigated double nonlinear thermal conductivity problems, based on approximately self-similar reductions of PDEs of the type

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u^{m-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Aripov, Bobokandov, and Uralov [3] analyzed cross-diffusion systems with time-dependent nonlinear absorption, e.g.,

$$\partial_t u_i = \Delta(u_i^{m_i}) - \alpha_i(t) u_i^{q_i}, \quad i = 1, 2,$$

which share structural similarities with our coupled model.

From the computational side, LeVeque [13] developed classical finite difference methods for PDEs, and Gander–Stuart [7] provided an analysis of the Peaceman–Rachford splitting scheme applied to nonlinear evolution equations of the form

$$\partial_t u = A(u) + B(u).$$

Smith and Zhao [24] proposed numerical methods for nonlinear degenerate diffusion equations, while Ketcheson [10] introduced fully implicit Runge–Kutta relaxation methods suitable for hyperbolic and parabolic problems. Although these studies provide powerful tools, they rarely address the additional complexity of heterogeneous weights and mutual coupling.

The contribution of this paper is twofold. First, we establish sufficient conditions for the global existence of weak solutions to the considered weighted nonlinear parabolic system with mutual coupling and time-dependent coefficients, thereby extending previous existence results [16-25] to a broader heterogeneous setting. Second, we develop a numerical scheme based on the Peaceman–Rachford splitting method combined with the Thomas algorithm for spatial discretization. Unlike earlier computational studies [26-28], our approach is specifically adapted to weighted nonlinearities and coupled dynamics. Numerical simulations, including two- and three-dimensional visualizations, confirm the theoretical predictions and illustrate the qualitative behavior of solutions.

Thus, this work provides both theoretical and computational insights into the study of nonlinear weighted parabolic systems with heterogeneous diffusion and mutual coupling effects, filling important gaps left by prior research on uncoupled or homogeneous models.

Problem statement. The problem under consideration is formulated as we investigate a coupled nonlinear parabolic system of the form

$$\rho_1(x) \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\rho_2(x) u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^{p-2} \nabla u_i^l \right) + \gamma(t) e^{\alpha_i t} \varepsilon_i \rho_3(x) u_{3-i}^{k_i}, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

with initial condition

$$u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Where, the unknown functions $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ describe the spatio-temporal evolution of two interacting quantities, such as airborne and surface dust concentrations, or two interdependent species in a heterogeneous medium. The spatial variable is $x \in \mathbb{R}^N$ and time $t > 0$. The weights $\rho_j(x) = |x|^{n_j}$ ($j = 1, 2, 3$) encode the inhomogeneity of the medium. The diffusion operator incorporates nonlinear exponents $m_i \geq 1$, $p \geq 2$, $k > 0$, $l_i > 0$, giving rise to a doubly nonlinear and possibly singular structure.

The source terms involve time-dependent growth factors $\gamma(t)e^{\alpha_i t}$ and nonlinear coupling between u_1 and u_2 via the exponents k_i , with ε_i and α_i as positive parameters governing the transfer rate.

The mathematical formulation of the problem is therefore to determine nonnegative functions

$$u_i(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad i = 1, 2,$$

satisfying equations (14)–(15) in the weak sense, that is, belonging to the appropriate weighted Lebesgue and Sobolev spaces and fulfilling the corresponding integral identities for all compactly supported test functions $\eta \in C_0^1(\mathbb{R}^N \times (0, T))$.

The central analytical questions addressed in this study are as follows:

- To establish sufficient conditions on the parameters and initial data under which global-in-time weak solutions exist.
- To identify the role of the weighted coefficients $\rho_j(x)$, nonlinear diffusion exponents, and source terms in the qualitative behavior of solutions.
- To validate the theoretical findings by constructing and analyzing numerical solutions using the Peaceman–Rachford splitting method in combination with the Thomas algorithm.

This problem formulation connects the nonlinear analysis of degenerate and singular parabolic equations with computational approaches, providing a unified framework for theoretical study and numerical simulation.

Global-in-time existence of solutions. In this section we state and prove a global existence result for system (1)–(2). We begin by listing the standing assumptions and the definition of weak solution. Throughout this section we assume that the coefficient functions $\rho_j : \mathbb{R}^N \rightarrow (0, \infty)$, $j = 1, 2, 3$, are measurable and satisfy the uniform bounds

$$0 < \rho_j^- \leq \rho_j(x) \leq \rho_j^+ < \infty \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^N,$$

and that the time-factor $\gamma \in L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty))$ and the constants $\varepsilon_i, \alpha_i > 0$ are fixed. The exponents satisfy

$$m_i \geq 1, \quad l_i > 0, \quad k > 0, \quad k_i > 0, \quad p \geq 2, \quad i = 1, 2.$$

Finally we assume the initial data

$$u_{i,0} \in L_{\rho_1}^2(\mathbb{R}^N) := L^2(\mathbb{R}^N; \rho_1(x) dx), \quad u_{i,0} \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Definition 1: We say that the pair (u_1, u_2) is a *weak solution* of system (1)–(2) on $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ if for $i = 1, 2$:

- $u_i \geq 0$ a.e.,
- $u_i \in L^\infty(0, T; L_{\rho_1}^2(\mathbb{R}^N))$ and $u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^{p-2} \nabla u_i^{l_i} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N \times (0, T))$,
- for every test function $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ and a.e. $t \in (0, T)$ the integral identity holds:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1(x) u_i(x, t) \varphi(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1(x) u_{i,0}(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(\rho_1(x) u_i \partial_\tau \varphi - \rho_2(x) u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^{p-2} \nabla u_i^{l_i} \cdot \nabla \varphi \right. \\ & \quad \left. + \gamma(\tau) e^{\alpha_i \tau} \varepsilon_i \rho_3(x) u_{3-i}^{k_i} \varphi \right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Theorem 1: Under the standing assumptions above, for any nonnegative initial data $u_{i,0} \in L^2_{\rho_1}(\mathbb{R}^N)$ there exists a global-in-time weak solution (u_1, u_2) of system (1)–(2) satisfying

$$u_i \in L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty); L^2_{\rho_1}(\mathbb{R}^N)) \cap L^p_{\text{loc}}([0, \infty); W^{1,p}_{\rho_2, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)),$$

and the energy estimate

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1(x) u_i^2(x, t) dx + \int_0^T \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^N} \rho_2(x) u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^p dx dt \leq C(T), \tag{16}$$

for every $T > 0$, where $C(T) > 0$ depends on T , the norms of the initial data and the structural constants.

Proof: We give the main steps; full rigorous details follow standard lines (Galerkin approximation, a priori bounds, compactness, passage to the limit).

1. Regularized problem and approximation. Construct smooth, compactly supported approximations $u_{i,0}^n \rightarrow u_{i,0}$ in $L^2_{\rho_1}$ and, for each n , consider a regularized problem (e.g. add a small viscosity and truncate nonlinearities) for which classical solutions exist on $[0, T]$.

2. Energy identity. Multiply the i -th equation by u_i and integrate over \mathbb{R}^N . Using integration by parts (justified for the regularized problem) and the positivity of the weights, we obtain for each i

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_1 u_i^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_2 u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^p dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(t) e^{\alpha_i t} \varepsilon_i \rho_3 u_{3-i}^{k_i} u_i dx + (\text{transport / lower order terms if present}). \end{aligned}$$

The right-hand coupling term is controlled by Hölder and Young inequalities: for any $\delta > 0$,

$$\int \rho_3 u_{3-i}^{k_i} u_i \leq \delta \int \rho_2 u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^p dx + C(\delta) \Phi(u_{3-i}),$$

where $\Phi(u_{3-i})$ denotes quantities depending on norms of u_{3-i} (these are controlled recursively). Choosing δ small allows absorption of diffusion terms to the left. Summing the two energy inequalities for $i = 1, 2$ yields (16).

3. Uniform bounds and extension. The energy estimate (16) provides uniform bounds for the approximations in the spaces appearing in Theorem **Theorem 1**. In particular, we get uniform $L^\infty(0, T; L^2_{\rho_1})$ bounds and $L^p(0, T; W^{1,p}_{\rho_2, \text{loc}})$ bounds for u_i^k .

4. Compactness and passage to the limit. By standard compactness results (Aubin–Lions lemma adapted to weighted spaces, see e.g. [14] for the abstract framework), a subsequence of approximations converges strongly in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ to functions u_i . Weak/measurewise convergence of the fluxes combined with monotonicity properties of the nonlinear diffusion operator allows passage to the limit in the nonlinear terms. The limit pair (u_1, u_2) satisfies the integral identity of the weak solution.

5. Global-in-time extension. The a priori energy bound depends only on T and the initial data norms. Therefore the local solution can be continued stepwise for all $t > 0$, yielding a global-in-time weak solution.

Theorem 2. Let $a \in (a_c, N + n_1)$, and suppose that the initial data is given by

$$u_{i,0}(x) = \lambda \varphi_i(x), \quad \lambda > 0, \quad i = 1, 2,$$

where each $\varphi_i(x) \in F^a$ is a nonnegative function satisfying the asymptotic condition

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^a \varphi_i(x) = M > 0.$$

Then there exists a threshold $\lambda_0 = \lambda_0(\varphi_1, \varphi_2) > 0$ such that for any $\lambda < \lambda_0$, the corresponding solution $u_i(x, t)$ to system (1)–(2) admits the following large-time asymptotic behavior:

$$t^{\theta_i} |u_i(x, t) - U_{\lambda M, a}^{(i)}(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{as } t \rightarrow \infty,$$

uniformly on compact subsets of \mathbb{R}^N , where each $U_{\lambda M,a}^{(i)}(x,t)$ is a self-similar solution constructed from the initial profile $\lambda M|x|^{-a}$, and

$$\theta_i = \frac{a}{a(m_i + k_i(p - 2) + l_i - 1) + p + n_1 - n_2}.$$

Proof. We introduce the radially symmetric self-similar solution $U_{\lambda M,a}^{(i)}(x,t)$ to describe the large-time asymptotic behavior of solutions to the degenerate coupled parabolic system (1).

Let $U_{\lambda M,a}^{(i)}(x,t)$ denote the self-similar solution of the corresponding *uncoupled* limit problem (obtained by neglecting the coupling term) with algebraically decaying initial data:

$$U_{\lambda M,a}^{(i)}(x,t) = t^{-a\alpha_i} f_M^{(i)}(r), \quad r = |x|t^{-\alpha_i},$$

where

$$\alpha_i = \frac{1}{a(m_i + k_i(p - 2) + l_i - 1) + p + n_1 - n_2}.$$

The profile $f_M^{(i)}(r)$ satisfies a second-order nonlinear ODE obtained via radial reduction of the diffusion operator, together with the asymptotic condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^a f_M^{(i)}(r) = M > 0, \quad f_M^{(i)}(r) > 0, \quad f_M^{(i)'}(0) = 0.$$

To establish the existence of such a profile $f_M^{(i)}(r)$, we consider the following Cauchy problem for $g(r)$ with initial value $\eta > 0$:

$$\begin{cases} (g^{m_i-1} |(g^{k_i})'|^{p-2} g') + \frac{N + n_2 - 1}{r} g^{m_i-1} |(g^{k_i})'|^{p-2} g' \\ \quad + \alpha_i r^{n_1 - n_2 + 1} g' + a\alpha_i r^{n_1 - n_2} g = 0, \quad r > 0, \\ g(0) = \eta, \quad g'(0) = 0. \end{cases}$$

By standard ODE theory for degenerate nonlinear equations, one shows that $g(r)$ is positive, smooth for $r > 0$, and decays algebraically as $r \rightarrow \infty$. In fact,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^a g(r) = M(\eta),$$

where $M(\eta)$ is a continuous and strictly monotone function of $\eta > 0$.

Moreover, the scaling invariance of the ODE yields

$$g_\eta(r) = \eta g_1(\eta^\sigma r), \quad \sigma = -\frac{m_i + k_i(p - 2) + l_i - 1}{p + n_1 - n_2},$$

which implies

$$M(\eta) = \eta^{1-a\sigma} M(1).$$

Hence, for each $M > 0$, there exists a unique $\eta > 0$ such that $M(\eta) = M$, and the corresponding self-similar profile $f_M^{(i)}(r)$ satisfies the desired asymptotic behavior. Furthermore, qualitative analysis of the ODE shows that $f_M^{(i)}(r)$ is monotone non-increasing.

Therefore, the radially symmetric self-similar solution $U_{\lambda M,a}^{(i)}(x,t)$ accurately describes the asymptotic behavior of the solutions to the full PDE system (1)B(2) in the limit $t \rightarrow \infty$, provided λ is sufficiently small so that the coupling term acts only as a perturbation.

Numerical methods. In order to approximate the continuous problem on a computationally feasible framework, the infinite spatial domain \mathcal{R}^N is truncated to a sufficiently large bounded region $\Omega = [0, L]$ (in one spatial dimension) or its higher-dimensional analog. The truncation length L is chosen such that the influence of the boundary on the solution dynamics remains negligible over the considered time interval.

The domain Ω is then partitioned into a uniform mesh with spatial step size

$$h = \frac{L}{N}, \quad N \in \mathcal{N},$$

where N denotes the number of subdivisions. The grid points are defined as

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

The approximate numerical solution at location x_j and time $t^n = n\tau$ is denoted by $u_i^n(j)$, with $\tau > 0$ being the temporal discretization parameter.

For the spatial derivatives, finite difference operators are introduced. The first-order forward and backward difference quotients are given by

$$\nabla_h^+ u(j) = \frac{u(j+1) - u(j)}{h}, \quad \nabla_h^- u(j) = \frac{u(j) - u(j-1)}{h},$$

while the centered approximation of the gradient reads

$$\nabla_h u(j) = \frac{u(j+1) - u(j-1)}{2h}.$$

These discrete operators are employed to approximate nonlinear fluxes of the type

$$\nabla(\rho_2(x) u^{m_i-1} |\nabla(u^k)|^{p-2} \nabla(u^{l_i})),$$

appearing in the governing equations.

The weighted coefficients $\rho_j(x)$ are discretized directly at the nodal points, i.e.,

$$\rho_j(x_n) = |x_n|^{n_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

so that the heterogeneity of the medium is incorporated into the discrete scheme without additional approximation.

The numerical solution of nonlinear coupled parabolic systems with heterogeneous coefficients presents considerable computational challenges, particularly when both diffusion and reaction-coupling terms exhibit strong nonlinearities. In order to ensure stability and efficiency, we adopt the Peaceman-Rachford splitting method, which belongs to the class of alternating direction implicit schemes. The fundamental idea is to decompose the time integration into two fractional steps, thereby treating the diffusion and reaction contributions separately.

Diffusion step (first half-step). At the first stage, only the nonlinear diffusion operator is advanced over a half-time step, while the reaction-coupling terms are neglected. The semi-discrete formulation reads

$$\frac{u_i^{n+1/2}(j) - u_i^n(j)}{\tau/2} = \nabla_h(\rho_2(x_j) (u_i^n(j))^{m_i-1} |\nabla_h(u_i^n(j))^k|^{p-2} \nabla_h(u_i^{n+1/2}(j))^{l_i}),$$

where ∇_h denotes the discrete gradient operator defined on the uniform mesh. This formulation ensures that the diffusion terms are treated implicitly, which provides enhanced stability properties even in the presence of nonlinear degenerate diffusion.

Reaction-coupling step (second half-step). In the second stage, the updated values $u_i^{n+1/2}$ serve as input to evolve the system under the effect of the nonlinear reaction and inter-component coupling, again over a half-time step:

$$\frac{u_i^{n+1}(j) - u_i^{n+1/2}(j)}{\tau/2} = \gamma(t^n) e^{\alpha_i t^n} \varepsilon_i \rho_3(x_j) (u_{3-i}^{n+1/2}(j))^{k_i}.$$

Since this step involves only local algebraic updates, it is computationally inexpensive. Moreover, the splitting ensures that nonlinear couplings are treated explicitly but in a stable manner due to the staggered update.

The implicit discretization of the diffusion step leads to a nonlinear system of algebraic equations at each half-time step. After linearization, the resulting system can be written in the block tridiagonal form

$$A_j u_i^{n+1/2}(j-1) + B_j u_i^{n+1/2}(j) + C_j u_i^{n+1/2}(j+1) = F_j, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

where the matrices A_j, B_j, C_j encode the contributions of the discretized nonlinear fluxes, and F_j denotes the right-hand side incorporating previous time-level information.

In the scalar case, this system reduces to the standard tridiagonal structure, which can be solved efficiently using the Thomas algorithm. The algorithm performs a forward elimination followed by a backward substitution, yielding a solution in $\mathcal{O}(N)$ operations.

For the coupled two-component system considered here, the discretization naturally leads to a block tridiagonal system, where each coefficient A_j, B_j, C_j is itself a small matrix corresponding to the interaction between the two components. Nevertheless, the Thomas algorithm generalizes straightforwardly to this block setting. The block tridiagonal solver retains linear computational complexity with respect to the number of spatial nodes, while the cost of inverting small blocks remains negligible.

The proposed Peaceman-Rachford splitting scheme is inherently stable for linear parabolic equations. For the nonlinear coupled system under consideration, stability is investigated through discrete energy estimates. Specifically, we multiply the discrete equations by appropriate test functions and apply discrete integration by parts (summation by parts). This procedure yields a discrete energy inequality of the form

$$E^{n+1} + \tau \mathbb{D}^{n+1} \leq E^n + C\tau,$$

where E^n denotes the discrete energy of the numerical solution at the n -th time step, \mathbb{D}^n represents the dissipation due to nonlinear diffusion, and C is a constant depending only on the data of the problem. Such an inequality guarantees that the discrete energy remains uniformly bounded with respect to n , thereby preventing unphysical growth of the numerical solution.

A key role in establishing stability is played by the monotonicity of the nonlinear diffusion operator and the positivity of the weight functions $\rho_j(x)$. These structural properties ensure that the flux terms do not destabilize the discrete dynamics, even in the presence of nonlinear interactions between the two components u_1 and u_2 .

Convergence of the numerical solution towards a weak solution of the continuous problem is obtained via a compactness argument. First, the stability estimates provide uniform bounds in discrete Sobolev norms, independent of the discretization parameters h and τ . These bounds allow us to extract subsequences converging weakly in the corresponding functional spaces.

To strengthen the convergence and identify the weak limit with the exact solution, we employ discrete compactness results analogous to the Aubin-Lions lemma. In particular, the boundedness of temporal increments in L^2 and the spatial regularity inherited from the diffusion operator imply compactness in L^2_{loc} . Passing to the limit in the discrete equations, we conclude that the limit function is indeed a weak solution of the original system.

To complement the theoretical results, we perform numerical experiments based on the Peaceman-Rachford scheme combined with the block Thomas algorithm. The computations are carried out in one spatial dimension, with spatial domain $x \in [0, 1]$ and time horizon $t \in [0, 2]$. Unless otherwise stated, the discretization parameters are chosen as $h = 0.05$ and $\tau = 0.01$, ensuring sufficient resolution in both space and time.

The nonlinear exponents are taken as $m_1 = 1.2$, $m_2 = 1.4$, and $p = 2.5$, while the coupling exponents are $q_1 = 4.5$ and $q_2 = 5.0$. The initial conditions are selected in a compactly supported form, reflecting localized dust concentration in air and on surfaces. At the boundary $x = 0$, nonlinear Robin-type conditions are imposed to model particle exchange, while at $x = 1$ homogeneous Neumann conditions are prescribed.

Figure 1 displays the evolution of the solutions $u(x, t)$ and $v(x, t)$ at successive time levels. The numerical solutions exhibit rapid diffusion and nonlinear damping near the origin, while coupling effects enhance interaction between the two components.

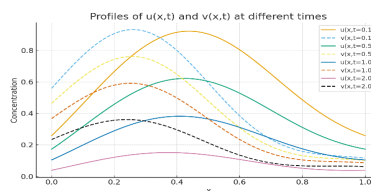


Figure 1: Two-dimensional spatial profiles of $u(x, t)$ and $v(x, t)$ at different times ($t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$).

To better capture the spatio-temporal dynamics, we plot three-dimensional surfaces of the solutions (Figures 2 and 3). These surfaces clearly demonstrate the dissipative nature of the solutions and highlight the asymmetry introduced by nonlinear diffusion and weighted coefficients.

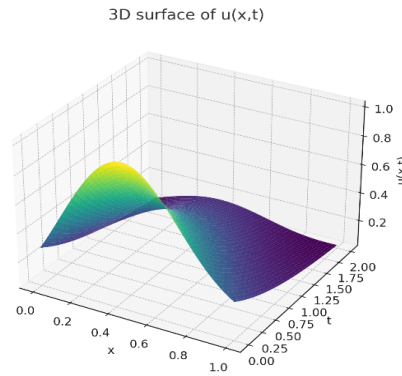


Figure 2: Three-dimensional surface plot of $u(x,t)$ over space and time.

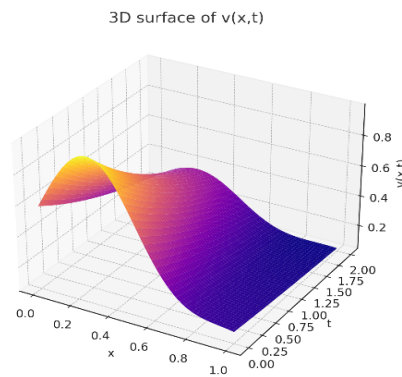


Figure 3: Three-dimensional surface plot of $v(x,t)$ over space and time.

The supplementary material contains the full 3D animation, while Figure 4 shows selected frames.

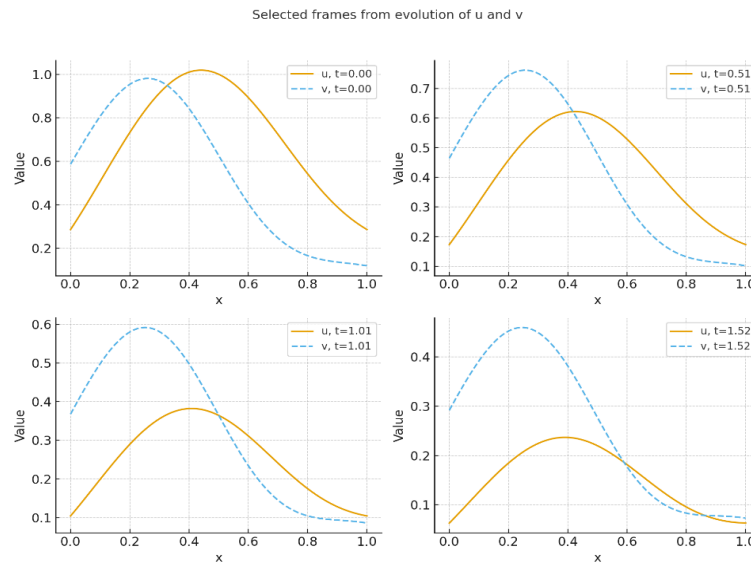


Figure 4: Selected frames from the 3D animation of the coupled system, showing nonlinear diffusion and coupling dynamics.

Conclusion. The analysis carried out for problem (1)-(2) has established sufficient conditions ensuring the global-in-time existence and large-time asymptotics of weak solutions. It has been shown that, under

smallness assumptions on the initial data, the long-time dynamics of the coupled degenerate parabolic system are governed by radially symmetric self-similar solutions of the corresponding uncoupled limit problem.

The obtained results demonstrate that diffusion effects dominate the asymptotic regime, while the nonlinear coupling terms act only as perturbations. The scaling exponents characterizing the decay and spreading rates were identified explicitly, and the associated self-similar profiles were proven to exist, to be positive and monotone, and to decay algebraically at infinity.

These findings provide a rigorous theoretical framework for understanding the asymptotic structure of nonlinear weighted parabolic systems of type (1)-(2). Furthermore, the results offer a foundation for subsequent numerical simulations and potential applications to models of heterogeneous media and anomalous diffusion phenomena.

Acknowledgements. This research was carried out with partial financial support from the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under the research grant AL-9224104601 titled “Mathematical modeling of processes described by nonlinear, divergent, and non-divergent parabolic equations and systems”.

REFERENCES

1. Abdugapor Kh., Mamatov A. Modeling of double nonlinear thermal conductivity processes in two-dimensional domains using solutions of an approximately self-similar. AIP Conference Proceedings, 2023, vol. 2781, p. 020067.
2. Ansgar J. Cross-Diffusion systems with entropy structure. In Proceedings of Equadiff 14. Conference on Differential Equations and Their Applications, Bratislava, 2017, pp. 24–28.
3. Aripov M., Bobokandov M., Uralov N. Analysis of Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with Time-Dependent Nonlinearity Absorption. In International Conference on Thermal Engineering, 2024, vol. 1, no. 1.
4. Carrillo J.A., Di Francesco J.A., Figalli M., Laurent A., Slepčev D. Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations. Duke Mathematical Journal, 2011, pp. 229–271.
5. Deng L., Shang X. Doubly degenerate parabolic equation with time-dependent gradient source and initial data measures. Journal of Function Spaces, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 25–32.
6. DiBenedetto E. On the local behavior of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1986, vol. 13, no. 3, pp. 487–535.
7. Gander J.M., Stuart M.A. Analysis of the Peaceman-Rachford splitting scheme applied to a class of nonlinear evolution equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, vol. 46, no. 4, pp. 2097–2113.
8. Giachetti D., Porzio M. Global existence for nonlinear parabolic equations with a damping term. Communications on Pure and Applied Analysis, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 923–653.
9. Hui K. Another proof for the removable singularities of the heat equation. Proc. Amer. Math. Soc., 2010, vol. 138, no. 7, pp. 2397–2402.
10. Ketcheson I.D. Relaxation Runge-Kutta methods: Fully implicit schemes for hyperbolic problems. SIAM Journal on Scientific Computing, 2019, vol. 41, no. 2, pp. A1063–A1085.
11. Kok F. Global and regional importance of the mineral dust cycle: A review. Atmospheric Environment, 2017, vol. 161, pp. 38–57.
12. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Academic Press, New York-London, 1968.
13. LeVeque J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM, 2007, vol. 47, no. 6.

14. Lions J. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.
15. Martynenko A., Tedeev A., Shramenko V. The Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source in the class of slowly decaying initial data. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 3, pp. 563–580.
16. Mamatov A. Properties of solutions of a nonlinear reaction-diffusion system with variable density and source. *Uzbek Mathematical Journal*, 2020, vol. 66, no. 4, pp. 70–79.
17. Matyakubov A., Raupov D. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non-divergence form with variable density. *AIP Conference Proceedings*, 2023, vol. 2781, p. 020055.
18. Nicolosi F., Skrypnik I.I., Skrypnik I.V. Removable isolated singularities for solutions of quasilinear parabolic equations. *Ukr. Math. Bull.*, 2009, vol. 6, pp. 208–234.
19. Nurumova A. Blow-up case for some nonlinear differential inequalities. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 147–158.
20. Punzo F. Well-posedness of Degenerate Elliptic and Parabolic Problems. Ph.D. thesis, 2008.
21. Reyes G., Vazquez J. The Cauchy problem for the inhomogeneous porous medium equation. *Netw. Heterog. Media*, 2006, vol. 1, pp. 337–351.
22. Seinfeld J.H., Pandis S.H. *Atmospheric Chemistry and Physics: From Air Pollution to Climate Change*. Wiley-Interscience, 2012, pp. 430–520.
23. Shao J., Guo Z., Shan X., Zhang Ch., Wu B. A new non-divergence diffusion equation with variable exponent for multiplicative noise removal. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2020, vol. 56, p. 103166.
24. Smith A., Zhao L. Numerical methods for nonlinear degenerate parabolic PDEs with applications to diffusion processes. *Journal of Computational Physics*, 2023, p. 111797.
25. Vázquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2007, pp. 145–165.
26. Vázquez J.L. *Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations: equations of porous medium type*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
27. Zhang H. The self-similar solutions of a diffusion equation. *Journal of WSEAS Transactions on Mathematics*, 2011, vol. 12, no. 3, pp. 345–356.
28. Zhang H., Xiamen P. The nonexistence of the solution for quasilinear parabolic equation related to the p-laplacian equation. *Journal of WSEAS Transactions on Mathematics*, 2012, vol. 11, no. 4, pp. 679–688.

REZYUME

Ushbu maqolada biz ikkita o‘zaro kuchli bog‘langan ta‘sirlashuvchi maydonlarning bog‘langan dinamikasini tasvirlovchi og‘irlikli chiziqsiz parabolik tenglamalar sistemalar sinfini ko‘rib chiqamiz. Energiya baholari va integral tengsizliklardan foydalanib, tegishli og‘irlikli Sobolev fazolarida kuchsiz yechimlarning global mavjudligi uchun yetarli shartlar aniqlanadi. Shuningdek, yechimlarni samarali yaqinlashtirish maqsadida Peaceman-Rachford sonli hisoblash usuli va Tomas algoritmi (haydash usuli) asosida sonli sxema ishlab chiqiladi. Taklif etilgan hisoblash doirasi ikki va uch o‘chovli sonli simulyatsiyalar yordamida, dinamik sirt grafigi va animatsiyalangan profillar bilan amalga oshiriladi va namoyish etiladi. Natijalar global yechimning sifat jihatlarini ko‘rsatib beradi, analitik natijalarni tasdiqlaydi hamda chiziqsiz diffuziya, og‘irlikli bir jinsli bo‘lmagan va komponentlararo bog‘lanish o‘rtasidagi o‘zaro ta‘sir haqida qo‘shimcha tushuncha beradi.

Kalit so‘zlar: Nochizliq parabolik tenglamalar sistemasi, o‘zgaruvchan koeffitsiyentlar, global mavjudlik, chekli ayirmalar usuli, bir jinsli bo‘lmagan muhit, sonli modellashtirish.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается класс нелинейных взвешенных параболических систем, описывающих связанную динамику двух взаимодействующих скалярных полей. Установлены достаточные условия глобального существования слабых решений в соответствующих взвешенных пространствах Соболева с использованием энергетических оценок и интегральных неравенств. Кроме того, разработана численная схема, основанная на методе расщепления Писмана-Рэчфорда в сочетании с алгоритмом Томаса, позволяющая эффективно приближать решения. Предложенная вычислительная методика реализована и проиллюстрирована на двух- и трёхмерных численных экспериментах, включая динамические поверхностные графики и анимированные профили. Полученные результаты демонстрируют качественные свойства глобального решения, подтверждают аналитические выводы и дают дополнительное представление о взаимодействии нелинейной диффузии, весовой неоднородности и межкомпонентной связи.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, переменные коэффициенты, глобальное существование, метод конечных разностей, неоднородная среда, численное моделирование.

UDC 517.55

STATISTICAL ANALYSIS AND FORECASTING OF METEOROLOGICAL DATA

SHARIPOV O. SH.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT;
V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF
UZBEKISTAN, TASHKENT,
osharipov@yahoo.com

KHUDOYKULOVA H. B.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT,
TASHKENT STATE UNIVERSITY OF ECONOMICS, TASHKENT
xudoyqulova_h@nuu.uz

RESUME

This article synthesizes data on the daily average air temperature for December from the Tashkent-Observatory meteorological station over the years 1904–2023 (120 years of observations), and analyzes these data using statistical methods to explore forecasting possibilities. The paper details preliminary examinations of the time series (exploratory analysis; decomposition of trend and seasonality using STL), tests for stationarity (ADF and KPSS), identification of the correlation structure (via ACF and PACF), and the selection, parameter estimation, diagnostics, and assessment (both as model diagnostics and forecasts) of classical models including AR, MA, ARMA, ARIMA, and SARIMA.

Key words: Time series; weather forecasting; ARIMA; SARIMA; STL; Augmented Dickey–Fuller (ADF); ACF/PACF.

Forecasting time series is a significant branch of data science, applied in various domains from economics to meteorology. Forecasting is highly useful because, based on historic data, it allows predictions about the future. However, selecting a suitable model for forecasting is the most critical step. In our analyses, the process of selecting appropriate models for the data and verifying their reliability is carried out in accordance with rigorous statistical testing principles. This approach helps to more effectively predict future meteorological trends and aids decision-making across multiple sectors.

Analyses are based on daily average air temperature (for December) observed at the Tashkent-Observatory meteorological station over the years 1904–2023 (120 years of data).

Methodology

To select appropriate models for the data and to confirm their reliability, we carried out the following key statistical tests in a step-by-step sequence:

- **Stationarity testing:** This is an essential step for forecasting time series. It involves checking whether statistical properties such as mean and variance remain constant over time. We used the widely-applied Augmented Dickey-Fuller (ADF) test to determine whether the series is stationary.
- **Correlation analysis:** To understand the relationships between observations at various time lags, two main functions are used: the autocorrelation function (ACF) and the partial autocorrelation function (PACF).
- **Seasonality testing:** Because repeated patterns at regular intervals (daily, monthly, quarterly, or yearly) are an integral part of many time series, detecting seasonality is important for forecasting. We used STL (Seasonal-Trend decomposition using Loess) to decompose the series into trend, seasonal, and residual (irregular) components.

After conducting initial analyses such as stationarity tests, correlation structure (ACF and PACF), and seasonality identification, the next step is selecting a suitable forecasting model. Based on the outcomes of the previous stages, we decided whether to apply AR (autoregressive), MA (moving average), ARMA, ARIMA (autoregressive integrated moving average), or SARIMA (seasonal ARIMA) models.

Literature Review

Below is a brief analysis of key literature that underpins methodology. One of the most important sources is the model construction methodology for ARIMA and SARIMA as proposed by Box, Jenkins, and Reinsel (2015), which remains among the most widely used methods. Chatfield (2004) and Brockwell & Davis (2016) treat extensively the issues of seasonality and periodicity. Wei (2006) expands the practical capabilities of time series analysis through seasonal indices and both univariate and multivariate approaches. The econometric frameworks described by Gujarati & Porter (2009) and Hamilton (1994) are used in this work to assess the statistical significance of model parameters via t-tests, p-values, etc. With respect to checking model residuals, the Ljung–Box test (Ljung & Box, 1978) plays an important role. In forecasting, methods developed by Makridakis, Wheelwright & Hyndman (1998), as well as contemporary forecasting approaches in Hyndman & Athanasopoulos (2018), are widely used. Notably, Hyndman’s *Forecasting: Principles and Practice* is heavily applied in time series forecasting using open-source software (e.g. R, Python). Overall, the above sources cover the various aspects of time series analysis—from theoretical foundations through to practical forecasting methods.

Analysis and Results

Initially, the analyses are performed on the daily average temperature data for December for the years 1904-2023 (see Figure 1).

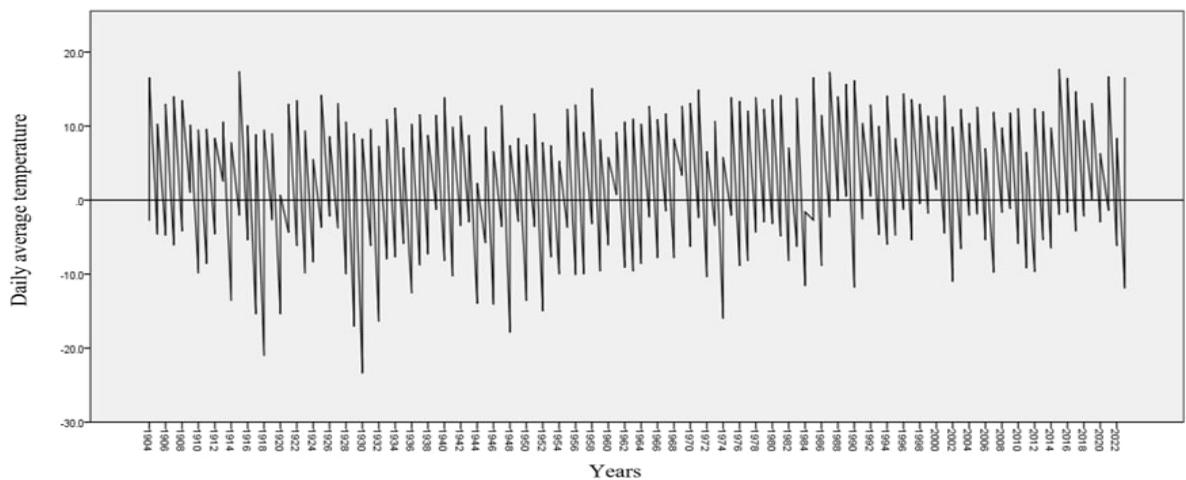


Figure 1. Daily average air temperature in December (1904-2023) at the Tashkent-Observatory, Uzbekistan

According to the results shown in Figure 1, although there are some seasonal effects, there is no obvious long-term trend in the time series. To confirm whether the series is stationary, we apply the Augmented Dickey-Fuller test.

Table 1. The Augmented Dickey-Fuller test

Dickey-Fuller test	P-Value	Maximum lag order for terms in the regression model
-17.1452	0,000	300

The results show a very low p-value (0.000), indicating statistical significance. The p-value is below the 0.01 significance level, which confirms that the time series is stationary, implying stable and consistent behavior of the data.

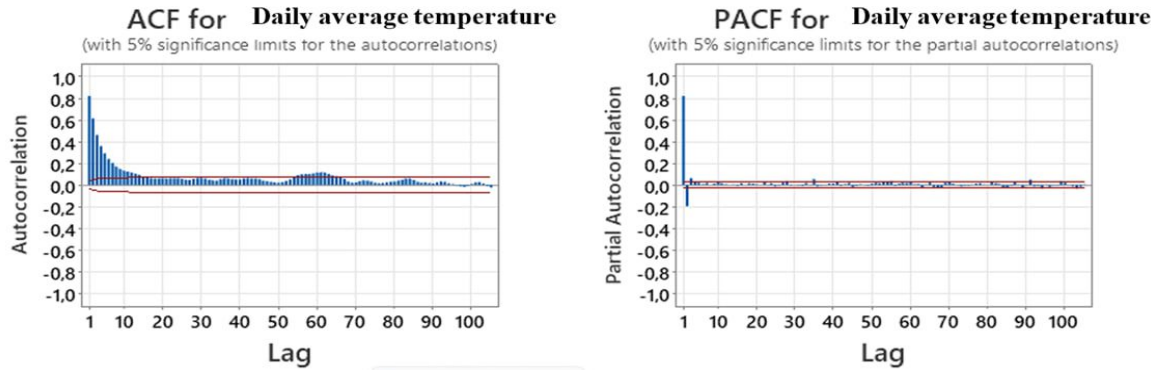


Figure 2. Autocorrelation function (ACF) and partial autocorrelation function (PACF)

The plot shows that the ACF exhibits statistically significant values for several lags, meaning there is persistent correlation among past values in the temperature series. For this dataset, this suggests cyclic components with approximately monthly or bi-monthly periodicity (around 30- and 60-day lags). The fact that the ACF remains significant up to long lags, and that recurrent seasonal peaks are present, motivates consideration of a SARIMA (Seasonal ARIMA) model. To visually express and better understand seasonality, we decompose the time series into trend, seasonal, and residual (irregular) components using an STL decomposition (or SDTS decomposition) (see Figure 3).

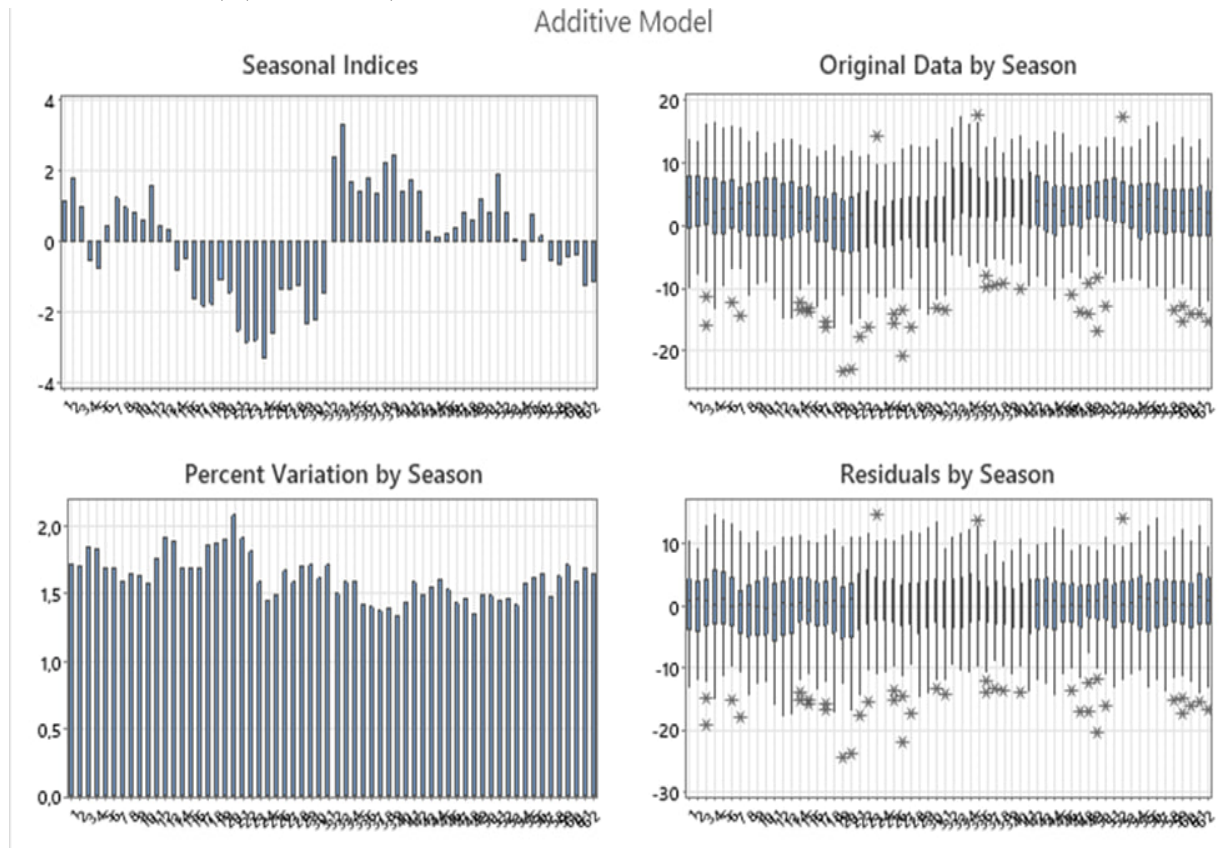


Figure 4. Seasonal index

The seasonal index graph indicates periodic oscillations, with alternating positive values (periods where temperature is above seasonal norm) and negative values (periods below the norm). Sharp changes in the index are observed in the lag intervals of 30–32 days and 60–62 days, which confirms the presence of certain periodicity in the time series.

From the results of stationarity testing, correlation analysis (ACF and PACF), and seasonality identification, we conclude that for the daily average December temperatures, the SARIMA(3,0,0)(1,0,0)[seasonal period] model is the most appropriate. We further validate this choice through reliability tests.

Table 2. Final parameter estimates

Type	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value
AR 1	0,9943	0,0164	60,70	0,000
AR 2	-0,2562	0,0227	-11,27	0,000
AR 3	0,0607	0,0164	3,70	0,000
SAR 62	0,0428	0,0165	2,59	0,010
Constant	0,4720	0,0518	9,10	0,000
Mean	2,450	0,269		

Table 2 shows that parameters AR(1), AR(2), AR(3), and seasonal AR(62) are statistically significant, indicating that the time series exhibits both short-term and seasonal dependence.

Table 3. Residual summary

DF	SS	MS
3715	37145,3	9,99874

According to Table 3, the sum of squares of residuals (SS) is 37,145.3, with degrees of freedom (DF) equal to 3,715. The mean square (MS) is 9.99874, showing that average residuals are quite small. This suggests that the chosen model fits the data well.

Table 4. Ljung–Box test for residual autocorrelation

Lag	12	24	36	48
Chi-Square	6,64	13,58	35,69	44,08
DF	7	19	31	43
P-Value	0,468	0,808	0,257	0,426

Table 4 presents the modified Box–Pierce (Ljung–Box) χ^2 statistics for various lags (12, 24, 36, 48). Their corresponding p-values are 0.468, 0.808, 0.257, and 0.426. Since all these p-values exceed 0.05, we conclude that there is no significant autocorrelation in the residuals. This means that after fitting, the residuals behave like random noise, confirming that the chosen SARIMA model adequately explains the time series.

Based on all reliability tests, the selected model **SARIMA(3,0,0)(1,0,0)** is confirmed reliable. Therefore, it can be used for forecasting future data. Forecast values for December daily average temperature for the years 2024-2027 are generated (see Figure 5 and Table 6).

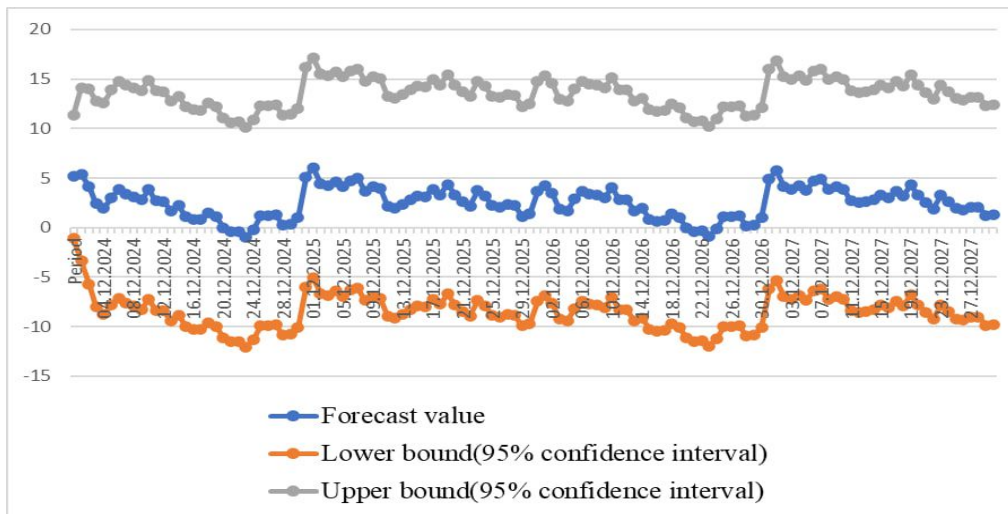


Figure 5. Forecast for December daily average temperature, 2024-2027

These results are calculated using the SARIMA model, one of the seasonal time series models. From the graph it is evident that the confidence intervals remain stable over time, which suggests that the forecasting ability of the model is reliable. Also, recurrent cold periods in December are clearly visible every year. This demonstrates that the seasonal component of the time series is highly stable. The advantage of using a SARIMA model is also shown — the model accounts not only for variability, but for the regular recurring dynamics of temperature.

Conclusion and Recommendations

All the above analyses show that the SARIMA model used for forecasting (daily average December temperature) has a high level of accuracy. The ACF and PACF functions reveal that there are significant correlations at important lags. Seasonal index graphs show that temperature changes repeat in particular periods of the year. The indices display stable oscillations, indicating a strong seasonal component in the series.

These forecasting results have practical implications:

1. **Energy Sector:** Based on forecasts, energy consumption during winter can be planned more precisely; stability of heating supply systems should be ensured.
2. **Agriculture:** Considering extreme cold days observed in December, protective measures for crops should be strengthened.
3. **Transport and Infrastructure:** Forecast results should be used to develop safety strategies for possible issues during cold days (e.g. road icing, vehicle failures).
4. **Climate Monitoring:** Forecasts can be compared to long-term climate observations to detect long-term trends in climate change.

REFERENCES

1. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. Time Series Analysis: Forecasting and Control. John Wiley & Sons, 2015.
2. Hamilton, J. D. Time Series Analysis. Princeton University Press, 1994.
3. Chatfield, C. The Analysis of Time Series: An Introduction. Chapman & Hall/CRC, 2004.
4. Wei, W. W. S. Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods. Pearson Addison Wesley, 2006.
5. Brockwell, P. J., & Davis, R. A. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer, 2016.
6. Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. Forecasting: Methods and Applications. John Wiley & Sons, 1998.

7. Gujarati, D. N., & Porter, D. C. Basic Econometrics. McGraw-Hill/Irwin, 2009.
8. Brockwell, P. J., & Davis, R. A. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer, 2016.
9. Ljung, G. M., & Box, G. E. P. On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 1978, 65(2), P.297–303.
10. Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. Forecasting: Principles and Practice. OTexts, 2018.

REZYUME

Ushbu maqola 1904–2023 yillarga oid Toshkent-Observatoriya meteostansiyasining dekabr oyidagi kunlik oʻrtacha havo harorati maʼlumotlarini (120 yillik kuzatuvlar) statistika usullari yordamida tahlil qilib, prognozlash imkoniyatlarini oʻrganadi. Maqolada vaqt qatorlarining dastlabki tekshiruvlari (eksplorator tahlil, STL yordamida trend va mavsumiylikni ajratish), stasionarlik sinovlari (ADF va KPSS), korelyatsion strukturani aniqlash (ACF va PACF), shuningdek AR, MA, ARMA, ARIMA va SARIMA kabi klassik modellarni tanlash, parametr baholash, hamda modelni diagnostika va prognoz sifatida baholash bosqichlari batafsil bayon etilgan.

Kalit soʻzlar: Vaqt qatori; ob-havo prognozi; ARIMA; SARIMA; STL; Augmented Dickey–Fuller (ADF); ACF/PACF.

РЕЗЮМЕ

В данной статье данные о месячной (за декабрь) суточной средней температуре воздуха на метеорологической станции Ташкент-Обсерватория за период 1904–2023 годов (120 лет наблюдений) анализируются с помощью статистических методов для изучения возможностей прогнозирования. В работе подробно описаны предварительные исследования временного ряда (эксплоративный анализ; декомпозиция тренда и сезонности с использованием STL), тесты на стационарность (ADF и KPSS), идентификация корреляционной структуры (через ACF и PACF), а также выбор классических моделей, оценка параметров, диагностика моделей и оценка их прогностических возможностей, включая модели AR, MA, ARMA, ARIMA и SARIMA.

Ключевые слова: Временной ряд; прогнозирование погоды; ARIMA; SARIMA; STL; тест Дики-Фуллера в дополнении (ADF); ACF/PACF.

UDC 512.554.1

ABELIAN EXTENSIONS OF SOLVABLE LEIBNIZ ALGEBRA WITH NATURALLY GRADED FILIFORM NILRADICAL OF MAXIMAL CODIMENSION**SHERALIYEVA S. A.**V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES. TASHKENT,
UZBEKISTAN
abdiqodirovna@mail.ru**RESUME**

Using the method of central extensions, we can construct only those Leibniz algebras with nontrivial centers. Therefore, to identify Leibniz algebras with trivial centers, we apply the method of abelian extensions. In this paper, we provide a classification of one-dimensional abelian extensions of solvable Leibniz algebras whose nilradical is a naturally graded filiform Leibniz algebra of maximal codimension. We give explicit descriptions of these extensions and determine their structures up to isomorphism.

Key words: Leibniz algebra, solvability, nilpotency, filiform Leibniz algebras, abelian extension.

1. Introduction

Leibniz algebras were introduced and systematically studied by J.-L. Loday in the early 1990s [8]. However, similar algebraic structures had previously been considered by Bloh under the name D-algebras [2]. While investigating the homology theory of Lie algebras, Loday observed that the antisymmetry condition of the Lie bracket was not essential for establishing the derivation property on chain complexes. This insight led him to define what is now known as a Leibniz algebra.

A right (or, equivalently, left) Leibniz algebra is a nonassociative algebra in which the right (respectively, left) multiplication operator satisfies the derivation rule. In this way, Leibniz algebras naturally generalize Lie algebras by relaxing the antisymmetry condition, while preserving key structural properties such as the Leibniz identity.

The extension method is widely regarded as one of the most effective approaches for classifying algebras. The study of abelian extensions in the context of Leibniz algebras was initially introduced in [3]. Central extensions of Leibniz algebras were examined in [10], where a complete classification of central extensions for null-filiform Leibniz algebras was provided. Additionally, the notion of non-abelian extensions was introduced in [9]. Furthermore, based on the techniques developed in [9], a method for determining abelian extensions of solvable Leibniz algebras has been presented in [6]. It is important to note that the extensions of solvable Leibniz algebras and superalgebras have been examined in [4] and [11], with a focus on the central extensions of solvable algebras in these works.

In this work, we focus on solvable Leibniz algebras whose nilradical is a naturally graded filiform Leibniz algebra of maximal codimension. Specifically, we investigate their one-dimensional abelian extensions and describe their algebraic structures. Our aim is to provide a complete characterization of these extensions.

2. Preliminaries

In this section, we recall several fundamental definitions and preliminary results that will be used in the subsequent sections of the paper.

Definition 1. A vector space with a bilinear multiplication $(L, [\cdot, \cdot])$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the so-called Leibniz identity

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]],$$

holds.

For a given Leibniz algebra $(L, [\cdot, \cdot])$, the sequences of two-sided ideals are defined recursively as follows:

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], s \geq 1.$$

Definition 2. A Leibniz algebra L is said to be nilpotent (respectively, solvable), if there exists $n \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) such that $L^n = \{0\}$ ($L^{[m]} = \{0\}$).

The maximal nilpotent ideal of a Leibniz algebra is said to be the nilradical of the algebra.

Definition 3. A Leibniz algebra L is called filiform if $\dim L^i = n - i$, for $2 \leq i \leq n$, where $n = \dim L$.

Definition 4. Given a nilpotent Leibniz algebra L with nilindex s , put $L_i = L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s - 1$, and $Gr(L) = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_{s-1}$. Define the product in the vector space $Gr(L)$ as follows:

$$[x + L^{i+1}, y + L^{j+1}] = [x, y] + L^{i+j+1},$$

where $x \in L^i/L^{i+1}, y \in L^j/L^{j+1}$. Then $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ and we obtain the graded algebra $Gr(L)$. If $Gr(L)$ and L are isomorphic, then we say that the algebra L is naturally graded.

Now, we present a method for constructing abelian extensions of solvable Leibniz algebras.

Definition 5. A representation of a Leibniz algebra $(L, [\cdot, \cdot])$ is a triple (V, l, r) , where V is a vector space equipped with two linear maps $l : L \rightarrow gl(V)$ and $r : L \rightarrow gl(V)$, such that the following equalities hold:

$$r_{[x,y]} = r_y \circ r_x - r_x \circ r_y, \quad l_{[x,y]} = r_y \circ l_x - l_x \circ r_y, \quad l_x \circ l_y = -l_x \circ r_y, \quad \forall x, y \in L. \tag{1}$$

Here $[\cdot, \cdot]$ is the commutator Lie bracket on $gl(V)$, the vector space of linear transformations on V .

Let L be a Leibniz algebra and let V be an abelian (i.e., trivial bracket) Leibniz algebra. Suppose, $l : L \rightarrow gl(V), r : L \rightarrow gl(V)$ are linear maps defining the left and right actions of L on V , respectively. Let $\omega : L \otimes L \rightarrow V$ be a bilinear map satisfying

$$\omega([x, y], z) - \omega(x, [y, z]) - \omega([x, z], y) - l_x \omega(y, z) - r_y \omega(x, z) + r_z \omega(x, y) = 0. \tag{2}$$

We refer to bilinear maps ω that satisfy the compatibility condition described above as 2-cocycles on L with respect to the pair (l, r) . The set of all such 2-cocycles is denoted by $Z^2(L, l, r)$.

The 2-coboundary on L with respect to the pair (l, r) is defined as

$$df(x, y) = f([x, y]) - l_{\varphi(x)}f(y) - r_{\varphi(y)}f(x), \quad x, y \in L,$$

where $\varphi \in \text{Aut}(L)$ and $f \in \text{Hom}(L, V)$. The set of such bilinear maps is denoted by $B^2(L, l, r)$.

For $\omega \in Z^2(L, l, r)$, we define on the vector space $\widehat{L} = L \oplus V$ the bilinear product $[-, -]_{(l,r,\omega)}$ by

$$[x + a, y + b]_{(l,r,\omega)} = [x, y]_L + \omega(x, y) + l_x b + r_y a, \quad x, y \in L, \quad a, b \in V. \tag{3}$$

The algebra $L_\omega = (\widehat{L}, [-, -]_{(l,r,\omega)})$ is called an abelian extension of L by V . One can easily check that L_ω is a Leibniz algebra if and only if $\omega \in Z^2(L, l, r)$.

We now establish the conditions under which two abelian extensions of a given algebra are isomorphic. Given two extensions $\widehat{L}_1 = L(\omega^1, l^1, r^1)$ and $\widehat{L}_2 = L(\omega^2, l^2, r^2)$.

Proposition 1.[6] Two Leibniz algebras $\widehat{L}_1 = L(\omega^1, l^1, r^1)$ and $\widehat{L}_2 = L(\omega^2, l^2, r^2)$ are isomorphic if and only if there exists $\varphi \in \text{Aut}(L), \psi \in \text{Aut}(V)$ and $f \in \text{Hom}(L, V)$, such that

$$\omega^2(\varphi(x), \varphi(y)) + l_{\varphi(x)}^2 f(y) + r_{\varphi(y)}^2 f(x) - f([x, y]) = \psi(\omega^1(x, y)),$$

$$l_{\varphi(x)}^2 \psi(a) = \psi(l_x^1 a), \quad r_{\varphi(y)}^2 \psi(a) = \psi(r_y^1 a),$$

for any $x, y \in L, a \in V$.

Given a Leibniz algebra L , an abelian module V and associated left and right actions (l, r) the group $\text{Aut } L \times \text{Aut } V$ acts on the space of 2-cocycles (L, l, r) by:

$$\omega'(x, y) = \psi(\omega(\varphi(x), \varphi(y))), \quad l'_x(a) = \psi(l_{\varphi(x)} \psi^{-1}(a)), \quad r'_x(a) = \psi(r_{\varphi(x)} \psi^{-1}(a)).$$

In this action, we say that ψ is an intertwining operator for l' and $l \circ \varphi$ (respectively, r' and $r \circ \varphi$). This action preserves cohomology classes up to coboundaries: Two extensions $\widehat{L}_1 = L(\omega^1, l^1, r^1)$ and $\widehat{L}_2 = L(\omega^2, l^2, r^2)$ are isomorphic if and only if:

$$\omega^2 - \psi \circ \omega^1 \circ \varphi \in B^2(L, l^2, r^2),$$

and ψ intertwines l^2 with $l^1 \circ \varphi$, and r^2 with $r^1 \circ \varphi$. Thus, we obtain the following proposition.

Proposition 2.[6] *Let $\widehat{L}_1 = L(\omega^1, l^1, r^1)$ and $\widehat{L}_2 = L(\omega^2, l^2, r^2)$ be extensions of the solvable Leibniz algebra L by the abelian algebra V . Then the Leibniz algebras \widehat{L}_1 and \widehat{L}_2 are isomorphic if and only if ω^1 and ω^2 are in the same $\text{Aut } L \times \text{Aut } V$ orbit in $\bigcup_{l,r} H^2(L, l, r)$.*

3. Main result

In this section, we construct an abelian extension of a solvable Leibniz algebra whose nilradical is naturally graded filiform algebra and possesses the maximal possible codimension.

It is known that, any complex n -dimensional naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebra is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras [1]:

$$F_n^1 : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n - 1, \quad F_n^2 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

The complete classification of solvable Leibniz algebras whose nilradical is isomorphic to F_n^1 or F_n^2 has been given in [5]. We consider the solvable Leibniz algebra whose nilradical is F_n^1 and whose codimension is maximal. Up to isomorphism, there exists a unique such solvable Leibniz algebra, with the multiplication defined as follows:

$$L(F_n^1) : \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n - 1, \\ [e_i, x] = (i - 1)e_i, & [e_i, y] = e_i, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Note that any automorphism of the algebra $L(F_n^1)$ has the following form:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = ae_1, & \varphi(x) = be_1 + x, & \varphi(y) = y, \\ \varphi(e_j) = a^{j-2}ce_j + a^{j-2} \sum_{i=j+1}^n \frac{(-1)^{i+j-1}cb^{i-j}}{(i-j)!}e_i, & 2 \leq j \leq n, \end{cases}$$

where $a, c \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Now we describe all 2-coboundaries on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) , by the one-dimensional abelian algebra $V = \langle e_{n+1} \rangle$.

For the basis elements $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x, y\}$ and $f \in \text{Hom}(L(F_n^1), V)$, we put

$$f(e_i) = c_i e_{n+1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad f(x) = c_{n+1} e_{n+1}, \quad f(y) = c_{n+2} e_{n+1}.$$

We consider linear maps $l, r : g \rightarrow \text{End}(V)$, such that

$$\begin{aligned} l_x(e_{n+1}) &= \alpha_1 e_{n+1}, & r_x(e_{n+1}) &= \alpha_2 e_{n+1}, \\ l_y(e_{n+1}) &= \beta_1 e_{n+1}, & r_y(e_{n+1}) &= \beta_2 e_{n+1}, \end{aligned} \tag{4}$$

for some scalars $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.

For any automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$, consider the map

$$df(x, y) = f([x, y]) - l_{\varphi(x)}f(y) - r_{\varphi(y)}f(x),$$

where f is a linear map. We obtain the following result.

Proposition 3. Any 2-coboundary with respect to the pair (l, r) for the algebras $L(F_n^1)$ has the following forms:

$$B^2 : \begin{cases} df(e_i, e_1) = c_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, & df(e_1, x) = (1 - \alpha_2)c_1, \\ df(e_1, y) = -\beta_2 c_1, & df(x, e_1) = -(1 + \alpha_1)c_1, & df(y, e_1) = -\beta_1 c_1, \\ df(e_i, x) = ((i-1) - \alpha_2)c_i, & df(e_i, y) = (1 - \beta_2)c_i, & 2 \leq i \leq n, \\ df(x, e_i) = -\alpha_1 c_i, & df(y, e_i) = -\beta_1 c_i, & 2 \leq i \leq n, \\ df(x, x) = -(\alpha_1 + \alpha_2)c_{n+1}, & df(x, y) = -\alpha_1 c_{n+2} - \beta_2 c_{n+1}, \\ df(y, x) = -\beta_1 c_{n+1} - \alpha_2 c_{n+2}, & df(y, y) = -(\beta_1 + \beta_2)c_{n+2}. \end{cases}$$

Now, using the algorithm for constructing solvable Leibniz algebras, we derive all possible extensions of the solvable Leibniz algebra $L(F_n^1)$ by the one-dimensional abelian algebra $V = \langle e_{n+1} \rangle$. The condition (1), to the linear maps $l, r : L(F_n^1) \rightarrow \text{End}(V)$, which defined as (4), leads to the following system of equations:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0, & \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) &= 0, \\ \beta_1(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0, & \beta_1(\beta_1 + \beta_2) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

In the following proposition, we describe all 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) taking values in the one-dimensional abelian algebra $V = \langle e_{n+1} \rangle$.

Proposition 4. A basis of $Z^2(L(F_n^1), l, r)$ consists of the following cocycles:

1. $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 1 :$

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & 2 \leq i \leq n-1, & & \omega(x, e_1) &= b_{n+1,1}, \\ \omega(e_i, x) &= (i-2)b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & & \omega(e_2, y) &= b_{2,n+2}, \\ \omega(e_i, y) &= b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & & \omega(y, e_1) &= b_{n+2,1}, \\ \omega(x, x) &= b_{n+1,n+1}, & & & \omega(y, x) &= b_{n+2,n+1}. \end{aligned} \tag{a}$$

2. $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 2 :$

$$\begin{aligned} \omega(e_1, e_1) &= b_{1,1}, & \omega(e_1, x) &= b_{1,n+1}, & \omega(x, e_1) &= b_{1,n+1}, \\ \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & 2 \leq i \leq n-1, & & \omega(e_2, x) &= b_{2,n+1}, \\ \omega(e_i, x) &= (i-3)b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & & \omega(e_2, y) &= -b_{2,n+1}, \\ \omega(e_3, y) &= b_{3,n+2}, & \omega(e_i, y) &= b_{i-1,1}, & 4 \leq i \leq n, & \\ \omega(x, x) &= b_{n+1,n+1}, & \omega(y, x) &= b_{n+2,n+1}. & & \end{aligned} \tag{b}$$

3. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 1 :$

$$\begin{aligned} \omega(e_1, y) &= b_{1,n+2}, & \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & 2 \leq i \leq n-1, & \\ \omega(e_2, x) &= b_{2,n+1}, & \omega(e_i, x) &= (i-2)b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & \\ \omega(e_2, y) &= b_{2,n+2}, & \omega(x, e_1) &= b_{1,n+2}, & \omega(x, y) &= b_{n+1,n+1}, \\ \omega(x, x) &= b_{n+1,n+1}, & \omega(y, x) &= b_{n+2,n+1}, & \omega(y, y) &= b_{n+2,n+1}. \end{aligned} \tag{c}$$

4. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = n, \beta_2 = 1 :$

$$\begin{aligned} \omega(e_1, x) &= (n-1)b_{1,n+1}, & \omega(e_1, y) &= b_{1,n+1}, & \omega(x, e_1) &= b_{1,n+1}, \\ \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & 2 \leq i \leq n, & & \omega(e_2, x) &= b_{2,n+1}, \\ \omega(e_i, x) &= (i-n-1)b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & & \omega(x, y) &= b_{n+1,n+2}, \\ \omega(x, x) &= nb_{n+1,n+2}, & \omega(y, y) &= b_{n+2,n+2}, & \omega(y, x) &= nb_{n+2,n+2}, \end{aligned} \tag{d}$$

5. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, (\alpha_2, \beta_2) \notin \{(1, 0), (2, 0), (1, 1), (n, 1)\}$:

$$\begin{aligned} \omega(e_1, x) &= (\alpha_2 - 1)b_{1,n+1}, & \omega(e_1, y) &= \beta_2 b_{1,n+1}, & \omega(e_2, x) &= (\alpha_2 - 1)b_{2,n+1}, \\ \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & & 2 \leq i \leq n - 1, & \omega(e_2, y) &= (\beta_2 - 1)b_{2,n+1}, \\ \omega(e_i, x) &= (i - 1 - \alpha_2)b_{i-1,1}, & \omega(e_i, y) &= (1 - \beta_2)b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(x, e_1) &= b_{1,n+1}, & \omega(x, x) &= \alpha_2 b_{n+1,n+1}, & \omega(x, y) &= \beta_2 b_{n+1,n+1}, \\ \omega(y, x) &= \alpha_2 b_{n+2,n+1}, & \omega(y, y) &= \beta_2 b_{n+2,n+1}. \end{aligned} \tag{e}$$

6. $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1, \beta_1 = -\beta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \omega(e_1, x) &= b_{1,n+1}, & \omega(e_1, y) &= b_{1,n+2}, & \omega(e_2, y) &= b_{2,n+2}, \\ \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & & 2 \leq i \leq n - 1, & \omega(x, e_1) &= -b_{1,n+1}, \\ \omega(e_i, x) &= (i - 2)b_{i-1,1}, & \omega(x, e_i) &= b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(e_i, y) &= b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, & \omega(x, e_2) &= b_{2,n+2}, \\ \omega(y, e_1) &= -b_{1,n+2}, & \omega(x, y) &= b_{n+1,n+2}, & \omega(y, x) &= -b_{n+1,n+2}. \end{aligned} \tag{f}$$

7. $\alpha_1 = -\alpha_2, \beta_1 = -\beta_2, (\alpha_1, \beta_1) \neq (-1, 0)$:

$$\begin{aligned} \omega(e_1, x) &= (\alpha_1 + 1)b_{1,n+1}, & \omega(e_1, y) &= \beta_1 b_{1,n+1}, \\ \omega(e_2, x) &= (\alpha_1 + 1)b_{2,n+1}, & \omega(e_2, y) &= (\beta_1 + 1)b_{2,n+1}, \\ \omega(e_i, e_1) &= b_{i,1}, & & 2 \leq i \leq n - 1, \\ \omega(e_i, x) &= (\alpha_1 + i - 1)b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(e_i, y) &= (\beta_1 + 1)b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(x, e_1) &= -(\alpha_1 + 1)b_{1,n+1}, & \omega(x, e_2) &= -\alpha_1 b_{2,n+1}, \\ \omega(x, e_i) &= -\alpha_1 b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(y, e_1) &= -\beta_1 b_{1,n+1}, & \omega(y, e_2) &= -\beta_1 b_{2,n+1}, \\ \omega(y, e_i) &= -\beta_1 b_{i-1,1}, & & 3 \leq i \leq n, \\ \omega(x, y) &= b_{n+1,n+2}, & \omega(y, x) &= -b_{n+1,n+2}. \end{aligned} \tag{h}$$

Proof. For any $\omega \in Z^2(L(F_n^1), l, r)$, let us denote $\omega(a, c) = b_{i,j}e_{n+1}, 1 \leq i, j \leq n + 2$, where $a, c \in \{e_1, e_2, \dots, e_n, x, y\}$. Using equality (2), we compute the cocycles and obtain the following relations:

$$\begin{aligned} \beta_1 b_{1,1} &= 0, & \beta_2 b_{1,1} &= 0, & \alpha_1 b_{1,1} &= 0, \\ (2 - \alpha_2) b_{1,1} &= 0, & b_{1,i} &= 0, & & 2 \leq i \leq n, \\ b_{i,j} &= 0, & & 2 \leq j \leq i \leq n, & \beta_1 b_{n,1} &= 0, \\ (1 - \beta_2) b_{n,1} &= 0, & \alpha_1 b_{n,1} &= 0, & (n - \alpha_2) b_{n,1} &= 0, \\ (\alpha_1 + 1) b_{1,n+1} &= (\alpha_2 - 1) b_{n+1,1}, & b_{1,n+1} &= (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) b_{n+1,1}, \\ \beta_2 b_{1,n+1} &= (\alpha_2 - 1) b_{1,n+2}, & \beta_1 b_{1,n+1} &= (\alpha_2 - 1) b_{n+2,1}, \\ \beta_1 b_{1,n+2} &= \beta_2 b_{n+2,1}, & \beta_2 b_{n+1,1} &= (1 + \alpha_1) b_{1,n+2}, \\ b_{1,n+2} &= \alpha_1 b_{n+2,1} + \beta_2 b_{n+1,1}, & (1 - \alpha_2) b_{n+2,1} &= \beta_1 b_{n+1,1}, & (\beta_1 + \beta_2) b_{n+2,1} &= 0, \\ b_{i+1,n+1} &= (i - \alpha_2) b_{i,1}, & b_{n+1,i+1} &= -\alpha_1 b_{i,1}, & & 2 \leq i \leq n - 1, \\ \alpha_1 b_{i,n+1} &= (\alpha_2 + 1 - i) b_{n+1,i}, & (\alpha_1 + \alpha_2) b_{n+1,i} &= 0, & & 2 \leq i \leq n, \\ b_{n+2,i+1} &= -\beta_1 b_{i,1}, & & 2 \leq i \leq n - 1, \\ (\beta_2 - 1) b_{i,n+1} &= (\alpha_2 + 1 - i) b_{i,n+2}, & \alpha_1 b_{i,n+2} &= (\beta_2 - 1) b_{n+1,i}, & & 2 \leq i \leq n, \\ \beta_1 b_{n+1,n+1} &= 0, & \alpha_1 b_{n+1,n+1} &= 0, & \beta_1 b_{n+2,n+2} &= 0, \\ \alpha_1 b_{n+2,n+2} &= 0, & \alpha_2 b_{n+2,i} &= -\beta_1 b_{n+1,i}, & & 2 \leq i \leq n, \\ \beta_1 b_{i,n+1} &= (\alpha_2 - i + 1) b_{n+2,i}, & \alpha_1 b_{n+2,i} &= -\beta_2 b_{n+1,i}, & & 2 \leq i \leq n, \\ (\beta_2 - 1) b_{n+2,i} &= \beta_1 b_{i,n+2}, & (\beta_1 + \beta_2) b_{n+2,i} &= 0, & & 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 + \alpha_2)b_{n+1,n+2} &= \beta_2b_{n+1,n+1}, & (\beta_1 + \beta_2)b_{n+2,n+1} &= \alpha_2b_{n+2,n+2}, \\
 \alpha_1b_{n+2,n+1} - \alpha_2b_{n+1,n+2} + \beta_2b_{n+1,n+1} &= 0, & \alpha_2b_{n+2,n+2} + \beta_1b_{n+1,n+2} - \beta_2b_{n+2,n+1} &= 0.
 \end{aligned}$$

By equation (5), we deduce that either $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, or $\alpha_1 = -\alpha_2$ and $\beta_1 = -\beta_2$. Accordingly, to determine the values of the coefficients $b_{i,j}$, we consider the following two cases:

Case 1. Let $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Then we have

$$\begin{aligned}
 b_{1,i} &= 0, & 2 \leq i \leq n, \\
 b_{i,j} &= 0, & 2 \leq j \leq i \leq n, & b_{1,n+1} &= (\alpha_2 - 1)b_{n+1,1}, \\
 b_{1,n+2} &= \beta_2b_{n+1,1}, & b_{i+1,n+1} &= (i - \alpha_2)b_{i,1}, & 2 \leq i \leq n - 1, \\
 b_{n+1,i} &= 0, & b_{n+2,i} &= 0, & 2 \leq i \leq n,
 \end{aligned}$$

and the following restrictions

$$\begin{aligned}
 \beta_2b_{1,1} &= 0, & (2 - \alpha_2)b_{1,1} &= 0, \\
 (1 - \beta_2)b_{n,1} &= 0, & (n - \alpha_2)b_{n,1} &= 0, \\
 \beta_2b_{n+2,1} &= 0, & (\alpha_2 - 1)b_{n+2,1} &= 0, \\
 (\beta_2 - 1)b_{i,n+1} &= (\alpha_2 + 1 - i)b_{i,n+2}, & 2 \leq i \leq n, \\
 \alpha_2b_{n+1,n+2} &= \beta_2b_{n+1,n+1}, & \beta_2b_{n+2,n+1} &= \alpha_2b_{n+2,n+2},
 \end{aligned}$$

Now, consider the following subcases:

- 1.1. If $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$, then we obtain $b_{i,n+1} = (i - 2)b_{i,n+2}, 2 \leq i \leq n$, and $b_{1,1} = b_{n,1} = b_{n+1,n+2} = b_{n+2,n+2} = 0$. Hence, we conclude that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) is given by the expression in (a).
- 1.2. If $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 0$, then we obtain $b_{i,n+1} = (i - 3)b_{i,n+2}, 2 \leq i \leq n$, and $b_{1,n+2} = b_{n,1} = b_{n+2,1} = b_{n+1,n+2} = b_{n+2,n+2} = 0$. Hence, we get that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) has the form (b).
- 1.3. If $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1$, then we obtain $b_{n+1,n+2} = b_{n+1,n+1}, b_{n+2,n+1} = b_{n+2,n+2}$, and $b_{1,1} = b_{1,n+1} = b_{n,1} = b_{n+2,1} = b_{i,n+2} = 0, 3 \leq i \leq n$. Hence, we get that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) has the form (c).
- 1.4. If $\alpha_2 = n, \beta_2 = 1$, then we obtain $b_{1,n+1} = (n - 1)b_{1,n+2}, nb_{n+1,n+2} = b_{n+1,n+1}, b_{n+2,n+1} = nb_{n+2,n+2}$, and $b_{1,1} = b_{n,1} = b_{n+2,1} = b_{i,n+2} = 0, 2 \leq i \leq n$. Hence, we get that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) has the form (d).
- 1.5. If $(\alpha_2, \beta_2) \notin \{(1, 0), (2, 0), (1, 1), (n, 1)\}$ then we obtain

$$(\beta_2 - 1)b_{i,n+1} = (\alpha_2 + 1 - i)b_{i,n+2}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$\alpha_2b_{n+1,n+2} = \beta_2b_{n+1,n+1}, \quad \beta_2b_{n+2,n+1} = \alpha_2b_{n+2,n+2},$$

and $b_{1,1} = b_{n,1} = b_{n+2,1} = 0$. Hence, we get that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) has the form (e).

Case 2. Let $\alpha_1 = -\alpha_2$ and $\beta_1 = -\beta_2$. Then we have

$$\begin{aligned}
 b_{1,i} &= 0, & 1 \leq i \leq n, & & b_{n,1} &= 0, \\
 b_{i,j} &= 0, & 2 \leq j \leq i \leq n, & & b_{n+1,n+1} &= 0, \\
 b_{n+2,n+2} &= 0, & b_{1,n+1} &= -b_{n+1,1}, & b_{1,n+2} &= \alpha_1b_{n+2,1} - \beta_1b_{n+1,1}, \\
 b_{n+2,n+1} &= -b_{n+1,n+2}, & b_{i,n+1} &= (i - 1 + \alpha_1)b_{i-1,1}, & b_{n+1,i} &= -\alpha_1b_{i-1,1}, \\
 b_{n+2,i} &= -\beta_1b_{i-1,1}, & 3 \leq i \leq n, & & &
 \end{aligned}$$

and the following restrictions

$$\begin{aligned} \beta_1 b_{1,n+2} &= -\beta_1 b_{n+2,1}, & \beta_1 b_{1,n+1} &= (\alpha_1 + 1)b_{1,n+2}, & \beta_1 b_{1,n+1} &= -(\alpha_1 + 1)b_{n+2,1}, \\ \alpha_1 b_{2,n+1} &= -(\alpha_1 + 1)b_{n+1,2}, & \beta_1 b_{2,n+1} &= -(\alpha_1 + 1)b_{n+2,2}, \\ \alpha_1 b_{i,n+2} &= -(\beta_1 + 1)b_{n+1,i}, & \beta_1 b_{i,n+2} &= -(\beta_1 + 1)b_{n+2,i} & 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

Now, consider the following subcases:

2.1. If $\alpha_1 = -1, \beta_1 = 0$, then we obtain $b_{i,n+2} = b_{n+1,i}, 2 \leq i \leq n$, and $b_{2,n+1} = b_{n+2,i} = 0, 2 \leq i \leq n$. Hence, we get that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ with respect to the pair (l, r) has the form (f).

2.2. If $(\alpha_1, \beta_1) \neq (-1, 0)$, then we obtain $b_{n+2,1} = -b_{1,n+2}$, and

$$\begin{aligned} \beta_1 b_{1,n+1} &= (\alpha_1 + 1)b_{1,n+2}, & \alpha_1 b_{2,n+1} &= -(\alpha_1 + 1)b_{n+1,2}, & \beta_1 b_{2,n+1} &= -(\alpha_1 + 1)b_{n+2,2}, \\ \alpha_1 b_{i,n+2} &= -(\beta_1 + 1)b_{n+1,i}, & \beta_1 b_{i,n+2} &= -(\beta_1 + 1)b_{n+2,i}, & 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

In this case, we conclude that any 2-cocycles on $L(F_n^1)$ for the pair (l, r) have the form (h). This concludes the proof of Proposition 4.

By Propositions 3 and 4, we obtain the following corollary:

Corollary. *We have the following:*

- I. If $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 1$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 1, H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \omega(y, e_1) \rangle$;
- II. If $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 2$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2, H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \omega(e_1, e_1), \omega(e_3, y) \rangle$;
- III. If $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 1$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2, H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \omega(e_2, x), \omega(e_2, y) \rangle$;
- IV. If $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = n, \beta_2 = 1$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 1, H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \omega(e_n, e_1) \rangle$;
- V. If $\alpha_1 = \beta_1 = 0, (\alpha_2, \beta_2) \notin \{(1, 0), (2, 0), (1, 1), (n, 1)\}$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 0$;
- VI. If $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1, \beta_1 = \beta_2 = 0$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2, H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \omega(e_1, x) - \omega(x, e_1), \omega(e_1, y) - \omega(y, e_1) \rangle$;
- VII. If $\alpha_1 = -\alpha_2, \beta_1 = -\beta_2, (\alpha_1, \beta_1) \neq (-1, 0)$, then $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 0$.

Now, we can formulate the following result.

Theorem. *Let \widehat{L} be an extension of the solvable Leibniz algebra $L(F_n^1)$ by the abelian algebra $V = \langle e_{n+1} \rangle$. Then \widehat{L} is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras:*

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1 : \begin{aligned} [e_i, e_1] &= e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, y] &= e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [e_i, x] &= (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [e_1, x] &= e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [y, e_1] &= e_{n+1}, & [e_{n+1}, x] = e_{n+1}, \end{aligned} & \widehat{L}_2 : \begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_{n+1}, & [e_1, x] &= e_1, \\ [e_i, e_1] &= e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, y] &= e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [e_i, x] &= (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] &= -e_1, & [e_{n+1}, x] &= 2e_{n+1}, \end{aligned} \\ \widehat{L}_3 : \begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_{n+1}, & [e_1, x] &= e_1, \\ [e_i, e_1] &= e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_2, y] &= e_2, & [e_3, y] &= e_3 + e_{n+1}, \\ [e_i, y] &= e_i, & 4 \leq i \leq n, \\ [e_i, x] &= (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] &= -e_1, & [e_{n+1}, x] &= 2e_{n+1}, \end{aligned} & \widehat{L}_4 : \begin{aligned} [e_i, e_1] &= e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_2, y] &= e_2, & [e_2, x] &= e_2 + e_{n+1}, \\ [e_i, y] &= e_i, & 3 \leq i \leq n, \\ [e_i, x] &= (i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, \\ [e_1, x] &= e_1, & [x, e_1] &= -e_1, \\ [e_{n+1}, x] &= e_{n+1}, & [e_{n+1}, y] &= e_{n+1}, \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{L}_5(\delta) : \quad & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, & & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n, \\
 & [e_2, y] = e_2 + e_{n+1}, & [e_2, x] = e_2 + \delta e_{n+1}, & & [e_i, y] = e_i, & 2 \leq i \leq n, \\
 & [e_i, y] = e_i, & 3 \leq i \leq n, & & \widehat{L}_6 : [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\
 & [e_i, x] = (i-1)e_i, & 3 \leq i \leq n, & & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\
 & [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, & & [e_{n+1}, x] = ne_{n+1}, & [e_{n+1}, y] = e_{n+1}, \\
 & [e_{n+1}, x] = e_{n+1}, & [e_{n+1}, y] = e_{n+1}, & & & \\
 & & & & [e_1, x] = e_1 + e_{n+1}, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
 \widehat{L}_7 : \quad & [e_i, x] = (i-1)e_i, & [e_i, y] = e_i, & 2 \leq i \leq n, & & & \\
 & [e_{n+1}, x] = e_{n+1}, & [x, e_1] = -e_1 - e_{n+1}, & [x, e_{n+1}] = -e_{n+1}, & & & \\
 & & & & [e_1, x] = e_1 + \delta e_{n+1}, & [e_1, y] = e_{n+1}, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
 \widehat{L}_8(\delta) : \quad & [e_{n+1}, x] = e_{n+1}, & [e_i, x] = (i-1)e_i, & [e_i, y] = e_i, & 2 \leq i \leq n, & & & \\
 & [x, e_1] = -e_1 - \delta e_{n+1}, & [x, e_{n+1}] = -e_{n+1}, & [y, e_1] = -e_{n+1}. & & & &
 \end{aligned}$$

Proof. By Corollary, we have that $H^2(L(F_n^1), l, r) = 0$ in cases V and VII. Thus, it is enough to consider the remaining cases.

- I. $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 1$. In this case, the second cohomology group satisfies $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 1$ and 2-cocycle defined by $\omega(y, e_1) = e_{n+1}$ form a basis on this space. That is, $H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \bar{\omega} \rangle$.

Consider an automorphism $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$, and an automorphism $\psi \in \text{Aut}(V)$ satisfying $\psi(e_{n+1}) = \lambda e_{n+1}$. Then the action of these automorphisms on the cohomology class $\delta \bar{\omega} \in H^2(L(F_n^1), l, r)$ results in a new class $\delta' \bar{\omega}$, where

$$\delta' = \delta \lambda a, \quad l' = l, \quad r' = r.$$

By choosing $\lambda = 1$ and $a = \frac{1}{\delta}$, we can normalize the representative so that $\delta' = 1$.

Thus, the corresponding extended algebra $\widehat{L}_1 = L(F_n^1) \oplus \{e_{n+1}\}$ has nontrivial products given by

$$[y, e_1] = \omega(y, e_1) = e_{n+1}, \quad [e_{n+1}, x] = r_x e_{n+1} = e_{n+1}.$$

Hence, we obtain the algebra \widehat{L}_1 .

- II. $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 = 2$. In this case, $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2$, and the basis of this space is given by the 2-cocycles

$$\omega_1(e_1, e_1) = e_{n+1}, \quad \omega_2(e_3, y) = e_{n+1}.$$

Automorphisms $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$ and $\psi \in \text{Aut}(V)$ act the element $\delta_1 \bar{\omega}_1 + \delta_2 \bar{\omega}_2$ to $\delta'_1 \bar{\omega}_1 + \delta'_2 \bar{\omega}_2$ as

$$\delta'_1 = \delta_1 \lambda a^2, \quad \delta'_2 = \delta_2 \lambda a c.$$

- If $\delta_2 = 0$, then $\delta'_2 = 0$ and $\delta_1 \neq 0$. Taking $\lambda = 1, a = \sqrt{\frac{1}{\delta_1}}$, we can suppose $\delta'_1 = 1$ and obtain the algebra \widehat{L}_2 .

- If $\delta_2 \neq 0$, then choosing $\lambda = 1, c = \frac{\delta_1}{\delta_2} a$, we get $\delta'_1 = \delta'_2$ and obtain the algebra \widehat{L}_3 .

- III. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_2 = 1$. In this case, $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2$, and the basis of this space is given by the 2-cocycles

$$\omega_1(e_2, x) = e_{n+1}, \quad \omega_2(e_2, y) = e_{n+1}.$$

Automorphisms $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$ and $\psi \in \text{Aut}(V)$ act the element $\delta_1 \bar{\omega}_1 + \delta_2 \bar{\omega}_2$ to $\delta'_1 \bar{\omega}_1 + \delta'_2 \bar{\omega}_2$ as

$$\delta'_1 = \delta_1 \lambda c, \quad \delta'_2 = \delta_2 \lambda c.$$

- If $\delta_2 = 0$, then $\delta'_2 = 0$ and $\delta_1 \neq 0$. Taking $\lambda = 1, c = \frac{1}{\delta_1}$, we can suppose $\delta'_1 = 1$ and obtain the algebra \widehat{L}_4 .

– If $\delta_2 \neq 0$, then choosing $\lambda = 1, c = \frac{1}{\delta_2}$, we get $\delta'_2 = 1$ and obtain the algebra $\widehat{L}_5(\delta)$.

IV. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = n, \beta_2 = 1$. In this case $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 1$ and $H^2(L(F_n^1), l, r) = \langle \bar{\omega} \rangle$, where $\omega(e_n, e_1) = e_{n+1}$. Automorphisms $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$ and $\psi \in \text{Aut}(V)$ act the element $\delta\bar{\omega}$ to $\delta'\bar{\omega}$, as follows:

$$\delta' = \delta\lambda a^{n-1}c.$$

Taking $\lambda = \frac{1}{\delta}$ and $a = c = 1$, we can suppose $\delta' = 1$. Thus, the new products of the algebra $\widehat{L} = L(F_n^1) \oplus \{e_{n+1}\}$ are given by:

$$[e_n, e_1] = \omega(e_n, e_1) = e_{n+1}, \quad [e_{n+1}, x] = r_x e_{n+1} = n e_{n+1}, \quad [e_{n+1}, y] = r_y e_{n+1} = e_{n+1}.$$

Therefore, we obtain the algebra \widehat{L}_6 .

V. $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1, \beta_1 = \beta_2 = 0$. In this case $\dim H^2(L(F_n^1), l, r) = 2$, and the basis of this space is given by the 2-cocycles

$$\omega_1(e_1, x) = e_{n+1}, \quad \omega_1(x, e_1) = -e_{n+1}, \quad \omega_2(e_1, y) = e_{n+1}, \quad \omega_2(y, e_1) = -e_{n+1}.$$

Automorphisms $\varphi \in \text{Aut}(L(F_n^1))$ and $\psi \in \text{Aut}(V)$ act the element $\delta_1\bar{\omega}_1 + \delta_2\bar{\omega}_2$ to $\delta'_1\bar{\omega}_1 + \delta'_2\bar{\omega}_2$ as

$$\delta'_1 = \delta_1\lambda a, \quad \delta'_2 = \delta_2\lambda a.$$

– If $\delta_2 = 0$, then $\delta'_2 = 0$ and $\delta_1 \neq 0$. Taking $\lambda = 1, a = \frac{1}{\delta_1}$, we can suppose $\delta'_1 = 1$ and obtain the algebra \widehat{L}_7 .

– If $\delta_2 \neq 0$, then choosing $\lambda = 1, a = \frac{1}{\delta_2}$, we get $\delta'_2 = 1$ and obtain the algebra $\widehat{L}_8(\delta)$.

This completes the proof.

REFERENCES

1. Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Rakhimov I. S. Leibniz Algebras: Structure and Classification. Taylor and Francis Group Publisher, 2019, ISBN 0367354810, P. 333.
2. Bloh A. A generalization of the concept of a Lie algebra. Sov. Math. Dok., 1965, V. 165(3), P. 1450–1452.
3. Casas J. M., Faro E., Vieites A. M. Abelian extensions of Leibniz algebras. Communications in Algebra, 1999, V. 27(6), P. 2833–2846.
4. Camacho L. M., Navarro R. M., Omirov B. A. Central extensions of some solvable Leibniz superalgebras. Linear Algebra and its Applications, 2023, V. 656(1), P. 63–91.
5. Karimjonov I. A. Classification of Leibniz algebras with a given nilradical and with some corresponding Lie algebras. PhD thesis, Santiago de Compostella, 2017.
6. Khudoyberdiyev A. Kh., Sheraliyeva S. A. Abelian extensions of five-dimensional solvable Leibniz algebras. arXiv:2506.23528.
7. Ladra M., Masutova K. K., Omirov B. A. Solvable Leibniz algebra with non-Lie and non-split naturally graded filiform nilradical and its rigidity. Linear Algebra Appl, 2016, V. 507, P. 513–517.
8. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math., 1993, V. 39(3-4), P. 269–293.
9. Liu J., Sheng Y., Wang Q. On non-abelian extension of Leibniz algebras. Communications in Algebra, 2018, V. 46(2), P. 574–587.
10. Rakhimov I. S., Langari S. L., Langari M. B. On central extensions of null-filiform Leibniz algebras. J. Algebra, 2009, V. 3(6), P. 271–280.

11. Sheraliyeva S. Extension of some solvable Leibniz algebra. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, V. 6(4), P. 78–89.

REZYUME

Markaziy kengaytma metodidan foydalanib, markazi noldan farqli bo'lgan algebra larni qurishimiz mumkin. Shuning uchun, markazi trivial bo'lgan Leybnits algebra larini aniqlash uchun Abel kengaytmalar metodidan foydalanamiz. Ushbu ishda nilradikali maksimal ko-o'lchamli tabiiy usulda gradiurlangan filiform Leybnits algebra si bo'lgan yechiluvchi Leybnits algebra larining bir o'lchovli Abel kengaytmalarining klassifikatsiyasi keltirilgan. Bu kengaytmalar aniq ifodalangan va ularning strukturalari izomorfizm aniqligini tasniflangan.

Kalit so'zlar: Leybnits algebra si, yechiluvchanlik, nilpotentlik, filiform Leybnits algebra lari, Abel kengatma.

РЕЗЮМЕ

Методом центральных расширений можно построить только такие алгебры Лейбница, центр которых нетривиален. Поэтому для определения алгебр Лейбница с тривиальным центром мы используем метод абелевых расширений. В данной работе представлена классификация одномерных абелевых расширений разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикал которых является естественно градуированной филиформной алгеброй Лейбница максимальной коразмерности. Даются явные описания таких расширений и определяются их структуры с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: Алгебра Лейбница, разрешимость, нильпотентность, филиформные алгебры Лейбница, абелевое расширение.

UDC 512.554.1

AN ABSTRACT CHARACTERIZATION OF SCHATTEN'S IDEAL \mathcal{C}_2

TOSHMATOVA M.M.

FERGANA STATE TECHNICAL UNIVERSITY, UZBEKISTAN

toshmatovamaftunahon5@gmail.com

AZIZOV A. N.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN

azizov.07@mail.ru

RESUME

In this paper we establish abstract characterizations of the sequence space l^2 and the Schatten ideal \mathcal{C}^2 , and present our main results in this direction.

Key words: symmetric sequence spaces, Banach ideals of compact operators, Schatten ideals, duality between symmetric sequence spaces and Banach ideals of compact operators.

Introduction

The Hilbert space l^2 and the Hilbert–Schmidt class \mathcal{C}_2 of compact operators occupy a central position in functional analysis. Their distinguished role arises from the fact that they are the unique spaces among the classical sequence and operator ideals where the geometry is governed by the parallelogram law, and the norm admits a Hilbert space structure. It is therefore natural to ask whether one can recover l^2 and \mathcal{C}_2 from purely abstract axioms, without appealing directly to their standard constructions.

In this paper we address this question within the framework of symmetric sequence spaces and fully symmetric ideals of compact operators. Recall that a symmetric sequence space is a Banach space of real sequences closed under rearrangements, while a fully symmetric space additionally respects submajorization. The operator-theoretic counterpart is provided by fully symmetric ideals in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, which are in one-to-one correspondence with fully symmetric sequence spaces via the Calkin correspondence.

Our starting point is a simple but fundamental observation in l^2 : if $x, y \in l^2$ have disjoint supports, then they are orthogonal with respect to the scalar product, and consequently

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2.$$

This property suggests a natural characterization principle: one may single out l^2 among all symmetric sequence spaces precisely as the unique space where the “Pythagorean identity” holds for disjointly supported vectors.

The first main result of the paper establishes this principle rigorously. We prove that if $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is a fully symmetric sequence space satisfying

$$\|x + y\|_E^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 \quad \text{whenever } x \cdot y = 0,$$

then necessarily $E = l^2$ and $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_2$. In other words, l^2 is the only fully symmetric sequence space with the Pythagorean property.

The second main result translates this characterization to the setting of operator ideals. Making use of the Calkin correspondence between fully symmetric sequence spaces and ideals in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, we show that if $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal satisfying

$$\|A + B\|_{\mathcal{C}_E}^2 = \|A\|_{\mathcal{C}_E}^2 + \|B\|_{\mathcal{C}_E}^2,$$

for all self-adjoint operators A, B with $AB = 0$, then necessarily

$$(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) = (\mathcal{C}_2, \|\cdot\|_2).$$

Thus the Hilbert–Schmidt ideal \mathcal{C}_2 is uniquely characterized among fully symmetric operator ideals by the same Pythagorean identity.

Symmetric sequence spaces

Let l^∞ (respectively, c_0) be the Banach space of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$, where \mathbb{N} is the set of natural numbers. If $2^\mathbb{N}$ is the σ -algebra of all subsets of \mathbb{N} and $\mu(\{n\}) = 1$ for each $n \in \mathbb{N}$, then $(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu)$ is a σ -finite measure space such that $L^\infty(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu) = l^\infty$ and

$$L^1(\mathbb{N}, 2^\mathbb{N}, \mu) = l^1 = \left\{ \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C} : \|\{\xi_n\}\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |\xi_n| < \infty \right\} \subset l^\infty,$$

where \mathbb{C} is the field of complex numbers.

For any subset $E \subset l^\infty$ we denote $E_h = \{\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E : \xi_n \in \mathbb{R} \text{ for each } n\}$, where \mathbb{R} is the field of real numbers. It is known that $(l_h^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ and $((c_0)_h, \|\cdot\|_\infty)$ are Banach lattices with respect to the natural partial order

$$\{\xi_n\} \leq \{\eta_n\} \iff \xi_n \leq \eta_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, then the *non-increasing rearrangement* $\xi^* : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ of ξ is defined by

$$\xi^*(t) = \inf\{\lambda : \mu\{|\xi| > \lambda\} \leq t\}, \quad t > 0,$$

(see, for example, [1, Ch. 2, Definition 1.5]). As such, the non-increasing rearrangement of a sequence $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ can be identified with the sequence $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, where

$$\xi_n^* = \inf \left\{ \sup_{n \notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N}, |F| < n \right\}.$$

If $\{\xi_n\} \in c_0$, then $\xi_n^* \downarrow 0$; in this case there exists a bijection $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space l^∞ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec\prec \eta = \{\eta_n\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \leq \sum_{n=1}^m \eta_n^* \text{ for all } m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l^\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric (fully symmetric) sequence space* if

$$\eta \in E, \xi \in l^\infty, \xi^* \leq \eta^* \text{ (resp., } \xi^* \prec\prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E.$$

Every fully symmetric sequence space is a symmetric sequence space. The converse is not true in general. At the same time, any separable symmetric sequence space is a fully symmetric space.

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then

$$\|\xi\|_E = \|\xi^*\|_E \text{ for all } \xi \in E.$$

Besides, $(E_h, \|\cdot\|_E)$ is a Banach lattice with respect to the partial order induced from l^∞ .

We say that the norm in a symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ is said to have the *Fatou property* if from the conditions

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)} \in E, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sup_n \|x^{(n)}\|_E < \infty,$$

it follows that

$$\sup_{n \geq 1} x^{(n)} \in E \text{ and } \|x\|_E = \sup_{n \geq 1} \|x^{(n)}\|_E.$$

It is known [1, Chapter II, §2.4, Theorem 2.4.2, pp. 44-46] that the norm of every fully symmetric sequence space $((E, \|\cdot\|_E)$ has the Fatou property. But general symmetric sequence spaces (not fully symmetric) do not always have the Fatou property.

Immediate examples of fully symmetric sequence spaces are $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ and the Banach spaces

$$l^p = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

For any symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ the following continuous embeddings hold [1, Ch. 2, § 6, Theorem 6.6]: $(l^1, \|\cdot\|_1) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Besides, $\|\xi\|_E \leq \|\xi\|_1$ for all $\xi \in l^1$ and $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_E$ for all $\xi \in E$.

If there is $\xi \in E \setminus c_0$, then $\xi^* \geq \alpha \mathbf{1}$ for some $\alpha > 0$, where $\mathbf{1} = \{1, 1, \dots\}$. Consequently, $\mathbf{1} \in E$ and $E = l^\infty$. Therefore, either $E \subset c_0$ or $E = l^\infty$.

Symmetric operator spaces

Now, let $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ be an infinite-dimensional Hilbert space over \mathbb{C} , and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the C^* -algebra of all bounded linear operators in \mathcal{H} . Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is well known that, for any proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, we have $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$, and if \mathcal{H} is separable, then $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (see, for example, [5, Proposition 2.1]). At the same time, if \mathcal{H} is a non-separable Hilbert space, then there exists a proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \not\subset \mathcal{I}$.

Denote $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty]$ be the canonical trace on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is,

$$\tau(x) = \sum_{j \in J} (x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

where $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ is an orthonormal basis in \mathcal{H} (see, for example, [5, Ch. 7, E. 7.5]).

Let $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ be the lattice of projectors in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of x , that is, $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. If $t > 0$, then the t -th generalized singular number of x , or the non-increasing rearrangement of x , is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}$$

(see [2]).

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called symmetric (fully symmetric) if the conditions

$$x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mu_t(y) \leq \mu_t(x) \quad \text{for all } t > 0$$

(respectively,

$$x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \int_0^s \mu_t(y) dt \leq \int_0^s \mu_t(x) dt \quad \text{for all } s > 0 \text{ (writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathcal{C}^p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

are examples of fully symmetric spaces.

It should be noted that for every symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and all $x \in X, a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|x\|_X = \||x|\|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \quad \text{and} \quad \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Remark 1. If $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a symmetric space and there exists a projection $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap X$ such that $\tau(e) = \infty$, that is, $\dim e(\mathcal{H}) = \infty$, then $\mu_t(e) = \mu_t(\mathbf{1}) = 1$ for every $t \in (0, \infty)$. Consequently, $\mathbf{1} \in X$ and $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $X \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $x \in X$, then $e_\lambda(|x|)^\perp = \{|x| > \lambda\}$ is a finite-dimensional projection, that is, $\dim e_\lambda(|x|)^\perp(\mathcal{H}) < \infty$ for all $\lambda > 0$. This means that $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, hence $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Therefore, either $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$

or $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Thus, if \mathcal{H} is non-separable, then there exists a proper two-sided ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \not\subseteq \mathcal{I}$ and $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_\infty)$ is a Banach space which is not a symmetric subspace of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Throughout this paper we assume that the Hilbert space \mathcal{H} is separable.

If $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, then $|x| = \sum_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges uniformly), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of singular values of x , that is, the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and p_n is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. Consequently, the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$, we set $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Duality between symmetric sequence and operator spaces

Let $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a symmetric space. Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} . Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C} \cdot \varphi_n \subset \mathcal{H}$. It is clear that the set

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 : x_\xi = \sum_{n=1}^\infty \xi_n p_n \in X \right\}$$

(the series converges uniformly), is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric subspace $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ uniquely generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ uniquely generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [4, Ch. 3, Section 3.5]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

In addition,

$$E(\mathcal{C}_E) = E, \quad \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E, \quad \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}.$$

We will call the pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ a *Banach ideal of compact operators* (cf. [3, Ch. III]). It is known that $(\mathcal{C}^p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}})$ for all $1 \leq p < \infty$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the Banach ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is defined by

$$x \prec\prec y, \quad x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is *fully symmetric* if conditions $y \in \mathcal{C}_E, x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}), x \prec\prec y$ entail that $x \in \mathcal{C}_E$ and $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. It is clear that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a fully symmetric ideal if and only if $(E, \|\cdot\|_E)$ is a fully symmetric sequence space.

Examples of fully symmetric ideals include $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the Banach ideals $(\mathcal{C}^p, \|\cdot\|_p)$ for all $1 \leq p < \infty$. It is clear that $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ for every symmetric sequence space $E \subset c_0$ with $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_1$ and $\|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ for all $x \in \mathcal{C}^1$ and $y \in \mathcal{C}_E$.

Abstract characterizations of spaces l^2 and \mathcal{C}^2

Let now consider $E = l^2 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\}$. It is known that l^2 is a Hilbert space with respect to the scalar product

$$(x, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \cdot \bar{y}_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l^2.$$

In the linear space l^2 we define multiplication of elements as follows:

$$x \cdot y = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^\infty, \quad x, y \in l^2.$$

And let $|x| = \{|x_n|\}_{n=1}^\infty$ for all $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$.

Proposition 2. *If $x, y \in l^2$ and $x \cdot y = \theta = \{0, 0, 0, \dots\}$, then $(x, y) = 0$.*

Proof. From $x, y \in l^2$ and $x \cdot y = \theta$ it follows that $x_n \cdot y_n = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. Hence,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n = 0.$$

The Proposition 2 is proved.

Remark 3. *The converse of Proposition 2 is not true in general.*

In every Hilbert space, in particular in l^2 , the following important result is known.

Proposition 4. *If $x, y \in l^2$ and $(x, y) = 0$, then $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.*

Proof. Let $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ with $(x, y) = 0$. Then

$$\|x + y\|_2^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2.$$

The Proposition 4 is proved.

Corollary 5. *If $x, y \in l_2$ and $x \cdot y = 0$, then $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.*

Motivated by Corollary 5, we would like to characterize other symmetric sequence spaces $(E, \|\cdot\|_E)$ for which the property of Corollary 5 holds. We prove the following theorem on the abstract characterization of l^2 .

Theorem 6. *Let $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ be a fully symmetric space such that*

$$\|x + y\|_E^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2, \quad \forall x, y \in E, \quad x \cdot y = \theta,$$

where multiplication in E is defined as in l^2 . Then $E = l^2$ and $\|x\|_E = \|x\|_2$ for all $x \in E$.

Proof. Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric space with $E \subset c_0$ and let $e_n = \{0, 0, \dots, 1, 0, \dots\}$ with 1 at the n -th position, $n \in \mathbb{N}$. Then $e_n \in E$ for any n . Furthermore, it can be assumed without loss of generality that $\|e_n\|_E = 1$. Also it is clear that $e_n^* = \{1, 0, 0, \dots\} \in E$ and $\|e_n^*\|_E = \|e_n\|_E = 1$, for any $n \in \mathbb{N}$.

We fix $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$. Let $x^* = \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \in E$. Consider

$$x_k = \sum_{n=1}^k x_n^* e_n.$$

Then from the Proposition 4 we have

$$\|x_k\|_E^2 = \sum_{n=1}^k |x_n^*|^2.$$

Since $(E, \|\cdot\|_E)$ is fully symmetric, the norm has the Fatou property (see section "Symmetric sequence spaces"). Hence,

$$\|x^*\|_E = \sup_{k \geq 1} \|x_k\|_E = \sup_{k \geq 1} \sqrt{\sum_{n=1}^k |x_n^*|^2} < \infty,$$

which implies $x^* \in l^2$.

Thus, $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^2 < \infty$, i.e. $x^* \in l^2$. Since $(l^2, \|\cdot\|_2)$ is a symmetric space, it follows that $x^* \in l^2$, and consequently $x \in l^2$.

If $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, then $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* e_n \in l^2$, and hence

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^2 < \infty.$$

Again, considering the sequence $x_k = \sum_{n=1}^k x_n^* e_n \in E$, we have $0 \leq x_k \uparrow x^*$. By the Fatou property, $\|x_k\|_E \rightarrow \|x^*\|_E$ and $x^* \in E$, so $x \in E$.

Moreover,

$$\|x_k\|_E = \sqrt{\sum_{n=1}^k (x_n^*)^2} \rightarrow \|x^*\|_E,$$

which implies

$$\|x\|_E = \|x^*\|_E = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^2} = \|x^*\|_2 = \|x\|_2.$$

Thus $E = l^2$ and for all $x \in E$ we have $\|x\|_E = \|x\|_2$. The Theorem 6 is proved.

Using Calkin's correspondence (see section "Duality between symmetric sequence and operator spaces") we obtain the following variant of Theorem 6 for the Schatten's ideal \mathcal{C}^2 , which is called the abstract characterization of \mathcal{C}^2 .

Theorem 7. *Let $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ be a fully symmetric ideal $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ such that*

$$\|A + B\|_{\mathcal{C}_E}^2 = \|A\|_{\mathcal{C}_E}^2 + \|B\|_{\mathcal{C}_E}^2$$

for all $A, B \in \mathcal{C}_E$ with $A = A^*$, $B = B^*$, and $A \cdot B = 0$. Then $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) = (\mathcal{C}^2, \|\cdot\|_2)$.

Proof. Let $E(\mathcal{C}_E) = E$ be a fully symmetric sequence space with $E \subset c_0$, since $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Let $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$, with $x \cdot y = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty} = \theta$.

Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$. Let consider two diagonal operators $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $A(\varphi_n) = |x_n| \cdot \varphi_n$, and $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $B(\varphi_n) = |y_n| \cdot \varphi_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, for all $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \in \mathcal{H}$ it follows that $A(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n |x_n|) \cdot \varphi_n$, and $B(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n |y_n|) \cdot \varphi_n$.

It is clear that $A = A^*$ and $B = B^*$, $AB = 0$. Moreover, $\{s_n(A)\}_{n=1}^{\infty} = |x|^* \in E_h$ and $s_n(B) = |y|^* \in E_h$. Therefore $A, B \in \mathcal{C}_E$. From the condition of theorem we have that

$$\|A + B\|_{\mathcal{C}_E}^2 = \|A\|_{\mathcal{C}_E}^2 + \|B\|_{\mathcal{C}_E}^2.$$

On the other hand, it is easy to see that the operator $A + B$ is again diagonal with respect to the chosen basis, and its singular-value sequence is given by $\{s_n(A + B)\}_{n=1}^{\infty} = (|x| + |y|)^* = |x + y|^*$ (the last equation is true since $x_n y_n = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$).

Thus, we obtain the equality

$$\begin{aligned} \|x + y\|_E^2 &= \| |x + y|^* \|_E^2 = \| \{s_n(A + B)\}_{n=1}^{\infty} \|_E^2 = \|A + B\|_{\mathcal{C}_E}^2 = \\ &= \|A\|_{\mathcal{C}_E}^2 + \|B\|_{\mathcal{C}_E}^2 = \| |x|^* \|_E^2 + \| |y|^* \|_E^2 = \|x\|_E^2 + \|y\|_E^2. \end{aligned}$$

By the Theorem 6 this implies $E = l^2$ and $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_2$ on E . Finally, returning to the ideal via the Calkin correspondence we conclude

$$(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) = (\mathcal{C}_2, \|\cdot\|_2),$$

which completes the proof of Theorem 7.

REFERENCES

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press Inc., 1988.
2. T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ -measurable operators*, Pacific. J. Math., **123** (1986), 269–300.
3. I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 02904, 1969.
4. S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, *Singular Traces*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2013.

5. B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, **120**, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
6. S. Stratila, L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, Editura Academiei, Bucharest, 1979. Revision of the 1975 original, Translated from the Romanian by Silviu Teleman.

REZYUME

Ushbu maqolada biz l^2 ketma-ketlik fazosi va Schattenning \mathcal{C}^2 idealining abstrakt xarakterizatsiyalarini keltiramiz hamda shu yo'nalishda asosiy natijalarimizni taqdim etamiz.

Kalit so'zlar: simmetrik ketma-ketlik fazolari, kompakt operatorlarning Banax ideallari, Shatten ideallari, simmetrik ketma-ketlik fazolari va kompakt operatorlarning Banax ideallari orasidagi bog'lanish.

РЕЗЮМЕ

В данной статье мы устанавливаем абстрактные характеристики пространства последовательностей l^2 и идеала Шаттена \mathcal{C}^2 и представляем наши основные результаты в этом направлении.

Ключевые слова: симметричные пространства последовательностей, банаховы идеалы компактных операторов, идеалы Шаттена, двойственность между симметричными пространствами последовательностей и банаховыми идеалами компактных операторов.

UDC 517.98

THE EXTENSION OF A *-ISOMORPHISM BETWEEN TWO REAL W^* -ALGEBRAS TO A *-ISOMORPHISM OF THE CORRESPONDING *-ALGEBRAS OF ALL m -MEASURABLE OPERATORS

TUKHTASINOV T. SH.

FERGANA STATE UNIVERSITY, UZBEKISTAN
abdiqodirovna@mail.ru

RESUME

The subadditive measures (denoted by m) on projectors of the real von Neumann algebra are considered. A theorem on the extension of a *-isomorphism between two real von Neumann algebras to a *-isomorphism of the corresponding *-algebras of all m -measurable operators has been proved.

Key words: Real von Neumann algebras, projection, subadditive measure.

INTRODUCTION

In the non-commutative theory of integration, started by I.E.Segal in (see [1]), the measure τ satisfies the subadditivity condition. Therefore, it seems interesting to study subadditive measures on projectors of operator algebras, thereby finding out to what extent Segal's theory is based on the "subadditivity" of the measure τ . In the article (see [2]), Leszek J.Ciach considered subadditivity measures on projectors of the von Neumann algebra (W^* -algebra). The author of the work gives some partial answers to the question posed above. In this article, subadditive measures (denoted by m) on projectors of the real von Neumann algebra are considered. A theorem on the extension of a *-isomorphism between two real von Neumann algebras to a *-isomorphism of the corresponding *-algebras of all m -measurable operators has been proved.

PRELIMINARIES

Let A be an algebra and let $P(A)$ be the set of all projections of A . By *subadditive measure* on A we mean a mapping $m : P(A) \rightarrow [0, \infty]$ with the following properties:

- i) $m(0) = 0$, and $m(p) = 0$ implies $p = 0$ (faithfulness);
- ii) $p \leq q$ implies $m(p) \leq m(q)$ (monotonicity);
- iii) $p \sim q$ implies $m(p) = m(q)$,
- iv) $m(p \vee q) \leq m(p) + m(q)$ (subadditivity);
- v) $p_n \uparrow p$ implies $m(p_n) \uparrow m(p)$.

The measure m is called *finite* if $m(\mathbf{1}) < \infty$, where $\mathbf{1}$ is the unit of algebra A . Making use of the relation $p \vee q - q \sim p - p \wedge q$, it is not hard to notice that instead of (iv) one may assume

$$\text{iv}^*) \quad m(p \vee q) = m(p + q) \leq m(p) + m(q) \text{ for } p \perp q.$$

Now, let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H . A weakly closed *-subalgebra M containing the identity operator $\mathbf{1}$ in $B(H)$ is called a *von Neumann algebra* (or W^* -algebra). A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ with the identity $\mathbf{1}$ is called a *real von Neumann algebra* (or *real W^* -algebra*), if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$ (see [3], [4], [5]).

Theorem 1. *Let $R \subset B(H)$ be a real von Neumann algebra and let m be subadditive measure on R . We extend the subadditive measure m at $A = R + iR$ as*

$$\overline{m}(e) = m(s(f)),$$

where $e \in P(A)$ with $e = f + ig$ and $s(f)$ is the support of the element f . Then $\bar{m} : P(A) \rightarrow [0, \infty]$ is the subadditive measure on A .

The proof of the theorem is carried out with a direct verification of condition i)-v) for the map \bar{m} .

Definition. Let $R \subset B(H)$ be a real von Neumann algebra.

- 1) An operator a acting in a Hilbert space H ($a : D(a) \rightarrow H$) is called affiliated with the algebra R (symbolically, $a\eta R$) if $au' = u'a$, for any unitary operator $u' \in R'$, where R' is commutant of R .
- 2) A linear subspace $D \subset H$ is called affiliated with the algebra R if $u'(D) \subset D$ for any unitary operator $u' \in R'$ and denoted by $D\eta R$.
- 3) A linear space $D\eta R$ is said to be m -dense in H if for any $\varepsilon > 0$ there exists a projection $p \in R$ such that $p(H) \subset D$ and $m(p^\perp) \leq \varepsilon$.
- 4) An operator a is called m -measurable, if (i) $a\eta R$; (ii) $D(a)$ is m -dense; (iii) a is closed.

It is easy to check that if $a\eta R$, then a is m -measurable if and only if a is \bar{m} -measurable. By $L_m = L_m(R)$ we denote the set of all m -measurable (relative to algebra R) operators. It is also easy to show that R is dense in L_m the topology of m -convergence i.e. $\bar{R}^m = L_m$. Similarly, by $L_{\bar{m}} = L_{\bar{m}(A)}$ we denote the set of all \bar{m} -measurable (relative to algebra $A = R + iR$) operators.

If a and b are m -measurable operators, then the closures of $a+b$ and ab are called, respectively, the m -sum and the m -product of a and b . The space L_m together with the operations: m -sum, m -product, the adjoint of the operator and the natural operation of multiplication by real numbers, is real $*$ -algebra and $L_m + iL_m = L_{\bar{m}}$.

MAIN RESULT

Let $a \in L_m$ and $|a| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ be the spectral decomposition of the element modulus $|a|$. We define the mapping $\ell_m : L_m \rightarrow [0, \infty)$ as

$$\ell_m(a) = \inf\{\varepsilon > 0 : m(e_\varepsilon^\perp) \leq \varepsilon\}.$$

Then the functional $\rho_r : L \times L \rightarrow [0, \infty)$ defined as $\rho(a, b) = \ell_m(a - b)$ ($a, b \in L_m$) is a metric in L_m invariant with respect to the translations, i.e. for any $a, b, c \in L_m$ the equalities are satisfied $d(a, b) = d(a + c, b + c)$ and $d(a, b) = d(a^*, b^*)$. Moreover, the convergence in this metric is equivalent to m -convergence.

The main result of the article is the following theorem.

Theorem 2. Let R_1 and R_2 be $*$ -isomorphic real von Neumann algebras through a $*$ -isomorphism θ , whereas m' and m'' are subadditive measures on $P(R_1)$ and $P(R_2)$, respectively. If $m'(p) = m''(\theta(p))$ for all $p \in P(R_1)$, then θ extends uniquely to a $*$ -isomorphism $\bar{\theta} : L_{m'} \rightarrow L_{m''}$ continuous in the topologies of m' -convergence and of m'' -convergence, respectively.

Proof. Let $a \in R_1$ and $|a| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$. It is obvious that $\theta(a) = \int_0^\infty \lambda d\theta(e_\lambda)$. Let $a = u|a|$ be the polar decomposition of a (see Theorem 1.25 [5]). Then it is easy to see that $\theta(u)\theta(|a|)$ is the polar decomposition of $\theta(a)$. Since $m'(p) = m''(\theta(p))$ ($p \in P(R_1)$), then we have

$$\ell_{m'}(a) = \inf\{\varepsilon > 0 : m(e_\varepsilon^\perp) \leq \varepsilon\} = \inf\{\varepsilon > 0 : m(\theta(e_\varepsilon^\perp)) \leq \varepsilon\} = \ell_{m''}(\theta(a))$$

i.e. $\ell_{m'}(a) = \ell_{m''}(\theta(a))$. Since R_1 is m' -dense in $L_{m'}$, then for any $a \in L_{m'}$ there exists a sequence $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset R_1$ such that $a_n \xrightarrow{m'} a$. Hence we have $\rho_1(a_n, a) \rightarrow 0$, therefore $\ell_{m'}(a_n - a) \rightarrow 0$. From the above equality we obtain $\ell_{m'}(a_n - a) = \ell_{m''}(\theta(a_n) - \theta(a)) \rightarrow 0$, where $\theta(a)$ is some element from $L_{m''}$. Hence we have $\rho_2(\theta(a_n), \theta(a)) \rightarrow 0$, therefore $\theta(a_n) \xrightarrow{m''} \theta(a)$. We put $\bar{\theta}(a) := \theta(a)$. Then it is directly verified that the map $\bar{\theta} : L_{m'} \rightarrow L_{m''}$ is a $*$ -isomorphism with $\bar{\theta}|_{R_1} = \theta$ and $\theta(a_n) \xrightarrow{m''} \bar{\theta}(a)$. The theorem is proven.

Corollary 1. The $*$ -isomorphism $\theta : R_1 \rightarrow R_2$ we extend on $A_1 = R_1 + iR_1$ as

$$\tilde{\theta} : A_1 \rightarrow A_2, \quad \tilde{\theta}(x + iy) = \theta(x) + i\theta(y),$$

and similarly a *-isomorphism $\bar{\theta} : L_{m'} \rightarrow L_{m''}$ we also extend on $L_{\bar{m}'} = L_{m'} + iL_{m'}$ as

$$\tilde{\theta} : L_{\bar{m}'} \rightarrow L_{\bar{m}''}, \quad \tilde{\theta}(a + ib) = \bar{\theta}(a) + i\bar{\theta}(b).$$

Then we directly obtain that $\bar{m}'(p) = \bar{m}''(\tilde{\theta}(p))$, $p \in P(A_1)$.

Corollary 2. For any $a \in L_{m'}(R_1)$ and $\sigma > 0$ we have

$$\bar{\theta}(|a|^\sigma) = |\bar{\theta}(a)|^\sigma.$$

Proof. Let $|a| = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$. Then it is clear that $|a|^\sigma = \int_0^\infty \lambda^\sigma de_\lambda$. Hence we obtain

$$\bar{\theta}(|a|^\sigma) = \bar{\theta}\left(\int_0^\infty \lambda^\sigma de_\lambda\right) = \int_0^\infty \lambda^\sigma d\bar{\theta}(e_\lambda) = |\bar{\theta}(a)|^\sigma.$$

The corollary is proven.

REFERENCES

1. Segal E. A non-commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. 1953. 57, 401–457.
2. Leszek J.Ciach.: Subadditive measure on projectors of a von Neumann algebra. Mathematical dissertation. Institute of mathematics Polish Academy of Sciences Warszawa. 1990. Poland, 72p.
3. Ayupov Sh.A., Rakhimov A. A.: Usmanov Sh. M, Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras, Kluw.Acad.Pub.,MAIA. 1997. 418.
4. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A.: Real W^* -algebras. Actions of groups and Index theory for real factors, VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin. 2010. Germany, Bonn. 138 p.
5. Li B.R, Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003.

REZYUME

Haqiqiy fon Neyman algebrasining proyektorlarida subadditiv o'lchovlar (m bilan belgilanadi) ko'rib chiqiladi. Ikki haqiqiy fon Neyman algebrasi orasidagi *-izomorfizmining barcha m -o'lchovli operatorlarning mos *-algebralarining *-izomorfizmiga kengayishi haqidagi teorema isbotlangan.

Kalit so'zlar: Haqiqiy fon Neyman algebralari, proyeksiya, subadditiv o'lchov.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются субаддитивные меры (обозначаемые m) на проекторах вещественной алгебры фон Неймана. Доказана теорема о продолжении *-изоморфизма между двумя вещественными алгебрами фон Неймана до *-изоморфизма соответствующих *-алгебр всех m -измеримых операторов.

Ключевые слова: вещественные алгебры фон Неймана, проекция, субаддитивная мера.

UDC 517.98

GIBBS MEASURES ASSOCIATED WITH THE FULLY VISIBLE BOLTZMANN MACHINE

XALILOV A. Z.

KARSHI STATE UNIVERSITY, KARSHI
akbarx1991@gmail.com

MAVLONOV I. M.

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M. ULUGBEK, TASHKENT
mavlonovismoil16@gmail.com

PARDAYEV SH. A.

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY, TASHKENT
shohzodmath@gmail.com

RESUME

In this work, we have undertaken a rigorous study of Boltzmann machines and the associated Gibbs measures they induce. Beginning from the machine's energy function, we have detailed the construction of the corresponding Gibbs measures and derived the requisite consistency (Kolmogorov) conditions. We have further identified precise criteria under which these consistency conditions hold and have evaluated their implications for the coherence and validity of statistical models built upon Boltzmann-machine architectures.

Key words: Boltzmann machine, Gibbs measure, Cayley tree, energy function, consistency conditions, statistical models.

1. Preliminaries

There is a substantial body of work on Gibbs measures for the Ising model [3], but relatively little has been done on the energy function in Boltzmann machines (the Boltzmann model). In this paper, we investigate the Gibbs measure for such models.

The interplay between statistical physics and machine learning has led to significant advancements in probabilistic modeling, with Gibbs measures and Boltzmann machines standing at the forefront of this synergy. This paper explores the mathematical foundations of Gibbs measures in Boltzmann machines [8], their algorithmic implementations, and their applications in generative modeling, unsupervised learning, and optimization.

We formalize the connection between statistical mechanics and energy-based models, analyze sampling techniques, and discuss modern variants such as quantum Boltzmann machines. We also address challenges related to the intractability of the partition function and the scalability of these models.

Gibbs measures, originating from statistical mechanics, provide a rigorous framework for describing systems in thermal equilibrium, where the probability distribution of states follows the Boltzmann law. In machine learning, Boltzmann machines leverage this framework to model high-dimensional data distributions through stochastic interactions between units.

A Boltzmann Machine is a stochastic, energy-based neural network that operates on principles from statistical mechanics and is primarily used for unsupervised learning tasks. The network consists of binary units (neurons) that can exist in states $s_i \in \{0, 1\}$ or $\{-1, +1\}$, connected through symmetric weights $w_{ij} = w_{ji}$ with no self-connections ($w_{ii} = 0$). Each unit has an associated bias term a_i representing its activation tendency.

The system's behavior is governed by an energy function:

$$E(\mathbf{s}) = - \sum_{i < j} w_{ij} s_i s_j - \sum_i a_i s_i, \quad (1.1)$$

where lower energy states are more probable. In the machine-learning context, this model is called a fully visible Boltzmann machine.

The probability distribution over states follows the Boltzmann distribution:

$$P(\mathbf{s}) = \frac{1}{Z} e^{-E(\mathbf{s})/T}, \tag{1.2}$$

where Z is the partition function, that is $Z = \sum_{\mathbf{s}} e^{-E(\mathbf{s})/T}$ that normalizes probabilities and T represents the temperature parameter controlling the system's stochasticity.

The Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e. graph without cycles, each vertex of which has exactly $k + 1$ edges. Here V is the set of vertices of Γ^k and L is the set of its edges.

Consider models where the spin takes values in the set $\{0, 1\}$, and is assigned to the vertices of the tree. For $A \subset V$ a configuration σ_A on A is an arbitrary function $\sigma_A : A \rightarrow \{0, 1\}$. Let $\Omega_A = \{0, 1\}^A$ be the set of all configurations on A . A configuration σ on V is defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \{0, 1\}$; the set of all configurations is $\Omega := \{0, 1\}^V$. We consider all elements of V are numerated (in any order) by the numbers: $0, 1, 2, 3, \dots$. Namely, we can write $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.

Ω can be considered as a metric space with respect to the metric $\rho : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ given by

$$\rho(\{\sigma(x_n)\}_{x_n \in V}, \{\sigma'(x_n)\}_{x_n \in V}) = \sum_{n: \sigma(x_n) \neq \sigma'(x_n)} 2^{-n}$$

(or any equivalent metric the reader might prefer, this metric taken from [2]), and let \mathcal{B} be the σ -field of Borel subsets of Ω .

For each $m \geq 0$ let $\pi_m : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^{m+1}$ be given by $\pi_m(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots) = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ and let $\mathcal{C}_m = \pi_m^{-1}(\mathcal{P}(\{0, 1\}^{m+1}))$, where $\sigma_i := \sigma(x_i)$ and $\mathcal{P}(\{0, 1\}^{m+1})$ is the family of all subsets of $\{0, 1\}^{m+1}$ (Cartesian product of $\{0, 1\}$). Then \mathcal{C}_m is a field and each of the sets in \mathcal{C}_m is open and closed set in the metric space (Ω, ρ) ; also $\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}_{m+1}$. Let $\mathcal{C} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{C}_m$; then \mathcal{C} is a field (the field of **cylinder sets**) and each of the sets in \mathcal{C} is both an open and closed. Denote $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ - the smallest sigma field containing \mathcal{C} . Every element of $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ is called "**measurable cylinder**".

Let λ be the Lebesgue measure on $\{0, 1\}$. The set of all configurations on A the a priori measure λ_A is introduced as the $|A|$ -fold product of the measure λ . Here and further on $|A|$ denotes the cardinality of A . Below, W_m stands for a 'sphere' and V_m for a 'ball' on the tree, of radius $m = 1, 2, \dots$, centered at a fixed vertex x^0 (an origin):

$$W_m = \{x \in V : d(x, x^0) = m\}, \quad V_m = \{x \in V : d(x, x^0) \leq m\},$$

and

$$L_m = \{(x, y) \in L : x, y \in V_m\}.$$

Here distance $d(x, y)$, $x, y \in V$, is the length of (i.e. the number of edges in) the shortest path connecting x with y . Ω_{V_n} is the set of configurations in V_n (and Ω_{W_n} that in W_n ; see below). Furthermore, $\sigma|_{V_n}$ and $\omega|_{W_{n+1}}$ denote the restrictions of configurations $\sigma, \omega \in \Omega$ to V_n and W_{n+1} , respectively.

2. Gibbs measures for the fully visible Boltzmann machine

Let $h : x \in V \mapsto h_x = (h_{t,x} \ t \in \{0, 1\}) \in \mathbb{R}^{\{0,1\}}$ be mapping of $x \in V \setminus \{x^0\}$. Given $n = 1, 2, \dots$, consider the probability distribution $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma_n(x), x}\right). \tag{2.1}$$

Here, as before, $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ and Z_n is the corresponding partition function:

$$Z_n = \int_{\Omega_{V_n}} \exp\left(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde{\sigma}_n(x), x}\right) \lambda_{V_n}(d\tilde{\sigma}_n). \tag{2.2}$$

Let $\Lambda \in \mathcal{N}$ and $\Delta \subset \Lambda$, where \mathcal{N} is the set of all finite subsets of V . For any $\Lambda \in \mathcal{N}$, \mathcal{B}_Λ is the minimal σ -field on the configuration space Ω_Λ . If μ_Λ is a measure on \mathcal{B}_Λ , the projection of μ_Λ on \mathcal{B}_Δ is measure $\pi_\Delta(\mu_\Lambda)$ on \mathcal{B}_Δ defined by

$$[\pi_\Delta(\mu_\Lambda)](B) = \mu_\Lambda\{\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma|_\Delta \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}_\Delta.$$

Similarly, if μ is a measure on \mathcal{B} , the projection of μ on \mathcal{B}_Λ is defined by

$$[\pi_\Delta(\mu)](B) = \mu\{\sigma \in \Omega : \sigma_\Lambda \in B\} = \mu(\sigma|_\Lambda = \sigma_\Lambda : \sigma_\Lambda \in B), \quad B \in \mathcal{B}_\Lambda.$$

Define a **finite-dimensional distribution** of a probability measure μ in the volume V_n as

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \tag{2.3}$$

where $\beta = 1/T$, $T > 0$ is temperature, Z_n^{-1} is the normalizing factor, $\{h_x \in \mathbb{R}, x \in V\}$ is a collection of real numbers, and

$$H_n(\sigma_n) = - \sum_{\langle x_i, x_j \rangle \in L_n} w_{ij} \sigma(x_i) \sigma(x_j) - \sum_i a_i \sigma(x_i) \tag{2.4}$$

is the Hamiltonian of the Boltzmann model.

We say that the probability distributions (2.3) are **compatible** if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \tag{2.5}$$

Here $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ is the concatenation of the configurations. In this case, according to the Kolmogorov theorem, there exists a unique measure μ on Φ^V such that, for all n and $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$,

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n). \tag{2.6}$$

Such a measure is called a **splitting Gibbs measure** corresponding to the Hamiltonian (2.4) and function $h_x, x \in V$.

The following statement describes conditions on h_x guaranteeing compatibility of $\mu_n(\sigma_n)$.

Theorem 2.1. *Probability distributions $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, in (2.3) are compatible iff for any $x \in V$ the following equation holds:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta). \tag{2.7}$$

Here, $\theta = e^{\beta w_{ij}}$, $f(h, \theta) = \ln \frac{1+\theta e^h}{1+e^h}$, and $S(x)$ is the set of direct successors of x on Cayley tree of order k .

Proof. *Necessity.* Suppose that (2.5) holds; we want to prove (2.7). Substituting (2.3) in (2.5), obtain that for any configurations $\sigma_{n-1}: x \in V_{n-1} \mapsto \sigma_{n-1}(x) \in \{0, 1\}$:

$$\frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} \sum_{y \in S(x)} (\beta w_{ij} \sigma_{n-1}(x) \omega_n(y) + \beta a_i \omega_n(y) + h_y \omega_n(y)) \right) = \exp \left(\sum_{x \in W_{n-1}} h_x \sigma_{n-1}(x) \right), \tag{2.8}$$

where $\omega_n: x \in W_n \mapsto \omega_n(x)$, a_i is a constant corresponding to y vertex and w_{ij} is a weight between configurations at the x and y vertexes.

From (2.8) we get:

$$\frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \exp(\beta w_{ij} \sigma_{n-1}(x) \omega_n(y) + \beta a_i \omega_n(y) + h_y \omega_n(y)) = \prod_{x \in W_{n-1}} \exp(h_x \sigma_{n-1}(x)).$$

Rewrite now the last equality for $\sigma_{n-1}(x) = 1$ and $\sigma_{n-1}(x) = 0$, then dividing first of them by the second one we get

$$\prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{u \in \{0,1\}} \exp(\beta w_{ij} u + h_y u)}{\sum_{u \in \{0,1\}} \exp(h_y u)} = \exp(h_x),$$

which implies (2.7) where one has to use the following formula:

$$f(h, \theta) = \ln \frac{1 + \theta e^h}{1 + e^h}. \tag{2.9}$$

Sufficiency. Suppose that (2.7) holds. It is equivalent to the representations

$$\prod_{y \in S(x)} \sum_{u \in \{-1, 1\}} \exp(\beta w_{ij} t u + \beta a_i u + h_y u) = a(x) \exp(th_x), \quad t \in \{0, 1\} \tag{2.10}$$

for some function $a(x) > 0, x \in V$. We have

$$\text{LHS of (2.5)} = \frac{1}{Z_n} \exp(-\beta H(\sigma_{n-1})) \times \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \sum_{u \in \{0, 1\}} \exp(\beta w_{ij} \sigma_{n-1}(x) u + \beta a_i u + h_y u). \tag{2.11}$$

Substituting (2.10) into (2.11) and denoting $A_{n-1} = \prod_{x \in W_{n-1}} a(x)$, we get

$$\text{RHS of (2.10)} = \frac{A_{n-1}}{Z_n} \exp(-\beta H(\sigma_{n-1})) \prod_{x \in W_{n-1}} \exp(h_x \sigma_{n-1}(x)). \tag{2.12}$$

Since $\mu^{(n)}, n \geq 1$ is a probability measure, we should have

$$\sum_{\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \omega_n) = 1.$$

Hence from (2.12) we get $Z_{n-1} A_{n-1} = Z_n$, and (2.5) holds. □

From Theorem 2.1 it follows that for any $h = \{h_x, x \in V\}$ satisfying the functional equation (2.7) there exists a unique positive measure μ and vice versa. This result is equivalent to the fact that (2.7) is not easy.

In next sections we shall give several solutions to (2.7).

Remark 2.1. Note that if there is more than one solution to equation (2.7) then there is more than one Gibbs measure corresponding to these solutions. One says that a phase transition occurs for the Boltzmann model, if equation (2.7) has more than one solution. The number of the solutions of equation (2.7) depends on the parameter $\beta = \frac{1}{T}$. The phase transition usually occurs for low temperature. If it is possible to find an exact value T^* in which a critical value of temperature does occur for all $T \leq T^*$, then T^* is called a critical value of temperatura.

Finding the exact value of the critical temperature for some models means to exactly solve the models.

3. Periodic Gibbs measures of the Boltzmann model

Since the set of vertices V has the group representation G_k . Without loss of generality we identify V with G_k , i.e., we sometimes replace V with G_k .

In this section we study periodic solutions of (2.7).

Definition 3.1. Let K be a subgroup of $G_k, k \geq 1$. We say that a function $h = (h_x \in R : x \in G_k)$ is K -periodic if $h_{yx} = h_x$ for all $x \in G_k$ and $y \in K$. A G_k -periodic function h is called translation-invariant.

Definition 3.2. A Gibbs measure is called K -periodic if it corresponds to K -periodic function h .

Observe that a translation-invariant Gibbs measure is G_k -periodic. Firstly, we shall find all translation-invariant solutions h_x to the functional equation (2.7), ferromagnetic Boltzmann model. Note that such solutions are constant functions, $h_x = h, \forall x \in G_k$. In this case from (2.7) we get

$$h = k f(h, \theta), \quad \theta > 0. \tag{3.1}$$

The following properties of the function $f(h, \theta)$ are obvious:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \theta) = \ln \theta, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, \theta) = 0;$
2. $\frac{d}{dx} f(x, \theta) < 0$ if $\theta < 1, \frac{d}{dx} f(x, \theta) = 0$ if $\theta = 1, \frac{d}{dx} f(x, \theta) > 0$ if $\theta > 1.$

From these properties it follows that equation (3.1) has unique solution h^* that $h^*(h^* < 0)$, if $\theta < 1$, $h^* = 0$, if $\theta = 1$ and $h^*(h^* > 0)$ if $\theta > 1$.

There are as many Gibbs measures as there are solutions to equation (2.7), and it follows that there is a unique Gibbs measure. Namely,

Lemma 3.1. *For the ferromagnetic Boltzmann model on the Cayley tree of order $k \geq 2$ the following statement is true. If $T \in R$ then there is unique translation-invariant Gibbs measure μ_0 .*

We now give a complete description of periodic Gibbs measures for the Boltzmann model, i.e., a characterization of such measures with respect to any normal subgroup of finite index in G_k . Let K be a subgroup of index r in G_k , and let $G_k/K = \{K_0, K_1, \dots, K_{r-1}\}$ be the quotient group, with the coset $K_0 = K$. Denote $q_i(x) = |S_1(x) \cap K_i|$, $i = 0, 1, \dots, r-1$; $N(x) = |\{j : q_j(x) \neq 0\}|$, where $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$, $x \in G_k$ and $|\cdot|$ is the number of elements in the set. Denote $Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x))$.

We note (see Theorem 1.5[3]) that for every $x \in G_k$ there is a permutation π_x of the coordinates of the vector $Q(x)$ (where e is the identity of G_k) such that

$$\pi_x Q(e) = Q(x). \tag{3.2}$$

It follows from this equality that $N(x) = N(e)$ for all $x \in G_k$. Each K -periodic collection is given by $\{h_x = h_i$ for $x \in K_i$, $i = 0, 1, \dots, r-1\}$. By Theorem 2.1 and (3.2), $h_n, l = 0, 1, \dots, r-1$, satisfies

$$h_n = \sum_{j=1}^{N(e)} q_{i_j}(e) f(h_{\pi_n(i_j)}, \theta) - f(h_{\pi_n(i_{j_0})}, \theta), \tag{3.3}$$

where $i_j = 1, \dots, N(e)$, $N(e) = |\{i_1, \dots, i_{N(e)}\}|$.

From monotonicity of $f(h, \theta)$ with respect to h , one gets:

Lemma 3.2. $f(h, \theta) = f(u, \theta)$ if and only if $h = u$.

Let $G_k^{(2)}$ be the subgroup in G_k consisting of all words of even length. Clearly, $G_k^{(2)}$ is a subgroup of index 2.

Theorem 3.1. *Let K be a normal subgroup of finite index in G_k . Then each K -periodic Gibbs measure for the Boltzmann model is either translation-invariant or $G_k^{(2)}$ -periodic.*

Proof. We see from (3.3) that

$$f(h_{\pi_n(i)}, \theta) = f(h_{\pi_n(i')}, \theta),$$

for any $i, i' \in Q(e), n = 0, 1, \dots, r-1$. Hence by Lemma 3.2 we have

$$h_{\pi_n(i_1)} = h_{\pi_n(i_2)} = \dots = h_{\pi_n(i_{N(e)})}.$$

Therefore,

$$h_x = h_y = h \text{ if } x, y \in S_1(z), z \in G_k^{(2)},$$

$$h_x = h_y = l \text{ if } x, y \in S_1(z), z \in G_k \setminus G_k^{(2)}.$$

Thus the measures are translation-invariant (if $h = l$) or $G_k^{(2)}$ -periodic (if $h \neq l$). This completes the proof of the theorem. \square

Let K be a normal subgroup of finite index in G_k .

What condition on K will guarantee that each K -periodic Gibbs measure is translation-invariant? We put $I(K) = K \cap \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$, where $a_i, i = 1, \dots, k+1$ are generators of G_k .

Theorem 3.2. *If $I(K) \neq \emptyset$, then each K -periodic Gibbs measure for the Boltzmann model is translation-invariant.*

Proof. Take $x \in K$. We note that the inclusion $xa_i \in K$ holds if and only if $a_i \in K$. Since $I(K) \neq \emptyset$, there is an element $a_i \in K$. Therefore K contains the subset $Ka_i = \{xa_i : x \in K\}$. By Theorem 3.1 we have $h_x = h$ and $h_{xa_i} = l$. Since x and xa_i belong to K , it follows that $h_x = h_{xa_i} = h = l$. Thus each K -periodic Gibbs measure is translation-invariant. \square

Theorems 3.1 and 3.2 reduce the problem of describing K -periodic Gibbs measures with $I(K) \neq \emptyset$ to describing the fixed points of $kf(h, \theta)$ which describes translation-invariant Gibbs measures.

If $I(K) = \emptyset$, this problem is reduced to describing the solutions of the system:

$$\begin{cases} u = kf(v, \theta), \\ v = kf(u, \theta). \end{cases} \quad (3.4)$$

Evidently, roots of the equation

$$u = g(u) = kf(kf(u, \theta), \theta), \quad (3.5)$$

describe the $G_k^{(2)}$ -periodic Gibbs measures. Using properties of function f one can easily note that: The system of equations (3.4) has a unique solution $h_0 = (h_*, h_*)$ if $\theta \in R$; We denote by μ_0 the Gibbs measures which correspond to these solution. Note that the measure μ_0 are translation-invariant. By an argument analogous to that of Lemma 3.1., we obtain the following result:

Theorem 3.3. *For the ferromagnetic Boltzmann model all periodic Gibbs measures are translation-invariant.*

Acknowledgement: We would like to thank associate professor Farhod Haydarov for his valuable advice and guidance regarding our article.

REFERENCES

1. Bleher P.M. and Ganikhodjaev N.N., On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice. *Theor. Probab. Appl.* **35** (1990), 216-227.
2. Bleher P.M., Ruiz J. and Zagrebnev V.A., On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice. *Journ. Statist. Phys.* **79** (1995), 473-482.
3. Rozikov U.A.: Gibbs Measure on Cayley trees. (2013). World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd.
4. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A.: Non-uniqueness of Gibbs Measure for Models with Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree. *J. Stat. Phys.* **147**(2012),779-794.
5. Eshkabilov Yu.Kh, Haydarov F.H., Rozikov U.A.: Uniqueness of Gibbs Measure for Models With Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree. *Math. Phys. Anal. Geom.* **16** (2013), 1-17.
6. Eshkabilov Yu.Kh., Rozikov U.A. and Botirov G.I.: Phase Transitions for a Model with Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **34** (2013), No.3, 256-263.
7. Ganikhodjaev N.N. and Rozikov U.A. Description of periodic extreme Gibbs measures of some lattice model on the Cayley tree. *Theor. and Math. Phys.* **111** (1997), 480-486.
8. Azencott R. Synchronous Boltzmann Machines and Gibbs Fields: Learning Algorithms. In: Soulie, F.F., Herault, J. (eds) Neurocomputing. NATO ASI Series, vol 68. Springer, Berlin, Heidelberg, (1990), 51-62.
9. Ganikhodjaev N.N. and Rozikov U.A. On Ising model with four competing interactions on Cayley tree. *Math. Phys. Anal. Geom.* **12** (2009), 141-156.
10. Jahnle B., Christof K., Botirov G. Phase transition and critical value of nearest-neighbor system with uncountable local state space on Cayley tree. *Math. Phys. Anal. Geom.* **17** (2014) 323-331.
11. Preston C.: *Gibbs states on countable sets* (Cambridge University Press, London 1974).
12. Rozikov U.A. Partition structures of the Cayley tree and applications for describing periodic Gibbs distributions. *Theor. and Math. Phys.* **112** (1997), 929-933.
13. Rozikov U.A. and Eshkabilov Yu.Kh.: On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. *Math. Phys. Anal. Geom.* **13** (2010), 275-286.
14. Rozikov U. A., Haydarov F. H. Periodic Gibbs measures for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. *I.D.A.Q.P.* **18** (2015), 1-22.

15. Sinai Ya.G.: *Theory of phase transitions: Rigorous Results* (Pergamon, Oxford, 1982).
16. Pigorov S.A., Sinai Ya.G.: Phase diagrams of classical lattice systems (Russian). *Theor. and Math. Phys.* **25** (1975), 358-369.
17. Pigorov S.A., Sinai Ya.G.: Phase diagrams of classical lattice systems. Continuation (Russian). *Theor. and Math. Phys.* **26** (1976), 61-76.
18. Kotecky R. and Shlosman S.B.: First-order phase transition in large entropy lattice models. *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 493-515.

REZYUME

Ushbu ishda Boltzmann mashinalari va ular bilan bog'liq Gibbs o'lchovlari nazariy jihatdan chuqur o'rganildi. Avvalo, mashinaning energiya funksiyasidan boshlab, unga mos Gibbs o'lchovlarini qurish jarayoni bosqichma-bosqich tushuntirildi. Shuningdek, bu o'lchovlarning mavjudligi uchun zarur bo'lgan muvofiqlik (Kolmogorov) shartlari keltirib chiqarildi. Keyin esa ushbu shartlarning bajarilishi uchun aniq mezonlar aniqlanib, ularning Boltzmann mashinasi tuzilishiga asoslangan statistik modellarning izchilligi va haqiqiylikiga qanday ta'sir qilishi tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: Boltzmann mashinasi, Gibbs o'lchovi, Keli daraxti, energiya funksiyasi, muvofiqlik shartlari, statistik modellar.

РЕЗЮМЕ

В данной работе мы провели строгое исследование машины Больцмана и связанных с ней мер Гиббса. Начиная с энергетической функции машины, мы подробно описали построение соответствующих мер Гиббса и вывели необходимые условия согласованности (условия Колмогорова). Далее мы установили точные критерии, при которых выполняются эти условия согласованности, и оценили их влияние на согласованность и достоверность статистических моделей, построенных на архитектуре машины Больцмана.

Ключевые слова: машина Больцмана, мера Гиббса, дерево Кэли, энергетическая функция, условия согласованности, статистические модели.

UDC 519.95

ОБ ОЦЕНКЕ РАЗЛИЧИЙ В ГЕНОМЕ ЧЕЛОВЕКА**АКБАРОВ Б. Х**

УНИВЕРСИТЕТ ТОЧНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУК, НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА,
ТАШКЕНТ
bahriddin.akbarov@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Предложены методика для поиска различий в геноме человека. Поиск различий производился по 22 хромосомам и последовательностям X, Y, МТ. Используется поиск скрытых закономерностей методами вычисления весов и устойчивости признаков. Ограничения на множество допустимых значений устойчивости позволяют эффективно интерпретировать полученные результаты.

Ключевые слова: геном человека, нечёткие множества, устойчивость признака

Введение

Прошло более четверти века со дня сообщения в июне 2000 года в сенате США исследователями Фрэнсисом Коллинзом и Крейг Вентером об расшифровке генома человека. Основная роль в процессе расшифровки отводилась использованию вычислительных методов и компьютерной техники. Ф. Коллинз применял классический иерархический метод. К. Вентер использовал полный метод, реализованный на основе новых алгоритмов:

- выравнивания;
- поиска покрытий;
- вероятностей оценки ошибок;
- оптимизации сборки.

Основные вычислительные подходы связаны с:

- динамическим программированием (например, для сравнения последовательностей по алгоритмам Смит-Уотерман и Нидлман-Вунша);
- графовыми методами;
- статистическими моделями и байесовскими подходами для исправления ошибок.

После построения и выделения хромосом большое внимание было уделено поиску различий между геномами разных людей. В итоге были получены следующие показатели различий.

Наиболее сильные - это SNP + CNV + STR + структурные перестройки.

Самые частые - SNP и STR.

Самые масштабные и "сильные" - CNV и крупные структурные вариации.

Наибольшее медицинское значение имеют InDel и SNP в функциональных областях генома.

Основные показатели различий:

- любые два человека приблизительно отличаются на 0.1% генома (3 миллиона нуклеотидов);
- 99.9% генома у всех людей одинаковый.

Самые сильные различия находятся в:

- участках, отвечающих за иммунную систему (например, HLA-гены);
- генах восприятия запахов;
- участках, связанных с метаболизмом и адаптацией к пище.

Наиболее крупная база данных хранится в [1]. Наличие категорий позволяет расширить возможности для проверки (выявления) скрытых закономерностей из баз данных.

Например, в [2] при анализе структуры ДНК на предмет влияния мутаций в качестве категорий использовались показатели РНК как “нет мутации”, “одна мутация”, “две мутации”. Поиск различий также строился по 4 парам классов (без мутаций, одна и две мутации), (без мутаций, две мутации), (без мутаций, одна мутация), (одна мутация, две мутации). По всем 4 парам определены информативные наборы признаков. Единственность наборов связана с использованием жадных алгоритмов многокритериальной агрегативной группировки [3]. Решения задачи с многими критериями позволило избежать полного перебора всех возможных вариантов.

Реализация методов вычисления обобщённых оценок [4] основана на идее противопоставления описаний объектов двух классов как оппозиции друг другу. При вычислении показателей сравнения с оппозицией используются значения функций принадлежности к нечетким множествам. Проявлением феномена нечёткости является устойчивость признаков по значениям функции принадлежности. Через устойчивость идёт поиск и выражение закономерностей, присущих всем выборкам из генеральной совокупности. Номера хромосом в данном исследовании предложено использовать в качестве категорий генома.

Математическая модель

Имеются две последовательности геномов от двух индивидуумов, представленных как данные по 22 хромосомам, аллосомам (X, Y) и митохондриальным геномом (МТ) из [5]. Предметом анализа является наборы из 19 генов в виде комбинаций 4 аминокислот, участвующих в формировании структуры белка. В описании данных есть неизмеренные значения(пропуски). Разбиения на 25 категорий для каждого индивидуума считается отдельным классом. Предлагается сравнение двух индивидуумов по 25 парам категорий.

Введем следующие обозначения по r -ой категории для количества:

K_{dr} - измеренных значений (без пропусков) для d - го индивидуума, $d = 1, 2$;

- p_r градаций по категории;
- l_{dr} различных градаций для d - го индивидуума;
- g_{dr}^t объектов с градацией $t, t = 1, 2, \dots, p_r$.

Значение межклассового различия и внутриклассового сходства вычисляются как

$$\lambda_r = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{p_r} g_{1r}^t g_{2r}^t}{|K_{1r}| |K_{2r}|},$$

$$\beta_r = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^l g_{1r}^i (g_{1r}^i - 1) + g_{2r}^i (g_{2r}^i - 1)}{D_{1r} + D_{2r}}, & D_{1r} + D_{2r} > 0, \\ 0, & D_{1r} + D_{2r} = 0, \end{cases}$$

где $D_{dr} = \begin{cases} (|K_{dr}| - l_{dr} + 1)(|K_{dr}| - l_{dr}), & p_r > 2, \\ |K_{dr}|(|K_{dr}| - 1), & p_r \leq 2. \end{cases}$

Вес признака по (1), (2)

$$w_r = \lambda_r \beta_r.$$

При вычислении функции принадлежности $f_r(\mu)$ к классу K_{1r} по градации $\mu \in \{1, 2, \dots, p_r\}$ в качестве $d_{1r}(\mu)(d_{2r}(\mu))$ используется число объектов класса $K_{1r}(K_{2r})$ со значением μ

$$f_r(\mu) = \frac{d_{1r}(\mu) / |K_{1r}|}{d_{1r}(\mu) / |K_{1r}| + d_{2r}(\mu) / |K_{2r}|}.$$

Граница между объектами классов по значениям функции принадлежности (4) определяется как $G_r = (q1 + q2)/2$, где $q2 = \max\{f_r(\mu)|0.5 - f_r(\mu) > 0, \mu = 1, \dots, p_r\}$, $q1 = \min\{f_r(\mu)|1 - f_r(\mu) < 0.5, \mu = 1, \dots, p_r\}$.

Так как число градаций $p_r, p_r \geq 2$ является постоянной величиной, то устойчивость признака по r -ой категории будет определяться так

$$\varphi(r) = \frac{1}{|K_{1r}| + |K_{2r}|} \sum_{i=1}^{p_r} \begin{cases} f_r(i) t_i, f_r(i) \geq 0.5, \\ (1 - f_r(i)) t_i, f_r(i) < 0.5, \end{cases}$$

где t_i - количество значений номинального признака в $K_{1r} \cup K_{2r}$ с градацией, равной i .

В процессе унификации значениям признака в описании объектов двух классов ставится в соответствие показатель его устойчивости (5) из интервала (0.5;1]. Множество допустимых значений из (0.5;1] формируются по нелинейным преобразованиям данных с использованием функций принадлежности к двум классам. Устойчивость признака является комбинаторной оценкой, вычисляемой на реальных выборках данных.

Показателем информативности признака служит близость значения его устойчивости к 1.0. Для редукции пространства необходимо использовать упорядоченную по устойчивости признаков последовательность. Доказанным фундаментальным свойством устойчивости является сходимость по вероятности к фиксированному значению на выборках из генеральной совокупности. Доказательство фундаментальности в виде теоремы [2] основывается на законе больших чисел применительно к количественным данным и теории нечётких множеств.

Общность интервальных и номинальной шкал измерений выражается в использовании алгоритма метода минимального покрытия значений количественного признака непересекающимися интервалами [6, 7]. Количество интервалов не является фиксированным значением на выборках из генеральной совокупности. Нечёткость выражается через значения функций принадлежности к классам в границах всех интервалов. Как закономерность значение устойчивости признаков используется с целью контроля корректности данных на выборках из генеральной совокупности.

Проблема учёта пропусков при вычислении устойчивости на номинальных (качественных) признаках исследовалась в работе [8]. Случайным образом формировались выборки с числом пропусков от 5% до 35%. Расхождения в значениях устойчивости по всем выборкам были в 5,6 знака. Целью исследования является подтвердить малые различия между геномами людей с использованием весов и устойчивости признака.

Вычислительный эксперимент

В качестве данных для эксперимента использовались выборки из двух файлов Child1 Genome и Child2 Genome, состоящих соответственно из 601802 и 631983 объектов [5]. Информация по 25 категориям содержится в табл.1. Показатели Child1 Genome идентифицируются как класс K_1 и Child2 Genome как класс K_2 . В скобках указано количество объектов по K_1 и K_2 .

Таблица 1. Данные по категориям двух индивидуумов

№ хромосомы	Всего объектов	Всего пропусков	Число генов	Значения устойчивости
1	95591 (46656,48935)	1617 (567,1050)	13	0.5586
2	97464 (46127,51337)	1549 (487,1062)	13	0.5676
3	81121 (38516,42605)	1351 (358,993)	13	0.5648
4	73006 (33914,39092)	1357 (409,948)	13	0.5653
5	71111 (34384,36727)	1188 (402,786)	13	0.5704
6	84086 (40383,43703)	1881 (974,907)	13	0.5561
7	67078 (33051,34027)	1302 (464,838)	13	0.5592
8	61694 (30266,31428)	939 (301,638)	13	0.5689
9	52736 (26583,26153)	865 (275,590)	13	0.5622

10	59469 (29211,30258)	965 (332,633)	13	0.5645
11	60007 (29320,30687)	966 (347,619)	13	0.5550
12	57601 (28450,29151)	957 (306,651)	13	0.5555
13	43572 (21652,21920)	628 (237,391)	12	0.5555
14	38473 (18695,19778)	634 (190,444)	13	0.5638
15	37088 (18281,18807)	617 (192,425)	13	0.5546
16	39403 (19198,20205)	729 (258,471)	13	0.5528
17	37885 (18710,19175)	780 (314,466)	13	0.5509
18	34039 (16490,17549)	488 (151,337)	13	0.5642
19	27680 (12989,14691)	782 (303,479)	13	0.5497
20	29146 (14494,14652)	437 (157,280)	12	0.5618
21	16955 (8461,8494)	317 (112,205)	13	0.5624
22	17904 (9096,8808)	393 (154,239)	13	0.5560
X	35621 (19478,16143)	1195 (673,522)	17	0.5209
Y	5803 (2302,3501)	1371 (1004,367)	7	0.5205
MT	9252 (5095,4157)	506 (257,249)	6	0.5098

Близкое к 0.5 значения устойчивости (5) по MT (см. табл.1) объясняется малой разностью частот по 6-ти градациям классов K_1 и K_2 при вычислении функции принадлежности (4).

Другим способом доказательства различия по генотипам является использование показателя (1) (см. табл.2), множество допустимых значений которого принадлежит $(0;1]$. Чем ближе (1) к нулю, тем меньше различия между классами.

Таблица 2. Результаты анализа различий между классами K_1 и K_2

№ хромосомы	Межклассовое различие (1)	Внутриклассовое сходство (2)	Вес признака (3)
1	0.1735	0.8313	0.1442
2	0.1704	0.8370	0.1426
3	0.1701	0.8365	0.1423
4	0.1711	0.8361	0.1430
5	0.1702	0.8366	0.1423
6	0.1706	0.8346	0.1424
7	0.1687	0.8358	0.1409
8	0.1690	0.8374	0.1415
9	0.1681	0.8361	0.1405
10	0.1716	0.8339	0.1431
11	0.1693	0.8349	0.1413
12	0.1704	0.8335	0.1420
13	0.1610	0.8428	0.1356
14	0.1680	0.8375	0.1407
15	0.1679	0.8359	0.1404
16	0.1720	0.8320	0.1431
17	0.1713	0.8323	0.1425

18	0.1702	0.8359	0.1423
19	0.1834	0.8207	0.1505
20	0.1714	0.8338	0.1429
21	0.1679	0.8366	0.1405
22	0.1776	0.8262	0.1467
X	0.2269	0.7737	0.1755
Y	0.2489	0.7578	0.1886
MT	0.2628	0.7374	0.1938

При вычислении межклассового различия (1) частоты по градациям признака перемножаются. Этим объясняется максимальное значение (1) по MT из 25 пар классов.

Преимущества предложенного подхода

В отличие от классических статистических методов (χ^2 -критерий, t -тест, ANOVA), методика вычисления устойчивости обладает рядом преимуществ:

- учитывает как количественные, так и номинальные признаки;
- не требует строгих предположений о законе распределений;
- демонстрирует сходимость по вероятности при увеличении объёма выборки;
- позволяет работать с данными, содержащими пропуски, благодаря использованию функций принадлежности к нечётким множествам.

Эти свойства делают методику удобной для анализа больших геномных баз данных, таких как 1000 Genomes Project или UK Biobank.

Заключение

Проведённые исследования показали, что использование показателя устойчивости и весов признака является эффективным инструментом при сравнительном анализе геномов различных индивидов. Полученные значения устойчивости по каждой хромосоме позволяют:

- выявлять статистически значимые различия между выборками;
- интерпретировать закономерности в распределении генотипов;
- уменьшать размерность исходного пространства признаков без потери информативности.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают применимость методики для практических задач медицинской генетики, таких как поиск мутаций, ассоциированных с наследственными заболеваниями, и построение индивидуальных карт генетических рисков.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Sudmant et al. "An integrated map of structural variation in 2,504 human genomes Nature vol. 526, pp. 75-81, Oct. 2015. doi:10.1038/nature15394.
2. Игнатъев Н.А., Акбаров Б.Х. Оценка близости структур отношений объектов обучающей выборки на многообразиях наборов латентных признаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. №65. С. 69-78. doi: 10.17223/19988605/65/7
3. Ignatev N. A. and Rahimova M. A. Formation and Analysis of Sets of Informative Features of Objects by Pairs of Classes // Scientific and Technical Information Processing, 2022, Vol. 49, №. 6, pp. 439-445.
4. Ignatev N. A. On Nonlinear Transformations of Features Based on the Functions of Objects Belonging to Classes // Pattern Recognition and Image Analysis. 2021. V. 31. №2. P. 197-204.

5. <https://www.kaggle.com/datasets/zusmani/mygenome>
6. Мадрахимов Ш.Ф. Системы обнаружения скрытых закономерностей на базе методов вычисления обобщенных оценок : дисс. докт. тех. наук. - Ташкент, 2020.
7. Згуральская Е.Н. Устойчивость разбиения данных на интервалы в задачах распознавания и поиск скрытых закономерностей // Известия Самарского научного центра РАН. - 2018. - Т. 20, №4(3). - С. 451-455.
8. Игнатъев Н.А., Рахимова М.А., Лолаев М.Я. Особенности отбора информативных наборов признаков на данных с пропусками // Проблемы вычислительной и прикладной математики. - 2021. - №6/1(37). - С. 113-122.

Annotatsiya

Inson genomida farqlarni aniqlash uchun metodika taklif qilingan. Farqlarni izlash 22 ta xromosoma hamda X, Y va MT ketma-ketliklari bo'yicha amalga oshirilgan. Yashirin qonuniyatlarni topishda alomatlar vaznlari va turg'unlik qiymatarini hisoblash usullaridan foydalaniladi. Turg'unlikning mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga qo'yilgan cheklovlar olingan natijalarni samarali talqin qilish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: Inson genomi, qat'iymas to'plam, alomatlar turg'unligi

Abstract

A methodology for detecting differences in the human genome has been proposed. The search for differences was carried out across 22 chromosomes and the X, Y, and MT sequences. Hidden patterns are identified using methods of calculating feature weights and stability. Restrictions on the set of permissible stability values make it possible to effectively interpret the obtained results.

Key words: Human genome, fuzzy sets, feature stability

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ
КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН С ДРОБНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ МИЛЛЕРА–РОССА,
В СЛУЧАЕ С ЗАДЕЛАННЫМИ И СВОБОДНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ
УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА**

Касимов Ш. Г.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
shokiraka@mail.ru

Реймбаева Д. К.

НУКУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ АЖИНИЯЗА, НУКУС
dilya201127@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи колебаний пластин с дробными операторами Миллера–Росса, в случае с заделанными и свободно закрепленными условиями в классах Соболева. Решение рассматриваемой задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи, для которой найдены её собственные значения как корни трансцендентного уравнения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций получена решения поставленной начально–граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка, начально–граничная задача, дробная производная по времени, собственные значения, собственные функции, полнота, спектральный метод, существование, единственность, ряд.

Введение. Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.141-143; 2; 3, с. 3375-3389; 4, с. 52-62; 5, с. 650-671; 6, с. 63-77; 7, с. 614-628; 8, с. 311-324; 9, с. 89-100; 10, с. 665-671]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [11, с. 364-374].

В работе [4] исследуются задачи с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины с разными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных трёх начально–граничных задач. В случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

В работе [6] изучена задача с начальными условиями для уравнения колебаний прямоугольной пластины со смешанными граничными условиями. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально–граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классе регулярных и обобщённых решений.

В работе [7] для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области изучена первая граничная задача. Показано, что корректность постановки задачи существенным образом зависит от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Установлен критерий единственности решения. Доказаны оценки устойчивости решения от заданных граничных функций и правой части.

В работе [12] для уравнения смешанного типа с дробными производными изучена первая граничная задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение

построено в виде суммы ортогонального ряда и показана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения. Установлена устойчивость решения относительно заданных граничных функций в классе непрерывных и квадратично-суммируемых функций.

Отметим, что в работе [15] доказано теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка с дробными производными по времени, со степенями операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. В работе [16] исследуется начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае и установлено теорема об однозначной разрешимости начально-граничной задачи для уравнения балки в многомерном случае. В работе [17] доказано о разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. В работе [25] доказано об однозначной разрешимости многомерной начально-граничной задачи, связанные с уравнениями колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе, с нелокальными граничными условиями в классах Соболева.

В работе [22] изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закреплённой балки. Такие линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка описывает изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы при отсутствии вращательного движения при изгибе.

Постановка задачи. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$ где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T –заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$D_j^\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) + a^2 \Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) + b^2 D_j^\alpha \Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) + c^2 u(x_1, \dots, x_N, t) = f(x_1, \dots, x_N, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$n - 1 \leq \alpha < n, \quad 0 \leq j \leq n - 1, \quad N, n, j + 1 \in \mathbb{N}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c = const$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i^0(x), \quad i = 0, \dots, j - 1, \quad \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \Big|_{t=0} = \varphi_s^0(x), \quad s = 0, \dots, n - j - 1 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^{4k} u(x, t)}{\partial x_p^{4k}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+1} u(x, t)}{\partial x_p^{4k+1}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+2} u(x, t)}{\partial x_p^{4k+2}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+3} u(x, t)}{\partial x_p^{4k+3}} \Big|_{x_p=l} = 0, \tag{3}$$

$k = \overline{0, \rho - 1}, \quad p = \overline{1, N}$,

где $(x, t) = (x_1, \dots, x_N, t) \in \Pi \times (0, T)$ и $f(x, t), \tilde{\varphi}_i^0(x), i = 0, \dots, j - 1, \varphi_s^0(x), s = 0, \dots, n - j - 1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N), (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N\}$ следующей спектральной задачи:

$$\Delta^{4\rho} v(x_1, \dots, x_N, t) - \lambda v(x) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^{4k} v(x)}{\partial x_p^{4k}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+1} v(x)}{\partial x_p^{4k+1}} \Big|_{x_p=0} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+2} v(x)}{\partial x_p^{4k+2}} \Big|_{x_p=l} = 0, \quad \frac{\partial^{4k+3} v(x)}{\partial x_p^{4k+3}} \Big|_{x_p=l} = 0, \tag{5}$$

$k = \overline{0, \rho - 1}, \quad j = \overline{1, N}$,

λ –спектральный параметр. D_j^α –интегро-дифференциальный оператор в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля.

Пусть $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ функция n раз непрерывно дифференцируемая и $n - 1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Дробная производная по Римана–Лиувилля порядка α определяется с равенством

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(l - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \tag{6}$$

где $\Gamma(\cdot)$ —гамма-функция Эйлера. Эта функция удовлетворяет равенство $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Дробная производная или регуляризованной дробной производной по Капута порядка α определяется с равенством

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (7)$$

Справедлива формула

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (8)$$

Таким образом, производная в смысле Римана–Лиувилля может быть представлена в виде суммы сингулярных членов

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) \quad (9)$$

и регуляризованной дробной производной по Капута порядка α :

$$\frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (10)$$

Присутствие слагаемых (9) приводит к тому, что дробные производные Римана–Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие чётко физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана–Лиувилля лишена регуляризованная производная порядка α ($n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$)

$$D^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0), \quad (11)$$

которая была впервые введена в работе Капуто [13], а также независимо от него в работах Джрбашяном и Нерсесяном [20].

Как производные Римана–Лиувилля, так и производные Капуто не обладают ни полугрупповым свойством, ни тем более свойством коммутативности, т.е. существует функции $f(t)$ и $g(t)$, который

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\alpha+\beta} f(t) &\neq \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}^\beta f(t), \quad \mathbf{D}^\alpha \mathbf{D}^\beta f(t) \neq \mathbf{D}^\beta \mathbf{D}^\alpha f(t), \\ \mathbf{D}^{(\alpha+\beta)} f(t) &\neq \mathbf{D}^{(\alpha)} \mathbf{D}^{(\beta)} f(t), \quad \mathbf{D}^{(\alpha)} \mathbf{D}^{(\beta)} f(t) \neq \mathbf{D}^{(\beta)} \mathbf{D}^{(\alpha)} f(t). \end{aligned}$$

В связи с этим Миллером и Россом [14] были введены так называемые секвенциальные производные, дробного порядка:

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = \mathbf{D}^{\alpha_1} \mathbf{D}^{\alpha_2} \dots \mathbf{D}^{\alpha_m} f(t), \quad (12)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Вообще говоря, в качестве оператора \mathbf{D}^α , лежащего в основе секвенциальной производной Миллера–Росса, можно использовать оператор дробного дифференцирования по Риману–Лиувилля, Капута или любую другую его разновидность. В частности, для целых α_i это может быть оператор обычного дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_i}$. Использование секвенциальных производных Миллера–Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений.

Выберем некоторое ν , $n-1 \leq \nu < n$, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha = (j, \nu-n+1, n-1-j)$, $j = 0, \dots, n-1$. Определим производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля и в смысле Миллера–Росса по Капута с равенствами соответственно

$$D_j^\nu f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{\nu-n+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t), \quad \mathbf{D}_j^{(\nu)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(\nu-n+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

где $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Эти производные дробного порядка в смысле Миллера–Росса по Римана–Лиувилля $D_j^\nu f(t)$ и в смысле Миллера–Росса по Капуа $D_j^{(\nu)} f(t)$ связаны с равенствами

$$\begin{aligned}
 D_0^{(\nu)} f(t) &= D^{(\nu)} f(t) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\
 D_1^{(\nu)} f(t) &= D_0^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\
 &\vdots \\
 D_j^{(\nu)} f(t) &= D_{j-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = \\
 &= D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0), \\
 D_{n-1}^{(\nu)} f(t) &= D_{n-2}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0), \\
 D_{n-1}^\nu f(t) &= D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t),
 \end{aligned}$$

где $n - 1 \leq \nu < n$, $l \in \mathbb{N}$ и для функции $f(t)$ производная порядка $l - 1$ абсолютно непрерывная функция. Доказательство этих утверждений дано в работах Чикрий и Матичина [24].

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ вводится так:

$$\begin{aligned}
 (f(x), g(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)} &= (f(x), g(x))_{L_2(\Pi)} + \\
 &+ \sum_{i_1=1}^N (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \\
 &+ \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} (D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f(x), D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} g(x))_{L_2(\Pi)}.
 \end{aligned}$$

Тогда соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}
 \|f(x)\|_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 &= \|f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \sum_{i_1=1}^N \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \\
 &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} \|D_{x_{i_1}}^{s_{i_1}} D_{x_{i_2}}^{s_{i_2}} \dots D_{x_{i_N}}^{s_{i_N}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2.
 \end{aligned}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\frac{\partial^{4k_i} f(x)}{\partial x_i^{4k_i}} \Big|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{4s_i - N}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+1} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}} \Big|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{4s_i - N - 2}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+2} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}} \Big|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{4s_i - N - 4}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+3} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}} \Big|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{4s_i - N - 6}{8}$, $i = \overline{1, N}$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$ функций N -переменных $f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) = X_{m_1}(x_1) \cdot \dots \cdot X_{m_N}(x_N), \tag{13}$$

где

$$X_{m_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + b_{m_i}^{4s_i}}} \times \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l|ctg \frac{b_{m_i} l}{2}|}} \left(\frac{\cos b_{m_i}(x - \frac{l}{2})}{\sin \frac{b_{m_i} l}{2}} - \frac{sh b_{m_i}(x - \frac{l}{2})}{ch \frac{b_{m_i} l}{2}} \right), \\ m_i = 2k_i, k_i = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{l|tg \frac{b_{m_i} l}{2}|}} \left(\frac{\sin b_{m_i}(x - \frac{l}{2})}{\cos \frac{b_{m_i} l}{2}} + \frac{ch b_{m_i}(x - \frac{l}{2})}{sh \frac{b_{m_i} l}{2}} \right), \\ m_i = 2k_i - 1, k_i = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{14}$$

b_{m_i} – корень трансцендентного уравнения

$$ch(lb) \cdot \cos(lb) = -1. \tag{15}$$

Из графиков функций $\cos(lb)$ и $\frac{-1}{ch(lb)}$ видно, что в каждом из интервалов $\frac{\pi(n-1)}{l} + \frac{\pi}{2l} < b_n < \frac{\pi n}{l}$, $n = 2i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, и $\frac{\pi(n-1)}{l} < b_n < \frac{\pi(n-1)}{l} + \frac{\pi}{2l}$, $n = 2i$, $i = 1, 2, \dots$, имеется ровно один корень b_n , причем $b_{2i-1} - \frac{\pi(4i-3)}{2l} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\frac{\pi(4i-1)}{2l} - b_{2i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что существует счетное множество корней (собственных значений) уравнения (15):

$$0 < b_1 < \dots < b_n < \dots$$

при этом при больших n справедлива асимптотическая формула

$$b_n = \frac{\pi(n-1)}{l} + \frac{\pi}{2l} + O(e^{-\pi n}). \tag{16}$$

Соответственно, имеем

$$b_{m_i} = \frac{\pi(m_i-1)}{l} + \frac{\pi}{2l} + O(e^{-\pi m_i}).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Система собственных функций

$$\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N} = \left\{ \prod_{i=1}^N X_{m_i}(x_i) \right\}_{(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N} \tag{17}$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}_2^{2s_1, 2s_2, \dots, 2s_N}(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $\frac{\partial^{4k_i} f(x)}{\partial x_i^{4k_i}} \Big|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+1} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}} \Big|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 2}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+2} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}} \Big|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 4}{8}$, $\frac{\partial^{4k_i+3} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}} \Big|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 6}{8}$, $i = \overline{1, N}$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$.

Теоремы 1 и 2 доказана в работе 23.

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ назовем функцию $u(x, t)$ из класса

$$u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}),$$

$$\Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^\alpha \Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q})$$

удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x_1, \dots, x_N, t) \in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям $\left. \frac{\partial^{4k_i} f(x)}{\partial x_i^{4k_i}} \right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_i+1} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+1}} \right|_{x_i=0} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 2}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_i+2} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+2}} \right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 4}{8}$, $\left. \frac{\partial^{4k_i+3} f(x)}{\partial x_i^{4k_i+3}} \right|_{x_i=l} = 0$ при $0 \leq k_i < \frac{2s_i - N - 6}{8}$, $i = \overline{1, N}$.

Функцию $u(x, t)$ назовем регулярным решением задачи (1)–(3) в области Q , если функция $u(x, t)$ –регулярные решение уравнения (1) в области Q из класса

$$u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}),$$

$$\Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q}), \quad D_j^\alpha \Delta^{4\rho} u(x_1, \dots, x_N, t) \in C(\bar{Q})$$

и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x, t)$ является регулярным решением задачи (1)–(3) в области Q .

Докажем теперь существование и единственность решения начально-граничной задачи (1)–(3). Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j - 1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n - j - 1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$ и правая часть $f(\cdot, t) \in C\left([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)\right)$.

Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho_p + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; s + 1 \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_i^0; m_1, \dots, m_N \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \alpha - i \right) + \right. \\ \left. + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^\alpha; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x). \quad (18)$$

Здесь $E_\eta(x; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\eta - 1 + \mu)}$ функция Миттаг-Леффлера, $\lambda_{m_1, \dots, m_N} = \left(\sum_{p=1}^N b_{m_p}^2 \right)^{2\rho}$, где b_{m_p} корень трансцендентного уравнения корень трансцендентного уравнения (15) и коэффициенты определяется по формулам

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} f(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_i^0(x) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx,$$

$i = 0, \dots, j - 1$; $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \varphi_s^0(x) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1, \quad m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Введем функции

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} u(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad (19)$$

где

$$v_{m_1, \dots, m_N}(x) = \prod_{i=1}^N X_{m_i}(x_i). \quad (20)$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_m(t) = T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_j^\alpha T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} T_{m_1, \dots, m_N}(t) = f_{m_1, \dots, m_N}(t), \quad m_p \in \mathbb{N}, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad (21)$$

$$0 \leq j \leq n - 1, \quad N, \quad n, \quad j + 1 \in \mathbb{N}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c = const$$

и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \tilde{\varphi}_i^0; \quad m_1, \dots, m_N, \quad i = 0, \dots, j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^s T_{m_1, \dots, m_N}(t)}{dt^s} = \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

где

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} f(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad (23)$$

$$\tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_i^0(x) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad i = 0, \dots, j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

$$\varphi_{i; m_1, \dots, m_N}^0 = \int_{\Pi} \varphi_i^0(x) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx, \quad s = 0, \dots, -[-\alpha] - j - 1; \quad m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Решение задачи Коши (21), (22) известно (см., например [24]), и оно имеет вид

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{s=0}^{-[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \quad s + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_{i; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \quad \alpha - i \right) +$$

$$+ \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^\alpha; \quad \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$\lambda_{m_1, \dots, m_N} = \left(\sum_{p=1}^N b_{m_p}^2 \right)^{2\rho}, \quad (27)$$

$$b_{m_p} = \frac{\pi(m_p - 1)}{l} + \frac{\pi}{2l} + O(e^{-\pi m_p}), \quad (28)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \quad s + 1 \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha \right)^q}{\Gamma(\alpha q + s + 1)}, \quad (29)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \quad \alpha - i \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha \right)^q}{\Gamma(\alpha q + \alpha - i)}, \quad (30)$$

$$E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^\alpha; \quad \alpha \right] = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot (t - \tau)^\alpha \right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha q)}. \quad (31)$$

Поскольку функции (19) построены в явном виде (23), то на основании полноты системы собственных функций (17) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi_i(t) \equiv 0, i = 1, -[-\alpha]$. Тогда из формулы (23)–(25) и (26) следует, что

$$\int_{\Pi} u(x, t) v_{m_1, \dots, m_N}(x) dx = 0$$

при всех $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (17) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$.

Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x, t)$ непрерывна на \bar{Q} , то $u(x, t) \equiv 0$ в \bar{Q} . Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ по переменной x является функцией из класса $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5):

$$u(x, t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=1}^{\infty} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x), \tag{32}$$

где $v_{m_1, \dots, m_N}(x) = \prod_{i=1}^N X_{m_i}(x_i)$, $T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ определяется по формуле (19).

После подстановки (26) в (32) мы получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; s + 1 \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_i^0; m_1, \dots, m_N \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \alpha - i \right) + \right. \\ & \left. + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^\alpha; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x). \tag{33} \end{aligned}$$

Поскольку система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому ряд (33) сходится в $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ при любом $t \in [0, T]$. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$. Согласно теореме 2, система собственных функций (17) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(Q)$.

Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j - 1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n - j - 1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$ и правая часть $f(\cdot, t) \in C\left([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)\right)$. Тогда по теореме вложения Соболева справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{C_{4\rho, 4\rho, \dots, 4\rho}(\Pi)}^2 & \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left| \sum_{s=0}^{[-\alpha]-j-1} \varphi_{s; m_1, \dots, m_N}^0 \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; s + 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{\varphi}_i^0; m_1, \dots, m_N \cdot t^{\alpha-i-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} \cdot t^\alpha; \alpha - i \right) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}} \left[-\frac{a^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N} + c^2}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau)^\alpha; \alpha \right] \frac{1}{1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N}} f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right|^2 < const. \end{aligned}$$

Отсюда следует что, если начальные функции $\tilde{\varphi}_i^0(x)$, $i = 0, \dots, j - 1$; $\varphi_s^0(x)$, $s = 0, \dots, n - j - 1$ из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, и правая часть $f(\cdot, t) \in C\left([0, T]; \overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)\right)$, то регулярное решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_p > 4\rho + \frac{N}{2}$, $p = \overline{1, N}$, $\theta > -[-\alpha] + \frac{N}{2}$ существует, единственно и представляется в виде ряда (18). Теорема 3 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. МГУ, М. 1999.
2. Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. Наука, М. 1965.
3. K.B. Sabitov, and A.G. Khakimov. Determination of the Spectrum of Frequencies and Vibrations of a Rectangular Plate, Mobily Employed Around the Edge, in Different Media // *Mechanics of Solids*, 2024, Vol. 59, No. 6, pp. 3375-3389. <https://doi.org/10.1134/S002565442460435X>
4. K.B. Sabitov. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate // *Russian Mathematics*. 2021. Vol. 65. No. 10. P. 52-62. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>.
5. K.B. Sabitov. Vibrations of plate with boundary "hinged attachment" conditions // *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, No. 4. P. 650-671. [In Russian]. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>.
6. K.B. Sabitov. Plate oscillations with mixed boundary conditions // *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 2023. No. 3. P. 63-77. [In Russian]. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>.
7. K.B. Sabitov. Direct and inverse problems for the equation of oscillations of a rectangular plate to find the source // *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023. Vol. 63. No. 4. P. 614-628. [In Russian]. <https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>.
8. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, №2. С. 311-324.
9. Сабитов К.Б. К теории начально–граничных задач для уравнения стержней и балок. // *Дифференциальные уравнения*. 2017. Т. 53. №1, с. 89-100.
10. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // *Дифференциальные уравнения*. 2017. Т. 53. №5, С. 665-671.
11. Сабитов К.Б. Начально–граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // *Дифференциальные уравнения*, 2021, том 57, №3. С. 364-374.
12. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными // *Изв. вузов. Матем.*, 2022, №9, С. 83-94. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-9-83-94.
13. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 1967. Vol. 13. P. 529-539.
14. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley & Sons, 1993.
15. O.A. Phan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes // *Mathematics* 2019, 7, 235. №1. P. 1-20. Basel, Switzerland.
16. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае // *Дифференциальные уравнения*. 2019 г. Том 55, №10, с. 1379-1391.
17. Kasimov Sh.G., Phan O. A., Madraximov U.S., Baskonus H. M. Solvability of the mixed problem of a high-order PDE with fractional time derivatives, Sturm-Liouville operators on spatial variables and non-local boundary conditions // *Rocky mountain journal of mathematics volume 49, number 4, 2019, pp. 1191-1206*.
18. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Наука, М. 1969.

19. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М. 1965.
20. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3-29.
21. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. 1966.
22. Сабитов К.Б., Фадеева О.Б. Начально–граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 25, №1. С. 51-66.
23. Kasimov Sh.G., Madrakhimov U.S. On the unique solvability for initial-boundary problems of vibrations of a beam, one end of which is fixed and other is free, in the Sobolev classes in the multidimensional case // Uzbek mathematical jurnal, 2019, №4, pp. 92-106.
24. Chikriy A.A., Matichin I.I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Rossa // J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1-11.
25. Sh.G. Kasimov, and A.P. Koshanov. On the unambiguous solvability of a multidimensional initial-boundary value problem for the beam oscillation equation with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes // Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, (11), 5546-5558 (2024).

ANNOTATSIYA

Mazkur ishda Sobolev sinflarida kasr tartibli Miller–Rossa operatori qatnashgan plastinka tebranishlari tenglamasini qo'zg'almas va erkin qo'yilgan shartlardagi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan. Ko'rib chiqilayotgan masalaning yechimi ko'p o'lchamli spektral masalaning xos funksiyalari sistemasi bo'yicha yoyilgan qator ko'rinishida qurilgan. Shuningdek, bu spektral masalaning xos qiymatlari transsendent tenglamaning ildizlari sifatida topilgan va mos xos funksiyalari sistemasi qurilgan. Bu xos funksiyalar sistemasi Sobolev fazolarida to'la va Riss bazisini tashkil etishi ko'rsatilgan. Xos funksiyalar sistemasining to'laligi asosida qo'yilgan boshlang'ich–chegaraviy masalaning yechimi qurilgan.

Kalit so'zlar: yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar, boshlang'ich–chegaraviy masala, vaqt bo'yicha kasr tartibli hosila, xos funksiyalar, to'lalilik, spektral usul, mavjudlik, yagonalik, qator.

ANNOTATION

The paper proves the existence and uniqueness theorem for the solution of the problem of plate vibrations with fractional Miller–Ross operators, in the case of fixed and freely fixed conditions in Sobolev classes. The solution of the problem under consideration is constructed as the sum of a series according to the system of eigenfunctions of a multidimensional spectral problem, for which its eigenvalues are found as the roots of the transcendental equation and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev spaces. Based on the completeness of the system of eigenfunctions, solutions to the initial boundary value problem are obtained.

Key words: high–order partial differential equation, initial–boundary value problem, fractional time derivative, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, spectral method, existence, uniqueness, series.

УДК 517.55

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

МАМАДАЛИЕВ Н. А.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ,
ИМ. В.И.РОМАНОВСКОГО, ТАШКЕНТ

m_numana59@mail.ru

МУСТАПОКУЛОВ Х. Я.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА, МЕЖДУНАРОДНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ НОРДИК,

m_hamdham@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучаются линейные дифференциальные игры преследования с импульсными управлениями на управление игроков. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующие управления представляются при помощи дельта-функции Дирака. Разработан аналог третьего метода задачи преследования и применен для решения поставленной задачи. В основу исследования положены основные идеи метода разрешающих функций.

Ключевые слова: преследование, преследователь, убегающий, разрешающая функция, терминальное множество, управление, запаздывание, дифференциальная игра, импульсное управление.

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты

Исследование теории дифференциальных уравнений с аддитивно входящими обобщенными функциями, в частности, дельта-функцией Дирака, в значительной степени вызвано многочисленными приложениями в теории оптимального управления и теории дифференциальных игр [1-7]. К настоящему времени эта теория всесторонне разработана, а в монографии [8] доказаны важные теоремы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

В работе [3] рассмотрены линейные дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и геометрическим ограничением на управление игроков и на их комбинации. Для решения поставленной задачи преследования применяя метод разрешающих функций. В явном виде указаны условия нахождения гарантированного времени и построение управления преследующего игрока для завершения преследования. Одной из отличительных черт данной работы является то, что полученные результаты работы перенесены на третий метод задачи преследования. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретном примере так называемую игру "простое преследование-уклонение".

Работа [4] продолжает изучение игры, рассмотренной в работе [3]. Для дифференциальной игры преследования предлагаются достаточные условия для возможности завершения преследования, когда один из игроков применяет управление импульсного характера, а другой - управление с интегральным ограничением. Различаются два случая в зависимости от выбора игроками управлений из разных классов допустимых управлений. С использованием идей работы [3] в обоих случаях приводятся достаточные условия обеспечивающие из заданной начальной положения z_0 возможности завершения преследования за конечное время.

Работа [5] посвящена изучению игровых задач с точки зрения о возможности завершения преследования или о возможности убегающего для заданной начальной точки z_0 . При этом на управление преследователя накладывается интегральное ограничение, а управление убегающего игрока имеет импульсный

характер. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающих функции [16]. Рассмотрены два взаимно исключающиеся случаи, в первом случае из всех начальных точек нельзя осуществить поимку, а во втором существует открытый шар, из точек которого можно осуществить поимку, из точек дополнения этого шара нельзя осуществить поимку.

В работе [6] рассмотрены игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воздействие на объект управление игроков имеет характер импульсного или интегрального ограничения. Пользуясь идеями работ [3], доказываются теоремы с достаточными условиями для завершения преследования из заданной точки за конечное время. Одной из отличительных черт данной работы является то, что преследующий игрок применяет стратегии из более узкого класса, а именно, стробоскопического. В конце работы приведен пример с нелинейной правой частью для иллюстрации результата.

В работе [9] рассмотрена задача управления объектом, описываемая функционально-дифференциальной системой с последствием общего вида с целью доставления предписанного значения заданному векторному функционалу. При этом воздействие на объект осуществляется импульсно, в заранее заданных моментах времени, тем самым траектория терпит разрыв первого рода.

В данной статье рассмотрена линейная дифференциальная игра описываемая системой линейных дифференциальных уравнений с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом классами допустимых управлений игроков являются импульсные функции. Эти импульсные воздействия на объект осуществляются в заранее заданных моментах времени, и соответствующее управление представляется при помощи дельта-функции Дирака. Пользуясь идеями работ [3], доказываются теоремы с достаточными условиями для завершения преследования из заданной точки за конечное время. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающей функции [16]. Теоретические результаты иллюстрируются на примере игры преследования с простым движением.

В пространстве \mathbb{R}^m , рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой линейных дифференциальных уравнений [3-6]

$$\dot{z} = Az - u + v, \quad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

где z — фазовый вектор, A — постоянная квадратная ($m \times m$) матрица, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков, соответственно. Структура управлений игроков будет оговорена ниже в каждом из рассматриваемых случаев. В случае, когда первый и второй игрок принимают импульсные управления, мгновенным значением управления являются векторы из множеств P и Q , соответственно. При этом P, Q — непустые компактные подмножества в \mathbb{R}^m , терминальное множество M представляется цилиндром вида

$$M = M_0 + M_1, \quad (1.2)$$

где M_0 — линейное подпространство пространства \mathbb{R}^m , M_1 — выпуклое замкнутое подмножество подпространства L , где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в \mathbb{R}^m (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^m$).

Задача преследования состоит в том, чтобы определенным образом выбирая допустимое управление u , за конечное время вывести траекторию системы (1.1) на терминальное множество M . Задача убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания ($\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$), (не имеющая конечных точек сгущения) удовлетворяющая следующему условию.

Условие 1.1. Любой компактный отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число точек этой последовательности.

Предположим, что классом допустимых управлений преследующего и убегающего игроков являются множество импульсных функций, которые выражаются через дельта-функций Дирака

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i), \quad (1.3)$$

где векторы скачков преследователя u_i ($i \in N$) принадлежат компакту P , $P \subset \mathbb{R}^m$, а векторы скачков убегающего игрока v_i ($i \in N$) — компакту Q , $Q \subset \mathbb{R}^m$.

В этом случае задача преследования заключается в том, чтобы для данной начальной позиции $z_0 \notin M$ определить достаточные условия, при выполнении которых для произвольного допустимого управления (из класса допустимых управлений убегающего) убегающего игрока, используя разрешенные информации, можно будет построить управление $u(\cdot)$ из класса допустимых управлений преследователя так, чтобы соответствующую траекторию $z(t)$, $t \geq 0$, системы (1.1), исходящая из начального положения $z_0 \notin M$, можно перевести на терминальное множество M за конечное время.

В данной работе для исследования игровой задачи (1.1), (1.2), мы ограничимся привлечением аппарата импульсных управлений. Напомним, что импульсное воздействие в момент τ описывается с помощью сингулярной обобщенной функцией Дирака $\delta(t - \tau)$ [3,4], которая определяется следующим образом:

$$(\delta, f) = \int_a^b f(t)\delta(t - \tau)dt = \begin{cases} f(\tau) & \text{при } \tau \in [a, b], \\ 0 & \text{при } \tau \notin [a, b], \end{cases}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$, τ — некоторое фиксированное число.

2. Решение задачи

Согласно [8], если управления игроков имеют вид (1.3), то при любом начальном положении z_0 система (1.1) имеет единственное решение, которое является абсолютно непрерывным на интервалах (τ_{i-1}, τ_i) , $i \in N$.

Из формулы Коши для управляемого процесса (1.1) следует представление [3]

$$z(t) = e^{tA}z_0 - \sum_{i=1}^{n(t)} e^{(t-\tau_i)A}[u_i - v_i], \quad (2.1)$$

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что в моменты времени $\{\tau_i\}$ траектории управляемой системы (1.1) могут иметь разрывы первого рода.

Цель настоящей работы - найти новые достаточные условия при выполнении которых из начального положения $z_0 \notin M$ (см.(1.2)) догоняющий может гарантировать завершение преследования при любом допустимом поведении убегающего игрока за конечное время.

Пусть n — произвольная натуральное число и $M(r)$, $0 \leq r \leq \tau_n$ — произвольное компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_n} M(r)dr \subset M_1$. Пусть $v(t)$, $t \geq 0$ — допустимое управление убегающего игрока.

Рассмотрим множества [3,4]

$$\widehat{W}_i(n, M_i(n), v_i) = [M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}P] - \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}v_i, \quad (2.2)$$

$$W_i(n, M_i(n)) = \bigcap_{v_i \in Q[\tau_i, \tau_{i+1}]} \widehat{W}_i(n, M_i(n), v_i) = [M_i(n) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}P] * \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A}Q, \quad (2.3)$$

$$W_i(n) = \bigcup_{M_i(\cdot)} W_i(n, M_i(n)), \quad (2.4)$$

где $M_i(n) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} M(r)dr$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Под интегралом однозначных или многозначных функции (многозначного отображения (см. (2.2), (2.3)) понимается ее интеграл Лебега [11].

Предположение 2.1. Множества $W_i(n)$ непусты при всех n , $n \in N$, $i = 1, \dots, n$.

В силу предположения 2.1 мы можем выбрать из каждого множества $W_i(n)$ некоторый элемент $\omega_i(n)$. Зафиксируем некоторый набор $\omega = \omega(n) = \{\omega_i(n)\}_{i=1}^n$ и положим

$$\xi[n, z_0, w] = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)A} z_0 - \sum_{i=1}^n w_i(n).$$

Введем функции

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) = \\ & = \begin{cases} \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \xi[n, z_0, \omega] \in \widehat{W}_i(n, M_i(n), v_i) - w_i(n) \right\} & \text{при } \xi[n, z_0, \omega] \neq 0, \\ \tau_n^{-1} & \text{при } \xi[n, z_0, \omega] = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $v_i \in Q[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Через k обозначим следующее число

$$k = k(n, z_0, v(\cdot), \omega) = \min \left\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : \sum_{i=1}^j \tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) \geq 1 \right\}, \tag{2.6}$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то будем положить $k = n + 1$. Определим разрешающие функции [16]

$$\lambda_i(n, z_0, v_i, \omega) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) & \text{при } i = 1, 2, \dots, k - 1, \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\lambda}_j(n, z_0, v_j, \omega) & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i = k + 1, \dots, n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Введем также функцию

$$N(z_0, w) = \min \left\{ n \in N : \sum_{i=1}^n \inf_{v_i} \lambda_i(n, z_0, v_i, w) = 1 \right\}. \tag{2.8}$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n , то положим $N(z_0, w) = +\infty$.

Теорема 2.1. Если для системы (1.1) при импульсном управлении игроков (1.3) выполнено предположение 2.1, множества M_1 и P выпуклы, $N(z_0, w) < +\infty$ для начального состояния z_0 и некоторого набора w , то траектория системы (1.1) может быть приведена из начального состояния z_0 на терминальное множество M в момент $\tau_{N(z_0, w)}$.

Доказательство. Положим $N = N(z_0, \omega)$ и зафиксируем некоторый набор векторов $v_i, v_i \in Q$.

Рассмотрим вначале случай, когда $\xi[N, z_0, \omega] \neq 0$. Обозначим $\mathcal{K} = k[N, z_0, v(\cdot), \omega]$ тогда, согласно (2.6) и (2.7),

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \lambda_i(N, z_0, v_i, \omega) = 1.$$

Для $i = 1, \dots, \mathcal{K}$ будем выбирать векторы скачков u_i так, чтобы выполнялись равенства

$$m_i(N) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} [u_i - v_i] = \lambda_i(N, z_0, v(t), \omega) \xi[N, z_0, \omega] + w_i(N), \tag{2.9}$$

где $m_i(N) \in M_i(N)$.

А для $i = \mathcal{K} + 1, \dots, N$ в качестве векторов скачков u_i будем выбирать решения уравнений

$$m_i(N) + \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} [u_i - v_i] = w_i(N). \tag{2.10}$$

В силу предположения 2.1 существует одно или много решений уравнений (2.9), (2.10).

Из формулы Коши для системы (1.1) и свойств дельта-функции, получаем представление

$$\pi z(\tau_N) = \pi e^{(\tau_n - \tau_0)A} z_0 - \sum_{i=1}^N \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} [u_i - v_i]. \tag{2.11}$$

Вычтем и прибавим из правой части уравнения (2.11) величину $\sum_{i=1}^N w_i(N)$. Тогда, учитывая выпуклость множества M_1 и закон выбора управления преследователем (2.9)-(2.10), получим равенство

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_N) &= \pi e^{(\tau_n - \tau_0)A} z_0 - \sum_{i=1}^N w_i(N) - \sum_{i=1}^N \left(\pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} [u_i - v_i] - w_i(N) \right) = \\ &= \xi[N, z_0, \omega] - \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \left[\lambda_i(N, \varphi(\cdot), v_i, \omega) \xi[N, \varphi(\cdot), \omega] - m_i(N) \right] + \sum_{i=\mathcal{K}+1}^N m_i(N) = \\ &= \xi[N, z_0, \omega] \left(1 - \sum_{i=1}^{\mathcal{K}} \lambda_i(N, z_0, v_i, \omega) \right) + \sum_{i=1}^N m_i(N) \in \sum_{i=1}^N M_i(N) = \int_0^{\tau_N} M(r) dr \subset M_1, \end{aligned}$$

которое эквивалентно включению $z(\tau_N) \in M$.

Пусть теперь $\xi[N, z_0, \omega] = 0$. В качестве векторов скачков u_i для всех $i = 1, \dots, N$ будем выбирать решения уравнения (2.10).

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_N) &= \pi e^{(\tau_n - \tau_0)A} z_0 - \sum_{i=1}^N \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} [u_i - v_i] = \\ &= \pi e^{(\tau_n - \tau_0)A} z_0 - \sum_{i=1}^N w_i(N) + \sum_{i=1}^N m_i(N) \in \xi[N, z_0, \omega] + \sum_{i=1}^N M_i(N) = \int_0^{\tau_N} M(r) dr \subset M_1 \end{aligned}$$

Таким образом, в момент времени τ_N , для начального положения $z_0 \notin M$, имеет место включение $\pi z(\tau_N) \in M_1$, что равносильно включению $z(\tau_N) \in M$. Теорема 2.1 доказана. \square

3. Пример

Конфликтно управляемый процесс задается уравнением [5]

$$\dot{z} = az - u + v, \tag{3.1}$$

где a – действительное отрицательное число, $z, u, v \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что $M = lS, P = \rho S, Q = \sigma S$, где l, ρ и σ – неотрицательные числа, S – единичный шар с центром в начале координат пространства \mathbb{R}^m . Тогда $M_0 = \{0\}$ и $M_1 = lS$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m, \pi$ – тождественный (единичный) оператор. Так как $A = aE$, где E – единичная матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{at}E$.

Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с периодом Δ , т.е. $\tau_i = i\Delta$, тогда управления обоих игроков (как преследователя, так и убегающего) носят импульсный характер и имеют вид:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - i\Delta), \quad u_i \in \rho S, \quad v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - i\Delta), \quad v_i \in \sigma S. \tag{3.2}$$

Пусть n – произвольное натуральное число и $M(r) = \frac{l}{n\Delta} S, 0 \leq r \leq n\Delta, M_i(n) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} M(r) dr, i = 1, 2, \dots, n$. Согласно (2.2), (2.3), (2.4) имеем

$$\widehat{W}_i(n, M_i(n), v_i) = \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta} \rho \right) S - e^{a(n-i)\Delta} v_i,$$

$$W_i(n, M_i(n)) = \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta}\rho\right)S_* e^{a(n-i)\Delta}\sigma S.$$

В дальнейшем предполагается выполненным неравенство $\rho \geq \sigma$. Тогда

$$W_i(n) = \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta}(\rho - \sigma)\right)S.$$

Таким образом, если справедливо неравенство $\rho > \sigma$, то предположение 2.1 будет выполнено. При этом $0 \in W_i(n)$ при всех i . Положим $\omega_i(n) \equiv 0$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Далее, пусть $z_0 \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Ясно, что

$$\xi[n, z_0, \omega] = e^{an\Delta}z_0 \neq 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, имеем

$$\tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) = \sup\left\{\lambda \geq 0 : \lambda\xi \in \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta}\rho\right)S - e^{a(n-i)\Delta}v_i\right\}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) &= \\ &= \frac{1}{\|\xi\|} \left[-e^{a(n-i)\Delta}(\xi, v_i) + \sqrt{e^{2a(n-i)\Delta}(\xi, v_i)^2 + \|\xi\|^2 \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta}\rho\right)^2 - \|\xi\|^2 e^{2a(n-i)\Delta}\|v_i\|^2} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\inf_{v_i} \tilde{\lambda}_i(n, z_0, v_i, \omega) = \frac{1}{\|\xi\|} \left(\frac{l}{n} + e^{a(n-i)\Delta}(\rho - \sigma)\right), \tag{3.4}$$

причем минимум достигается при $v_i = \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|}$, для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из (2.7), (3.3), (3.4) следует, что поимка может произойти в момент $\tau_{N(z_0, \omega)}$,

$$N(z_0, \omega) = \left\lceil \frac{1}{a\Delta} \ln \left| \left(l + \frac{\rho - \sigma}{1 - e^{a\Delta}} \right) / \left(|z_0| + \frac{1}{1 - e^{a\Delta}} \right) \right| \right\rceil + 1,$$

здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x . А управления преследователей имеют вид

$$u_i = v_i + e^{-a(n-i)\Delta} \left(\tilde{\lambda}_i \xi - \frac{l}{n} \right),$$

$i = 1, \dots, N(z_0, \omega)$.

Утверждение 2.1. Пусть $\rho \leq \sigma$. Можно показать, что если $z_0 \neq 0$, то из этой точки нельзя завершить преследование. При этом убегающему игроку предлагается управление вида $v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - i\Delta)$, $v_i \in \sigma S$ с $v_i = \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|}$.

Доказательство. Если $z_0 \neq 0$, то положим $\xi = \xi[n, z_0, \omega] \neq 0$.

Предположим, что $\rho \leq \sigma$ и преследователь выбирает управление (1.3), а убегающему игроку предлагается управление вида

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - i\Delta), \quad v_i \in \sigma S, \quad v_i = \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|}.$$

Если преследователь использовал допустимое управление $u(s)$, $0 \leq s \leq n\Delta$, то для соответствующего решения уравнения (3.1) имеем

$$\begin{aligned} z(n\Delta) &= e^{an\Delta}z_0 - \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta}[u_i - v_i] = \\ &= \xi - \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} \left[u_i - \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \|z(n\Delta)\| &\geq \left\| \xi + \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|} \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} - \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} u_i \right\| \geq \\ &\geq \left\| \xi + \sigma \frac{\xi}{\|\xi\|} \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} \right\| - \left\| \rho \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} \right\| \geq \\ &\geq \|\xi\| + (\sigma - \rho) \sum_{i=1}^n e^{a(n-i)\Delta} \geq \|\xi\| > 0, \end{aligned}$$

так как $\rho \leq \sigma$. Значит, $\|z(n\Delta)\| > 0$. Это неравенство означает, что из точки $z_0 \neq 0$ нельзя завершить преследование. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968.
2. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. К задаче о преследовании в случае ограничения на импульсы управляющих сил // Дифференциальные уравнения. 1966. II(5). С. 587 – 599.
3. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. 11:1. 212-224.
4. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. 22:3. 273-282.
5. Мамадалиев Н., Хайиткулов Б.Х. Полное решение одного класса дифференциальных игр преследования с интегральными ограничениями и импульсным управлением // Известия вузов. Математика. 2022. №3. С. 28–37. <http://mi.mathnet.ru/ivm9757>
6. Абдуалимова Г.М., Мамадалиев Н.А., Тухтасинов М. Достаточные условия разрешимости задачи преследования при импульсном воздействии // Журнал Выч.мат. и мат.физики. 2023. том 63. №7. С. 1073-1083. <https://doi.org/10.31857/S0044466923070025>
7. Мустапокулов Х.Я., Мамадалиев Н.А. Построение п-стратегий в игре простого преследования-убегания с импульсным управлением // Вестник НУУЗ. 2024. 2/2.1. С. 164-175.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.
9. Максимов В.П. Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Изв. вузов. Матем. 2013. 9. 70-74.
10. Белоусов А.А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Доклады НАН Украины. 2013. №11. С. 37–42.
11. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. - М.: Наука, 1988. - 575 с.
12. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х.Я., Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестн.Удмурдск.ун-та. Матем. Мех.Компьютер.науки. 2023. Т.33. Вып.1. С. 103–118. DOI: 10.35634/vm230107
13. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992, 384 с.
14. Беллман Р., Кук К. Дифференциально - разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 254 с.
15. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

16. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.:Наука, 1977. 624 с.
17. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.:Наука, 1972. 496 с.

REZYUME

Ushbu maqolada biz impuls boshqaruvli chiziqli differensial quvish o'yinini o'rganamiz. Bunda ikkala o'yinchining boshqaruvlari impuls xarakteriga ega bo'lib, bu Dirak delta funktsiyasi yordamida ifodalanadi. Quvish masalasi uchun uchinchi usulining analogi ishlab chiqilib, masalani yechish uchun qo'llanilgan. Tadqiqot hal qiluvchi funksiya kiritish yordamida o'rganilgan.

Kalit so'zlar: quvish, quvlovchi, qochish, qochuvchi, hal etuvchi funktsiya, terminal to'plam, boshqaruv, kechikish, differentsial o'yin, impuls ta'tirli boshqaruv.

RESUME

In this paper, we study linear differential pursuit games with impulse control on the players' control, i.e. the control action of both players has an impulse character, which is expressed using the Dirac delta function. An analogue of the third method of the pursuit problem is developed and applied to solve the problem. The study is based on the main ideas of the resolving function method.

Key words: pursuit, pursuer, evasion, evader, resolution function, terminal set, control, delay, differential game, impulse control.

УДК 517.55

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА τ -ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

Манасыпова Р.З.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ НИЗАМИ, ТАШКЕНТ
rezidabadrutdinova@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследуются некоторые свойства пространства τ -замкнутых подмножеств топологических T_1 -пространств X . На семействе τ -замкнутых подмножеств вводится база аналогичная топологии Виеториса. Доказывается, что если X есть T_1 -пространство и $X_0 \subset X$, то множество $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$. Также доказывается, что если X есть T_1 -пространство, то и пространство $\exp^\tau X$ есть T_1 -пространство. Показано, что если Y есть всюду τ -плотное подмножество T_1 -пространства X , то $\exp^\tau Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\exp^\tau X$. Аналогично, что если $\exp^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\exp^\tau X$, то показано, что пространство Y всюду τ -плотно в X . Доказывается аналог теоремы Майкла для плотности T_1 -пространства, т.е., пусть X - бесконечное T_1 -пространство, то $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. Показано, что если X - бесконечное T_1 -пространство и U есть τ -открытое подмножество, тогда всякое τ -открытое подмножество в U есть τ -открытое подмножество в X .

Ключевые слова: τ -замкнутые множества, τ -открытые множества, τ -плотность, τ -замыкание, гиперпространство, топология Виеториса, пространство τ -замкнутых подмножеств.

1. Введение

Пусть X - топологическое T_1 -пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число. Множество всех замкнутых подмножеств пространства X обозначим через $\exp X$. Базой топологии Виеториса, определённой на множестве $\exp X$, является семейство множеств вида:

$$O(U_1, U_2, \dots, U_n) = \{F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, \text{ для } i = 1, \dots, n\},$$

где U_1, U_2, \dots, U_n - открытые подмножества пространства X [1].

В 1980 году I.Juhász в книге [2] ввёл определение τ -замкнутого множества.

Определение 1 [2]. Подмножество $F \subset X$ называется τ -замкнутым в топологическом пространстве X , если для каждого подмножества $B \subset F$ такого, что мощность подмножества B не превосходит бесконечного кардинального числа τ , замыкание множества B в X лежит в F .

В 2016 году О.Г.Окуневым было введено следующее понятие τ -замыкания подмножества.

Определение 2 [3]. τ -замыканием подмножества A топологического пространства X называется множество вида

$$[A]_\tau = \bigcup \{\bar{B} : B \subset A, |B| \leq \tau\}$$

Множество называется τ -плотным, если его τ -замыкание совпадает со всем пространством X .

В 2023 году в работе [4] авторами D.N.Georgiou, N.K.Mamadaliyev, R.M.Zhugaev было введено определение τ -открытого подмножества и установлена связь между τ -открытыми, τ -замкнутыми подмножествами и τ -непрерывными отображениями, которые были введены А.В.Архангельским в 1983 году [5].

В 2023 году в работе [6] Р.Б.Бешимов, Н.К.Мамадалиев и Р.З.Манасыпова изучили некоторые свойства τ -замкнутых, τ -открытых подмножеств, свойства τ -замыкания, τ -внутренности и τ -границы множеств. Были приведены примеры топологических пространств, в которых демонстрируются схожесть и

различия между τ -замыканием, τ -внутренностью, τ -границей подмножеств и замыканием, внутренностью, границей подмножеств соответственно.

В работе [7] была расширена теория τ -замкнутых подмножеств и введено определение некоторых кардинальных инвариантов, в частности, τ -плотности и τ -числа Суслина. Также были приведены примеры топологических пространств, в которых показывается разница между τ -плотностью и плотностью, а также τ -числом Суслина и числом Суслина.

Для топологического пространства X τ -плотностью определяется наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A есть τ -плотное подмножество X , т.е., $d^\tau(X) = \min\{|A|; A \text{ есть } \tau\text{-плотное подмножество } X\}$.

В работе [8] было введено определение τ -базы и системы τ -окрестностей топологического пространства, а также были изучены их свойства. Было построено пространство τ -непрерывных отображений и было доказано, что оно является T_i -пространством когда образ τ -непрерывных отображений является T_i -пространством при $i = 0, 1, 2, 3$.

В данной статье вводится понятие пространства τ -замкнутых подмножеств и исследуются его некоторые топологические и кардинальные свойства.

2. Основные результаты

Пусть X - топологическое T_1 -пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число. Через $\text{exp}^\tau X$ обозначим семейство всех τ -замкнутых подмножеств пространства X .

В работе В.В.Федорчука и В.В.Филиппова доказаны следующие утверждения:

Теорема 1 [1]. Пусть X есть T_1 -пространство и $X_0 \subset X$. Тогда множество $\{F : F \in \text{exp} X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\text{exp} X$.

Теорема 2 [1]. Если X есть T_1 -пространство, то и пространство $\text{exp} X$ есть T_1 -пространство.

Теорема 3 [1]. Если Y есть всюду плотное подмножество пространства X , то $\text{exp} Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\text{exp} X$.

Напомним определение базы топологического пространства.

Определение 2 [9]. Семейство открытых подмножеств называется базой топологического пространства X , если каждое непустое открытое подмножество пространства X можно представить в виде объединения некоторого подсемейства семейства B .

Всякая база обладает следующими свойствами:

- 1) Для любого $x \in X$ существует элемент $U \in B$, такой, что $x \in U$.
- 2) Для любых U_1, U_2 из B и любой точки x из $U_1 \cap U_2$ существует элемент $U \in B$ такой, что $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Пусть U_1, \dots, U_n есть τ -открытые подмножества пространства X .

Теорема 4. Семейства множеств вида

$$O \langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ F : F \in \text{exp}^\tau X, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, \text{ для всякого } i = \overline{1, n} \right\}$$

образуют базу некоторой топологии на множестве $\text{exp}^\tau X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы проверим вышеупомянутое семейство на свойства базы:

1) Для произвольного элемента F из множества $\text{exp}^\tau X$ выберем в качестве U само пространство X . Тогда $O \langle X \rangle = \{E : E \subset X, E \cap X \neq \emptyset\}$. Поскольку всякий элемент F из множества $\text{exp}^\tau X$ удовлетворяет этому условию, то $O \langle X \rangle = \text{exp}^\tau X$. Следовательно, первое условие выполняется.

2) Для всякого элемента F из пересечения $O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap O \langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle$ верно равенство:

$$O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap O \langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle = \left\{ F : F \in \text{exp}^\tau X, F \subset \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^k V_j \right), \right.$$

$$\left. F \cap U_i \neq \emptyset, F \cap V_j \neq \emptyset \right\}$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, k$. Через W_{ij} обозначим τ -открытое множество такое, что $W_{ij} = U_i \cap V_j$, $F \cap (U_i \cap V_j) \neq \emptyset$, $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ и $F \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Пронумеруем все такие W_{ij} и получим конечное семейство τ -открытых множеств W_1, W_2, \dots, W_m . Выберем произвольный элемент Φ из семейства $O \langle W_1, W_2, \dots, W_m \rangle$. Тогда, во-первых, Φ пересекается со всяким W_{ij} , а во-вторых, Φ лежит в объединении $\bigcup_{i,j=1}^{n,k} W_{ij}$, что эквивалентно следующему: $\Phi \cap (U_i \cap V_j) \neq \emptyset$ и $\Phi \subset \bigcup_{i,j=1}^{n,k} (U_i \cap V_j) = \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^k V_j \right)$. Следовательно, Φ принадлежит также пересечению $O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap O \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$. Из произвольности выбора Φ следует, что $O \langle W_1, W_2, \dots, W_m \rangle \subset O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap O \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$. В частности, $F \in O \langle W_1, W_2, \dots, W_m \rangle \subset O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap O \langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть X есть T_1 -пространство и $X_0 \subset X$. Тогда множество $\{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\text{exp}^\tau X$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда X_0 является одноточечным множеством. Тогда семейство $\{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \subset F\} = \{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \cap F \neq \emptyset\}$. Следовательно, $\text{exp}^\tau X \setminus \{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \cap F \neq \emptyset\}$ совпадает с семейством $\{F' : F' \in \text{exp}^\tau X, X_0 \cap F' = \emptyset\}$ и, значит, F' лежит в дополнении множества X_0 . Обозначим через U множество $X \setminus X_0$. Тогда $O \langle U \rangle = \{F' : F' \in \text{exp}^\tau X, F' \cap (X \setminus X_0) \neq \emptyset\}$. Отсюда вытекает, что семейство $\{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \cap F \neq \emptyset\}$ является замкнутым в пространстве $\text{exp}^\tau X$.

2) Для произвольного $X_0 \subset X$ справедливо равенство $\{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \subset F\} = \bigcap_{x \in X_0} \{F : F \in \text{exp}^\tau X, x \in F\}$. Как было доказано ранее, множество вида $\{F : F \in \text{exp}^\tau X, x \in F\}$ замкнуто в $\text{exp}^\tau X$, а значит и произвольное пересечение $\bigcap_{x \in X_0} \{F : F \in \text{exp}^\tau X, X_0 \cap F \neq \emptyset\}$ также замкнуто в $\text{exp}^\tau X$ как пересечение замкнутых подмножеств. Теорема 5 доказана.

Утверждение 1. Если Y есть всюду τ -плотное подмножество T_1 -пространства X , то $\text{exp}^\tau Y$ является всюду плотным подмножеством пространства $\text{exp}^\tau X$.

Доказательство. Пусть $O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ есть произвольное непустое τ -открытое подмножество пространства $\text{exp}^\tau X$. Так как Y является всюду τ -плотным подмножеством пространства X , то $U_i \cap Y$ не пусто для всякого $i = 1, 2, \dots, n$. Выберем по точке $x_i \in U_i \cap Y$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и положим $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Тогда $F \in O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \cap \text{exp}^\tau Y$. Из произвольности выбора $O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ следует, что $\text{exp}^\tau Y$ всюду плотно в пространстве $\text{exp}^\tau(X)$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Если $\text{exp}^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\text{exp}^\tau X$, то пространство Y всюду τ -плотно в X .

Доказательство. Выберем произвольное τ -открытое подмножество U топологического пространства X , где U_1, U_2, \dots, U_n есть τ -открытые подмножества пространства X . Тогда $O \langle U \rangle$ есть открытое подмножество пространства $\text{exp}^\tau X$. Так как $\text{exp}^\tau Y$ всюду плотно лежит в пространстве $\text{exp}^\tau X$, то $O \langle U \rangle \cap \text{exp}^\tau Y$ не пусто. Пусть F - не пусто и принадлежит $O \langle U \rangle \cap \text{exp}^\tau Y$. Тогда $F \subset U$ и $F \subset Y$. Значит, $U \cap Y$ не пусто и пространство Y всюду τ -плотно в X . Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть X есть топологическое T_1 -пространство. Тогда пространство $\text{exp} X$ есть всюду плотное подмножество пространства $\text{exp}^\tau X$.

Доказательство. Выберем произвольное открытое подмножество $O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$ пространства $\text{exp}^\tau X$. Положим, что $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где $x_i \in U_i$ для всякого $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим пересечение $\text{exp} X \cap O \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Оно не пусто, поскольку содержит в себе элемент B . Следовательно, $\text{exp} X$ есть всюду плотное подмножество пространства $\text{exp}^\tau X$. Утверждение 3 доказано.

В работе [10] доказана следующая теорема:

Теорема 7 [10]. Пусть X - бесконечное T_1 -пространство. Тогда $d(X) = d(\text{exp} X)$. Сейчас мы докажем аналогичную теорему для τ -плотности и пространства τ -замкнутых подмножеств.

Теорема 8. Пусть X - бесконечное T_1 -пространство. Тогда $d^\tau(X) \leq d^\tau(\text{exp}^\tau X)$.

Доказательство. Пусть $d^\tau(\text{exp}^\tau X) = \kappa \geq \aleph_0$. Тогда существует такое семейство $\mu = \{E_\alpha : \alpha \in A, |A| = \kappa\}$, τ -замыкание которого совпадает со всем пространством $\text{exp}^\tau X$. Из каждого множества $E_\alpha \in \mu$ выбираем по точке $a_\alpha \in E_\alpha$, $\alpha \in A$. Положим $B = \{a_\alpha : \alpha \in A\}$. Ясно, что $|B| = |\mu| = \kappa$. Покажем,

что B является всюду τ -плотным в X . Пусть U - непустое τ -открытое подмножество пространства X . Рассмотрим открытое множество $O\langle U \rangle$ в $\exp^\tau X$. Так как μ - всюду τ -плотно в $\exp^\tau X$, то существует такое $E_\alpha \in \mu$, что $E_\alpha \in O\langle U \rangle$. По условию мы выбрали точку $a_\alpha \in E_\alpha \subset U$. Значит, $d^\tau(X) \leq \kappa$. Теорема 8 доказана.

Пусть A - произвольное подмножество топологического пространства X . Через $\exp^\tau(A, X)$ будем обозначать семейство всех непустых подмножеств множества A , которые τ -замкнуты в пространстве X , то есть,

$$\exp^\tau(A, X) = \{F : F \text{ является } \tau\text{-замкнутым в } X \text{ и } F \subset A\}.$$

Утверждение 6. Если X_0 есть τ -замкнутое подмножество пространства X , то $\exp^\tau(X_0, X)$ есть замкнутое подмножество пространства $\exp^\tau X$.

Доказательство. Рассмотрим дополнение множества $\exp^\tau(X_0, X)$. Оно состоит из τ -замкнутых подмножеств F пространства X , которые имеют непустое пересечение с множеством $X \setminus X_0$, то есть,

$$\exp^\tau X \setminus \exp^\tau(X_0, X) = \{F : F \text{ является } \tau\text{-замкнутым в } X \text{ и } F \cap (X \setminus X_0) \neq \emptyset\}.$$

По условию X_0 есть τ -замкнутое подмножество в X , значит его дополнение $U = X \setminus X_0$ есть τ -открытое подмножество пространства X . Тогда $\exp^\tau X \setminus \exp^\tau(X_0, X)$ совпадает с открытым множеством $O\langle U \rangle$. Следовательно, множество $\exp^\tau(X_0, X)$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$. Утверждение 6 доказано.

Теорема 9. Пусть множество X_0 лежит в T_1 -пространстве X . Тогда имеет место равенство:

$$\exp^\tau([X_0]_\tau, X) = [\exp^\tau(X_0, X)]_\tau.$$

Доказательство. Согласно утверждению 6 множество $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$ замкнуто в пространстве $\exp^\tau X$, а значит, и τ -замкнуто. Следовательно, $[\exp^\tau(X_0, X)]_\tau \subset \exp^\tau([X_0]_\tau, X)$.

Докажем обратное включение: что $\exp^\tau(X_0, X)$ является подмножеством $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$. Выберем произвольный элемент F из $\exp^\tau(X_0, X)$, то есть, такое τ -замкнутое подмножество F , которое лежит в X_0 . Из определения τ -замыкания множества следует, что $X_0 \subset [X_0]_\tau$ и $F \subset [X_0]_\tau$. Значит, F принадлежит $\exp^\tau([X_0]_\tau, X)$ и $\exp^\tau(X_0, X) \subset \exp^\tau([X_0]_\tau, X)$. По свойству оператора τ -замыкания $[\exp^\tau(X_0, X)]_\tau \subset [\exp^\tau([X_0]_\tau, X)]_\tau$. Теорема 9 доказана.

Литература

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В., Общая топология: Основные конструкции, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2006, 117.
2. I.Juhász, Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980, 13-14.
3. Okunev O., The minitightness of products, Topology and its Applications 208 (2016), 10-16.
4. Georgiou, N. K. Mamadaliyev, R. M. Zhuraev, A Note on Functional Tightness and Minitightness of Space of the G -Permutation Degree, Comment. Math. Univ. Carolin., 2023.
5. Arhangel'skii A.V., Functional tightness, Q -spaces, and τ -embeddings, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 24(1) (1983) 105-119.
6. Бешимов Р. Б., Мамадалиев Н. К., Манасыпова Р. З., О некоторых свойствах τ -границы множества, Вестник НУУз, 2023, 176-183.
7. Beshimov R.B., D.N.Georgiou, R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, F.Sereti, Some topological properties of e -space and description of τ -closed sets, Filomat 39:8 (2025), 2625-2637, <https://doi.org/10.2298/FIL2508625B>.
8. Beshimov R.B., R.M.Juraev, R.Z.Manasipova, On τ -base and e -density of topological spaces, Filomat 39:10 (2025), 3353-3358 <https://doi.org/10.2298/FIL2510353B>
9. Энгелькинг Р., Общая топология, Москва, МИР, 1986, 33-34.

10. Michael, E. , Topologies on spaces of subsets, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 71 (1951), pp. 152-182.

REZYUME

Ushbu maqolada X topologik T_1 -fazolarining τ -yopiq qism to'plamlari fazosining ba'zi xossalari o'rganiladi. τ -yopiq qism to'plamlar oilasiga Vietoris topologiyasiga o'xshash baza kiritiladi. Agar X fazo T_1 -fazo va $X_0 \subset X$ bo'lsa, u holda $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ to'plam $\exp^\tau X$ fazoda yopiq. Shuningdek, agar X fazo T_1 -fazo bo'lsa, u holda $\exp^\tau X$ fazosi ham T_1 -fazo bo'lishi isbotlanadi. Agar Y fazo X T_1 -fazoning zich qism to'plami bo'lsa, u holda $\exp^\tau Y \exp^\tau X$ fazoning zich qism to'plami bo'ladi. Xuddi shunday, agar $\exp^\tau Y \exp^\tau X$ fazoda barcha nuqtalarda zich joylashgan bo'lsa, u holda Y fazo barcha nuqtalarda τ X da zich joylashganligi ko'rsatilgan. T_1 -fazoning zichligi uchun Maykl teoremasining analogi isbotlanadi, ya'ni X cheksiz T_1 -fazo bo'lsin, u holda $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. Agar X cheksiz T_1 -fazo va U τ -ochiq qism to'plam bo'lsa, u holda U dagi har qanday τ -ochiq qism to'plam X dagi τ -ochiq qism to'plam bo'lishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: τ -yopiq to'plamlar, τ -ochiq to'plamlar, τ -zichlik, τ -yopilma, giperfazo, Vietoris topologiyasi, τ -yopiq qism to'plamlar fazosi.

RESUME

This article investigates some properties of the space of τ -closed subsets of topological T_1 -spaces X . In the family of τ -closed subsets, a base similar to the Vietoris topology is introduced. It is proven that if X is a T_1 -space and $X_0 \subset X$, then the set $\{F : F \in \exp^\tau X, X_0 \subset F\}$ is closed in the space $\exp^\tau X$. It is also proven that if X is a T_1 -space, then the space $\exp^\tau X$ is also a T_1 -space. It is shown that if Y is the everywhere τ -dense subset T_1 of the X space, then $\exp^\tau Y$ is the everywhere $\exp^\tau X$ space. Similarly, if $\exp^\tau Y$ is everywhere dense in the space $\exp^\tau X$, then it is shown that the space Y is everywhere τ -dense in X . The analogy of Michael's theorem for the density of the T_1 -space is proven, i.e., let X be an infinite T_1 -space, then $d^\tau(X) \leq d^\tau(\exp^\tau X)$. It is shown that if X is an infinite T_1 -space and U is a τ -open subset, then any τ -open subset in U is a τ -open subset in X .

Key words: τ -closed sets, τ -open sets, τ -density, τ -closure, hyperspace, Vietorice topology, space of τ -closed subsets.

УДК 517.918

**О СВОЙСТВАХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА, АССОЦИИРОВАННЫЙ С ОБОБЩЕННОЙ
МОДЕЛИ ФРИДРИХСА НА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОМ РЕШЕТКЕ**

НЕЪМАТОВА Ш. Б.

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, УЗБЕКИСТАН
s.b.nematova@buxdu.uz

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматривается обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$, который соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Приведены необходимые и достаточные условия для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией, где $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то установлено положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1 \varepsilon_h(k)I$ для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ и приведена двусторонняя оценка для определителя Фредгольма, где $\varepsilon_h(\cdot)$ – функция дисперсии специального вида и $l_1 > 0$. В случае, когда оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, получен разложение для определителя Фредгольма.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, функция дисперсии, нецелочисленная решетка, резонанс с нулевой энергией, определитель Фредгольма, положительный оператор.

Введение. Во многих задачах анализа, математической физики и теории вероятностей возникают операторы, носящие название операторов Фридрихса [1] и обобщенных операторов Фридрихса [2]. Обобщенная модель Фридрихса вида операторной матрицы второго порядка впервые была введена в работе [2]. В этой работе доказано конечность дискретного спектра обобщенной модели Фридрихса в одномерном случае. Подробно изучены характер ветвления и особенности определителя Фредгольма в окрестностях "особых точек" непрерывного спектра. Доказано, что при изменении ядра оператора его собственные значения исчезают "поглощаясь" непрерывным спектром или появляются "испускаясь" из непрерывного спектра, при этом поглощаясь непрерывным спектром собственные значения превращаются в резонансы. Эта модель рассмотрена также в ряде других работ, из которых мы упомянем статью [3], статью [4] – в ней результаты, полученные для обобщенной модели Фридрихса, применяются к проблемам случайного блуждания частицы в случайной среде, а также работу [5], в которой исследованы так называемые связанные состояния для определенного семейства обобщенных моделей Фридрихса.

В работе [6] рассматривается самосопряженный случай и построена резольвента обобщенной модели Фридрихса, доказано существование (и полнота) волновых операторов и с их помощью найдены обобщенные собственные векторы непрерывного спектра (вторые компоненты которых являются элементами некоторого явно описанного пространства обобщенных функций).

В настоящей работе обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$ рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в двухчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Этот модель соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Получены следующие результаты:

- найдены необходимые и достаточные условия для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией, где $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$;
- установлено положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1 \varepsilon_h(k)I$ для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ и приведена двусторонняя оценка для определителя Фредгольма, если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, где $\varepsilon_h(\cdot)$ – функция дисперсии специального вида и $l_1 > 0$.
- получен разложение для определителя Фредгольма, в случае, когда оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией.

Следующие два раздела посвящены формулировке и строгому математическому доказательству этих результатов.

Обобщенная модель Фридрикса и его спектр. В данном разделе представлена постановка задачи, определение обобщенной модели Фридрикса и описание ее спектра. Для начала давайте введем основные обозначения. Пусть \mathbb{C} , \mathbb{R} и \mathbb{Z} есть множество всех комплексных, вещественных и целых чисел, соответственно. Для каждого фиксированного $h > 0$ через \mathbb{T}_h^3 обозначим куб $(-\pi/h; \pi/h]^3$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всяду в работе \mathbb{T}_h^3 рассматривается как абелева группа в котором операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в \mathbb{R}^3 по модулю $((2\pi/h)\mathbb{Z})^3$. По строению множества \mathbb{T}_h^3 видно, что для любого $A \subset \mathbb{R}^3$ существует $h = h(A) > 0$ такое, что $A \subset \mathbb{T}_h^3$, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{T}_h^3 = \mathbb{R}^3$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на \mathbb{T}_h^3 . Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^3)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пространства \mathcal{H}_0 , и \mathcal{H}_1 называются нульчастичной и одночастичной подпространства фоковского пространства $F(L_2(\mathbb{T}_h^3))$ по $L_2(\mathbb{T}_h^3)$, соответственно, где

$$F(L_2(\mathbb{T}_h^3)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}_h^3) \oplus L_2((\mathbb{T}_h^3)^2) \oplus \dots \oplus L_2((\mathbb{T}_h^3)^n) \oplus \dots$$

Гильбертово пространство \mathcal{H} обычно называют обрезанной двухчастичной подпространства пространства Фока.

Элемент f пространства \mathcal{H} является вектор-функцией вида $f = (f_0, f_1)$, где $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f_1 \in \mathcal{H}_1$. Для удобства напомним норму элемента в пространстве \mathcal{H} и скалярное произведение элементов. Норма элемента $f \in \mathcal{H}$ определяется формулой

$$\|f\| = \left(|f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}_h^3} |f_1(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

А скалярное произведение двух элементов $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1) \in \mathcal{H}$ определяется как

$$(f, g) = f_0 \cdot \overline{g_0} + \int_{\mathbb{T}_h^3} f_1(t) \overline{g_1(t)} dt.$$

При каждом фиксированном $h > 0$ введем семейства обобщенных моделей Фридрикса $\mathcal{A}_h(k), k \in \mathbb{T}_h^3$, действующую в \mathcal{H} по правилу

$$\mathcal{A}_h(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(h; k) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h; k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h; k) : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i, i = 0, 1$ и $A_{01}(h) : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ определяются по правилам

$$A_{00}(h; k)f_0 = (l_2\varepsilon_h(k) + 1)f_0, \quad A_{01}(h)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{T}_h^3} v_h(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h; k)f_1)(p) = E_h(k; p)f_1(p), \quad E_h(k; p) := l_1\varepsilon_h(p) + l_2\varepsilon_h(k - p).$$

Здесь l_1, l_2 - вещественные положительные числа, при каждом фиксированном $h > 0$ функция $v_h(\cdot)$ вещественнозначная ограниченная функция на \mathbb{T}_h^3 , а так называемая функция дисперсии $\varepsilon_h(\cdot)$ имеет вид:

$$\varepsilon_h(k) := \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(hk_i)), \quad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}_h^3.$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}_h(k)$ ограничен и самосопряжен в \mathcal{H} .

Следует отметить, что в современной математической физике оператор $A_{01}(h)$ называется оператором уничтожения, а его сопряженный оператор $A_{01}^*(h)$ - оператором рождения. Используя соответствующие определения из курса функционального анализа и свойства пространства \mathcal{H} , устанавливаем, что сопряженный оператор $A_{01}^*(h)$ имеет вид

$$(A_{01}^*(h)f_0)(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}v_h(p)f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0.$$

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора. Напомним, что множество всех конечнократных изолированных собственных значений ограниченного и самосопряженного оператора B в гильбертовом пространстве \mathcal{H} называется его дискретным спектром. Множество $\sigma(B) \setminus \sigma_{\text{disc}}(B)$ называется его существенным спектром. В этом случае остаточный спектр оператора B является пустым множеством. Очевидно, что $\sigma(B) = \sigma_{\text{ess}}(B) \sqcup \sigma_{\text{disc}}(B)$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_h^0(k)$, $k \in \mathbb{T}_h^3$ действует в \mathcal{H} как

$$\mathcal{A}_h^0(k) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(k) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $\mathcal{A}_h(k) - \mathcal{A}_h^0(k)$ оператора $\mathcal{A}_h^0(k)$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_h(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{A}_h^0(k)$. Очевидно, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h^0(k)) = [m_h(k); M_h(k)]$, где числа $m_h(k)$ и $M_h(k)$ определяются следующим образом:

$$m_h(k) := \min_{p \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; p), \quad M_h(k) := \max_{p \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; p).$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(k)) = [m_h(k); M_h(k)]$.

В частности $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(\mathbf{0})) = [0; 3/h^2]$, где $\mathbf{0} := (0, 0, 0) \in \mathbb{T}_h^3$.

Далее вычислим $m_h(k)$ и $M_h(k)$. Для этого найдем точку минимума функции $E_h(\cdot; \cdot)$ и перепишем его в виде

$$E_h(k; p) = \frac{3(l_1 + l_2)}{h^2} - \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 [a_h(k_j) \cos(hp_j) + b_h(k_j) \sin(hp_j)], \tag{17}$$

где коэффициенты $a_h(k_j)$ и $b_h(k_j)$ определены по равенствами

$$a_h(k_j) := l_1 + l_2 \cos(hk_j), \quad b_h(k_j) := l_2 \sin(hk_j). \tag{18}$$

Тогда из равенства (17) имеем следующий представление для $E_h(\cdot; \cdot)$:

$$E_h(k; p) = \frac{3(l_1 + l_2)}{h^2} - \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 r_h(k_j) \cos(h(p_j - p_h^{(0)}(k_j))), \tag{19}$$

где

$$r_h(k_j) := \sqrt{a_h^2(k_j) + b_h^2(k_j)}, \quad p_h^{(0)}(k_j) := \arcsin \frac{b_h(k_j)}{r_h(k_j)}, \quad k_j \in \left(-\frac{\pi}{h}; \frac{\pi}{h}\right].$$

Учитывая равенства (18) получим, что вектор-функция

$$p_h^{(0)} : \mathbb{T}_h^3 \rightarrow \mathbb{T}_h^3, \quad p_h^{(0)}(k) = p_h^{(0)}(k_1, k_2, k_3) = (p_h^{(0)}(k_1), p_h^{(0)}(k_2), p_h^{(0)}(k_3)) \in \mathbb{T}_h^3$$

является нечетной регулярной функцией и для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ точка $p_h^{(0)}(k)$ является точкой минимума для функции $E_h(\cdot; \cdot)$. Из определения видно, что

$$p_h^{(0)}(k) = \frac{hl_2}{l_1 + l_2} k + O(k^3)$$

при $k \rightarrow \mathbf{0}$. Простые вычисления показывают, что

$$m_h(k) = \frac{l_1 l_2}{2(l_1 + l_2)} k^2 + O(|k|^4), \quad k \rightarrow \mathbf{0}. \tag{20}$$

Очевидно что в точке $p = p_h^{(0)}(k)$ функция $E_h(k; p)$ имеет минимума:

$$m_h(k) := \min_{p \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; p) = \frac{3(l_1 + l_2)}{h^2} - \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 r_h(k_j),$$

а в точке $\pi + p_h^{(0)}(k)$ имеет максимум:

$$M_h(k) := \max_{p \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; p) = \frac{3(l_1 + l_2)}{h^2} + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 r_h(k_j).$$

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}_h^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(k))$ функцию (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_h(k)$)

$$\Delta_h(k; z) := l_2 \varepsilon_h(k) + 1 - z - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t) dt}{E_h(k; t) - z}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора $\mathcal{A}_h(k)$ и нулями функции $\Delta_h(k; \cdot)$. Эта лемма является прямым следствием принципа Бирмана-Швунгера и теоремы Фредгольма.

Лемма 1. *При каждом фиксированном $h > 0$ и $k \in \mathbb{T}_h^3$ число $z_h(k) \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_h(k))$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_h(k; z_h(k)) = 0$.*

Основные свойства определителя Фредгольма $\Delta_h(k; \cdot)$.

Далее, на протяжении всей работы будут предполагаться, что функция $|v_h(\cdot)|$ является четной по каждой переменной в отдельности и все частные производные второго порядка функции $v_h(\cdot)$ непрерывны в \mathbb{T}_h^3 .

Через $C(\mathbb{T}_h^3)$ (соот. $L_1(\mathbb{T}_h^3)$) обозначим банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на \mathbb{T}_h^3 .

Определение 1. *Говорят, что оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, если число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора*

$$(G_h \psi)(p) = \frac{v_h(p)}{2(l_1 + l_2)} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h(t) \psi(t) dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathbb{T}_h^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(\mathbf{0}) \neq 0$. Если число $\lambda = 1$ не является собственным значением оператора G_h , то число $z = 0$ называется регулярной точкой оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$.

Известно, что при каждом фиксированном $h > 0$ функция $E_h(\mathbf{0}; \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум равный нулю в точке $\mathbf{0} \in \mathbb{T}_h^3$ и при всех $k \in \mathbb{T}_h^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ функция $E_h(k; \cdot)$ положителен в \mathbb{T}_h^3 . Поэтому из непрерывности функции $v_h(\cdot)$ в \mathbb{T}_h^3 следует, что при всех $k \in \mathbb{T}_h^3$ существует конечный положительный интеграл

$$\int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t) dt}{E_h(k; t)}.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что

$$\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = \lim_{k \rightarrow \mathbf{0}} \Delta_h(k; 0).$$

Для $\delta > 0$ положим

$$U_\delta(\mathbf{0}) := \{q \in \mathbb{T}_h^3 : |q| < \delta\}.$$

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того чтобы, либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией.

Теорема 1. а) *Оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) = 0$;*

б) *Оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) \neq 0$.*

Для доказательства теоремы 1 см. [9].

Теорема 2. *Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ оператор $\mathcal{A}_h(-k) + l_1 \varepsilon_h(k) I$ не имеет отрицательных собственных значений. Здесь I — единичный оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .*

Доказательства. Сначала мы находим вид определителя Фредгольма, соответствующего оператору $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$:

$$\Delta_h(-k; z - l_1\varepsilon_h(k)) := l_1\varepsilon_h(k) + l_2\varepsilon_h(-k) + 1 - z - \frac{1}{2}I(k; z).$$

здесь

$$I(k; z) := \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t)dt}{\omega_h(k, t) - z},$$

$$\omega_h(k, t) := l_1\varepsilon_h(k) + l_2\varepsilon_h(k + t) + l_1\varepsilon_h(t)$$

По определению, для каждого $k \in \mathbb{T}_h^3$ функция $\omega_h(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках множества \mathbb{T}_h^3 .

$$\min_{k, t \in \mathbb{T}_h^3} \omega_h(k, t) = 0, \quad h > 0.$$

Кроме этого имеет место равенство

$$\omega_0(k, t) = \omega_h(k, t).$$

Теперь мы докажем, что неравенство $\Delta_h(-k; -l_1\varepsilon_h(k)) > \Delta_h(\mathbf{0}; 0)$ выполняется для любого ненулевого значения $k \in \mathbb{T}_h^3$. Поскольку $\omega_0(\cdot, \cdot)$ и $v_h(\cdot)$ четна, функция $I(\cdot; 0)$ также четна. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} I(k; 0) - I(\mathbf{0}; 0) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{2\omega_0(\mathbf{0}, t) - (\omega_0(k, t) + \omega_0(-k, t))}{\omega_0(k, t)\omega_0(-k, t)\omega_0(\mathbf{0}, t)} \times \\ &\times [\omega_0(k, t) + \omega_0(-k, t)]v_h^2(t)dt - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{(\omega_0(k, t) - \omega_0(-k, t))^2}{\omega_0(k, t)\omega_0(-k, t)\omega_0(\mathbf{0}, t)} v_h^2(t)dt. \end{aligned} \tag{21}$$

Из равенства

$$\omega_0(\mathbf{0}, t) - \frac{\omega_0(k, t) + \omega_0(-k, t)}{2} = \sum_{i=1}^3 (\cos(hk_i - 1))(\cos(hk_i + 1))$$

и (21) получаем неравенство $I(k; 0) < I(\mathbf{0}; 0)$ для всех ненулевых $k \in \mathbb{T}_h^3$, то есть функция $I(\cdot; 0)$ имеет глобальный максимум.

Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо нулевое собственное значение, то по теореме 1 мы имеем $\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$. Следовательно, по неравенству

$$\Delta_h(-k; z - l_1\varepsilon_h(k)) > \Delta_h(-k; z - l_1\varepsilon_h(k)) \geq \min_{k \in \mathbb{T}_h^3} \Delta_h(-k; z - l_1\varepsilon_h(k)) = \Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$$

мы имеем $\Delta_h(-k; z - l_1\varepsilon_h(k)) > 0$ для всех $k \in \mathbb{T}_h^3$ и $z > 0$. Согласно лемме 1 оператор $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I, k \in \mathbb{T}_h^3$ не имеет отрицательных собственных значений, то есть для любого $k \in \mathbb{T}_h^3$ оператор $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ является положительным. Теорема 2 доказана.

Следующее разложение играет важную роль при изучении асимптотики дискретного спектра соответствующий 3×3 операторной матрицы.

Теорема 3. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией, то имеет место представление

$$\Delta_h(k; z) = \frac{2\sqrt{2}\pi^2 v_h^2(\mathbf{0})}{(l_1 + l_2)^{3/2}} [m_h(k) - z]^{\frac{1}{2}} + \Delta_h^{(1)}(m_h(k) - z) + \Delta_h^{(2)}(k; z),$$

где $\Delta_h^{(1)}(m_h(k) - z) = O(m_h(k) - z)$ при $z \rightarrow m_h(k)$ и $\Delta_h^{(2)}(k; z) = O(k^2)$ при $k \rightarrow \mathbf{0}$ равномерно по $z \leq m_h(k)$.

Доказательство. Дадим основную идею доказательства. Введем вспомогательную функцию $E_h(\cdot, \cdot)$ определенную в \mathbb{T}_h^3 по правилу

$$E_h(k, p) := E_h(p + p_h^{(0)}(k)) - m_h(k),$$

где точка $p_h^{(0)}(k)$ является точкой минимума для функции $E_h(\cdot; \cdot)$, т.е. $m_h(k) = E_h(p_h^{(0)}(k))$. Тогда используя равенство (19) имеем, что

$$E_h(k, p) = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 r_h(k_j) \left[1 - \cos(h(p_j - p_h^{(0)}(k_j))) \right].$$

Пусть

$$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Определим функции $\tilde{\Delta}_h(\cdot; \cdot)$ в $\mathbb{T}_h^3 \times \mathbb{C}_+$ по формуле $\tilde{\Delta}_h(k; \zeta) := \Delta_h(k; m_h(k) - \zeta^2)$. Тогда функции $\tilde{\Delta}_h(\cdot; \cdot)$ можно записать как

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h(k; \zeta) &= l_2 \varepsilon(k) + 1 - m_h(k) + \zeta^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t) dt}{E_k(t) - m_h(k) + \zeta^2} = \\ &= l_2 \varepsilon_h(k) + 1 - m_h(k) + \zeta^2 - \frac{h^2}{2} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t + p_h^{(0)}(k)) dt}{\sum_{j=1}^3 r_h(k_j) (1 - \cos(h(t_j - p_h^{(0)}(k_j)))) + \zeta^2}. \end{aligned}$$

Далее, следуя схеме доказательства леммы 3.5 из работы [7] и используя асимптотику (20), а также $\varepsilon_h(k) = O(k^2)$ при $k \rightarrow \mathbf{0}$, можно показать, что

$$\tilde{\Delta}_h(k; \zeta) = \tilde{\Delta}_h(\mathbf{0}; 0) + \frac{2\sqrt{2}\pi^2 v_h^2(\mathbf{0})}{(l_1 + l_2)^{3/2}} \zeta + \tilde{\Delta}_h^{(1)}(\zeta) + \tilde{\Delta}_h^{(2)}(k; \zeta), \tag{22}$$

где $\tilde{\Delta}_h^{(1)}(\zeta) = O(\zeta^2)$ при $\zeta \rightarrow 0$ и $\tilde{\Delta}_h^{(2)}(k; \zeta) = O(k^2)$ при $k \rightarrow \mathbf{0}$ равномерно по $z \in \mathbb{R}_+$.

Пусть оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда в силу утверждение б) теоремы 1 имеем $\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$ и $v_h(\mathbf{0}) \neq 0$. Теперь учитывая равенство $\Delta_h(k; z) = \tilde{\Delta}_h(k; \sqrt{m_h(k) - z})$ и асимптотику $\varepsilon_h(k) = O(k^2)$ при $k \rightarrow \mathbf{0}$, из разложения (22) получим доказательство теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $h > 0$. Если оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение, то существуют $C_1(h), C_2(h), C_3(h) > 0$ и $\delta(h) > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:

- а) $C_1(h)k^2 \leq \Delta_h(k; -l_1 \varepsilon(k)) \leq C_2(h)k^2, p \in U_{\delta(h)}(\mathbf{0});$
- б) $\Delta_h(k; -l_1 \varepsilon(k)) \geq C_3(h), k \notin U_{\delta(h)}(\mathbf{0}).$

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имеет нулевое собственное значение. Тогда в силу утверждение а) теоремы 1 имеет место равенство $v_h(\mathbf{0}) = 0$. По определению функции $\Delta_h(\cdot; \cdot)$ имеем

$$\Delta(k; -l_1 \varepsilon_h(k)) = (l_1 + l_2) \varepsilon_h(k) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{v_h^2(t) dt}{\omega_h(k, t)},$$

где

$$\omega_h(k, t) := l_1 \varepsilon_h(k) + l_2 \varepsilon_h(k + t) + l_1 \varepsilon_h(k)$$

Рассуждая аналогично как это делалось в работе [8] можно доказать, что функция $\Delta_h(\cdot; -l_1 \varepsilon_h(\cdot))$ имеет единственный минимум в точке $\mathbf{0} \in \mathbb{T}_h^3$. Теперь докажем, что эта точка является точкой невырожденного минимума.

Так как при всех $k, q \in \mathbb{T}_h^3, k \neq \mathbf{0}$ имеет место неравенство $w_h(k, t) > 0$, то для любого $k \neq \mathbf{0}$ интегралы

$$\lambda_{ij}^{(1)}(h; k) = \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{\partial^2 w_h(k, t)}{\partial k_i \partial k_j} \frac{v_h^2(t) dt}{(w_h(k, t))^2}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

и

$$\lambda_{ij}^{(2)}(h; k) = \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{\partial w_h(k, t)}{\partial k_i} \frac{\partial w_h(k, t)}{\partial k_j} \frac{v_h^2(t) dt}{(w_h(k, t))^3}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

являются конечными, а конечность этих интегралов в точке $k = \mathbf{0}$, легко вытекает из условия $v_h(\mathbf{0}) = 0$. Тем самым мы определим непрерывные на \mathbb{T}_h^3 функции $\lambda_{ij}^{(1)}(h; \cdot)$ и $\lambda_{ij}^{(2)}(h; \cdot)$.

Функция $\Delta_h(\cdot; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ дважды непрерывно-дифференцируема на \mathbb{T}_h^3 и

$$\frac{\partial^2 \Delta_h(k; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i \partial k_j} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_h(k)}{\partial k_i \partial k_j} + \frac{1}{2} \lambda_{ij}^{(1)}(h; k) - \lambda_{ij}^{(2)}(h; k), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера. Так как

$$\frac{\partial w_h(\mathbf{0}, q)}{\partial k_i} = \frac{l_2}{h} \sin(hq_i), \quad \frac{\partial^2 w_h(\mathbf{0}, q)}{\partial k_i \partial k_j} = \delta_{ij} (l_1 + l_2 \cos(hq_i)), \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_h(\mathbf{0})}{\partial k_i \partial k_j} = (l_1 + l_2) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

имеем, что

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta_h(k; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i^2} \right|_{k=\mathbf{0}} = l_1 + l_2 + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{T}_h^3} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^3 (1 - \cos(ht_j)) \right) \frac{(1 + \cos(ht_i)) v_h^2(t)}{\varepsilon_h^3(t)} dt;$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta_h(k; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i \partial k_j} \right|_{k=\mathbf{0}} = -\frac{1}{8} \int_{\mathbb{T}_h^3} \frac{\sin(ht_i) \sin(ht_j) v_h^2(t)}{\varepsilon_h^3(t)} dt, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Из последних двух равенств и из четности функции $|v_h(\cdot)|$ по каждой переменной в отдельности вытекает, что

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta_h(k; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i^2} \right|_{k=\mathbf{0}} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Delta_h(k; -l_1\varepsilon_h(k))}{\partial k_i \partial k_j} \right|_{k=\mathbf{0}} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда получим, что матрица состоящая из частных производных второго порядка функции $\Delta_h(\cdot; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ положительно определена в точке $k = \mathbf{0}$. Следовательно, функция $\Delta_h(\cdot; -l_1\varepsilon_h(\cdot))$ имеет невырожденный минимум в точке $k = \mathbf{0}$. Отсюда и из условие $\Delta_h(\mathbf{0}; 0) = 0$ следует, что существуют числа $C_1(h), C_2(h), C_3(h) > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются неравенства а) и б) теоремы 4.

Заключение. В настоящем исследовании рассматривается обобщенная модель Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$ при $h > 0$ и $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$, соответствующая гамильтониану квантовой системы с несохраняющимся и не более двух частиц на нецелочисленной решетке. Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$, либо оператор $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ имел резонанс с нулевой энергией. В случае наличия нулевого собственного значения или резонанса с нулевой энергией для оператора $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ доказана положительность оператора $\mathcal{A}_h(-k) + l_1\varepsilon_h(k)I$ при всех $k \in \mathbb{T}_h^3$, где $\varepsilon_h(\cdot)$ - специально выбранная дисперсионная функция, а $l_1 > 0$. Кроме того, получены двусторонние оценки для определителя Фредгольма, а в случае резонанса с нулевой энергией получено асимптотическое разложение для определителя Фредгольма. Представленные в статье результаты имеют важное значение в спектральной теории операторных матриц третьего порядка и используются для определения условий конечности или бесконечности дискретного спектра таких операторов.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору Т.Х. Расулову за помощь в постановке задачи и обсуждении основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O. Über die Spectralzerlegung einee Integral operators. Math. Ann., **115**:1 (1938), pp. 249–272.
2. Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. Труды семинара им. И. Г. Петровского, **11**, 1986, стр. 210–223.
3. Angelescu N., Minlos R.A., Zagrebnov V.A. Lower Spectral Branches of a Particle Coupled to a Bose Field. Rev. Math. Phys., **17**:10 (2005), pp. 1111–1142.

4. Болдригини К., Минлос Р.А., Пеллегринотти А. Случайные блуждения в случайной (флуктуирующей) среде. УМН, **62**:4(376) (2007), стр. 27–76.
5. Лакштанов Е.Л., Минлос Р.А. Спектр двухчастичных связанных состояний трансфер-матриц гиббсовских полей (поля на двумерной решетке: прилегающие уровни). Функц. анализ и его прил., **38**:3 (2004), стр. 52–69.
6. Акчурин Э.Р. О спектральных свойствах обобщенной модели Фридрихса. Теоретическая и математическая физика. **163**:1, 2010, стр. 17–33.
7. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics. J. Stat. Phys., **127**:2, (2007), pp. 191–220.
8. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Func. Anal. Topol., **13**:1, (2007), pp. 1–16.
9. Неъматова Ш.Б. Пороговые явления для обобщенной модели Фридрихса на нецелочисленной решетке. Вестник института. Бухоро-Панчакент. 2025, стр. 198–203.

REZYUME

Mazkur maqolada butun sonli bo‘lmagan panjaradagi soni saqlanmaydigan va ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltonianiga mos $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$ umumlashgan Fridrixs modeli qaralgan. $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator uchun $z = 0$ soni xos qiymat yoki $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga ega bo‘lishining zaruriy va yetarlilik shartlari keltirilgan, bu yerda $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. Agar $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga yoki nolga teng xos qiymatga ega bo‘lsa, u holda istalgan $k \in \mathbb{T}_h^3$ uchun $\mathcal{A}_h(-k) + l_1 \varepsilon_h(k)I$ operatorning musbatligi ko‘rsatilgan va Fredholm determinanti uchun ikki yoqlama baholash olingan, bu yerda $\varepsilon_h(\cdot)$ maxsus ko‘rinishga ega dispersiya funksiyasi va $l_1 > 0$. $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ operator nol energiyali rezonansga ega bo‘lgan holda Fredholm determinanti uchun yoyilma topilgan.

Kalit so‘zlar: umumlashgan Fridrixs modeli, dispersiya funksiyasi, butun sonli bo‘lmagan panjara, nol energiyali rezonans, Fredholm determinanti, musbat operator.

RESUME

In this paper we consider the generalized Friedrichs model $\mathcal{A}_h(k)$, $h > 0$, $k \in (-\pi/h; \pi/h]^3$, corresponding to the Hamiltonian of a system of non-conserved and at most two particles on the non-integer lattice. The necessary and sufficient conditions for either $z = 0$ to be an eigenvalue of $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ or operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ to have zero energy resonance are given, where $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$. If the operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ have a zero energy resonance or zero eigenvalue, then for any $k \in \mathbb{T}_h^3$ the positivity of the operator $\mathcal{A}_h(-k) + l_1 \varepsilon_h(k)I$ is established and the two-sided estimates for the Fredholm determinant is given, where $\varepsilon_h(\cdot)$ is a dispersion function of special form and $l_1 > 0$. In the case when the operator $\mathcal{A}_h(\mathbf{0})$ have a zero energy resonance the expansion for the Fredholm determinant is obtained.

Key words: generalized Friedrichs model, dispersion function, non-integer lattice, zero-energy resonance, the Fredholm determinant, positive operator.

УДК 517.956

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА
ГРАНИЦЕ

Орипов Д. Д.

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, УЗБЕКИСТАН
dastonbekoripov94@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничным условием третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике. Применяя метод Фурье, основанный на разделении переменных, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом функции Грина спектральная задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. С использованием теоремы Мерсера доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, начально-краевая задача, метод разделения переменных, спектральная задача, метод функции Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье.

I. Введение

В последнее время исследователи все чаще обращаются к вырождающимся дифференциальным уравнениям в частных производных. Это обстоятельство, прежде всего, объясняется внутренней потребностью теории дифференциальных уравнений в частных производных. С другой стороны, большое количество задач газовой динамики, гидродинамики [1,2], теории бесконечно малых изгибов поверхностей и безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака [3], теории колебаний [4,5], уравнения математической биологии [6], теории фильтрации, теории пограничного слоя, технической механики и др. приводят к необходимости изучения вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в четырехугольной области для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого четного порядка по пространственным переменным. Например, в работе [7] исследованы начально-граничные задачи для вырождающегося уравнения

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) + f(x, t), l = \overline{1, 2}, \alpha \in (0, 2k), \quad (1)$$

в прямоугольнике, а в работах [8], [9]-для уравнений, обобщающих его.

При рассмотрении начально-краевых задач, на вырождающиеся уравнения типа (1) существенно влияют значения порядка вырождения α [7,8], а иногда четность и нечетность числа k . Кроме

того, с ростом порядка уравнения, количество вариантов граничных условий увеличивается. Например, в работах [7,8] при рассмотрении начально-краевых задач для уравнения (1) в прямоугольнике $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ при $0 < \alpha < 1$ заданы граничные условия вида

$$(\partial^j / \partial x^j) u|_{x=0} = 0, j = \overline{0, k-1}; (\partial^q / \partial x^q) u|_{x=1} = 0, q = \overline{0, k-1}, \tag{2}$$

при $\alpha \in (1, k)$, некоторые граничные условия на $x = 0$ заменены условием ограниченности, а при $\alpha \in (k, 2k)$ на $x = 0$ никаких граничных условий не задано. В работе [9], рассматривая уравнение (1) при $\alpha \in (0, 1)$, заданы граничные условия вида (2), но здесь $q = \overline{k, 2k-1}$. В работах [10], [11], [12], рассматривается вырождающееся уравнение другого вида с краевыми условиями (2). В работе [13] для одного вырождающегося уравнения поставлена и изучена задача с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции и производных по x на $x = 0$ и $x = 1$. В работе [14] для уравнения (1) при $\alpha = 0, l = 2$, а в работе [15] для вырождающегося уравнения четвертого порядка типа (1) как при $x = 0$, так и при $x = 1$, заданы условия типа третьего граничного условия. В данной работе сформулирована и исследована начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике.

II. Постановка задачи

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} \right) = f(x, t), \tag{3}$$

где $u = u(x, t)$ - неизвестная функция, $f(x, t)$ - заданная функция, а α - заданное действительное число, причем $0 < \alpha < 1, n \in N$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу.

Задача U_2 . Найти функцию $u(x, t)$, которая:

1) $u_t, (\partial^j / \partial x^j) u, (\partial^j / \partial x^j) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u] \in C(\overline{\Omega}), j = \overline{0, 2n-1}, (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) u], u_{tt} \in C(\Omega);$

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (3);

3) выполняются следующие начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), x \in [0, 1], u_t(x, 0) = \varphi_2(x), x \in [0, 1] \tag{4}$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, t) &= \frac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}} u(0, t), \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} u(1, t) &= 0, \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) \right) \Big|_{x=1} = 0, j = \overline{0, n-1}, t \in [0, T], \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - заданные непрерывные функции.

III. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче U_2 возникает следующая спектральная задача:

$$Mv(x) \equiv \left(x^\alpha v^{(2n)}(x) \right)^{(2n)} = \lambda v(x), 0 < x < 1; \tag{6}$$

$$\left. \begin{aligned} v^{(j)}(x), \left(x^\alpha v^{(2n)}(x) \right)^{(j)} &\in C[0, 1], j = \overline{0, 2n-1}, \\ v^{(j)}(0) &= v^{(2n-1-j)}(0), \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(j)} \Big|_{x=0} = \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(2n-1-j)} \Big|_{x=0}, j = \overline{0, n-1}, \\ v^{(n+j)}(1) &= 0, \left[x^\alpha v^{(2n)}(x) \right]^{(n+j)} \Big|_{x=1} = 0, j = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

где $M \equiv \partial^{2n} / \partial x^{2n} [x^\alpha \partial^{2n} / \partial x^{2n}]$.

Нетрудно убедиться, что для любых функций $v(x)$ и $w(x)$, удовлетворяющих условиям (7), справедливо равенство $\int_0^1 w(x) Mv(x) dx = \int_0^1 v(x) Mw(x) dx$, откуда следует, что задача с условиями $Mv(x) = 0$ и (7) самосопряжена.

Пусть $v(x)$ функция, удовлетворяющая условиям $\{(6), (7)\}$. Тогда, умножая уравнение (6) на функцию $v(x)$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0, 1]$, а затем применяя правило интегрирования по частям и учитывая равенства (7), получим

$$\lambda \int_0^1 v^2(x) dx = \int_0^1 x^\alpha [v^{(2n)}(x)]^2 dx. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$. Пусть $\lambda = 0$. Тогда из равенства (8) следует, что $v^{(2n)}(x) = 0$, $0 < x < 1$. Отсюда, в силу условий $v^{(j)}(0) = v^{(2n-1-j)}(0)$, $v^{(n+j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, имеем $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(6), (7)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предполагая $\lambda > 0$, существование собственных значений задачи $\{(6), (7)\}$ докажем методом функции Грина. Функция Грина $G(x, s)$ этой задачи должна обладать следующими свойствами:

1) $(\partial^j / \partial x^j) G(x, s)$, $j = \overline{0, 2n-1}$ и $(\partial^j / \partial x^j) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s)]$, $j = \overline{0, 2n-2}$ непрерывны для всех $x, s \in [0, 1]$;

2) в каждом из интервалов $[0, s]$ и $(s, 1]$ существует непрерывная производная $(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s)]$, а при $x = s$ имеет скачок:

$$(\partial^{2n-1} / \partial x^{2n-1}) [x^\alpha (\partial^{2n} / \partial x^{2n}) G(x, s)] \Big|_{x=s-0}^{x=s+0} = 1; \tag{9}$$

3) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ по аргументу x существует непрерывная производная $MG(x, s)$ и выполняется равенство $MG(x, s) = 0$;

4) при $s \in (0, 1)$ по аргументу x удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^j G(0, s)}{\partial x^j} &= \frac{\partial^{2n-1-j} G(0, s)}{\partial x^{2n-1-j}}, \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial^{2n-1-j}}{\partial x^{2n-1-j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=0}, \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^{n+j} G(1, s)}{\partial x^{n+j}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^{n+j}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x, s) \right) \Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{11}$$

Принимая во внимание вид общего решения уравнения $MG(x, s) = 0$ в промежутках $(0, s)$ и $(s, 1)$, функцию $G(x, s)$ ищем в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=2n+1}^{4n} \frac{a_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & 0 \leq x \leq s, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{b_j x^{4n-\alpha-j}}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{2n}} + \sum_{j=2n+1}^{4n} \frac{b_j x^{4n-j}}{(4n-j)!}, & s \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{12}$$

где a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ - неизвестные функции переменной s , а $(z)_n = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)$ - символ Похгаммера [18].

Удовлетворяя функцию (12) свойствам 1) и 2) функции Грина, получим следующую систему уравнений относительно $b_j - a_j, j = \overline{1, 4n}$:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = 1, \\ \sum_{j=1}^{m_1} \frac{s^{m_1-j}}{(m_1-j)!} (b_j - a_j) = 0, \quad m_1 = \overline{2, 2n}, \\ \sum_{j=1}^{2n} \frac{s^{2n-\alpha+m_2-j} (b_j - a_j)}{(2n-j)!(2n-\alpha-j+1)_{m_2}} + \sum_{j=1}^{m_2} \frac{s^{m_2-j} (b_{2n+j} - a_{2n+j})}{(m_2-j)!} = 0, \quad m_2 = \overline{1, 2n}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение [8]:

$$b_j - a_j = \frac{(-1)^{j-1} s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad b_{2n+j} - a_{2n+j} = \frac{(-1)^{j-1} s^{2n+j-1-\alpha}}{(j-1)!(j-\alpha)_{2n}}, \quad j = \overline{1, 2n}. \tag{13}$$

Сначала подчиним (12) условиям (10) и (11). Из первой и второй частей условия (10) соответственно получаем соотношения:

$$a_{2n+j} = a_{4n+1-j}, \quad j = \overline{1, n} \tag{14}$$

и

$$a_j = a_{2n+1-j}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Из первой части условия (11) выводим систему уравнений:

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)}, \\ b_{2n+1+m} &= - \sum_{i=1}^m \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \quad m = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{16}$$

а из второй части - результаты:

$$b_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Учитывая результаты (17), для случая $j = \overline{1, n}$ в первом соотношении (13), находим неизвестные $a_j, j = \overline{1, n}$ в виде:

$$a_j = \frac{(-1)^j s^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Если учесть (18) в ранее установленных соотношениях (15), неизвестные $a_{n+j}, j = \overline{1, n}$ определяются, как:

$$a_{n+j} = \frac{(-1)^{n+1-j} s^{n-j}}{(n-j)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Используя (19) для случая $j = \overline{n+1, 2n}$ в первом соотношении (13), находим неизвестные $b_{n+j}, j = \overline{1, n}$:

$$b_{n+j} = \frac{(-1)^{n+1-j} s^{n-j}}{(n-j)!} + \frac{(-1)^{n-1+j} s^{n-1+j}}{(n-1+j)!}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{20}$$

Используя приведённые алгебраические операции, определим неизвестные $a_j, b_j, j = \overline{1, 2n}$, зависящие от переменной s . Теперь найдём неизвестные $a_{2n+j}, b_{2n+j}, j = \overline{1, 2n}$.

Сначала, учитывая (20) в системе уравнений (16), определим неизвестные $b_{2n+j}, j = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)}, \\ b_{2n+1+m} &= - \sum_{i=1}^m \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \quad m = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя полученные выражения (21) во вторую часть соотношений (13), находим:

$$\begin{aligned}
 a_{2n+1} &= -\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)}, \\
 a_{2n+1+m} &= \frac{(-1)^{m+1} s^{2n+m-\alpha}}{m!(m+1-\alpha)_{2n}} - \sum_{i=1}^m \frac{b_{2n+i}}{(m+1-i)!} - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{m+1}}, \quad m = \overline{1, n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Неизвестные a_{3n+j} , $j = \overline{1, n}$ определяются из соотношений (14) с учётом (22):

$$\begin{aligned}
 a_{3n+m} &= \frac{(-1)^{n+1-m} s^{3n-\alpha-m}}{(n-m)!(n+1-\alpha-m)_{2n}} - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{b_{2n+i}}{(n+1-m-i)!} - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{n+1-m}}, \quad m = \overline{1, n-1}, \\
 a_{4n} &= -\frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)}.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Наконец, для случая $j = \overline{n+1, 2n}$ во второй части соотношений (13), с учётом (23), неизвестные b_{3n+j} , $j = \overline{1, n}$ определяются, как:

$$\begin{aligned}
 b_{3n+m} &= \frac{(-1)^{n+1-m} s^{3n-\alpha-m}}{(n-m)!(n+1-\alpha-m)_{2n}} + \frac{(-1)^{n+m-1} s^{3n-1-\alpha+m}}{(n-1+m)!(n-\alpha+m)_{2n}} - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n-m} \frac{b_{2n+i}}{(n+1-m-i)!} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)_{n+1-m}}, \quad m = \overline{1, n-1}, \\
 b_{4n} &= -\frac{s^{4n-1-\alpha}}{(2n-1)!(2n-\alpha)_{2n}} - \frac{s^{2n-\alpha}}{(1-\alpha)_{2n}} - \sum_{j=1}^n \frac{b_{n+j}}{(n-j)!(n+1-\alpha-j)}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Следовательно, функция Грина, удовлетворяющая условиям 1)-4) существует, единственна и она имеет вид (12), причем коэффициенты a_j и b_j , $j = \overline{1, 4n}$ определяются равенствами (17)-(24).

Симметричность функции Грина относительно её аргументов доказана в работах [19] и [20].

В частном случае, при $n = 1$ функция Грина $G(x, s)$ имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{s}{1-\alpha} - \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} \right) (x+1), & 0 \leq x \leq s, \\ -\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)_2} - \frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} + \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{x}{1-\alpha} - \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)_2} \right) (s+1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Теперь, методом, примененным в [16], нетрудно убедиться, что задача {(6), (7)} эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) v(s) ds.
 \tag{25}$$

Так как ядро $G(x, s)$ непрерывно, симметрично и положительно ($\lambda > 0$), то интегральное уравнение (25), следовательно, задача {(6), (7)} имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k < \dots$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x) \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$ [17].

Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система функций $x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$ также составляет ортонормальную систему на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 1. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $Mg(x) \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0, 1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций задачи $\{(6), (7)\}$.

Доказательство. Пользуясь правилом интегрирования по частям, свойствами функции Грина $G(x, s)$ и условиями, наложенными на функцию $g(x)$, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x, s) Mg(s) ds = \int_0^1 G(x, s) \left[s^\alpha g^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} ds = g(x).$$

Так как $Mg(x) \in L_2(0, 1)$, то из последнего равенства следует, что $g(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x, s)$. Кроме того, функция $G(x, s)$, т.е. ядро уравнения (25) непрерывно в $\bar{\Omega}$. Тогда, на основании теоремы 2 стр. 153, книги [17], справедливо утверждение леммы 1.

Лемма 2. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[v_k^{(j)}(x) \right]^2 / \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left[x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right]^{(j)} \right)^2 / \lambda_k^2, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \tag{26}$$

Доказательство. Учитывая равенство (6) и свойства функции $G(x, s)$, из (25) при $v(x) \equiv v_k(x)$ получим

$$v_k^{(j)}(x) = \lambda_k \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) v_k(s) ds = \int_0^1 \left[s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \right]^{(2n)} \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз, а затем принимая во внимание условия (7), имеем

$$v_k^{(j)}(x) = \int_0^1 s^\alpha v_k^{(2n)}(s) \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

откуда, в силу $\lambda_k > 0$, следует равенство

$$\frac{v_k^{(j)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left(s^{\alpha/2} \frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right) \left(\frac{s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right) ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что $v_k^{(j)}(x) / \sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции по ортонормальной системе $\left\{ s^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [17], имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left[v_k^{(j)}(x) \right]^2 / \lambda_k \leq \int_0^1 s^\alpha \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}. \tag{28}$$

Интеграл в правой части можно переписать в виде

$$\int_0^1 s^\alpha \left[\frac{\partial^{2n+j}}{\partial x^j \partial s^{2n}} G(x, s) \right]^2 ds = \int_0^1 s^{-\alpha} \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(s^\alpha \frac{\partial^{2n}}{\partial s^{2n}} G(x, s) \right) \right]^2 ds, \quad j = \overline{0, 2n-1}.$$

Так как $s^\alpha \frac{\partial^{2n} G(x, s)}{\partial s^{2n}}, \frac{\partial^j G(x, s)}{\partial x^j} \in C(\bar{\Omega}), j = \overline{0, 2n-1}$, то функция в квадратной скобке непрерывна на $\bar{\Omega}$. Тогда, в силу $0 < \alpha < 1$, интеграл в правой части, следовательно, интеграл в (28) равномерно ограничен при $j = \overline{0, 2n-1}$, откуда следует, что первые ряды в (26) сходятся равномерно.

Аналогично доказываемость и остальных рядов.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если выполнены условия $g^{(j)}(x) \in C[0, 1], j = \overline{0, 2n-1}, x^{\alpha/2}g^{(2n)}(x) \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); g^{(j)}(0) = g^{(2n-1-j)}(0), g^{(n+j)}(1) = 0, j = \overline{0, n-1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha [g^{(2n)}(x)]^2 dx, \tag{29}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, k \in N$.

Доказательство. В силу уравнения (6), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 g(x) v_k(x) dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) [x^\alpha v_k^{(2n)}(x)]^{(2n)} dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 \{x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)\} \{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x)\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2} g^{(2n)}(x)$ по ортонормированной системе $\{x^{\alpha/2} v_k^{(2n)}(x) / \sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [17], справедливо неравенство (29). Лемма 3 доказана.

Аналогично доказываются следующие леммы.

Лемма 4. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $Mg(x) \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leq \int_0^1 [Mg(x)]^2 dx, \tag{30}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, k \in N$.

Лемма 5. Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям (7) и $[Mg(x)]^{(j)} \in C[0, 1], j = \overline{0, 2n-1}; x^{\alpha/2} [Mg(x)]^{(2n)} \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1); [Mg(x)]^{(j)} \Big|_{x=0} = [Mg(x)]^{(2n-1-j)} \Big|_{x=0}, [Mg(x)]^{(n+j)} \Big|_{x=1} = 0, j = \overline{0, n-1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha \{[Mg(x)]^{(2n)}\}^2 dx, \tag{31}$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x) dx, k \in N$.

IV. Существование, единственность и устойчивость решения задачи U_2

Решение задачи U_2 ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \tag{32}$$

где $v_k(x)$, $k \in N$ - собственные функции задачи $\{(6), (7)\}$, а $u_k(t)$, $k \in N$ - неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (32) в уравнение (3) и в начальные условия (4), относительно $u_k(t)$, $k \in N$ получим следующую задачу

$$\begin{aligned} u''_k(t) + \lambda_k u_k(t) &= f_k(t), \quad t \in (0, T), \quad k \in N, \\ u_k(0) &= \varphi_{1k}, \quad u'_k(0) = \varphi_{2k}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{jk} = \int_0^1 \varphi_j(x) v_k(x) dx, \quad j = \overline{1, 2}; \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) v_k(x) dx, \quad k \in N. \quad (33)$$

Известно, что решение последней задачи существует, единственно и определяется следующей формулой:

$$u_k(t) = \varphi_{1k} \cos(t\sqrt{\lambda_k}) + \varphi_{2k} \lambda_k^{-1/2} \sin(t\sqrt{\lambda_k}) + \lambda_k^{-1/2} \int_0^t f_k(\tau) \sin[(t-\tau)\sqrt{\lambda_k}] d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Отсюда, легко следует следующая оценка

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (35)$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (32), коэффициенты которого определены равенствами (34), определяет решение задачи U_2 .

Доказательство. Для этого надо доказать равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ ряда (32) и следующих рядов, формально полученных из (32):

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(t) v_k(x), \quad \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, 2n-1},$$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right)^{(j)}, \quad j = \overline{0, 2n-1},$$

и равномерную сходимость в любом компакте $\Omega_0 \subset \Omega$ рядов

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial^{2n}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \left(x^\alpha v_k^{(2n)}(x) \right)^{(2n)},$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u''_k(t) v_k(x).$$

Рассмотрим ряд (32). В силу (35) из (32), при любых $(x, t) \in \overline{\Omega}$ имеем

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| |v_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|v_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\sqrt{\lambda_k} |\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}| + \sqrt{\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau} \right).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|u(x, t)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2} + \sqrt{\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} [f_k(\tau)]^2 d\tau} \right). \tag{36}$$

Ряды, стоящие в правых частях этого неравенства, в силу условия теоремы 1, согласно леммам 2 и 3, равномерно сходятся. Поэтому, ряд, стоящий в левой части, т.е. ряд (32) сходится равномерно в $\bar{\Omega}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимостъ и остальных рядов. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Задача U_2 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существует два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи U_2 . Их разность обозначим через $u(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3) при $f(x, t) \equiv 0$, а условиям (4) и (5)-при $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$.

Пусть $\forall T_0 \in (0, T]$, $\Omega_0 = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T_0\}$. Очевидно, что $\bar{\Omega}_0 \subset \bar{\Omega}$. Введем следующую функцию:

$$\omega(x, t) = - \int_t^{T_0} u(x, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_0.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- 1) $\omega_t, \omega_{tt}, \frac{\partial^j \omega}{\partial x^j}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega}{\partial x^{2n}} \right) \in C(\bar{\Omega}_0), j = \overline{0, 2n-1}$;
- 2) удовлетворяет условиям (5) при $t \in [0, T_0]$.

Рассмотрим уравнение (3) при $f(x, t) \equiv 0$ и умножим его на функцию $\omega(x, t)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по области Ω_0 :

$$\int_{\Omega_0} \omega(x, t) \left\{ u_{tt}(x, t) + \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left[x^\alpha \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} \right] \right\} dt dx = 0.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\int_0^{T_0} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n} u(x, t)}{\partial x^{2n}} dx - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $u = \frac{\partial \omega}{\partial t}$ и $\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n+1} \omega}{\partial x^{2n} \partial t}$, имеем

$$\int_0^1 x^\alpha dx \int_0^{T_0} \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x, t)}{\partial x^{2n} \partial t} dt - \int_0^1 dx \int_0^{T_0} u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)]^2, \quad \frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \frac{\partial^{2n+1} \omega(x, t)}{\partial x^{2n} \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \right]^2,$$

и применяя правило интегрирования по частям к интегралам по t , с учетом $\omega(x, T_0) = 0, u(x, 0) = 0$, получим

$$\int_0^1 u^2(x, T_0) dx + \int_0^1 x^\alpha \left[\frac{\partial^{2n} \omega(x, t)}{\partial x^{2n}} \right]_{t=0}^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x, T_0) \equiv 0, x \in [0, 1]$. Так как $\forall T_0 \in [0, T]$, то $u(x, t) \equiv 0, (x, t) \in \bar{\Omega}$. Тогда $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t), (x, t) \in \bar{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи U_2 справедливы оценки

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left[\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \quad (37)$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq K_1 \left[\|\varphi_1^{(2n)}(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)} + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \right], \quad (38)$$

где $\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^\alpha [\varphi_1(x)]^2 dx \right]^{1/2}$ и $r = r(x) = x^\alpha$, а K_0 и K_1 — некоторые действительные положительные числа.

Доказательство. Здесь, учитывая ортонормальность системы $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и неравенство (35), из (32) получим

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|\varphi_{1k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)} \right]^2 \leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_k} \varphi_{2k}^2 + \frac{1}{\lambda_k} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \leq \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_{1k}^2 + \frac{1}{\lambda_1} \varphi_{2k}^2 + \frac{1}{\lambda_1} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство Бесселя, получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left(\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right), \quad (39)$$

где $K_0 = 3C$, $C = \max(1, 1/\lambda_1)$.

Принимая во внимание легко проверяемое равенство

$$\|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2,$$

из (39) получим неравенство (37).

Далее, согласно утверждениям лемм 2 и 3, из (36) следует

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x, t)| \leq$$

$$\leq K_1 \left\{ \sqrt{\int_0^1 x^\alpha [\varphi_1^{(2n)}(x)]^2 dx} + \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2} + \sqrt{\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} [f_k(\tau)]^2 d\tau} \right\},$$

где $K_1 = \sup_{[0,1]} \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2(x)/\lambda_k}$.

Отсюда, в силу введенных обозначений, следует неравенство (38). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. – 711 с.
2. Франкль Ф. И. О баковом водозаборе из быстрых мелких рек// Труды Киргизского государственного университета. 1953, Т. 2, С. 33-45.

3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
4. Маховер Е. В. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1957, №17, Вып. 2, С. 28-39.
5. Маховер Е. В. О спектре собственных частот пластинки с острым краем// Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1958, №197, С. 113-118.
6. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
7. Байкузиев К. Б., Каланов Б. С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// В сборнике: Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1972, №2, С. 40-54; 1973, №3, С. 65-73.
8. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области// Дифференциальные уравнения, 1984, Том 20, №1, С. 7-14.
9. Urinov A. K. and Azizov M. S. On the Solvability of an Initial–Boundary Value Problem for a High Even Order Partial Differential Equation Degenerating on the Domain Boundary// Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 414-426.
10. Irgashev B. Yu. Mixed problem for higher-order equations with fractional derivative and degeneration in both variables// Ukrainian Mathematical Journal, 2023, Vol.74, No.10, March, pp. 1328-1338.
11. Irgashev B. Yu. Boundary value problem for a degenerate equation with a Riemann-Liouville operator// Наносистемы: физика, химия, математика, 2023, Т. 14, Вып. 5, pp. 511-517.
12. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023, Т. 33, Вып. 2, С. 312-328.
13. Уринов А. К., Орипов Д. Д. О разрешимости одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения высокого четного порядка, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2023, №4, С. 621-644.
14. Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике, Научный вестник НамГУ, 2022, №10, С. 3-11.
15. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки, 2023, Т. 33, Вып 2, С. 312-328.
16. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
17. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959. 232 с.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 294 с.
19. Орипов Д. Д. О корректности одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// NamDU Ilmiy axborotnomasi, 2024, №10, -С. 88-96.
20. Орипов Д. Д. Исследование одной начально-граничной задачи для вырождающегося уравнения в частных производных высокого четного порядка// Bulletin of the Institute of Mathematics, 2024, Vol. 7, №5, pp. 105-116.

REZYUME

Ushbu maqolada to'rtburchak sohada yuqori juft tartibli xususiy hosilali buziladigan bir differensial tenglama uchun uchinchi turdagi chegaraviy shartlar bilan boshlang'ich-chegaraviy masala keltirilgan va tadqiq qilingan. O'zgaruvchilarni ajratishga asoslangan Furye usuli yordamida oddiy differensial

tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Grin funksiyasi usuli yordamida bu masala simmetrik yadroli ikkinchi turdagi Fredholm integral tenglamasiga ekvivalent ravishda keltirilgan, natijada spektral masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalar sistemasi mavjudligi isbotlangan. Topilgan integral tenglama va Mercer teoremasi yordamida xos funksiyalarga bog'liq bo'lgan ayrim bichizikli qatorlarning tekis yaqinlashuvchanligi isbotlangan. Furiye koeffitsiyentlarining tartibi aniqlangan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masala xos funksiyalari sistemasiga nisbatan Furiye qatori ko'rinishida ifodalangan. Energiya integrallari usuli yordamida masala yechimining yagonaligi isbotlangan. Yechim uchun baho olingan bo'lib, undan berilgan funksiyalarga uzluksiz bog'liqlik kelib chiqadi.

Kalit so'zlar: buziladigan tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala, o'zgaruvchilarni ajratish usuli, spektral masala, Grin funksiyasi usuli, integral tenglama, Furiye qatori.

RESUME

In this work, we formulate and investigate an initial-boundary value problem with third-type boundary conditions for a degenerate partial differential equation of high even order in a rectangular domain. Using the Fourier method based on the separation of variables, we derive a spectral problem for an ordinary differential equation. By applying the Green's function method, this problem is equivalently reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with a symmetric kernel, from which the existence of eigenvalues and a system of eigenfunctions for the spectral problem follows. Using the obtained integral equation and Mercer's theorem, we prove the uniform convergence of certain bilinear series depending on the found eigenfunctions. The order of the Fourier coefficients is established. The solution to the studied problem is expressed as a Fourier series in terms of the eigenfunctions of the spectral problem. The uniqueness of the solution is proved using the energy integrals method. An estimate for the solution is obtained, implying its continuous dependence on the given functions.

Key words: degenerate equation, initial-boundary value problem, separation of variables method, spectral problem, Green's function method, integral equation, Fourier series.

УДК 517.953

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙРИ С РАЗНЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ

РАХИМОВ К. У.

УНИВЕРСИТЕТ ТОЧНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУК, УЗБЕКИСТАН
kamoliddin.ru1@gmail.com

НОРКУЛОВА Р. Б.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АНУз, УЗБЕКИСТАН
rushananorqulova1988@gmail.com

МАНСУРОВА Г. А.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, УЗБЕКИСТАН
mansurova.guzal1995@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются задача Коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе. Показывается существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: задача Коши, звездообразный граф, уравнение типа Эйри с дробной производной, теория потенциалов.

В последнее время значительно возрос интерес к изучению начальных и начально-краевых задач для уравнений дробного порядка. Это объясняется тем, что развитие теории дробного интегрирования оказало существенное влияние на исследование диффузионных и дисперсионных явлений в различных научных областях (см. [9], [2], [6], [13], [10]).

Уравнение Эйри изучалось методом унифицированного преобразования Фокаса в работах [15] и [7]. Теория потенциалов для решений указанного уравнения была построена в [24] и [3]. Вопросы, касающиеся линеаризованного уравнения Эйри на метрических графах, исследовались в публикациях [20], [23], [14], [21] и [1]. Кроме того, нелинейное уравнение Кортвега де Фриза анализировалось М.Кавалканте в [4].

А. Псху исследовал свойства уравнения Эйри с дробной производной по времени и нашел его фундаментальное решение, а также исследовал свойства потенциалов (см. [26]). Далее, в [22] было найдено второе фундаментальное решение и исследованы свойства некоторых дополнительных потенциалов. Используя эти результаты, были найдены решения начальных и некоторых начально-краевых задач на бесконечных и конечных интервалах.

В данной работе рассматриваются задача Коши для уравнения Эйри с разными дробными производными по времени. Область исследования уравнения является звездообразный граф с единственным входящим и m исходящими бесконечными ребрами. Доказывается единственность решения от обратного. Чтобы показать существования решения использованы результаты [16]. При этом применяется метод потенциалов, которые были развиты в [17], [18], [22], [26].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой работе исследуем уравнения типа Эйри с дробной производной

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) - u_{xxx}(x, t) = f(x, t), 0 < t \leq T. \quad (1)$$

Здесь

$$\partial_{0t}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{g'(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

дробная производная Капуто, где $\Gamma(\alpha)$ - Гамма функция Эйлера. Оператор дробного интегрирования определяется формулой

$$D_{0t}^{-\alpha}g(t) \equiv J_{0t}^{\alpha}g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi. \tag{3}$$

Для уравнения (1) найдено фундаментальное решение в виде [25]

$$G_{\alpha}^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \begin{cases} \phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; \frac{x}{t^{\alpha/3}}), & x < 0, \\ -2\text{Re}[e^{2\pi i/3} \phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], & x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Второе элементарное решение найдено в виде [22]

$$V_{\alpha}^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \text{Im}[e^{2\pi i/3} \phi(-\alpha/3, 2\alpha/3; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], x > 0. \tag{5}$$

Здесь $\phi(\lambda, \mu; z)$ – функция Райта, определенный соотношением

$$\phi(\lambda, \mu; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \mu \in \mathbb{C} \tag{6}$$

(см. [12]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть граф Γ состоит из одного входящего и m исходящих ребер. Входящее ребро изометрически отображаем на интервал с координатами от $-\infty$ до 0 , а в исходящие ребра изометрически отображаем на интервалы с координатами от 0 до $+\infty$. Ребра графа обозначены через $B_j, j = \overline{1, m+1}$.

На каждом ребре графа рассматриваем уравнение типа Эйри с дробной производной по времени

$$\partial_{0t}^{\alpha_j} u_j(x, t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x, t) = f_j(x, t), 0 < t \leq T \tag{7}$$

с начальными условиями

$$u_j(x, 0) = u_{0,j}(x), x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, m+1}. \tag{8}$$

Здесь все $\alpha_j \in (0; 1)$ $\alpha_1 \geq \alpha_i, i = \overline{2, m+1}$. На вершине графа требуем выполнения следующих условий склеивания

$$u_1(0, t) = a_2 u_2(0, t) = \dots = a_{m+1} u_{m+1}(0, t), \tag{9}$$

$$u_{1,x}(0, t) = \frac{1}{b_2} u_{2,x}(0, t) = \frac{1}{b_3} u_{3,x}(0, t) = \dots = \frac{1}{b_{m+1}} u_{m+1,x}(0, t) \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0, t) = \frac{1}{a_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0, t) + \frac{1}{a_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0, t) + \dots = \frac{1}{a_{m+1}} \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2}(0, t). \tag{11}$$

Определение 1. Функция $u(x, t)$, определенная в области $E = \Gamma \times [0, T]$ называется регулярным решением задачи, если она есть решение уравнения (1), непрерывна вместе с его частными производными, входящими в уравнение, удовлетворяет начальному, граничным условиям задачи и функция и ее производные первого и второго порядков стремится к нулю при бесконечности.

Задача. Найти регулярное решения уравнению (7) в области $E = \Gamma \times [0, T]$, удовлетворяющее условиям (8) - (11). Здесь под регулярным решением понимается решение из класса

$$V = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_{m+1}) : u_j \in C^{2,0}(B_j \times (0, T]), \partial_{0,t}^{\alpha_j} u_j \in C(B_j \times (0, T])\}$$

$$u \in C(\overline{B_j} \times [0, T]), u_x, u_{xx} \in C((B_j \cup \{0\}) \times [0, T]), j = \overline{1, m+1}.$$

Отметим, что подобная задача была решена в [18] на графе с k входящими и m исходящими ребрами, но с одинаковыми дробными производными (т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1}$).

Покажем существование и единственность решения поставленной задачи.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Докажем единственность решения поставленной задачи.

Теорема 1. Пусть $b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{m+1}^2 \leq 1$. Тогда задача (7)–(11) имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть задача имеет две $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_{m+1}^{(1)})^T$ и $u^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_{m+1}^{(2)})^T$ разных решений. Тогда функция $v = u^{(1)} - u^{(2)}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{0t}^{\alpha_j} v_j(x, t) = v_{jxxx}(x, t),$$

однородную начальную условием $v_j(x, 0) = 0$, и условиям (9)–(11) на вершине графа.

Умножая на $v_j(x, t)$ обе части уравнения $\partial_{0t}^{\alpha_j} v_j(x, t) = v_{jxxx}(x, t)$ пользуясь неравенством [1]

$$v \partial_{0t}^{\alpha} v \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha} v^2,$$

и интегрируя выражение по B_j имеем

$$\int_{B_j} \partial_{0t}^{\alpha_j} v_j^2 dx \leq 2 \int_{B_j} v_j \partial_{0t}^{\alpha_j} v_j dx = 2 \int_{B_j} v_j v_{jxxx} dx \leq 2 \left(v_j v_{jxx} |_{B_j} - \frac{1}{2} v_{jx}^2 |_{B_j} \right).$$

Суммируем все эти соотношения по всем j и получим

$$\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx \leq (2v_1 v_{1,xx}) |_{-\infty}^0 + 2 \sum_{i=2}^{m+1} (v_i v_{i,xx}) |_0^{+\infty} - v_{1,x}^2(0, t) + \sum_{i=2}^{m+1} v_{i,x}^2(0, t).$$

Из этого неравенства имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx &\leq 2v_1(0, t)v_{1,xx}(0, t) - 2v_1(0, t) \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{b_j^2} v_{j,xx}(0, t) - v_{1,x}^2(0, t) + \\ &+ v_{1,x}^2(0, t) \sum_{j=2}^{m+1} b_j^2 = 2v_1(0, t) \left(v_{1,xx}(0, t) - \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{b_j^2} v_{j,xx}(0, t) \right) + v_{1,x}^2(0, t) \left(1 - \sum_{j=2}^{m+1} b_j^2 \right). \end{aligned}$$

Учитывая условия теоремы получим

$$\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0t}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx \leq 0.$$

Интегрируем это неравенство, учитывая равномерную сходимость и начальную условием имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{m+1} \partial_{0\tau}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx \right) d\tau &= \sum_{j=1}^{m+1} \left(\int_0^t \partial_{0\tau}^{\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx d\tau \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \left(I_{0t}^{1-\alpha_j} \int_{B_j} v_j^2 dx \right) \leq 0. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве сумма нескольких неотрицательных выражений равна нулю. Отсюда следует, что $v \equiv 0$. Значит, $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$. Теорема доказана.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

В работах [17], [18], [22] была разработана теория потенциалов для решения уравнений типа Эйри с дробными производными. На основе этой теории будем искать решение задачи в следующем виде.

$$u_j(x, t) = \int_0^t G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\lambda_j(\tau)d\tau + \int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\mu_j(\tau)d\tau + F_j(x, t), \tag{12}$$

где

$$F_j(x, t) = \int_0^{+\infty} G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - \xi, t - 0)u_{0,j}(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^0 G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - \xi, t - 0)f_j(\xi, \tau)d\xi d\tau,$$

$j = \overline{1, m + 1}$.

Известно, что функция (12) удовлетворяет уравнение (7) и начальным условиям [18]. Здесь функции $\lambda_j(t)$ и $\mu_j(t)$ являются неизвестными и следует их определить. Для этого воспользуемся условиями (9)–(11). Заметим, что по определению $V_{\alpha}^{2\alpha/3}$ следует $\mu_1(t) = 0$.

Рассмотрим (9).

$$\begin{aligned} a_j \left(\int_0^t G_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\lambda_j(\tau)d\tau + \int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\mu_j(\tau)d\tau \right) = \\ \left(\int_0^t G_{\alpha_1}^{2\alpha_1/3}(x - 0, t - \tau)\lambda_1(\tau)d\tau + \int_0^t V_{\alpha_1}^{2\alpha_1/3}(x - 0, t - \tau)\mu_1(\tau)d\tau \right) + \\ + F_1(x, t) - a_j F_j(x, t), \quad j = \overline{2, m + 1}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $G(0, t)$ и $V(0, t)$ имеем:

$$\frac{a_j}{3\Gamma\left(\frac{2\alpha_j}{3}\right)} \int_0^t \frac{\lambda_j(\tau) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(\tau)}{(t - \tau)^{1-2\alpha_j/3}} d\tau = \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{2\alpha_1}{3}\right)} \int_0^t \frac{\lambda_1(\tau)}{(t - \tau)^{1-2\alpha_1/3}} d\tau + F_1(0, t) - F_j(0, t)$$

здесь $j = \overline{2, m + 1}$. Пользуясь определим дробного интеграла получим:

$$a_j \left(\lambda_j(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t) \right) = D_{0t}^{\frac{2(\alpha_j - \alpha_1)}{3}} \lambda_1(\tau) + 3\partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}} (F_1(0, t) - a_j F_j(0, t)), \quad j = \overline{2, m + 1}.$$

Из этого следует

$$\lambda_j(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t) = \frac{1}{a_j} D_{0t}^{\frac{2(\alpha_j - \alpha_1)}{3}} \lambda_1(\tau) + \frac{3}{a_j} \partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}} (F_1(0, t) - a_j F_j(0, t)), \quad j = \overline{2, m + 1}. \tag{13}$$

Далее находим производное функции

$$u_{j,x}(x, t) = \int_0^t G_{\alpha_j}^{\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\lambda_j(\tau)d\tau + \int_0^t V_{\alpha_j}^{2\alpha_j/3}(x - 0, t - \tau)\mu_j(\tau)d\tau + F_{j,x}(x, t)$$

и его значение в точке $x = 0$:

$$u_{j,x}(0, t) = \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{\alpha_j}{3}\right)} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{1-\alpha_j/3}} \lambda_j(\tau)d\tau - \frac{\sqrt{3}}{6\Gamma\left(\frac{\alpha_j}{3}\right)} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{1-\alpha_j/3}} \mu_j(\tau)d\tau + F_{j,x}(0, t).$$

Подставляя найденное на (10) имеем:

$$\frac{1}{3} D_{0t}^{-\alpha_j/3} \lambda_j(t) - \frac{\sqrt{3}}{6} D_{0t}^{-\alpha_j/3} \mu_j(t) + F_{j,x}(0, t) = \frac{b_j}{3} D_{0t}^{-\alpha_1/3} \lambda_1(t) + b_j F_{1,x}(0, t).$$

Отсюда получим:

$$\lambda_j(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_j(t) = b_j D_{0t}^{-\frac{\alpha_1 - \alpha_j}{3}} \lambda_1(t) + 3\partial_{0t}^{\alpha_j/3} (b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)), \quad j = \overline{2, m+1}. \quad (14)$$

Используем условие (11). Для этого находим значения вторых производных в точке $x = 0$ используя леммы [18].

$$\lim_{x \rightarrow -0} u_{1,xx}(x,t) = \frac{1}{3}\lambda_1(t) + F_{1,xx}(0,t),$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_{j,xx}(x,t) = -\frac{2}{3}\lambda_j(t) + F_{j,xx}(0,t), \quad (j = \overline{2, m+1}).$$

Подставляя найденные на (11) получим:

$$\lambda_1(t) + \frac{2}{a_2}\lambda_2(t) + \dots + \frac{2}{a_n}\lambda_n(t) = -3F_{1,xx}(0,t) + \frac{3}{a_2}F_{2,xx}(0,t) + \dots + \frac{3}{a_n}F_{n,xx}(0,t). \quad (15)$$

Составляя систему из соотношений (13) и (14) выразим $\lambda_j(t)$ и $\mu_j(t)$ ($j = \overline{2, m+1}$) через $\lambda_1(t)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \lambda_j(t) &= \frac{1}{2a_j} D_{0t}^{-\frac{2(\alpha_1 - \alpha_j)}{3}} \lambda_1(t) + \frac{b_j}{2} D_{0t}^{-\frac{\alpha_1 - \alpha_j}{3}} \lambda_1(t) + \\ &+ \frac{3}{2a_j} \partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}} (F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)) + \frac{3}{2} \partial_{0t}^{\alpha_j/3} (b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)), \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} \mu_j(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}a_j} D_{0t}^{-\frac{2(\alpha_1 - \alpha_j)}{3}} \lambda_1(t) - \frac{b_j}{\sqrt{3}} D_{0t}^{-\frac{\alpha_1 - \alpha_j}{3}} \lambda_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{a_j} \partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}} (F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)) - \\ &- \sqrt{3} \partial_{0t}^{\alpha_j/3} (b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Найденные выражения подставим на (15) и имеем

$$\lambda_1(t) + \sum_{j=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_j^2} D_{0t}^{-2\beta_j} \lambda_1(t) + \frac{b_j}{a_j} D_{0t}^{-\beta_j} \lambda_1(t) \right) = g(t), \quad (18)$$

здесь $\beta_j = \frac{\alpha_1 - \alpha_j}{3}$ и

$$\begin{aligned} g(t) &= -3F_{1,xx}(0,t) + 3 \sum_{j=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_j} F_{j,xx}(0,t) - \frac{1}{a_j^2} \partial_{0t}^{\frac{2\alpha_j}{3}} (F_1(0,t) - a_j F_j(0,t)) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{a_j} \partial_{0t}^{\alpha_j/3} (b_j F_{1,x}(0,t) - F_{j,x}(0,t)) \right). \end{aligned}$$

Уравнение (18) является обобщенным интегральным уравнением Абеля. Его решение было построено А.В.Псху [16].

Перепишем уравнение (18) в следующем виде

$$\sum_{i=0}^n A_i D_{0t}^{-\rho_i} \lambda_1(t) = g(t), \quad (19)$$

где $A_0 = 1$, $\rho_0 = 0$, для всех $i = \overline{1, m}$ находим $A_i = \frac{1}{a_j^2}$, $\rho_i = 2\beta_{j-1}$ и для всех $i = \overline{m+1, 2m}$ находим $A_i = \frac{b_{j-1}}{a_{j-1}}$, $\rho_i = \beta_{j-1}$. Вводим функцию

$$S_n^\mu(t; z_1, \dots, z_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = (h_1 * h_2 * \dots * h_n)(t), \quad (20)$$

здесь $(h_i * h_j)(t) = \int_0^t h_i(t - \tau)h_j(\tau)d\tau$ и $h(t) = h_i(t) = t^{\mu_i-1}\phi(\gamma_i, \mu_i; z_i t^{\gamma_i})$. Для параметров и аргументов функции (20) выполняются условия

$$t > 0, \quad z_i \in \mathbf{R}, \quad \gamma_i > \mathbf{0}, \quad \mu_i > \mathbf{0}, \quad \mu = \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

С помощью функции (20) составим функцию

$$G_n^\mu(t; \gamma_1, \dots, \gamma_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} S_n^\mu(\tau; \gamma_1 \tau, \dots, \gamma_n \tau; \gamma_1, \dots, \gamma_n) = (h_1 * h_2 * \dots * h_n)(t) dt.$$

Доказано, что этот интеграл является сходящимся. Здесь стоит не перепутать эту функцию с функцией (4).

Теорема 2. [16] Пусть $g(t) \in L(0, T)$. Тогда уравнение (19) имеет единственное интегрируемое решение $\lambda_1(t)$, которое для каждого $\mu > \rho_0$ представляется в виде

$$\lambda_1(t) = D_{0t}^\mu (g * \omega_\mu)(t), \quad (21)$$

где $\omega_\mu = \omega_\mu(t)$ представляется как

$$\omega_\mu(t) = G_n^\mu(t; -A_1; \dots, -A_m; \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Таким образом, мы можем найти функций $\lambda_j(t)$, $\mu_j(t)$, ($j = \overline{2, m+1}$) с помощью формулами (16) и (17), т.к. функция $\lambda_1(t)$ является решением уравнения (18) и представляется как (21). Таким образом, показано существования решения задачи. Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть имеет место неравенство $b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_{m+1}^2 \leq 1$, функции $f(x, t) \in C^{0,1}(B_j \times [0, T])$ и $u_{j_0}(x) \in C(\overline{B_j})$. Тогда задача (7)–(11) имеет единственное решение.

Таким образом, поставленная задача полностью решена. В этой работе уравнение типа Эйри рассмотрено на графе-звезде с одного входящего и m исходящих ребер. В качестве задачи на перспективу можно посмотреть подобную задачу на графе-звезде с k входящих и m исходящих ребер.

ЛИТЕРАТУРА

- [1.] Alikhanov A. A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations. Differential equations, Vol. 46. Issue 5. 658-664(2010).
- [2.] Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CIAM Courses and Lectures. Vol. 376, Wien: Springer (1997).
- [3.] Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. 13. Issue 3. 163-203 (1959).
- [4.] Cavalcante M. The Korteweg-de Vries equation on a metric star graph. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. 69:124 (2018).
- [5.] Gnuzmann S. and Smilansky U., Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics. Advances in Physics. Vol. 55, Issue 5-6, 527-625 (2006).
- [6.] Hilfer R. (Ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: WSPC (2000).
- [7.] Himonas, D. Mantzavinos, and F. Yan. The Korteweg-de Vries equation on an interval. Journal of Mathematical Physics, 60(5), pp. 25, (2019).
- [8.] Khudayberganov G., Sobirov Z., Eshimbetov M. Unified transform method for the Schrodinger equation on a simple metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. Volume 12, Issue 4. p. 412-420 (2019)

- [9.] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Amsterdam, etc.: Elsevier (2006).
- [10.] Kivshar Y.S. and Agarwal G.P., Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic, San Diego (2003).
- [11.] Kottos T. and Smilansky U. Periodic Orbit Theory and Spectral Statistics for Quantum Graphs. Annals of Physics. Vol. 274, Issue 1, 76-124 (1999).
- [12.] Mainardi F., Mura A. and Pagnini G. The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey. International Journal of Differential Equations. Vol. 3. (2010).
- [13.] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys. Reports. Vol. 339, 1-77 (2000).
- [14.] Mugnolo D., Noja D. and Seifert Ch. Airy-type evolution equations on star graphs. Analysis and PDE. Vol. 11, Issue 7 (2018).
- [15.] Pelloni B. Well-posed boundary value problems for linear evolution equations on a finite interval. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 136, p. 361-382 (2004).
- [16.] Pskhu A.V. On Solution Representation of Generalized Abel Integral Equation, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics Volume 2013, Article ID 106251, 5 pages.
- [17.] Rakhimov K.U. The method of potentials for the Airy equation of fractional order. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. volume 3, Issue 2. p 222-235 (2020).
- [18.] Rakhimov K.U., Sobirov Z.A., Jabborov N.M. The time-fractional Airy equation on the metric graph. Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2021, 14 (3), 376–388.
- [19.] Seifert Ch. The linearized Korteweg-de-Vries equation on general metric graphs. The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. 449-458 (2018).
- [20.] Sobirov Z.A., Uecker H., Akhmedov M.I. Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs. Uzbek Mathematical Journal, Vol.3, 143-154 (2015).
- [21.] Sobirov Z.A., Akhmedov M.I., Uecker H. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Vol. 6. Issue 2, 198–204 (2015).
- [22.] Sobirov Z.A., Rakhimov K.U. Cauchy problem for the Airy equation with fractional time-fractional on a star-shaped graph. Institute of Mathematics Bulletin, Uzbekistan. vol. 5. 40-49 (2019).
- [23.] Sobirov Z.A., Akhmedov M. I., Karpova O.V., Jabbarova B. Linearized KdV equation on a metric graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Vol. 6, Issue 6. 757-761(2015).
- [24.] Джураев Т. Краевые задачи для составного и смешанно-составного типов. стр. 240., Ташкент (1979).
- [25.] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка, стр. 200. Москва (2005).
- [26.] Псху А.В. Фундаментальное решение уравнения третьего порядка с дробной производной. Узбекский математический журнал. No. 4. 119-127 (2017).

REZYUME

Bu maqolada yulduzsimon grafda berilgan, har xil hosilalarga ega bo'lgan Eyri tipidagi tenglamalar uchun Koshi masalasi tadqiq qilingan. Qo'yilgan masalaning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, yulduzsimon graf, kasr hosilali Eyri tipidagi tenglama, potentsiallar nazariyasi.

RESUME

In this paper was studied the Cauchy problem for an Airy-type equation with different fractional derivatives on the star-shaped graph. It was proved the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: Cauchy problem, star-type graph, Airy-type equation with fractional derivative, potential theory.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА С МИНИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Хайиткулов Б. Х.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА, УЗБЕКИСТАН
b.hayitqulov@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В работе исследуются задача Коши для уравнения типа Эйри с разными дробными производными на звездообразном графе. Показывается существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: задача Коши, звездообразный граф, уравнение типа Эйри с дробной производной, теория потенциалов.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена численному решению нестационарной задачи оптимального размещения источников тепла минимальной мощности. Постановка задачи требует одновременного выполнения двух условий. Первое условие - обеспечить нахождение температуры в пределах минимальных и максимальных температур за счет оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. Второе условие заключается в том, чтобы суммарная мощность источников тепла, используемых для обогрева, была минимальной. Эта задача изучалась в стационарных условиях в работах других учёных. Однако в нестационарном случае задача не рассматривалась. Поскольку найти непрерывное решение краевой задачи сложно, то ищем численное решение задачи. Трудно найти интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Найдено численное значение функции Грина в виде матрицы. Предложен новый алгоритм численного решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа. Предложена новая методика численного решения. Построена математическая и численная модель процессов, описываемых уравнением конвекции-диффузии, заданным для первой краевой задачи. Краевая задача изучается для двумерного случая. Для численного решения задачи использовалась неявная конечно-разностная схема. По этой схеме была создана система разностных уравнений. Сформированная система разностных уравнений приведена к задаче линейного программирования. Задача линейного программирования решается с помощью М-метода. При каждом значении времени решается задача линейного программирования. Предложен новый подход к численному решению задач. Приведена общая блок-схема алгоритма решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью. Разработан алгоритм и программное обеспечение для численного решения задачи. Приведено краткое описание программного обеспечения. На конкретных примерах показано, что численное решение краевой задачи находится в заданных пределах, сумма оптимально размещённых источников тепла с минимальной мощностью даёт минимум функционалу. Визуализированы результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: нестационарные задачи, оптимальное размещение, источники тепла, уравнения конвекции-диффузии, М-метод.

Введение. Одним из самых распространенных объектов в различных сферах деятельности человека является система источников тепла, тепловой баланс в отапливаемых помещениях. Математическое

моделирование таких систем ставит задачу об оптимальном размещении источников тепла в отапливаемых помещениях, что связано с ресурсосберегающими инженерными технологиями. Задача оптимального размещения источников тепла отапливаемых площадей всегда была актуальной при проектных работах в строительстве, теплицах и других технических и технологических сферах. Задачи этого типа были изучены для стационарного случая. Однако задача оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью для нестационарного случая не изучена.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. В работе [3] рассмотрена задача энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В работе [4] изучена дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принцип максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности. В работе [5] изучена задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением теплопроводности. Управляющий параметр задан в граничном условии и достиг минимума функционала, задаваемого интегральным квадратичным выражением. Показан метод нахождения допустимого управления, дающего минимум функционалу.

В работах [6-8] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой. В работе [9] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [10] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в работах [11-13] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе рассмотрена задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и сведения к задаче линейного программирования. В работе предлагаются метод и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах, путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Для проведения вычислительных экспериментов было разработано программное обеспечение.

Постановка задачи и ее конечно-разностная аппроксимация. В области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти функцию $f(x, y, t) \geq 0$ такую, что для любого $t \in [0, T]$ линейный функционал

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x, y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - v(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \\ a < x < b, \quad c < y < d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \\ u(a, y, t) &= \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, c, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

$$m(x, y, t) \leq u(x, y, t) \leq M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D, \quad (3)$$

где $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t ; $\chi(x, y) > 0$ – коэффициент диффузии (температуропроводности); $v(x, y)$ – скорость конвекции по соответствующим направлениям.

ям; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условия сопряжения $\mu_1(c, t) = \mu_3(a, t)$, $\mu_1(d, t) = \mu_4(a, t)$, $\mu_2(c, t) = \mu_3(b, t)$, $\mu_2(d, t) = \mu_4(b, t)$. Функции $m(x, y, t)$ и $M(x, y, t)$ – имеют смысл функций минимальной и максимальной температуры в области D соответственно. Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Пусть
$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x, y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$
 Оператор L , определенный в $L_2(D)$, имеет обратный L^{-1} . Здесь L^{-1} – интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)-(3) в следующем виде:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, y, t) \geq 0, \quad m(x, y, t) \leq (L^{-1}f)(x, y, t) \leq M(x, y, t). \tag{4}$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (1)-(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\bar{\omega}_{h_1 h_2}^T = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}^T = \{(x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau), i = \bar{0}, N_1, j = \bar{0}, N_2, k = \bar{0}, N_3\}$ с шагами $h_1 = (b - a)/N_1$, $h_2 = (d - c)/N_2$, $\tau = T/N_3$.

Неявная разностная схема для условия (2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \chi_{ij} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) - \\ v_{ij} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{2h_2} \right) + f_{ij}^{k+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{N_1j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}), \quad u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1. \end{array} \right. \tag{5}$$

Здесь $\chi_{ij} = \chi(x_i, y_j)$, $v_{ij} = v(x_i, y_j)$, $f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1})$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_{ij}}{h_1^2} + \frac{2\chi_{ij}}{h_2^2} \right), & X^+ &= \left(-\frac{\chi_{ij}}{h_1^2} + \frac{v_{ij}}{2h_1} \right), & X^- &= \left(-\frac{\chi_{ij}}{h_1^2} - \frac{v_{ij}}{2h_1} \right), \\ Y^+ &= \left(-\frac{\chi_{ij}}{h_2^2} + \frac{v_{ij}}{2h_2} \right), & Y^- &= \left(-\frac{\chi_{ij}}{h_2^2} - \frac{v_{ij}}{2h_2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & \overline{XY} & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} & Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$G = A^{-1}.$$

Аппроксимируем задачу (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область D по x, y, t соответственно на N_1, N_2, N_3 равных частей: $D = \bigcup_{k=1}^{N_3} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} D_{ij}^k$, где $D_{ij}^k = \{(x, y, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}$, $i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3}$. В пространстве $L_2(D)$ функции $f_{ij}^k = f(x_i, y_j, t_k)$, $(x, y, t) \in D_{ij}^k$ ($i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3}$) определяются как кусочно-постоянные функции. Отсюда получим $f(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij}^k$.

Пусть $g_{pq} = G$, $m_{ij}^k = m(x_i, y_j, t_k)$, $M_{ij}^k = M(x_i, y_j, t_k)$, $\tilde{f}_q^k = f_{ij}^k$, $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$, ($p = q, q = (i - 1)(N_2 - 1) + j$), $p = \overline{1, N}, q = \overline{1, N}, i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3}$. Подставим выражение $f(x, y, t)$ в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} J_k\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\text{mes} D_{ij}^k) f_{ij}^k \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \\ m_{ij}^k &\leq \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k \leq M_{ij}^k, \quad p = \overline{1, N}, \\ i &= \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3}, \\ \tilde{f}_q^k &\geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (6) решается М-методом (методом искусственного базиса) [14, 15]. Численное решение задачи (2) находится с помощью $u_{ij}^k = \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k$. Найденная \tilde{f}_q^k является функцией, дающей минимум функционалу (1).

Результаты вычислительных экспериментов. Для приближенного решения задачи (1)-(6) разработано программное обеспечение на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули.

Пример 1. Требуется найти оптимальное размещение источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. В качестве расчётной области используется квадрат $x, y \in [0, 1]$ с функциями коэффициентом диффузии $\chi(x, y) = x^2 y^2$ м²/с и компонентами скорости $v(x, y) = xy$ м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями: $u_0(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ м/с, $\mu_1(y, t) = 2 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_2(y, t) = 3 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_3(x, t) = 2 + x^2 + t^2$ м/с, $\mu_4(x, t) = 3 + x^2 + t^2$ м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями: $m(x, y, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$ К, $M(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$ К, а окончание времени $T = 1$. Расчётная сетка с числом источников $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times N_3 = 9 \times 9 \times 10$. На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум при численном решении значение функционала равен $J_{\min} = 29.07$ К·м/с. Представлены результаты с минимальным (границы с синим цветом, ниже), максимальным (границы с красным цветом, выше) и приближенным (зеленым цветом, посередине) значениями температуры. На рис. 2 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью.

Пример 2. Требуется найти оптимальное размещение источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. Задача решалась при следующих входных данных (рис. 3-4): $x, y \in [0, 1]$, $\chi(x, y) = xy$ м²/с, $v(x, y) = x^2 y^2$ м/с, $u_0(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ м/с, $\mu_1(y, t) = 2 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_2(y, t) = 3 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_3(x, t) = 2 + x^2 + t^2$ м/с, $\mu_4(x, t) = 3 + x^2 + t^2$ м/с, $m(x, y, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$ К, $M(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$ К, $T = 1$, $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times N_3 = 9 \times 9 \times 10$, $J_{\min} = 39.72$ К·м/с.

Как видно из рисунков 1 и 3, решение краевой задачи лежит в пределе минимальных и максимальных температур, т.е. удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение $u(x, y, t)$ практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал $J_k\{f\}$ достигает минимума.

На рисунках 2 и 4 разными цветами показаны мощности источников тепла минимальной мощности. Красным цветом показаны источники тепла наивысшей мощности. Источники тепла при каждом фиксированном значении времени накладываются друг на друга.

Заключение

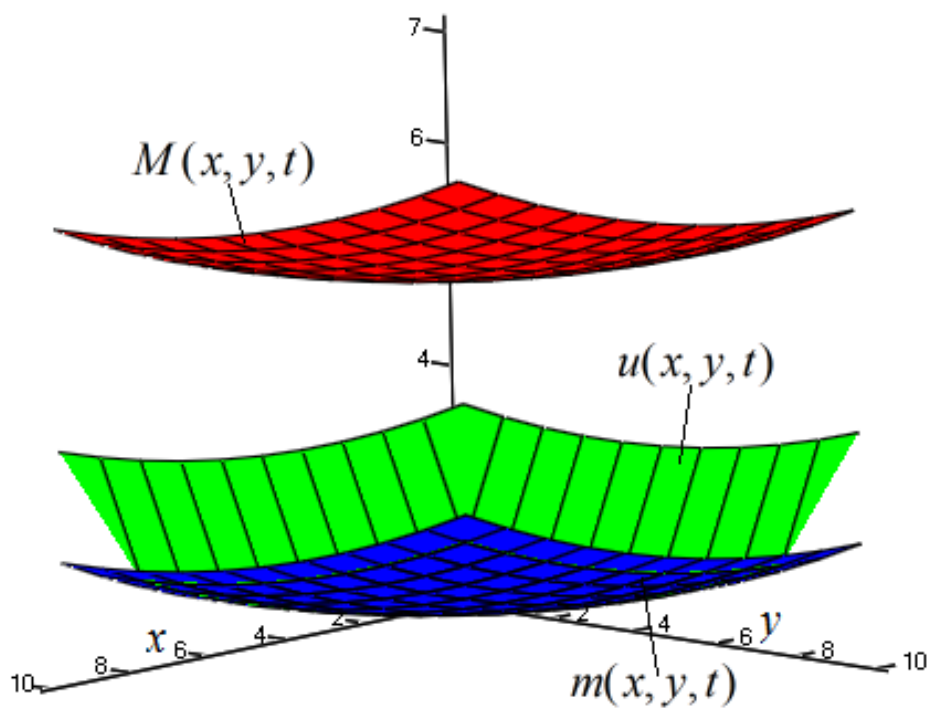


Рис. 1: Графическое отображение решения задачи (6) для примера 1

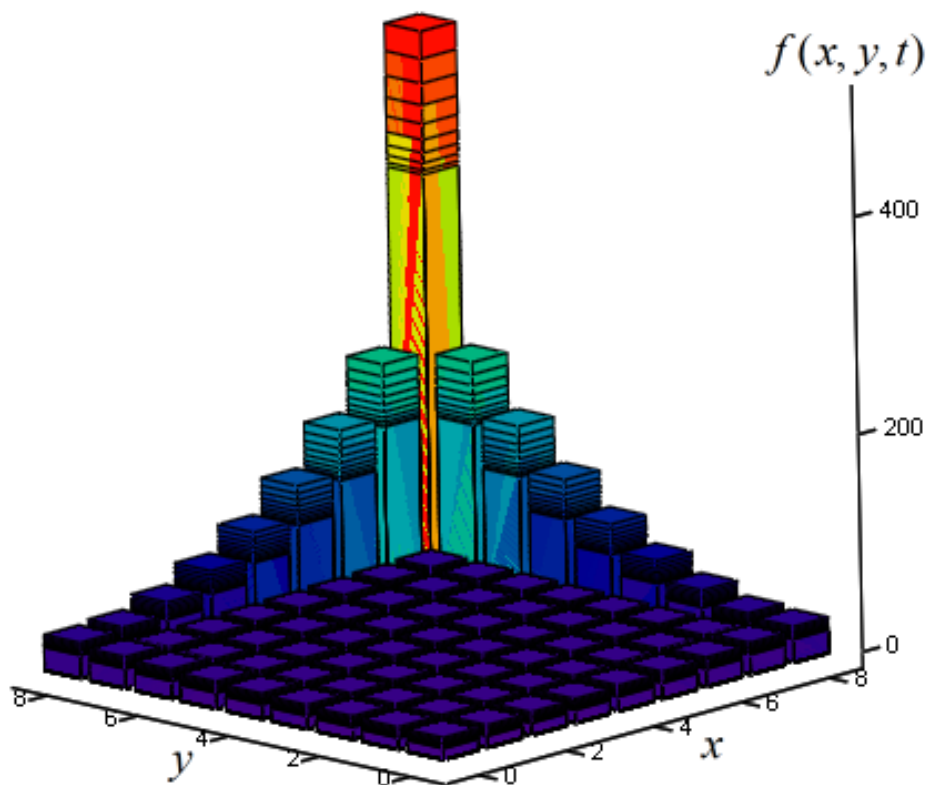


Рис. 2: Оптимальное размещение источников тепла $f(x, y, t)$

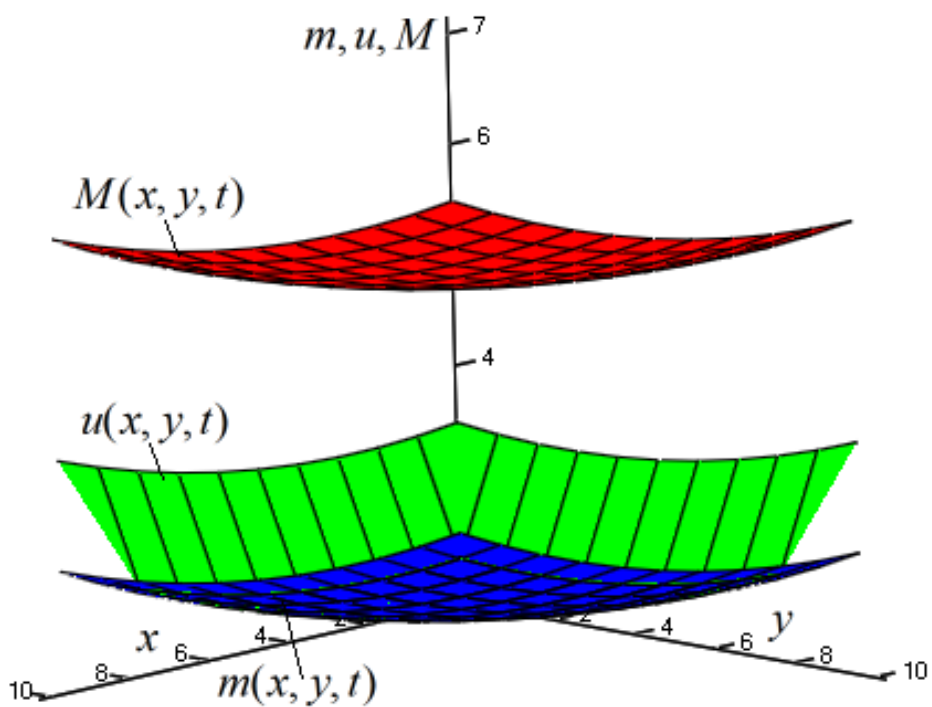


Рис. 3: Графическое отображение решения задачи (6) для примера 2

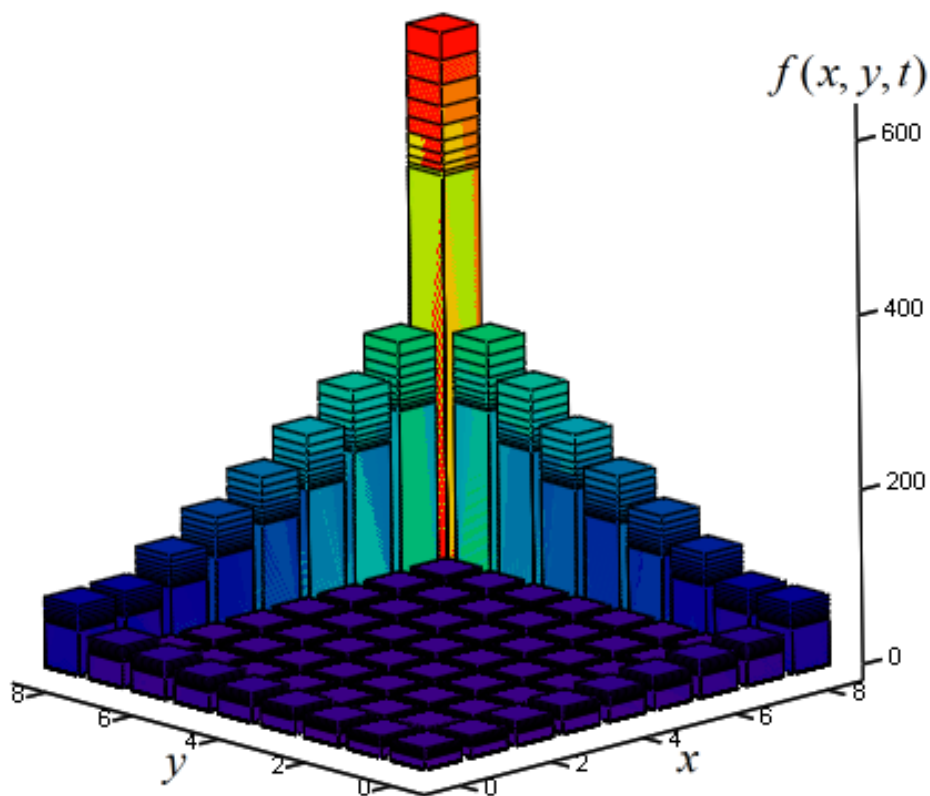


Рис. 4: Оптимальное размещение источников тепла $f(x, y, t)$

Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного решения задач линейного программирования. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов А. В., Кулибанов В. Н. Задача оптимального выбора координат доразбуривания добывающих скважин на нефтяных месторождениях. Автоматика и телемеханика, 2002, № 11. С. 3–12.
2. Мирская С. Ю., Сидельников В. И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. Техничко-технологические проблемы сервиса, 2014, № 4(30). С. 75–78.
3. Сабденов К. О., Байтасов Т. М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов, 2015, Т. 326, № 8. С. 53–60.
4. Исламов Г.Г., Коган Ю. В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2008, вып. 1. С. 121–126.
5. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управлении процессом теплопроводности квадратичным функционалом качества. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, Т. 57, № 12. С. 2053–2064.
6. Хайиткулов Б. Х. Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2021, № 57. С. 45–52.
7. Khaikukulov B. Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. Solid State Technology, 2020, vol. 63, no 17. P. 583–592.
8. Хайиткулов Б. Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3. С. 85–98.
9. Тухтасинов М. Т., Абдуолимова Г. М., Хайиткулов Б. Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. Бюллетень Института математики, 2019, № 1. С. 1–10.
10. Лебо И. Г., Симаков А. И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. Вестник МГТУ МИРЭА, 2014, № 3(4). С. 195–205.
11. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, Т. 38, № 2. С. 207–219.
12. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва : ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
13. Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Явно- неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции. Сибирский журнал вычислительной математики, 2012, Т. 15, № 4. С. 359–369.
14. Dantzig G. B. Linear programming and extensions. Princeton : Princeton University Press, 2016. 656 p.
15. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 3-е изд. Москва : Финансы и статистика, 2009. 640 с.

REZYUME

Ushbu ish minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirishning nostatsionar masalasini sonli yechishga bag'ishlangan. Masalaning qo'yilishi bir vaqtning o'zida ikkita shartning bajarilishini talab qiladi. Birinchi shart to'g'ri to'rtburchakka minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirish orqali temperaturani minimal va maksimal temperaturalar oralig'ida bo'lishini ta'minlashdan iborat. Ikkinchi shart isitish uchun sarflangan issiqlik manbalarining umumiy quvvati minimal bo'lishini ta'minlashdan iborat. Statsionar holda ushbu masala boshqa olimlarning ishlarida o'rganilgan. Nostatsionar holda esa qaralmagan. Chegaraviy masala yechimini uzluksiz holda topish qiyin bo'lgani uchun masalaning sonli yechimini qidiramiz. Uzluksiz yadroli (Grin funksiyasi) integral teskari operatorni topish qiyin. Grin funksiyaning sonli qiymatini matritsa ko'rinishida topamiz. Parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanuvchi jarayonlarda minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini sonli yechishning yangi algoritmi taklif qilingan. Boshqacha qilib aytganda yangicha sonli yechish metodikasi taklif qilingan. Birinchi chegaraviy masala uchun berilgan konveksiya-diffuziya tenglamasi orqali tavsiflanuvchi jarayonlarning matematik va sonli modeli qurilgan. Chegaraviy masala ikki o'lchovli hol uchun o'rganilgan. Masalani sonli yechishda oshkormas chekli ayirmali sxemadan foydalanilgan. Ushbu sxema yordamida ayirmali tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Hosil qilingan ayirmali tenglamalar sistemasi chiziqli programmalash masalasiga keltirilgan. Chiziqli programmalash masalasi M-metoddan foydalanib yechilgan. Vaqtning har bir qiymatida chiziqli programmalash masalasi yechiladi. Masalani sonli yechishning yangicha yondashuvi taklif qilingan. Minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini yechish algoritmining umumiy blok-sxemasi keltirilgan. Qo'yilgan masalani sonli yechish uchun algoritm va dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan. Dasturiy ta'minotning qisqacha tavsifi keltirilgan. Chegaraviy masalaning sonli yechimi berilgan oraliqlarda yotishi, optimal joylashtirilgan minimal quvvatli issiqlik manbalarining yig'indisi funksionalga minimum berishi konkret misollarda ko'rsatilgan. Hisoblash eksperimentining natijalari vizuallashtirilgan.

Kalit so'zlar: nostatsionar masala, optimal joylashtirish, issiqlik manbalari, konveksiya-diffuziya tenglamalari, M-metod.

RESUME

This work is devoted to the numerical solution of the non-stationary problem of optimal placement of heat sources of minimum power. The statement of the problem requires the simultaneous fulfillment of two conditions. The first condition is to ensure that the temperature is within the limits of minimum and maximum temperatures due to the optimal placement of heat sources with a minimum power in the rectangle. The second condition is that the total power of the heat sources used for heating is minimal. This problem was studied under stationary conditions in the works of other scientists. However, the problem was not considered in the non-stationary case. Since it is difficult to find a continuous solution to the boundary value problem, we are looking for a numerical solution to the problem. It is difficult to find an integral operator with a continuous kernel (Green's function). The numerical value of the Green's function is found in the form of a matrix. A new algorithm for the numerical solution of a non-stationary optimal control problem for the placement of heat sources with a minimum power in processes described by parabolic partial differential equations is proposed. A new technique for numerical solution is proposed. A mathematical and numerical model of the processes described by the convection-diffusion equation given for the first boundary value problem is constructed. The boundary value problem is studied for the two-dimensional case. An implicit finite difference scheme was used to solve the problem numerically. According to this scheme, a system of difference equations was created. The formed system of difference equations is reduced to a linear programming problem. The problem of linear programming is solved using the M-method. For each time value, a linear programming problem is solved. A new approach to the numerical solution of problems is proposed. A general block diagram of the algorithm for solving the non-stationary problem of optimal control of the placement of heat sources with a minimum power is given. An algorithm and software for the numerical solution of the problem have been developed. A brief description of the software is given. On specific examples, it is shown that the numerical solution of the boundary value problem is within the specified limits, the sum of optimally placed heat

sources with a minimum power gives a minimum to the functional. The results of the computational experiment are visualized.

Key words: non-stationary problems, optimal placement, heat sources, convection-diffusion equations, big M-method.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

Халхаджаев Б. Б.

Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина в городе Ташкенте, Ташкентский институт менеджмента и экономики, Узбекистан
xalxadjaev@timeedu.uz

РЕЗЮМЕ

В статье исследуется однозначная разрешимость регулярного обобщенного решения нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева. С использованием модифицированного метода Галеркина, априорных оценок и " ε -регуляризации" доказываются существование и единственность регулярного обобщенного решения. Для доказательства корректности задачи сначала рассматривается вспомогательная задача с уравнением пятого порядка с малым параметром, для которой устанавливаются необходимые априорные оценки. Полученные результаты основываются на применении метода интегралов энергии и теоремы о слабой компактности, что позволяет обосновать сходимость решений при переходе к пределу. Работа опирается на результаты исследований В.Н. Врагова, И.Е. Егорова и С.З. Джамалова, посвященных уравнениям смешанного типа второго и высокого порядков с локальными и нелокальными краевыми условиями.

Ключевые слова: Единственность, разрешимость, регулярное обобщенное решение, уравнение смешанного типа четвертого порядка, нелокальная краевая задача периодического типа, пространство Соболева, регулярное решение, уравнение пятого порядка с малым параметром, метод интегралов энергии, метод Фаэдо-Галеркина, метод априорных оценок, метод " ε -регуляризации".

1. Введение и постановки задачи.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго порядка некорректна [2]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа второго порядка были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [13]. Близкая по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка исследованы в ограниченных областях в работах [6-9],[14]. Нелокальные краевые задачи для уравнения в частных производных высокого порядка без вырождения исследованы многими учеными, полная библиография приведена в работах [11,18,19] а для уравнения смешанного типа высокого порядка с локальными краевыми условиями в различных пространствах исследованы в работах [4,5,10,17], с нелокальными краевыми условиями такие задачи очень мало исследованы [10,20,21]. В данной работе с использованием результатов работ [4,5,9] и с применением модифицированного метода Галеркина, априорных оценок, и " ε -регуляризации" изучается однозначная разрешимость регулярного обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка в пространстве Соболева.

В области $Q = (0, 1) \times (0, T) = \{(x, t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x, t) \quad (1)$$

Здесь

$$Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x, t) D_t^i u, \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xtt} - cu_{xx}.$$

где $K_4(x, t) = K_4(t)$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), $D_t^0 u = u$,

Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены следующие условия:

$$K_4(t) \in C^3(0, T) \cap C[0, T]; \quad K_i(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q}); \quad a, b, c - const > 0.$$

$K_4(0) = K_4(T) = 0$; $D_t^p K_4|_{t=0} = D_t^p K_4|_{t=T}$, ($p = 1, 2$); $K_i(x, 0) = K_i(x, T)$; $i = 0, 1, 2, 3$, для всех $x \in [0, 1]$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [3,9].

Нелокальные краевые условия периодического типа: найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^q u|_{t=0} = D_t^q u|_{t=T}; \quad q = 0, 1, 2 \tag{2}$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}; \quad p = 0, 1, 2, 3 \tag{3}$$

где γ величина отличное от нуля, которое будет уточнено ниже.

В дальнейшем нам необходимы следующее определение и вспомогательные предложения.

Пусть $\vec{e}(e_t, e_x)$; ($e_t = \cos(\vec{e}, t)$, $e_x = \cos(\vec{e}, x)$)—единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q . При получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ [12], то есть

$$\forall u, \vartheta \geq 0; \quad \forall \sigma > 0; \quad 2u \cdot \vartheta \leq \sigma u^2 + \sigma^{-1} \vartheta^2.$$

Определение 1. Назовем функцию $u(x, t)$ регулярным решением задачи (1) – (3), если $u \in W_2^4(Q)$ удовлетворяет уравнения (1) и краевые условия (2),(3) почти всюду в области Q .

Теорема 1. Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x, t)$ – положительная и достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1):

$$-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0, \quad 2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0, \quad \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0,$$

для любых $(x, t) \in \bar{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, для всех $x \in [0, 1]$. Тогда для любого $f(x, t) \in L_2(Q)$, если существует регулярное решение $u(x, t)$ задачи (1) – (3) из пространства Соболева $W_2^4(Q)$, то оно единственно и для нее справедлива следующая априорная оценка:

$$\|u\|_{W_2^4(Q)}^2 \leq c \|f\|_0^2 \tag{4}$$

Далее через c обозначим различные положительные постоянные.

Доказательство. Единственность решения задачи (1) – (3) докажем с помощью метода интегралов энергии. Пусть существует регулярное обобщенное решение задачи (1) – (3) $u(x, t)$ из пространства Соболева $W_2^4(Q)$. Рассмотрим следующее тождество

$$2 \int_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_t \, dx dt = 2 \int_Q f \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_t \, dx dt \tag{5}$$

В силу условий теоремы 1 и неравенства Коши с σ [12], и из краевых условий (2),(3) интегрированием тождества (5) легко получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} 2 \int_Q e^{-\lambda t} Lu \cdot u_t \, dx dt &\geq \int_Q e^{-\lambda t} \left\{ -(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) u_{tt}^2 + \lambda a u_{xx}^2 + \lambda b u_{xt}^2 + \lambda c u_x^2 \right. \\ &\quad \left. + (2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2) u_t^2 + (\lambda K_0 - K_{0t}) u^2 \right\} dx dt - 2\sigma \|u_{tt}\|_0^2 - 4\lambda^4 K \sigma^{-1} \|u_t\|_0^2 \\ &\quad + \int_{\partial Q} e^{-\lambda t} \left\{ 2K_4 u_{ttt} u_t - 2(K_{4t} - \lambda K_4) u_{tt} u_t - K_4 u_{tt}^2 + 2K_3 u_{tt} u_t + 2K_2 u_t^2 - K_0 u^2 \right. \\ &\quad \left. + a u_{xx}^2 + b u_{xt}^2 + c u_x^2 \right\} e_t \, ds + \int_{\partial Q} e^{-\lambda t} \left\{ 2a u_{xxx} u_t - a u_{xx} u_{tx} - 2b u_{xtt} u_t - 2c u_x u_t \right\} e_x \, ds \end{aligned} \tag{6}$$

где через $K = \max \{ \|K_4\|_{C^2(Q)}^2, \|K_3\|_{C^1(Q)}^2 \}$.

Условия теоремы 1 обеспечивают не отрицательность интеграла по области Q и обращение нуль граничных интегралов. Отсюда из неравенства (6) получим

$$2 \int_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_t dx dt \geq \int_Q e^{-\lambda t} \left\{ \delta_3 u_{tt}^2 + \lambda a u_{xx}^2 + \lambda b u_{xt}^2 + \delta_2 u_t^2 + \lambda c u_x^2 + \delta_1 u^2 \right\} dx dt - 2\sigma \|u_{tt}\|_0^2 - 4\lambda^4 \sigma^{-1} K \|u_t\|_0^2 \tag{7}$$

Выбираем в неравенстве (7) постоянные числа δ_3 и δ_2 такие, что

$$\delta_3 - 2\sigma \geq \delta_{03} > 0, \quad \delta_2 - 4\lambda^4 \sigma^{-1} K \geq \delta_{02} > 0.$$

Обозначив

$$\delta = \min \{ \delta_{03}, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_{02}, \delta_1 \},$$

получим из неравенства (7) первую априорную оценку для решения задачи (1)–(3):

$$\|u\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c \|f\|_{L_2(Q)}^2.$$

Теперь докажем единственность регулярного решения задачи (1)–(3).

Докажем эту теорему методом от противного: пусть задача (1)–(3) имеет два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда функция разности $\vartheta(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) с условиями (2), (3). Для нее справедлива первая априорная оценка $\|\vartheta\|_2^2 \leq 0$. Отсюда следует единственность регулярного решения задачи $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

Теперь докажем разрешимость регулярного решения задачи (1)–(3).

2. Уравнение пятого порядка с малым параметром (вспомогательная задача).

Разрешимость задачи (1)–(3) докажем методом "ε-регуляризации" в сочетании с модифицированным методом Галеркина и априорных оценок. А именно, в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ рассмотрим семейство уравнений пятого порядка с малым параметром:

$$L_\epsilon u_\epsilon = -\epsilon \frac{\partial \Delta^2 u_\epsilon}{\partial t} + Lu_\epsilon = f(x, t), \tag{8}$$

с нелокальными краевыми условиями периодического типа:

$$\gamma D_t^q u_\epsilon|_{t=0} = D_t^q u_\epsilon|_{t=T}; \quad q = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{9}$$

$$D_x^p u_\epsilon|_{x=0} = D_x^p u_\epsilon|_{x=1}; \quad p = 0, 1, 2, 3 \tag{10}$$

где ε – малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q = 1, 2, 3, 4, 5$; $D_z^0 w = w$;

$\Delta^2 u = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 u = (\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4})$ – бигармонический оператор.

Ниже используем уравнение пятого порядка с малым параметром (8) в качестве "ε-регуляризирующего" уравнения для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка (1) [3-9].

Через $V(Q)$ ниже будем обозначать пространство функций таких, что $u_\epsilon(x, t) \in W_2^4(Q)$, $\frac{\partial \Delta^2 u_\epsilon}{\partial t} \in L_2(Q)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (9),(10).

Определение 2. Назовем функцию $u_\epsilon(x, t)$ регулярным решением задачи (8)–(10), если $u_\epsilon \in V(Q)$ и удовлетворяет уравнению (8) почти всюду в области Q .

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, $K_3(x, t)$ – положительная достаточно большая функция, кроме того пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (8):

$$-(2K_3 + 3|K_{4t}| + 3\lambda K_4) \geq \delta > 0.$$

Тогда для любой функции $f(x, t) \in W_2^1(Q)$, такой что $\gamma f(x, 0) = f(x, T)$, существует единственное регулярное решение $u_\epsilon(x, t)$ задачи (8)–(10) из пространства $V(Q)$, и для нее справедливы следующие оценки:

$$I) \varepsilon \cdot \left(\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2 \right) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_1 \|f\|_0^2.$$

$$II) \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \leq c_2 \|f\|_1^2.$$

Доказательство. Доказательство неравенства I) проводится так же, как и первой априорной оценки теоремы 1, из которого следует и единственность регулярного решения задачи (8)–(10) (см. [4, 5, 9]).

Приведем доказательство первой априорной оценки.

Пусть $\phi_j(x, t) \in W_2^4(Q)$ – собственные функции следующей задачи:

$$-\Delta^2 \phi_j = - \left(\frac{\partial^4 \phi_j}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^4} \right) = \mu_j^4 \phi_j. \tag{11}$$

$$D_t^p \phi_j|_{t=0} = D_t^p \phi_j|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2, 3 \tag{12}$$

$$D_x^p \phi_j|_{x=0} = D_x^p \phi_j|_{x=1}; \quad p = 0, 1, 2, 3 \tag{13}$$

Из общей теории [1,12,16] линейных самосопряженных эллиптических операторов известно, что все собственные функции задачи (11)–(13) принадлежат пространству $W_2^4(Q)$ и образуют полную ортонормированную систему в $L_2(Q)$.

Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи:

$$P\omega_j \equiv \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \frac{\partial \omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{14}$$

$$\gamma \cdot \omega_j(x, 0) = \omega_j(x, T), \tag{15}$$

где $\gamma = \text{const} \neq 0$, причём $|\gamma| > 1$.

Очевидно, что задача (14), (15) однозначно разрешима, и ее решение имеет вид:

$$P^{-1}\phi_j = \omega_j = \int_0^t \exp\left(\frac{\lambda \tau}{2}\right) \phi_j(\tau) d\tau + \frac{1}{\gamma - 1} \int_0^T \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \phi_j(t) dt.$$

Функции $\omega_j(x, t) \in W_2^5(Q)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{j=1}^N c_j \omega_j = 0$ для некоторого набора c_j , то, применяя оператор P , получим: $\sum_{j=1}^N c_j P\omega_j = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j = 0$. Так как $\{\phi_j\}$ образуют полную систему, то $c_j = 0$ для всех $j = \overline{1, N}$.

Из построения функций $\phi_j(x, t)$ следуют условия на $\omega_j(x, t)$:

$$\gamma \cdot D_t^q \omega_j(x, 0) = D_t^q \omega_j(x, T); \quad q = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{16}$$

$$D_x^p \omega_j|_{x=0} = D_x^p \omega_j|_{x=1}; \quad p = 0, 1, 2, 3 \tag{17}$$

Теперь приближенное решение задачи (8)–(10) ищем в виде $w(x, t) = u_\varepsilon^N(x, t) = \sum_{j=1}^N c_j \omega_j(x, t)$, где коэффициенты c_j для любого j от 1 до N определяются как решение линейной алгебраической системы

$$2 \int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \phi_j dx dt = 2 \int_Q f \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \phi_j dx dt. \tag{18}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (18). Умножая каждое уравнение из (18) на c_j и суммируя по j от 1 до N , учитывая краевые условия (16)–(17) и алгебраическую систему (18), получим тождество

$$2 \int_Q L_\varepsilon w \cdot \exp(-\lambda t) w_t dx dt = 2 \int_Q f \cdot \exp(-\lambda t) w_t dx dt, \tag{19}$$

из которого, в силу условия теоремы 2, интегрированием тождества (19) получим оценку I) для приближенного решения задачи (8)–(10), т.е.

$$\varepsilon \cdot \left(\|u_{\varepsilon ttt}^N\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}^N\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}^N\|_0^2 \right) + \|u_\varepsilon^N\|_2^2 \leq c_1 \|f\|_0^2 \tag{20}$$

Отсюда вытекает разрешимость алгебраической системы (18) [9],[12]. Оценка (20) позволяют, в силу теоремы 1 и теоремы о слабой компактности [12,16] выполнить предельный переход по $N \rightarrow \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\{u_\varepsilon^{N_k}(x, t)\}$ сходится слабо, в силу единственности решения (теорема 1), в пространстве $V(Q)$ к искомому решению $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (8)–(10), обладающему свойствами, указанными в теореме 2 [9,12,16]. Для $u_\varepsilon(x, t)$, в силу (20) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \cdot (\|u_{\varepsilon ttt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon ttx}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon txx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq c_1 \|f\|_0^2 \tag{21}$$

Отсюда получим единственность регулярного обобщенного решения задачи (8)–(10).

Докажем вторую априорную оценку II).

Используя задачу (11)–(15), из тождества (18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2} \int_D L_\varepsilon w \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \Delta^2 P \omega_j dx dt = -\frac{1}{\mu_j^2} \int_D f \cdot \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \Delta^2 P \omega_j dx dt. \tag{22}$$

Умножая каждое уравнение (22) на $2\mu_j^2 c_j$, суммируя по j от 1 до N и учитывая условия (16)–(17), из (22) получим следующее тождество:

$$\int_Q (L_\varepsilon w - f) \cdot e^{-\lambda t} P w dx dt = 0, \tag{23}$$

где

$$P w \equiv \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + 3\lambda^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta w - \frac{\lambda}{2} w_{tt} + \frac{\lambda^2}{16} w_t.$$

Интегрируя (23), с учетом условий теоремы 2 и краевых условий (16), (17), получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} c_2 (\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2) &\geq \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial t} \right\|_0^2 \\ &+ \int_Q e^{-\lambda t} \left\{ -(2K_3 + 3K_{4t} + 3\lambda K_4) w_{tttt}^2 - (2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) w_{ttxx}^2 \right. \\ &+ 2(2K_3 + 3K_{4t} + 3\lambda K_4) w_{tttx}^2 + \lambda a w_{xxxx}^2 + \lambda b w_{xxtt}^2 + \lambda a w_{xxxt}^2 \left. \right\} dx dt \\ &+ \rho \|w\|_3^2 - N_1 \sigma (\|w_{tttt}\|_0^2 + \|w_{ttxx}\|_0^2 + \|w_{tttx}\|_0^2) - N_2 \sigma (\|w_{xxxx}\|_0^2 + \|w_{ttxx}\|_0^2 \\ &+ \|w_{txxx}\|_0^2) - c(\sigma^{-1}, \lambda, K) \|w\|_3^2 + \int_{\partial Q} e^{-\lambda s} B(u(s), K_i(s)) ds, \quad i = \overline{0, 4}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь: ρ – положительная константа, зависящая от нормы функций $K_i(x, t)$ в $C^3(\overline{Q})$; $K = \max \left\{ \|K_4(t)\|_{C^3[0, T]}, \|K_i(x, t)\|_{C^2(\overline{Q})} \right\}$; N_i – натуральные числа, $N = \max\{N_1, N_2\}$; $\sigma, c(\sigma^{-1})$ – коэффициенты из неравенства Коши; $B(u(s), K_i(s))$ – функции, зависящие от следов функции $u(x, t)$ и коэффициентов $K_i(x, t)$ на границе области Q . Пусть $\delta_0 = \min \{\delta, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_3, \delta_2, \delta_1\}$. Учитывая условие теоремы 2, краевые условия (16)–(17) и $\gamma^2 = e^{\lambda T}$ граничные интегралы в (24) обращаются в нуль. Выбирая σ так, чтобы $\delta_0 - N\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $\rho - c(\sigma^{-1}, \lambda, K) \geq \rho_0 > 0$, из неравенства (24) получаем необходимую вторую априорную оценку.

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_\varepsilon^N}{\partial t} \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon^N\|_4^2 \leq c_2 \cdot \left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right) \leq c_2 \|f\|_1^2. \tag{25}$$

Постоянная в правой части (24) не зависит от N , следовательно, из (25) вытекает вторая априорная оценка для приближенного решения задачи (8)–(10). Оценка (21) вместе с оценкой (25), а также теорема о слабой компактности позволяют выполнить предельный переход при $N \rightarrow \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\{u_\varepsilon^{N_k}(x, t)\}$ сходится слабо, в силу единственности решения задачи (8)–(10), в

$V(Q)$ вместе с производными четвертого и пятого порядков к искомому решению $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (8)-(10), обладающему свойствами, указанными в теореме 2 [9,12,16]. По этому для $u_\varepsilon(x, t)$ в силу (25) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_4^2 \leq c_2 \cdot \left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right) \leq c_2 \|f\|_1^2. \quad (26)$$

Используя теорему о слабой компактности и вторую априорную оценку, следует существование регулярного обобщенного решения $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (8)-(10) из пространства $V(Q)$. Тем самым доказана теорема 2.

3. Существование решения задачи (1)–(3).

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^4(Q)$ существует и единственно.

Доказательство. Единственность решения задачи (1)–(3) в пространстве $W_2^4(Q)$ доказана в теореме 1. Докажем теперь существование решения. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (8) и краевые условия (9)–(10) при $\varepsilon > 0$.

Так как выполнены все условия теоремы 2, то существует единственное регулярное решение задачи (8)–(10) при $\varepsilon > 0$ из пространства $V(Q)$, и для него справедливы первая и вторая априорные оценки. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon(x, t)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность в $V(Q)$, такую что

$$\{u_{\varepsilon_i}(x, t)\} \rightharpoonup u(x, t) \quad \text{при} \quad \varepsilon_i \rightarrow 0.$$

Покажем, что предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ (уравнение (1)) почти всюду в Q . Действительно, поскольку $\{u_{\varepsilon_i}(x, t)\}$ слабо сходится в $W_2^4(Q)$, а последовательность

$$\left\{ \sqrt{\varepsilon_i} \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}(x, t)}{\partial t} \right\}$$

равномерно ограничена в $L_2(Q)$, и при этом оператор L линейный, то имеем:

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \cdot \frac{\partial \Delta^2 u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \quad (27)$$

Переходя к пределу в равенстве (27) при $\varepsilon_i \rightarrow 0$, получим единственное регулярное решение задачи (1)-(3) [3-5],[9]. Таким образом, Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122, №4, с. 167–170.
3. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
4. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978, с. 5–13.
5. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995, 133 с.
6. Глазатов С.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, №6, с. 162–164.

7. Джамалов С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве // *Мат. заметки СВФУ*. 2017. № 4, с. 17–28.
8. Джамалов С.З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве // *Журнал Средневожского мат. общества*. 2019. Т. 21, №1, с. 24–33.
9. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент, 173 с.
10. Джамалов С.З., Пятков С.Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка // *Сиб. мат. журнал*. 2020. Т. 61, №4, с. 777–795.
11. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. Москва: Наука, 1980.
12. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973, 407 с.
13. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. Москва: Наука, 1973, 711 с.
14. Каратопраклиева М.Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*. 1991. Т. 27, №1, с. 68–79.
15. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.
16. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 494 с.
17. Чуешев А.В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка // *Сиб. мат. журнал*. 2002. Т. 43, №2, с. 454–472.
18. Amanov D., Kilichov O. Nonlocal boundary value problem for a fourth order differential equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, V. 43, Issue-2, P. 293–302.
19. Apsakov Yu.P., Mamajonov S.M. Boundary value problem for fourth order inhomogeneous equation with variable coefficients, *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, V. 284, Issue-2, P. 153–165.
20. Dzhamalov S.Z., Sipatdinova B.K. Semi-nonlocal boundary problem for a three-dimensional second kind mixed equation in a unbounded parallelepiped, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, V. 44, №3, P. 1137–1144.
21. Fayazov K., Khajiev I. A nonlocal boundary-value problem for a fourth-order mixed-type equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, V. 248, Issue-2, P. 166–174.

ANNOTATSIYA

Maqolada Sobolev fazosida aralash tipdagi ikkinchi tur to'rtinchi tartibli tenglama uchun nolokal periodik chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi uchun mavjudlik va yagonalik isbotlangan. Modifikatsiyalangan Galerkin usuli, aprior baholash va “ ε -regularizatsiya” usullari yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligi ko'rsatiladi. Kichik parametrli beshinchi tartibli yordamchi tenglama ko'rib chiqiladi va ushbu yordamchi masala uchun ham aprior baholar olinadi. Olingan natijalar integral energiya usuli va kuchsiz kompaktnlik xossasi asosida yechimlarning chegaralangan holatda yaqinlashishini asoslash imkonini beradi. Tadqiqot ishi V.N.Vragov, I.Ye.Yegorov va S.Z. Djamalovlarning aralash tipdagi tenglamalar va nolokal chegaraviy masalalarga oid tadqiqotlari asosida olib borilgan.

Kalit so'zlar: Yagonalik, mavjudlik, regular umumlashtirilgan yechim, integral energiya usuli, aralash tipdagi tenglama, nolokal chegaraviy masala, Faedo-Galerkin usuli, aprior baholash usuli, “ ε -regularizatsiya” usuli, Sobolev fazosi, regular yechim, beshinchi tartibli tenglama.

ABSTRACT

This paper investigates the unique solvability of a regular generalized solution to a periodic-type nonlocal boundary value problem for a fourth order mixed-type equations of the second kind in a Sobolev space. Using the modified Galerkin method, a priori estimates, and the " ε -regularization" method, the existence and uniqueness of the solution are proven. An auxiliary fifth-order equation with a small parameter is considered, for which a priori estimates are also established.

The results are based on the application of the energy integral method and the concept of weak compactness, which provides justification for the convergence of solutions under the limiting transition. The study is grounded in the works of V.N. Vragov, I.E. Egorov, S.Z. Dzhamalov, and other researchers devoted to mixed-type equations and nonlocal boundary problems.

Keywords: Uniqueness, solvability, regular generalized solution, energy integral method, mixed-type equation, nonlocal boundary value problem, Faedo-Galerkin method, a priori estimates, " ε -regularization" method, Sobolev space, regular solution, fifth-order equation.

УДК 517

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ****Элмуродова Х. Б.**БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, БУХАРА
h.b.elmurodova@buxdu.uz**РЕЗЮМЕ**

В данной статье рассматривается линейная обратная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения. Доказаны теоремы существования и единственности решения этой обратной задачи. Рассматриваемая задача состоит в восстановлении интегрального ядра, зависящего от времени t , под знаком интеграла. Она относится к области математической физики и является важным примером обратной задачи для уравнения теплопроводности. В качестве прямой задачи изучается задача Коши для псевдопараболического уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: обратная задача, псевдопараболическое уравнение, уравнение Вольтерры, интегро-дифференциальное уравнение, однородное уравнение.

Во многих прикладных задачах возникает необходимость восстановления коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по частичной информации о его решении. Подобные постановки относятся к обратным задачам математической физики, которые в настоящее время представляют собой один из наиболее активно развивающихся разделов прикладной математики [1]. Современное состояние теории обратных задач, методы их решения, а также обширная библиография по данной тематике представлены в ряде фундаментальных монографий, в том числе работах А. Л. Бухгейма [2], С.И.Кабанихина [3], М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова, С.П. Шишатский [4], Ю.Я.Белова [7] и Б.С.Аблабекова [10]. Следует отметить, что теория обратных задач для псевдопараболических уравнений развита существенно слабее по сравнению с аналогичной теорией для классических дифференциальных уравнений второго порядка. Это обусловлено тем, что изучение обратных задач невозможно без глубокой проработки соответствующих прямых задач. Однако теория прямых задач для псевдопараболических уравнений пока ещё находится на стадии становления и далека от завершения. Тем не менее, теория обратных задач для псевдопараболических уравнений в настоящее время развита в меньшей степени по сравнению с теорией для классических уравнений второго порядка, широко применяемых в математической физике. Это объясняется, в первую очередь, тем, что успешное решение обратной задачи предполагает глубокое понимание и проработку соответствующей прямой задачи. Однако теория прямых задач для псевдопараболических уравнений пока остаётся на стадии формирования и далека от завершения. Следует подчеркнуть, что псевдопараболические уравнения описывают широкий спектр сложных динамических процессов в различных областях науки и техники. В частности, к таким уравнениям относится, например, уравнение следующего вида [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t},$$

описывает процесс капиллярных, где u -влажность в долях единицы, x -глубина, t -время, $D(u)$ -коэффициент диффузивности и A - варьируемый коэффициент. Целью данной работы является доказательство теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения ядра в псевдопараболическом интегро-дифференциальном уравнении третьего порядка с переопределением во внутренней точке. Исследование состоит из двух этапов. На первом этапе обратная задача редуцируется к интегральному уравнению типа Вольтерра на основе предварительно полученных результатов по прямым задачам. На втором этапе формулируется и доказывается теорема о существовании и единственности решения данной обратной задачи. Рассмотрим в области $Q_T := \{(x, t) : x \in R, t \in (0, T)\}$ псевдопараболическое интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\tau)(u_{xxt} + u_{xx})(x, \tau) d\tau. \quad (1)$$

Введем необходимые обозначения и пространства. Обозначим через $C_b(\bar{Q}_T)$ -банахово пространство непрерывных и ограниченных на \bar{Q}_T функций с нормой $\|v\|_{C_b} = \sup_{(x,t) \in \bar{Q}_T} |v(x,t)|$; $C_b^{(n,m)}$ -пространство функций $v(x,t)$ таких, что $\frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial t^j} \in C_b$ для $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ с нормой:

$$\|v\|_{C_b^{n,m}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left\| \frac{\partial^{i+j} v}{\partial x^i \partial t^j} \right\|_{C_b}$$

Задача Коши: Найти функцию $u(x,t) \in C_b^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (1) и начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R. \quad (2)$$

Обратная задача. Необходимо определить ядро $k(t)$, $t \in [0, T]$, при условии, что решение задачи Коши, заданной уравнениями (1), (2), известно в фиксированной точке $x_0 \in R$:

$$u(x_0, t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Уравнение (1) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно выражения $u_{xxt} + u_{xx}$. Поэтому мы преобразуем это уравнение так, чтобы под знаком интеграла не содержалось выражение $u_{xxt} + u_{xx}$. Нетрудно проверить прямыми вычислениями, что уравнение (1) эквивалентно следующему виду [11]:

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} = r(0)u - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t-\tau)u(x, \tau) d\tau, \quad (4)$$

где

$$r(t) = k(t) + \int_0^t k(t-\tau)r(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$u_t(x,t) - u_{xxt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (6)$$

где через $f(x,t)$ обозначена правая часть уравнения (4). Положим $v = u_t + u$. Тогда уравнение (6) имеет вид

$$Lv \equiv -v_{xx} + v = u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \quad (7)$$

Известно, что фундаментальное решение оператора L имеет вид [9]:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\delta(t)}{2} e^{-|x|}.$$

Если существует свертка $\varepsilon * [u + f]$, то решение уравнения (7) задается формулой

$$u_t + u = \int_R \varepsilon(x-\xi)[u(\xi,t) + f(\xi,t)] d\xi. \quad (8)$$

Следовательно, задача (4), (2) сводится к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения (8) с начальным условием (2), причем ее решение эквивалентно решению соответствующего интегрального уравнения

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)] d\xi$$

или

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi,\tau) + r(0)u(\xi,\tau)] d\xi$$

$$-u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi. \tag{9}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к интегральному уравнению, решение которого естественно рассматривать в классе ограниченных непрерывных функций $u \in C_b(Q_T)$.

Лемма 1. Пусть $r(t) \in C^1[0, T], u_0(x) \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда интегральное уравнение (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (2) и принадлежащее пространству $C_b(\overline{Q})$.

Доказательство. Для этого используем метод последовательных приближений, представив $u(x, t)$ в виде следующего ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x, t), \tag{10}$$

где $u_n(x, t)$. Для $n \geq 1$ используется следующая формула

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(r(0) + 1)u_{n-1}(\xi, \tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u_{n-1}(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

$$u_0(x, t) = e^{-t}u_0(\xi) - \frac{1}{2} \int_0^t r(\tau)d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)}u_0(\xi)d\xi. \tag{12}$$

Обозначим $V_n(t) = \sup_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u_n(x, t)|$, $r_0 = \max_{t \in [0, T]} |r(t)|$, $0 \leq t \leq T$. Тогда из (12), имеем

$$V_0(t) = \sup_{x \in R} |u_0(x, t)| \leq Me^{-t} + r_0MT(1 - e^{-t}), \tag{13}$$

Далее,

$$V_n(t) = \sup_{x \in R} |u_n(x, t)| \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}V_{n-1}(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \tag{14}$$

где $M = \sup_{x \in R} |u_0(x)|$, $r_{00} := \|r\|_{C^1[0, T]} + T + 1$.

Здесь используется известное равенство: $\frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|}d\xi = 1$. Последовательно применяя оценку (14) при $n = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} |V_1(t)| &\leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}V_0(\tau)d\tau \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}(Me^{-\tau} + Mr_0(1 - e^{-\tau}))d\tau \\ &= r_{00}M \int_0^t e^{-t}d\tau + r_{00}Mr_0 \int_0^t e^{-t}d\tau - Mr_0r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &= r_{00}Me^{-t}\tau \Big|_0^t + r_{00}Mr_0e^{-t}\tau \Big|_0^t - Mr_0r_{00}e^{\tau-t} \Big|_0^t = r_{00}Me^{-t}t + r_0r_{00}Mte^{-t} \\ &\quad - Mr_0r_{00}(1 - e^{-t}) = Mr_{00}te^{-t} + Nte^{-t} + N(1 - e^{-t}), \\ |V_2(t)| &\leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}V_1(\tau)d\tau \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)}[Mr_{00}\tau e^{-\tau} + N\tau e^{-\tau} \\ &\quad + N(1 - e^{-\tau})]d\tau = r_{00} \left[\int_0^t r_{00}e^{-t}M\tau d\tau + \int_0^t e^{-t}N\tau d\tau - \int_0^t e^{-(t-\tau)}Nd\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t Ne^{-t}d\tau \right] = r_{00} \left[Mr_{00} \frac{\tau^2}{2} e^{-t} \Big|_0^t + N \frac{\tau^2}{2} e^{-t} \Big|_0^t + Ne^{-t}\tau \Big|_0^t - Ne^{\tau-t} \Big|_0^t \right] \\ &= r_{00} \left[Mr_{00} \frac{t^2}{2} e^{-t} + N \frac{t^2}{2} e^{-t} + Ne^{-t}t + Ne^{-t}t - N(1 - e^{-t}) \right] \end{aligned}$$

$$\leq Mr_{00}^2 \frac{t^2}{2} e^{-t} + Nr_{00} \left(t + \frac{t^2}{2!}\right) e^{-t} + Nr_{00} (1 - e^{-t}),$$

$$|V_n(t)| \leq Mr_{00}^n \frac{t^n}{n!} e^{-t} + Nr_{00}^{n-1} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}\right) e^{-t} + Nr_{00}^{n-1}.$$

Тогда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \leq Me^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} r_{00}^n \frac{t^n}{n!} + Ne^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} r_{00}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) + N$$

или

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \leq M + N. \tag{15}$$

Решение единственно, поскольку связанное с уравнением (9) однородное уравнение допускает только тривиальное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \times [(r(0) + 1)u(\xi, \tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha]d\xi \tag{16}$$

В самом деле, если $\sup_{x \in R} |u(x, t)| = V(t)$, $0 \leq t \leq T$, то из (16) вытекает

$$V(t) \leq r_{00} \int_0^t e^{-(t-\tau)} V(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{17}$$

Известно, что интегральное неравенство (17) имеет единственное решение: $V(t) \equiv 0$, и следовательно, $u(x, t) \equiv 0$, при $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

Лемма 2. Пусть $u_0 \in C_b^2(R)$, $k \in C^1[0, T]$. Тогда интегральное уравнение (9) имеет решение $C_b(\bar{Q}_T)$, которое является решением задачи (4), (2) и при этом обладает регулярностью $u \in C_b^{(2,1)}(\bar{Q}_T)$.

Доказательство. Покажем, что классическое решение задачи (4), (2), такое что $u \in C_b(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t)] \\ &+ \int_0^t r'(t-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\ &- u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{-t}u_0'(x) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) + u_0(x)r(\tau) \\ &+ \int_0^t r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\ &+ \int_0^t r'(\tau-\alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\ &- u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) \\ &+ r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau-\alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-t}u'_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
 &+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\
 &\quad - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau, \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-t}u''_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\
 &+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
 &- u_0(x)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) \\
 &\quad + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_x^\infty e^{-(\xi-x)} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
 &+ \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau = e^{-t}u''_0(x) - \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
 &- u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
 &\quad \times [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau, \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} &= -e^{-t}u''_0(x) - [u(x, t) + r(0)u(x, t) - u_0(x)r(t) \\
 &+ \int_0^t r'(t - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) \\
 &- u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t)(1 + r(0)) \\
 &- u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
 &\quad \times [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Существование формально полученных производных обоснуем строго. Для этого докажем, что $u_t, u_{xx}, u_{xxt} \in C_b(Q_T)$. Из соотношения (18) следует представление, позволяющее установить требуемую регулярность:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| &\leq \left| -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) \right. \\
 &+ \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi \left. + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \right. \right. \\
 &\left. \left. - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha]d\xi d\tau \right| \leq M(2 + r_0) + \|r\|(M + N) + r_{00}.
 \end{aligned}$$

Из равенства (19) следует:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \left| e^{-t} u'_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \leq C_1 + (M + N)\|r\| + Mr_0 + r_{00},$$

Из (20) и того, что $u_0 \in C_b^2(R)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &\leq \left| e^{-t} u''_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| + \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \\ &\leq C_2 + (M + N)\|r\| + Mr_0 + r_{00}, \end{aligned}$$

В соответствии с (21):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right| &\leq \left| -e^{-t} u'''_0(x) - [u(x, t)(1 + r(0)) + u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] \right| \\ &+ \left| \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \\ &+ \left| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi \right| \\ &+ \left| \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \right| \leq C_2 + 4(M + N)\|r\| + Mr_0 + r_{00}. \end{aligned}$$

где $C_1 = \sup_{x \in R} |u'_0(x)|$, $C_2 = \sup_{x \in R} |u''_0(x)|$.

Теперь покажем, что интегральное уравнение (9), удовлетворяет уравнению (4).

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= -e^{-t} u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau + e^{-t} u''_0(x) \\ &+ [u(x, t) + r(0)u(x, t) - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] \\ &- \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(x, \alpha)d\alpha] d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \\
 & - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) + r(0)u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) + \int_0^t r'(t - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi \\
 & \quad - e^{-t}u_0''(x) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} [u(x, \tau) + r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(\tau) \\
 & + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) + r(0)u(\xi, \tau) \\
 & \quad - u_0(\xi)r(\tau) + \int_0^\tau r'(\tau - \alpha)u(\xi, \alpha)d\alpha] d\xi d\tau \\
 & = r(0)u(x, \tau) - u_0(x)r(t) + \int_0^t r'(t - \tau)u(x, \tau)d\tau.
 \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что решение интегрального уравнения (9) удовлетворяет уравнению (4). Кроме того, из (9) следует, что $u(x, 0) = u_0(x)$. Оценка (15) показывает, что ряд (10) сходится равномерно на \bar{Q}_T .

Лемма 3. Пусть выполнены условия $u_0 \in C_b(R), f(t) \in C^2[0, T]$. Тогда обратная задача (4), (2), (3) для $(x, t) \in Q_T$ эквивалентна следующей задаче: требуется найти функции $u(x, t), u_t(x, t), r(t), r'(t)$ удовлетворяющие заданной системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
 - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi,
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 u_t(x, t) = -e^{-t}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} [u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t) \\
 - \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
 \times [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 r(t) = \frac{1}{\theta} [-f'(t) - e^{-t}u_0(x_0) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u(\xi, t) \\
 - \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
 \times [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau],
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 r'(t) = \frac{1}{2\theta} [-f''(t) + e^{-t}u_0(x_0) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u_t(\xi, t) - r'(t)u_0(\xi) \\
 - \int_0^t r'(\alpha)u_t(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} [u(\xi, t) - r(t)u_0(\xi) \\
 - \int_0^t r'(\alpha)u(\xi, t - \alpha)d\alpha] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [u(\xi, \tau) - u_0(\xi)r(\tau) \\
 - \int_0^\tau r'(\alpha)u(\xi, \tau - \alpha)d\alpha] d\xi d\tau],
 \end{aligned} \tag{25}$$

где $\theta = \theta(x_0) = \int_R u_0(\xi)e^{-|x_0-\xi|} d\xi$.

Доказательство. Уравнение (22) совпадает с уравнением (9). Дифференцируя его по переменной t , получаем уравнение (23). Подставляя в (23) $x = x_0$ и используя дополнительное условие (3), дифференцированное по t , $f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t)$, после несложных вычислений приходим к уравнению (24). Дифференцируя уравнение (24) по t , получаем уравнение (25).

Теорема. Пусть выполнены условия лемма 1 и 3, а также выполняется равенство $u_0(x_0) = f(0)$. Тогда при достаточно малом $T > 0$ решение обратной задачи (1)-(3) в классе $k(t) \in C^1[0, T]$ существует и является единственным.

Доказательство. Представим систему (22)-(24) в виде операторного уравнения

$$\psi = A\psi, \tag{26}$$

где ψ вектор-функция с компонентами

$$\psi = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t), \psi_3(x, t), \psi_4(x, t))$$

$$\psi_1(x, t) = u(x, t); \quad \psi_2(x, t) = u_t(x, t) - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} (u(\xi, t) - u_0(\xi)r(t))d\xi;$$

$$\psi_3(x, t) = \psi_3(t) = r(t) - \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \psi_1(\xi, t)d\xi;$$

$$\psi_4(x, t) = \psi_4(t) = r'(t) - \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} (u_t(\xi, t) - u(\xi, t))d\xi + \theta r(t) \right]; \quad \text{а оператор } A = [A_i]_{i=1}^4$$

действует на вектор-функции с компонентами $\psi_i \in C[Q_T]$, и в соответствии с уравнениями (22)-(24) задаётся равенствами

$$\begin{aligned} A_1\psi &= \psi_{01}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau)d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha)d\alpha_2)d\alpha_1]d\eta) \psi_1(\eta, \tau - \alpha)d\alpha]d\xi, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} A_2\psi &= -\psi_{01}(x, t) - \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \right. \\ &\quad \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\quad \times \psi_1(\alpha_2, \alpha)d\alpha_2])d\alpha_1]d\eta) \psi_1(\xi, t - \alpha)d\alpha]d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\ &\quad \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau)d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1) \right. \\ &\quad \times (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha)d\alpha_2)(\psi_3(\alpha) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha)d\alpha_2)d\alpha_1]d\eta) \psi_1(\xi, \tau - \alpha)d\alpha]d\xi, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} A_3\psi &= \psi_{03}(t) - \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \right. \right. \\ &\quad \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha)d\alpha_2])d\alpha_1]d\eta) \psi_1(\xi, t - \alpha)d\alpha]d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
 & \quad \times \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
 & \quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_3(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi, \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4\psi & = \psi_{04}(t) - \frac{1}{\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
 & \quad \times (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\
 & \quad \times \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta] (\psi_2(\xi, t - \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\xi-\eta|} (\psi_1(\eta, t - \alpha) - u_0(\eta) \\
 & \quad \times (\psi_3(t) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, t - \alpha) d\alpha_1)) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} \\
 & \quad \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \\
 & \quad - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} [\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \\
 & \quad \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
 & \quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2)] d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\xi d\tau. \tag{30}
 \end{aligned}$$

где также введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \psi_0 & = (\psi_{01}(x, t), \psi_{02}(x, t), \psi_{03}(t), \psi_{04}(t)), \\
 \psi_{01}(x, t) & = e^{-t} u_0(x); \quad \psi_{02}(x, t) = -\psi_{01}(x, t); \\
 \psi_{03}(t) & = \frac{1}{\theta} [-f'(t) + e^{-t} u_0(x_0)]; \quad \psi_{04}(t) = \frac{1}{\theta} [-f''(t) + e^{-t} u_0(x_0)].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим функциональное пространство вектор-функций $\psi \in C(Q_T)$, где $Q_T := \{(x, t) | x \in R, t \in (0, T)\}$. Введем обозначения: $B_d(\psi_0)$ - множество функций, для которых справедливо следующее условие

$$\|\psi - \psi_0\|_{C(\bar{Q}_T)} \leq d.$$

Очевидно, что $\|\psi\| \leq d + \|\psi_0\| = d_0$. Докажем, что оператор A является сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$, если число T достаточно мало. Напомним, что оператор называется сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$, если выполнены следующие два условия:

1) если $\psi \in B_d(\psi_0)$ то $A\psi \in B_d(\psi_0)$, 2) если ψ^1, ψ^2 произвольные элементы $B_d(\psi_0)$, то $\|A\psi^1 - A\psi^2\|_T \leq k\|\psi^1 - \psi^2\|_T$ в котором $k < 1$.

Проверим выполнение первого из этих условий. Пусть $\psi \in B_d(\psi_0)$. Кроме того, для $(x, t) \in Q_T$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
 \|A_1\psi - \psi_{01}\| & = \|\psi_1 - \psi_{01}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \left\| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) \right. \\
 & \quad \left. - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1] d\eta \right] \psi_1(\eta, \tau - \alpha) d\alpha \Big] d\xi \Big\| \\
 & = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) \right. \\
 & \quad \left. - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\eta, \tau - \alpha) d\alpha \right] d\xi \Big\| \\
 & \leq \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T + \left((1 + \theta) d_0 + \frac{1}{2\theta} \right. \\
 & \quad \left. \times (2 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta})) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} = \beta_1(T) \leq d, \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|A_2\psi - \psi_{02}\| & = \|\psi_2 - \psi_{02}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} \left| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] \right. \\
 & \quad \left. \times (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha \right] d\xi \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \\
 & - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \\
 & \quad \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) (\psi_3(\alpha) \\
 & \quad + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha \Big] d\xi \Big\| \\
 & \leq \left(2 + \theta + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T + \frac{d_0^2}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) T \\
 & \quad + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} = \beta_2(T) \leq d, \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|A_3\psi - \psi_{03}(t)\| & = \|\psi_3 - \psi_{03}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} \left| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \theta \psi_3(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - u_0(\alpha_1)] (\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, t - \alpha) d\alpha \right] d\xi \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi) (\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \\
 & \quad \times \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta \psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \\
 & + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_3(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta \psi_1(\xi, \tau - \alpha) d\alpha] d\xi \Big| \\
 \leq & \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 T + \left(1\gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T \right. \\
 & \left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} \right] = \beta_3(T) \leq d, \tag{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|A_4\psi - \psi_{04}(t)\| = & \|\psi_4 - \psi_{04}\|_{C(\bar{Q}_T)} = \max_{(x,t) \in Q_T} \left| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \right) (\psi_2(\xi, t - \alpha) - u_0(\eta) \right. \\
 & \left. (\psi_3(t) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_1|} \psi_1(\alpha_1, t - \alpha) d\alpha_1) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} \right. \\
 & \left. \times [\psi_1(\xi, \tau) - u_0(\xi)(\psi_3(\tau) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \psi_1(\eta, \tau) d\eta) \right. \\
 & \left. - \int_0^\tau (\psi_4(\alpha) + \theta\psi_3(\alpha) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2(\eta, \alpha) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \right. \right. \\
 & \left. \left. \times [\psi_1(\alpha_1, \alpha) - u_0(\alpha_1)(\psi_3(\alpha) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \psi_1(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] \psi_1(\xi, \tau - \alpha) \right] d\xi d\tau \right| \\
 \leq & \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 T + \left(3 + 2\gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) d_0 T \right. \\
 & \left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \right) d_0^2 \frac{T^2}{2} \right] = \beta_4(T) \leq d. \tag{34}
 \end{aligned}$$

Пусть $T_1 = \min_{T>0} \{\beta_1(T), \beta_2(T), \beta_3(T), \beta_4(T)\} \leq d$. Тогда $\forall t \in [0, T], AB_d(\psi_0) \subset B_d(\psi_0)$. Теперь проверим выполнение второго условия. Пусть $\psi^k = (\psi_1^k, \psi_2^k, \psi_3^k, \psi_4^k)$ и $\psi^k \in B_d(\psi_0), k = 1, 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 \|A_1\psi^1 - A_1\psi^2\| = & \left\| \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) - u_0(\xi) \right. \\
 & ((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) \\
 & + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) - u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \right. \\
 & \left. \left. \times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2) d\alpha_1) d\eta] (\psi_1^1(\eta, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\eta, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \right\| \\
 \leq & \|\psi^1 - \psi^2\| \left| \int_0^t ((1 + 2\gamma_0) + \int_0^\tau (1 + \theta + \frac{1}{\theta} (1 + \gamma_0 + \frac{1}{\theta} 2d_0) d\alpha) d\tau \right| \leq [(1 + 2\gamma_0)T
 \end{aligned}$$

$$+ \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(1 + \gamma_0 + 2d_0)\right) \frac{T^2}{2} \|\psi^1 - \psi^2\| \leq k_1(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \|A_2\psi^1 - A_2\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{2} \int_R e^{-|x-\xi|} \int_0^t [(\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha))] \right. \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times (\psi_1^1(\xi, t - \alpha) - \psi_1^2(\xi, t - \alpha)) d\alpha] d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) \\ &- u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) \\ &+ \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} \right. \\ &\times [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) - u_0(\alpha_1)(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] (\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} \\ &\times (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \Big\| \\ &\leq \|\psi^1 - \psi^2\| \left[\left(\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(6 + 2\gamma_0)d_0\right) + (1 + 2\gamma_0)d_0 \right) T \right. \\ &\left. + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(4d_0 + \frac{2d_0}{\theta})\right) \frac{T^2}{2} \right] \leq k_2(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \tag{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_3\psi^1 - A_3\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\xi|} \int_0^t (\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) \right) \right. \\ &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1) d\eta] \\ &\times (\psi_1^1(\xi, t - \alpha) - \psi_1^2(\xi, t - \alpha)) d\alpha] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0-\xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) \\ &- u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta) \\ &\times \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0-\eta|} \right. \\ &\times ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha)) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta-\alpha_1|} (\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \\ &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0-\alpha_2|} (\psi_3^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_3^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] \\ &\left. \left. d\alpha_1) d\eta] (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha)) d\alpha] d\xi \right\| \leq \|\psi^1 - \psi^2\| \\ &\times \left| \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} \left(1 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{2\theta}\right)\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{\theta} \left(2d_0 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{\theta}\right)\right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) \frac{T^2}{2} \|\psi^1 - \psi^2\| = k_3(T) \|\psi^1 - \psi^2\|, \tag{37} \\
 \|A_4\psi^1 - A_4\psi^2\| &= \left\| \frac{1}{\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \xi|} \int_0^t ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha))) \right. \right. \\
 &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha))) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\
 &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1 d\eta] \\
 &\times ((\psi_2^1(\xi, t - \alpha) - \psi_2^2(\xi, t - \alpha))) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\xi - \eta|} ((\psi_1^1(\eta, t - \alpha) - \psi_1^2(\eta, t - \alpha))) \\
 &- u_0(\eta)((\psi_3^1(t) - \psi_3^2(t)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_1|} (\psi_1^1(\alpha_1, t - \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, t - \alpha)) d\alpha_1] d\eta \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_R e^{-|x_0 - \xi|} e^{-(t-\tau)} [(\psi_1^1(\xi, \tau) - \psi_1^2(\xi, \tau)) - u_0(\xi)((\psi_3^1(\tau) - \psi_3^2(\tau)) \\
 &+ \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} (\psi_1^1(\eta, \tau) - \psi_1^2(\eta, \tau)) d\eta] - \int_0^\tau ((\psi_4^1(\alpha) - \psi_4^2(\alpha)) + \theta(\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha))) \\
 &+ \frac{1}{2\theta} \left[\frac{1}{2} \int_R e^{-|x_0 - \eta|} ((\psi_2^1(\eta, \alpha) - \psi_2^2(\eta, \alpha))) + \frac{1}{2} \int_R e^{-|\eta - \alpha_1|} [(\psi_1^1(\alpha_1, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_1, \alpha)) \right. \\
 &- u_0(\alpha_1)((\psi_3^1(\alpha) - \psi_3^2(\alpha)) + \frac{1}{2\theta} \int_R e^{-|x_0 - \alpha_2|} (\psi_1^1(\alpha_2, \alpha) - \psi_1^2(\alpha_2, \alpha)) d\alpha_2] d\alpha_1 d\eta] \\
 &\left. \left. \times (\psi_1^1(\xi, \tau - \alpha) - \psi_1^2(\xi, \tau - \alpha)) \right] d\xi d\tau \right\| \leq \|\psi^1 - \psi^2\| \\
 &\times \left| \frac{1}{\theta} \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta} \left(2 + \gamma_0 d_0 \left(2 + \frac{1}{\theta}\right)\right) 1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) T \right| + \|\psi^1 - \psi^2\| \\
 &\times \left| \frac{1}{\theta} \left(2d_0 \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) T + \left(2d_0(1 + \theta) + \frac{d_0}{\theta} \left(2 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right)\right) \frac{T^2}{2} \right) \right| \\
 & k_4(T) \|\psi^1 - \psi^2\|. \tag{38}
 \end{aligned}$$

$\|A\psi^1 - A\psi^2\|_T \leq k \|\psi^1 - \psi^2\|_T$, где $k < 1$, если $T > 0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
 (1 + 2\gamma_0)T + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(1 + \gamma_0 + 2d_0)\right) \frac{T^2}{2} &= k_1 < 1, \\
 \left(\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(6 + 2\gamma_0)d_0\right) + (1 + 2\gamma_0)d_0\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(4d_0 + \frac{2d_0}{\theta})\right) \frac{T^2}{2} &= k_2 < 1, \\
 \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{\theta}(1 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{2\theta})\right) T + \left(1 + \theta + \frac{1}{\theta}(2d_0 + \gamma_0 d_0 + \frac{d_0}{\theta})\right) \right. \\
 &\left. \times \left(1 + \gamma_0 \left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\right) \frac{T^2}{2} \right] = k_3 < 1, \tag{39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\theta} \left[\left(1 + \theta + \frac{1}{2\theta}(2 + \gamma_0 d_0 (2 + \frac{1}{\theta})) + 1 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta})\right) T \right. \\
 & \left. + 2d_0 (1 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta})) T + \left(2d_0(1 + \theta) + \frac{d_0}{\theta} (2 + \gamma_0 (1 + \frac{1}{\theta}))\right) \frac{T^2}{2} \right] = k_4 < 1.
 \end{aligned}$$

Таким образом, если число T достаточно мало, так что выполняется условие (39), то оператор A является сжимающим на множестве $B_d(\psi_0)$. Тогда, согласно принципу сжимающего отображения Банаха, уравнение (26) имеет единственное решение в пространстве $B_d(\psi_0)$.

Заключение. Автор статьи считает, что новизна данной работы заключается в теореме о существовании и единственности решения обратной задачи по определению ядра интегрального члена псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с условием переопределения во внутренней точке отрезка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мегралиев Я.Т., Исмаилов А.И.. Обратная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с неклассическими краевыми условиями. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 8 (2), 2018, 83-97.
2. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л.Бухгейм. Новосибирск: Наука, 1988. 183 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шипатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., Наука, 1980. 288 с.
5. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / М.: Наука, 1984. 254 с.
6. Чудновский А.Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Belov Yu.Ya., *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Utrecht, VSP, 2002.
8. Лыков А.В., Эффект инерционности в теплообменных явлениях. *ИФЖ*, 9(2), 1965.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.-528 с.
10. Аблабеков Б. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Saarbrucken 2013.
11. Durdiev D.K., Shishkina E., Sitnik S. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, 42 (6), pp. 1264-1273.

REZYUME

Ushbu maqolada biz psevdoparabolik integrodifferensial tenglama uchun chiziqli bo'lmagan teskari muammoni ko'rib chiqamiz. Ko'rib chiqilayotgan teskari masalaning yagona yechilishi haqidagi tegishli teoremlar isbotlangan. Psevdoparabolik integro-differensial issiqlik tarqalish tenglamasi integral hadi yadrosini aniqlash masalasi matematik fizikaning teskari masalalar sohasiga tegishli bo'lib, ushbu maqolada integral ostidagi t vaqt o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan yadroni topish masalasi o'rganilgan. To'g'ri masala sifatida issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi qaralgan.

Kalit so'zlar: teskari masala, psevdoparabolik tenglama, Volterra tenglamasi, bir jinsli tenglama, integrodifferensial tenglama.

RESUME

This paper investigates a nonlinear inverse problem for a pseudoparabolic integro-differential equation. Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the considered inverse problem are established. The problem involves determining an integral kernel, depending on time t , under the integral sign. It belongs to the field of inverse problems in mathematical physics and is considered in the context of heat conduction equations. The direct problem is formulated as a Cauchy problem for a pseudoparabolic heat conduction equation.

Key words: inverse problem, pseudoparabolic equation, Volterra equation, homogeneous equation, integro-differential equation.