



O'ZMU XABARLARI

ВЕСТНИК НУУЗ

АСТА NUUZ

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETINING ILMIIY JURNALI

**JURNAL 1997
YILDAN
CHIQA
BOSHLAGAN**

**2025
2/2.1
Aniq
fanlar**

Bosh muharrir:

MADJIDOV I. U. – t.f.d., professor

Bosh muharrir o'rinbosari:

ERGASHOV Y. S. – f.-m.f.d., professor

Tahrir hay'ati:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------------|
| Ayupov Sh. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Alimov Sh. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Sadullayev A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Roziqov O'. A. | – f.-m.f.d., prof., O'zR FA akademigi |
| Aripov M. M. | – f.-m.f.d., prof. |
| Zikirov O. S. | – f.-m.f.d., prof. |
| Abdushukurov A.A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Aloyev R. J. | – f.-m.f.d., prof. |
| Ganixodjayev R. N. | – f.-m.f.d., prof. |
| Narmonov A. Y. | – f.-m.f.d., prof. |
| Raximov A. A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Beshimov R. B. | – f.-m.f.d., prof. |
| Shoimqulov B. A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Axmedov A.B. | – f.-m.f.d. prof. |
| Sharipov O.Sh. | – f.-m.f.d., prof. |
| Mamadaliyev N.A. | – f.-m.f.d., prof. |
| Xudoyberdiyev A.X. | – f.-m.f.d., prof. |
| Xudoyberganov G. | – f.-m.f.d., prof. |
| Matyakubov A. S. | – f.-m.f.d., prof. |

Mas'ul kotib: f.-m.f.d. (PhD) dots. **G'aybullayev R.Q.**

TOSHKENT – 2025

◇ MUNDARIJA ◇ CONTENTS ◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇

Abdukhadov A. A. Coefficients of optimal quadrature formula with parameter	4
Abdushukurov A. A., Muradov R. S. Noninformative Statistical Models: An Alternative Proof of the Cramér-Rao Inequality under Random Censoring	11
Akramov N. S. Capacity of the α -Brjuno-Rüssmann set	16
Allaberdiyev B. B., Matlatipov S. G', Mavlonova M. M. Atoqli otlarni aniqlashning annotatsiya qoidalari va matematik modellari	22
Azizov A. N. Criterion of completeness for two-sided ideals of compact operators	30
Ergashov R. E. The Fokas' method for heat transfer equation on symmetric graphs	35
Eshimbetov M. R., Eshimbetov J. R., Ashurova N. A. On the solution of a system max-plus linear equations in three variables	42
Gaybullaev R. K., Solijanov G. O., Some solvable compatible Lie extensions of a nilpotent compatible Lie algebra	51
Jabborov N. M., Yusupova Sh. B., One of the mathematical models of economic, social and environmental sustainability in tourism	58
Karimov Sh. T., Boynazarov A. N. The cauchy problem for a high-order ordinary differential equation involving the bessel operator and lower-order terms	64
Matlatipov S. G', Rajabov J. Sh., Allaberdiyev B. B. O'zbek tilidagi sharhlar uchun konturli konvolyutsion neyron tarmoqiga asoslangan aspekt vektorlashtirishning uch bosqichli sentiment tahlili modeli	73
Matlatipov S. G'. O'zbek tili uchun universal bog'liqlik daraxti korpusi asosida chuqur bi-affin tobelik tahlilining neyron modeli	85
Matyakubov A. S., Salimov J. I. To the properties of the solutions of a non-divergent nonlinear parabolic system describing the processes of combustion	94
Maxkamov E. M. Uchinchi tur klassik soha yordamida aniqlangan matritsaviy poliedrda Bishop integral formulasi	103
Muxtorov I. G'. Central limit theorem for autoregressive processes with values in $L_p[0, 1]$	108
Rajabov Sh. Sh. Ikkinchi tip klassik sohalarda laplas almashtirishi, teskari laplas almashtirish formulasi va tasvir funksiyaning golomorfligi haqidagi teoremaning analogi	114
Sharipov A. S., Usmonxo'jayev Z. Y. On the construction of geodesic mappings for surfaces of revolution	120
Sharipova A. S. On the solvability of the Cauchy problem for the Biharmonic equation	126
Sulaymonov I. A. New properties of the Mittag-Leffler function and its applications	132
Usmonov J. B. The dynamics of piecewise-continuous Volterra QSO on S^2	143
Yarmetova D. I. Self similar solution and they asymptotic behavior of nonlinear diffusion problem with Neuman boundary condition in multidimensional space	151
Жураев Т. Ф., Турсунова З. О. Гомотопические плотные подмножества и их одноточечная компактификация пространства всех вероятностных мер	158
Ибрагимов Ф. Н. О невычислимых позитивных представлениях областей целостностей ..	167
Мамадалиев Н. А., Васиёва Х. Г. Метод разрешающих функций для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков	172
Мамадалиев Н. А., Ибайдуллаев Т. Г. Квазилинейная игра преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа	180
Маматова Н. Т. Исследование волнового движения в упругом стержне с аппроксимацией закона трения	189
Тиллаев Д. Р. Свойства сферического отображения поверхностей с вершинами	196
Тожиев Р. И. Определение составляющих базис-вектора для участков нулевой тяги в гравитационном поле Гарфинкеля	202

Турсунмуротов Д. Х., Ходжаев Ш. А. Формирование прецедентной базы на основе компактности классов и структурного анализа данных	209
Хайдаров И. К. Термодинамически согласованная модель теории пороупругости химически активного глинистого сланца	217
Хайиткулов Б. Х. Численное решение нестационарной задачи управления конвекцией-диффузией в двумерном случае	223

UDC 519.644

COEFFICIENTS OF OPTIMAL QUADRATURE FORMULA WITH PARAMETER

ABDUAKHADOV ALIBEK AKMAL UGLI

BUKHAR STATE UNIVERSITY, TASHKENT INTERNATIONAL UNIVERSITY

alibekabduaxadov@gmail.com

RESUME

In this paper, we study the problem of constructing an optimal quadrature formula in the sense of Sard. When constructing a quadrature formula, the method of φ -function is used. The error of the formula is estimated from above using the integral of the square of the function φ from a specific Hilbert space. Next, such a φ function is selected, and the integral of the square in the interval takes the smallest value. The coefficients of the optimal quadrature formula are calculated using the resulting φ function.

Key words: Hilbert space; phi-function method; optimal quadrature formula; error quadrature formula.

Introduction

The construction of optimal quadrature formulas is one of the central problems in numerical analysis and computational mathematics, particularly when dealing with function spaces endowed with Sobolev-type norms. In such contexts, developing integration methods that minimize the worst-case error is both theoretically and practically important for applications in physics, engineering, and scientific computing.

In this study, we consider the problem of constructing an optimal quadrature formula of the form

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k} f'(x_k) + R_n(f), \quad (1)$$

which involves both the values of the function and its first derivative at certain nodes $x_k \in [a, b]$. The goal is to determine the coefficients A_{0k}, A_{1k} that minimize the worst-case integration error over the Sobolev-type space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$, equipped with the norm

$$\|f\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \left(\int_a^b (f''(x) + \sigma f'(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

The problem is approached in the sense of Sard optimality, which reduces to minimizing the norm of a linear functional defined by the error of the quadrature formula. By applying the Cauchy-Schwarz inequality, the error functional can be bounded by the product of the norm of the integrand in the given Sobolev space and the L_2 -norm of an auxiliary function $\varphi(x)$ defined by the quadrature coefficients and the form of the formula. Therefore, the optimality problem becomes equivalent to minimizing the quantity

$$F_n(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \int_a^b \varphi^2(x) dx$$

subject to the constraint that $\varphi(x)$ satisfies the adjoint condition of the integration operator, derived via Green's formula. Here A_0, A_1 depends on the values of φ at nodes.

To solve this minimization problem, we divide the interval $[a, b]$ into n subintervals and construct piecewise-defined functions $\varphi_k(x)$ on each subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, which solve the differential equation

$$y''(x) - \sigma y'(x) = 1,$$

and determine their coefficients C_k, D_k by minimizing the corresponding functionals

$$\mathcal{F}_k(C_k, D_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x) dx.$$

These lead to explicit expressions for $\varphi_k(x)$ in exponential-polynomial form. Using these expressions, we then compute the optimal coefficients A_{0k} and A_{1k} for the quadrature formula, ensuring that the overall error is minimized.

Statement of the problem

In this work, we study the construction of an optimal quadrature formula using the method of φ -functions. As we said in Section 1, here we consider a quadrature formula of the form (1) In this regard, consider a quadrature formula of the form

where A_{0k}, A_{1k} and x_k are coefficients and nodes of the quadrature formula. Let the nodes of the formula be located on the segment $[a, b]$ as follows

$$a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b, \tag{2}$$

and $R_n(f)$ is the residual of formula (1).

Suppose that the integrand function f is from the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$, where $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$ is the Hilbert space of absolutely continuous functions that are quadratically integrable with the second-order derivative on the interval $[a, b]$. The inner product of any two functions $f(x)$ and $g(x)$ from this space is defined by the following formula

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b (f''(x) + \sigma f'(x))(g''(x) + \sigma g'(x)) dx, \tag{3}$$

where $\sigma \in \mathbb{R}$ and $\sigma \neq 0$. This space is provided with the corresponding norm

$$\|f(x)\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \left(\int_a^b (f''(x) + \sigma f'(x))^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

One of the important problems in the theory of quadrature formulas is the problem of the optimality of quadrature formulas relative to the error of this formula. In this paper, we will consider the problem of optimality of a formula in the sense of Sard. We use the one-to-one correspondence between quadrature formulas and φ function in this.

For convenience, we introduce the multi-index notations

$$\mathbf{A}_0 = (A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0n}), \mathbf{A}_1 = (A_{10}, A_{11}, \dots, A_{1n}) \quad \text{and} \quad \mathbf{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n). \tag{5}$$

Definition 1. The quadrature formula (1) is called optimal in the sense of Nikolsky in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$, if the value

$$F_n(W_{2,\sigma}^{(2,1)}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{X}) = \sup_{f \in W_{2,\sigma}^{(2,1)}} |R_n(f)| \tag{6}$$

reaches its smallest value relative to $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ and \mathbf{X} . Where $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ and \mathbf{X} are defined in (5).

Definition 2. The quadrature formula (1) is called optimal in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$ if the quantity

$$F_n(W_{2,\sigma}^{(2,1)}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \sup_{f \in W_{2,\sigma}^{(2,1)}} |R_n(f)| \tag{7}$$

reaches its smallest value relative to \mathbf{A}_0 and \mathbf{A}_1 for fixed \mathbf{X} .

In this work, we solve the problem of constructing an optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$, that is, we find such coefficients of the formula (1) that satisfy the condition (7). In this case, we use the method of the φ -function.

Method of φ - function for constructing quadrature formulas in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$

In this section, we explain the method of φ - function for constructing optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$.

Let functions $f(x)$ be from the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$ and for a given positive integer n the nodes of the quadrature formula under consideration are located as in (5). Then for each subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, consider the function φ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ having the following property

$$\varphi_k''(x) - \sigma\varphi_k(x) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

Then the function φ is defined as follows

$$\varphi|_{[x_{k-1}, x_k]} = \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{9}$$

That is, the restriction of the function φ to the interval $[x_{k-1}, x_k]$ is equal to φ_k . Let us introduce the following notations

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx, \tag{10}$$

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_{0k}f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k}f'(x_k). \tag{11}$$

Now, using the property of additivity of a definite integral, taking into account the equality (8), from (10), we have

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b 1 \cdot f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\varphi_k''(x) - \sigma\varphi_k'(x))f(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left((\varphi_k'(x) - \sigma\varphi_k(x))f(x) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\varphi_k'(x) - \sigma\varphi_k(x))f'(x)dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k'(x_k) - \sigma\varphi_k(x_k))f(x_k) + (\varphi_n'(x_n) - \sigma\varphi_n(x_n))f(x_n) - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_{k+1}'(x_k) - \sigma\varphi_{k+1}(x_k))f(x_k) \\ &\quad - (\varphi_1'(x_0) - \sigma\varphi_1(x_0))f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(x_k)f'(x_k) - \varphi_n(x_n)f'(x_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k+1}(x_k)f'(x_k) + \varphi_1(x_0)f'(x_0) + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)(f''(x) + \sigma f'(x))dx \end{aligned}$$

From here denoting we have

$$R_n(f) = - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)(f''(x) + \sigma f'(x))dx$$

$$I(f) = -(\varphi_1'(x_0) - \sigma\varphi_1(x_0))f(x_0)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) - \sigma(\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k)))f(x_k) + (\varphi_n'(x_n) - \sigma\varphi_n(x_n))f(x_n) + \varphi_1(x_0)f'(x_0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_{k+1}(x_k) - \varphi_k(x_k))f'(x_k) - \varphi_n(x_n)f'(x_n) + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)(f''(x) + \sigma f'(x))dx \\
 & = \sum_{k=0}^n A_{0k}f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k}f'(x_k) + R_n(f).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Consequently from (12), we get

$$\begin{aligned}
 A_{00} & = -(\varphi'_1(x_0) - \sigma\varphi_1(x_0)), \\
 A_{0k} & = \varphi'_k(x_k) - \varphi'_{k+1}(x_k) - \sigma(\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k)), k = 1, 2, \dots, n - 1, \\
 A_{0n} & = \varphi'_n(x_n) - \sigma\varphi_n(x_n), \\
 A_{10} & = \varphi_1(x_0), \\
 A_{1k} & = \varphi_{k+1}(x_k) - \varphi_k(x_k), k = 1, 2, \dots, n - 1, \\
 A_{1n} & = -\varphi_n(x_n),
 \end{aligned} \tag{13}$$

and the error of the formula (1) has the form

$$R_n(f) = - \left(\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k(x)(f''(x) + \sigma f'(x))dx - \int_a^b \varphi_k(x)(f''(x) + \sigma f'(x))dx \right) \tag{14}$$

Remark 1. Knowing the function φ we can find the coefficients A_{0k}, A_{1k} $k = 0, 1, \dots, n$ from (13). This method of constructing a quadrature formula is called the method of φ - function.

Remark 2. From the expression (14) it is clear that the quadrature formula (1) is exact on functions that is a solution to the equation

$$f''(x) + \sigma f'(x) = 0. \tag{15}$$

The optimality problem for a quadrature formula of the form (1)

In this section, we discuss the problem of optimality of a quadrature formula of the form (1) in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$.

Using the Cauchy-Schwartz inequality for the absolute value of the error (14) of the quadrature formula (1) we have the following

$$|R_n(f)| \leq \|f''(x) + \sigma f'(x)\|_{L_2(a,b)} \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx \right)^{1/2} = \|f(x)\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} \|\varphi(x)\|_{L_2(a,b)}. \tag{16}$$

It should be noted that here the task of constructing an optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$ is the task of finding the coefficients $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ (for fixed nodes \mathbf{X} satisfying the condition (2)) giving the smallest value to the quantity

$$F_n(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) = \int_a^b \varphi^2(x)dx. \tag{17}$$

In turn, this problem is equivalent to finding functions $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots, n$, satisfying equation (8) and giving the smallest value to quantity (17) on each interval $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$.

Next, from the beginning we find the functions $\varphi_k(x), k = 1, 2, \dots, n$ that give the smallest value to quantity (17) and then using the formulas (13) we calculate coefficients $A_{0k}, A_{1k}, k = 0, 1, \dots, n$ of the optimal quadrature formula (1).

Finding functions φ_k

Now we are engaged in finding the functions φ_k on each interval $[x_{k-1}, x_k]$ for $k = 1, 2, \dots, n$, which are the solution to the equation

$$y'' - \sigma y' = 1. \tag{18}$$

Solving this equation gives;

$$y = -\frac{1}{\sigma}x + e^{\sigma x}C_k + D_k. \tag{19}$$

Thus, for each $x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n$ the function $\varphi_k(x)$ is given as follow:

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{\sigma}x + e^{\sigma x}C_k + D_k. \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{20}$$

From here we conclude that to find the functions $\varphi_k(x)$ we need to find such coefficients $C_k, D_k, k = 1, 2, \dots, n$, which give the smallest values to the quantity (17) on each of the intervals $[x_{k-1}, x_k]$ for $k = 1, 2, \dots, n$. Next, we find C_k, D_k such that the integral of the square of the function $\varphi_k(x)$ defined by equality (21) on the interval $[x_{k-1}, x_k]$ takes lowest value. In this regard, consider the following functions

$$\mathcal{F}_k(C_k, D_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Then from here, taking into account (20), we have

$$\mathcal{F}_k(C_k, D_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(-\frac{1}{\sigma}x + e^{\sigma x}C_k + D_k \right)^2 dx$$

Then calculating the partial derivatives of the function $\mathcal{F}_k(C_k, D_k)$ with respect to C_k and D_k and equating them to zero, we have

$$2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(-\frac{x}{\sigma} + C_k e^{\sigma x} + D_k \right) e^{\sigma x} dx = 0, \tag{21}$$

$$2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(-\frac{x}{\sigma} + C_k e^{\sigma x} + D_k \right) dx = 0. \tag{22}$$

From (21)-(22), the last equalities we get the following

$$\begin{cases} C_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{2\sigma x} dx + D_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{\sigma x} dx = \frac{1}{\sigma} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x e^{\sigma x} dx \\ C_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{\sigma x} dx + D_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} 1 dx = \frac{1}{\sigma} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x dx \end{cases}$$

Solving this system of equations, we find the unknowns to be:

$$C_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{\sigma (e^{\sigma x_k} - e^{\sigma x_{k-1}})}, \quad D_k = \frac{\sigma (x_k + x_{k-1}) - 2}{2\sigma^2}. \tag{23}$$

It is easy to check that these values C_k, D_k give the smallest value of the function $\mathcal{F}_k(C_k, D_k)$ on the interval $[x_{k-1}, x_k]$. Then, taking into account (23), from (20) we have

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{\sigma}x + \frac{e^{\sigma x} (x_k - x_{k-1})}{\sigma (e^{\sigma x_k} - e^{\sigma x_{k-1}})} + \frac{\sigma (x_k + x_{k-1}) - 2}{2\sigma^2} \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{24}$$

Calculation of coefficients of the optimal quadrature formula of the form (1)

Now, using (24), from the formulas (13) we calculate the coefficients A_{0k}, A_{1k} $k = 0, 1, \dots, n$ of the optimal quadrature formula of the form (1).

First, let's calculate A_{0k} and A_{1k} . Then from (13), taking into account $\varphi_1(x)$, we have

$$A_{00} = \frac{x_1 - x_0}{2}. \tag{25}$$

$$A_{10} = \varphi_1(x_0) = -\frac{1}{\sigma}x_0 + \frac{e^{\sigma x_0}(x_1 - x_0)}{\sigma(e^{\sigma x_1} - e^{\sigma x_0})} + \frac{\sigma(x_1 + x_0) - 2}{2\sigma^2} \tag{26}$$

Now let's calculate the coefficients A_{0k} and A_{1k} , $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Then from (13), taking into account $\varphi_k(x)$ for $k = 1, 2, \dots, n - 1$, we have

$$A_{0k} = \varphi'_k(x_k) - \varphi'_{k+1}(x_k) - \sigma(\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k)) + \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}. \tag{27}$$

$$A_{1k} = \varphi_{k+1}(x_k) - \varphi_k(x_k) = \frac{e^{\sigma x_k}}{\sigma} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{e^{\sigma x_{k+1}} + e^{\sigma x_k}} - \frac{x_k - x_{k-1}}{e^{\sigma x_k} + e^{\sigma x_{k-1}}} \right) + \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\sigma} \tag{28}$$

Finally, let's calculate the last coefficient A_{0n} and A_{1n} . Then, from (13), taking into account (24), we obtain

$$A_{0n} = \varphi'_n(x_n) - \sigma\varphi_n(x_n) = -\frac{1}{\sigma} + x_n - \frac{\sigma(x_n - x_{n-1}) - 2}{2\sigma} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \tag{29}$$

$$A_{1n} = -\varphi_n(x_n) = \frac{1}{\sigma}x_n - \frac{e^{\sigma x_n}(x_n - x_{n-1})}{\sigma(e^{\sigma x_n} - e^{\sigma x_{n-1}})} - \frac{\sigma(x_n + x_{n-1}) - 2}{2\sigma^2} \tag{30}$$

Thus, summing up the results of (25), (26), (27), (28), (29), and (30), we obtain the following main theorem of this work.

Theorem 2. *In the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(a, b)$ for each fixed positive integer n , there is a unique quadrature formula that is optimal in the sense of Sard of the form*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_{0k} f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_{1k} f'(x_k) + R_n(f)$$

with coefficients

$$\begin{aligned} A_{00} &= \frac{x_1 - x_0}{2}, \\ A_{0k} &= \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \\ A_{0n} &= \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, \\ A_{10} &= -\frac{1}{\sigma}x_0 + \frac{e^{\sigma x_0}(x_1 - x_0)}{\sigma(e^{\sigma x_1} - e^{\sigma x_0})} + \frac{\sigma(x_1 + x_0) - 2}{2\sigma^2}, \\ A_{1k} &= \frac{e^{\sigma x_k}}{\sigma} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{e^{\sigma x_{k+1}} + e^{\sigma x_k}} - \frac{x_k - x_{k-1}}{e^{\sigma x_k} + e^{\sigma x_{k-1}}} \right) + \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\sigma}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \\ A_{1n} &= \frac{1}{\sigma}x_n - \frac{e^{\sigma x_n}(x_n - x_{n-1})}{\sigma(e^{\sigma x_n} - e^{\sigma x_{n-1}})} - \frac{\sigma(x_n + x_{n-1}) - 2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

for fixed nodes x_k , $k = 0, 1, \dots, n$ satisfying the inequality $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$.

REFERENCES

1. Lanzara F. On optimal quadrature formulae. *Journal of Ineq. Appl.*, Vol.5, 201–225 (2000).

2. Shadimetov Kh.M. and Hayotov A.R. *Optimal Approximation of Error Functionals of Quadrature and Interpolation Formulas in Spaces of Differentiable Functions* (in Russian). Muhr Press, Tashkent, 2022.
3. Shadimetov Kh.M. and Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}$ space. *Calcolo*, Vol.51, No.2, 211–243 (2014).
4. Boltaev N.D., Hayotov A.R. and Khudayberdiev M. Optimal quadrature formula for approximate calculation of Fourier coefficients in $W_2^{(1,0)}$ space. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, Vol.1, No.1, 71–77 (2015).
5. Hayotov A.R., Babaev S.S., Abduakhadov A.A. and Davronov J.R. Construction of the optimal quadrature formula using the phi function method. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 69 (2024), No. 3, 651–663. doi:10.24193/subbmath.2024.3.11.
6. Abduakhadov A.A. Optimal approximation of Fourier integrals by the φ -function method. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 4/2(60), 109–118 (2024).
7. Abduakhadov A.A. Построение оптимальной квадратурной формулы методом φ -функций. *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 3/1(50), 100–110 (2023).

REZYUME

Ushbu maqolada biz Sard ma'nosida optimal kvadratur formulani qurish muammosini o'rganamiz. Kvadratur formulani qurishda φ -funktsiya usulidan foydalaniladi. Formulaning xatosi maxsus Hilbert fazosidan olingan φ funksiyasining kvadratining integrali yordamida yuqoridan baholanadi. Keyin shunday φ funksiyasi tanlanadiki, uning intervall bo'yicha kvadratining integrali eng kichik qiymatni oladi. Optimal kvadratur formula koeffitsiyentlari hosil bo'lgan φ funksiyasi yordamida hisoblanadi.

Kalit so'zlar: Gilbert fazosi; φ -funktsiya usuli; optimal kvadratur formula; kvadratur formula xatoligi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучается задача построения оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда. При построении квадратурной формулы используется метод φ -функции. Погрешность формулы оценивается сверху с помощью интеграла квадрата функции φ из определенного пространства Гильберта. Далее выбирается такая функция φ , для которой интеграл квадрата на интервале принимает наименьшее значение. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вычисляются с использованием полученной функции φ .

Ключевые слова: пространство Гильберта; метод φ -функции; оптимальная квадратурная формула; погрешность квадратурной формулы.

UDC 519.24

**NONINFORMATIVE STATISTICAL MODELS: AN ALTERNATIVE PROOF OF THE CRAMÉR–RAO
INEQUALITY UNDER RANDOM CENSORING**

ABDUSHUKUROV ABDURAKHIM AKHMEDOVICH

MOSCOW STATE UNIVERSITY TASHKENT BRANCH, TASHKENT, UZBEKISTAN
a_abdushukurov@rambler.ru

MURADOV RUSTAMJON SOBITKHONOVICH

NAMANGAN STATE TECHNICAL UNIVERSITY, NAMANGAN, UZBEKISTAN
rustamjonmuradov@gmail.com

RESUME

We consider a model of random right censoring generated by a pair of independent random variables and the corresponding observed sample of minima and censoring indicators. For the case of a noninformative censoring distribution, we derive the Fisher information for the parameter of interest and present an alternative proof of the Cramér–Rao lower bound. The proof is based on a direct application of the Cauchy–Bunyakovsky (Cauchy–Schwarz) inequality to the likelihood of the censored sample, under suitable regularity conditions.

Key words: Cramér–Rao lower bound, noninformative censoring and Fisher information.

1. Introduction.

The Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) is one of the most fundamental results in mathematical statistics, establishing a lower limit on the variance of unbiased estimators. Classical results assume that the underlying model is regular, meaning that the Fisher information matrix exists, is finite, and is strictly positive. However, many modern statistical problems—especially in likelihood-free inference, weakly identifiable models, nonregular exponential families, and nonparametric structures—violate these assumptions. In such noninformative models, the Fisher information may be zero, infinite, or undefined. This motivates a modern reconsideration of the CRLB applicable under minimal assumptions.

Classical CRLB theory originates from the foundational works of Rao (1945) and Cramer (1946), where the Fisher information plays the central role in describing the efficiency of unbiased estimators [3,4]. Subsequent developments in Kendall & Stuart (1977) and Lehmann & Casella (1998) extended the theory to multivariate settings. However, starting from the 1980s, several researchers pointed out the limitations of CRLB in nonregular models. Ibragimov and Has'minskii (1981) studied estimators in nonregular families where likelihood derivatives fail to exist. Hajek (1970) introduced local asymptotic minimax results under minimal smoothness. Van der Vaart (1998, 2000) developed semi-parametric CRLB extensions using tangent spaces. Ghosh, Basu & Martin (2016) analyzed CRLB failures in misspecified and robust statistical models (see, [5-10]).

More recently, the problem of zero-information models has gained attention in the context of likelihood-free inference (Sisson et al., 2018), Bayesian noninformative priors (Bernardo & Smith, 1994), weakly identifiable models (Drton, 2009), information-geometry (Amari & Nagaoka, 2000). Several authors propose generalized densities of bounded variation (Pfanzagl, 1990) or consider alternative differential structures, leading to extensions of CRLB based on generalized score functions [10-14].

Let (Ω, \mathcal{A}) be a measurable space on which two independent random variables ξ and η are defined. Assume that their distribution functions depend on an unknown scalar parameter θ ($s = 1$) and are given by

$$F(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(\xi < x), \quad G(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(\eta < x), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}. \quad (1)$$

We assume that both distributions are absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, with corresponding densities $f(x; \theta)$ and $g(x; \theta)$.

The statistical model is such that instead of observing the pair (ξ, η) directly, we observe the pair (Z, δ) defined by

$$Z = \min(\xi, \eta), \quad \delta = I\{\xi = Z\} = I\{\xi \leq \eta\}.$$

Thus the random variable of interest ξ is observed only when $\xi \leq \eta$, i.e. when $\delta = 1$.

If (X_i, Y_i) denotes the realization of (ξ, η) in the i -th experiment, then after n independent repetitions we observe the sample

$$\{(Z_i, \delta_i)\}_{i=1}^n, \quad Z_i = \min(X_i, Y_i), \quad \delta_i = I\{Z_i = X_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Each pair (Z_i, δ_i) takes values in the sample space $U \times \{0, 1\}$, where U is the set of possible values of Z . We equip $U \times \{0, 1\}$ with the product σ -algebra generated by sets of the form $A \times \{0\}$ and $B \times \{1\}$, where A, B are Borel subsets of U . Let $\{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ denote the family of distributions of (Z, δ) on $U \times \{0, 1\}$, dominated by a product measure

$$v(dx, dy) = \Delta_y dx,$$

where Δ_y is the counting measure on $\{0, 1\}$: $\Delta_y(\{0\}) = \Delta_y(\{1\}) = 1$.

For each observed pair (Z_i, δ_i) the likelihood contribution admits a density $k(x, y; \theta)$ with respect to v , which can be written as

$$k(x, y; \theta) = \{f(x; \theta)G(x; \theta)\}^y \{g(x; \theta)F(x; \theta)\}^{1-y}, \quad x \in U, y \in \{0, 1\}. \tag{2}$$

Introduce the following notation for derivatives with respect to θ :

$$\begin{aligned} \dot{f}(x; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(x; \theta), & \dot{g}(x; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} g(x; \theta), \\ \dot{F}(x; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} F(x; \theta), & \dot{G}(x; \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} G(x; \theta), \end{aligned}$$

and the corresponding (one-dimensional) score-type functions

$$\lambda(x; \theta) = \frac{\dot{f}(x; \theta)}{f(x; \theta)}, \quad \mu(x; \theta) = \frac{\dot{g}(x; \theta)}{g(x; \theta)}.$$

For the joint density we write

$$\varphi(x, y; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log k(x, y; \theta) = \frac{1}{k(x, y; \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} k(x, y; \theta).$$

We now recall an important special case of random right censoring, known as the *proportional intensities model* (PIM), also referred to as the Koziol–Green model (see, e.g., [1-4]).

Definition 1. The pair of distribution functions (F, G) (or equivalently, the pair (ξ, η)) is said to satisfy the proportional intensities model if there exists a positive constant $\beta > 0$ such that for all x in the support of ξ ,

$$G(x; \theta) = (F(x; \theta))^\beta. \tag{3}$$

In the literature the PIM is often called the Koziol–Green model. One of its key properties is that the observed variables Z and δ become independent.

Theorem 1. [3] *The pair (F, G) satisfies the proportional intensities model (3) if and only if the random variables*

$$Z = \min(\xi, \eta), \quad \delta = I\{\xi = Z\}$$

are independent.

2. Noninformative Censoring Model and Fisher Information.

In the discussion above, the censoring distribution G was allowed to depend on the parameter θ , which leads to an *informative* censoring model. We now consider the case where G does *not* depend on θ , i.e. we assume that

$$F(x; \theta) \text{ depends on } \theta, \quad G(x) \text{ does not depend on } \theta.$$

Such a model is called a *noninformative* (or noninformatively censored) model.

In this setting we present an alternative proof of the Cramér–Rao inequality. Assume that the distributions of ξ and η are given by $F(x; \theta)$ and $G(x)$, with a scalar parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. The observed sample is

$$C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i)\}_{i=1}^n.$$

The joint density of $C^{(n)}$ with respect to the product measure

$$\nu_\theta(dx, dy) = \prod_{i=1}^n v(dx_i, dy_i),$$

on the sample space

$$\mathcal{Y}^{(n)} = (\mathbb{R} \times \{0, 1\})^n$$

is given by

$$k^{(n)}(x, y; \theta) = \prod_{i=1}^n k(x_i, y_i; \theta), \quad (x, y) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathcal{Y}^{(n)},$$

where now

$$k(x, y; \theta) = \{f(x; \theta)G(x)\}^y \{g(x)F(x; \theta)\}^{1-y}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

Here G and g do not depend on θ , while F and f do, and

$$F(x; \theta) = \int_{(-\infty, x]} f(t; \theta) dt, \quad g(x) = \frac{d}{dx}G(x).$$

The Fisher information of the sample $C^{(n)}$ is denoted $I_n(\theta)$ and has the form

$$I_n(\theta) = nI(\theta),$$

where

$$I(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) \right)^2 G(x) dF(x; \theta) + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln F(x; \theta) \right)^2 F(x; \theta) dG(x). \tag{5}$$

We now impose the following regularity conditions on the family $\{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$.

(C1) The support

$$\{x : 0 < F(x; \theta) < 1\}$$

does not depend on θ .

(C2) The derivatives $\partial f(x; \theta)/\partial \theta$ and $\partial F(x; \theta)/\partial \theta$ exist for all x and θ , and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} G(x) dx &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} f(x; \theta) G(x) dx, \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta} dG(x) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} F(x; \theta) dG(x), \end{aligned}$$

and, moreover, the following limit and differentiation under the integral are valid:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} [k^{(n)}(x, y; \theta + \Delta) - k^{(n)}(x, y; \theta)] \nu_\theta(dx, dy) \\ = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \theta} k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy), \\ \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln k^{(n)}(x, y; \theta) \right)^2 k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy) < \infty. \end{aligned}$$

(C3) For all $\theta \in \Theta$ we have

$$0 < I(\theta) < \infty,$$

and for any unbiased estimator θ_n of θ we have

$$0 < d_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta [(\theta_n - \theta)^2] < \infty.$$

We now formulate and prove the Cramér–Rao inequality for the noninformative censoring model.

Theorem 2. *Assume that conditions (C1)–(C3) hold. Then for any unbiased estimator θ_n of θ based on the sample $C^{(n)}$, and for all $\theta \in \Theta$, we have*

$$d_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta [(\theta_n - \theta)^2] \geq \frac{1}{n I(\theta)}, \tag{6}$$

where $I(\theta)$ is given by (5).

Proof. Denote by ν_θ the probability measure of the sample $C^{(n)}$ on $\mathcal{Y}^{(n)}$, with density $k^{(n)}(x, y; \theta)$ with respect to the dominating measure. By unbiasedness we have

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \theta_n(x, y) k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy) = \theta \quad \text{for all } \theta \in \Theta.$$

Hence,

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n(x, y) - \theta) k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy) = 0.$$

Consider the function

$$\Delta(\theta, \Delta) = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n(x, y) - \theta) [k^{(n)}(x, y; \theta + \Delta) - k^{(n)}(x, y; \theta)] \nu_\theta(dx, dy).$$

By the above identity, $\Delta(\theta, \Delta) = 0$ for all sufficiently small Δ . Using condition (C2) and differentiating under the integral sign, we obtain

$$0 = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\Delta(\theta, \Delta)}{\Delta} = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n(x, y) - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy).$$

Equivalently,

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln k^{(n)}(x, y; \theta) k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy) = 0.$$

Applying the Cauchy–Bunyakovsky (Cauchy–Schwarz) inequality to the last integral, we obtain

$$\left| \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln k^{(n)} k^{(n)} d\nu_\theta \right|^2 \leq \left(\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n - \theta)^2 k^{(n)} d\nu_\theta \right) \times \left(\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln k^{(n)} \right)^2 k^{(n)} d\nu_\theta \right).$$

The left-hand side is zero, which yields

$$0 \leq d_n(\theta) I_n(\theta),$$

where

$$d_n(\theta) = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} (\theta_n - \theta)^2 k^{(n)} d\nu_\theta = \mathbb{E}_\theta [(\theta_n - \theta)^2],$$

and

$$I_n(\theta) = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln k^{(n)}(x, y; \theta) \right)^2 k^{(n)}(x, y; \theta) \nu_\theta(dx, dy) = n I(\theta).$$

Using condition (C3) we have $0 < I(\theta) < \infty$, so we can divide by $I_n(\theta)$ and obtain the inequality (6). The theorem is proved.

REFERENCES

1. A. A. Abdushukurov and L. V. Kim, Lower Cramér–Rao and Bhattacharyya bounds for randomly censored observations. *Journal of Soviet Mathematics*, **5**, (1987), 2171-2185.
2. A. A. Abdushukurov, Statistics of Incomplete Observations: Asymptotic Theory of Estimation for Nonclassical Models, *University, Tashkent*, (2009), 269p. (In russian)
3. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1946.
4. C. R. Rao, Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **37** (1945), 81-91.
5. E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*. Springer, 1998.
6. A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, 1998.
7. I. A. Ibragimov and R. Z. Has'minskii, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Springer, 1981.
8. S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*. American Mathematical Society, 2000.
9. J. M. Bernardo and A. F. M. Smith, *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, 1994.
10. A. Ghosh, A. Basu, and R. Martin, Robust alternative to the Fisher information, *Statistical Papers*, **57** (2016), 239-252.
11. M. Drton, Likelihood ratio tests and weak identifiability, *Biometrika*, **96** (2009), 101-114.
12. J. Hajek, A characterization of limiting distributions in regular estimation problems, *Annals of Mathematical Statistics*, **41** (1970), 154-161.
13. J. Pfanzagl, *Estimation in Semiparametric Models*. Springer, 1990.
14. S. Sisson, Y. Fan, and M. Beaumont, *Handbook of Approximate Bayesian Computation*. CRC Press, 2018.

REZYUME

Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar juftligi tomonidan hosil qilingan o'ng tomondan tasodifiy senzuralangan model va unga mos ravishda kuzatiladigan minimumlar hamda senzuralanish indikatorlaridan iborat tanlanma ko'rib chiqiladi. Senzuralanish taqsimoti informativ bo'lmagan hol uchun baholanuvchi parametrga doir Fisher informatsiyasi chiqariladi va Cramer-Rao quyi chegarasining boshqacha isboti keltiriladi. Isbot senzuralangan tanlanmaning haqiqatga o'xshashlik funksiyasiga Koshi–Bunyakovskiy (Koshi–Shvarts) tengsizliklarini bevosita qo'llashga asoslanadi, bunda ba'zi regularlik shartlari bajarilishi talab qilinadi.

Kalit so'zlar: Cramer-Rao quyi chegarasi, noinformativ senzuralanish, Fisher informatsiyasi.

РЕЗЮМЕ

Мы рассматриваем модель случайного цензурирования справа, порождённую парой независимых случайных величин, и соответствующую наблюдаемую выборку, состоящую из минимумов и индикаторов цензурирования. В случае неинформативного распределения цензурирования мы выводим функцию информации Фишера для интересующего параметра и представляем альтернативное доказательство нижней границы Крамера-Рао. Данное доказательство основано на прямом применении неравенства Коши-Буняковского (Коши-Шварца) к функции правдоподобия цензурированной выборки при выполнении соответствующих регулярностных условий.

Ключевые слова: нижняя граница Крамера-Рао, неинформативное цензурирование, информация Фишера.

UDC 517.55

CAPACITY OF THE α -BRJUNO-RÜSSMANN SET

AKRAMOV NURALI SEVDIYOR UGLI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN

nurali.akramov.1996@gmail.com

RESUME

In this work, we study generalized Brjuno-Rüssmann condition and prove new capacity estimate for the sets of parameters of this condition. In particular, we show that the complement of parameters of α -Brjuno-Rüssmann condition has zero logarithmic capacity.

Key words: α -Brjuno-Russmann condition, Brjuno condition, C_σ -capacity, h-Hausdorff measure.

1. Introduction

In dynamical systems and Hamiltonian mechanics, main difficulty in providing the persistence of invariant tori comes from small divisors. The classic way to control them is the Diophantine condition on the frequency vectors. However, A. Brjuno (see [1]) and later H. Rüssmann (see [11]) introduced a weaker arithmetical condition that still allows KAM-type results.

The α -Bruno-Russmann condition was introduced by A. Bounemoura and J. Féjzo (see [7]) and important in the study quasi-periodic Hamiltonian systems, particularly relevant when analyzing persistence of invariant tori under perturbation.

Consider a vector $\omega \in \mathbb{R}^n$ and define the function $\Psi_\omega : [1, +\infty) \rightarrow [\Psi_\omega(1), +\infty]$ measures the size of the so-called small denominators

$$\Psi_\omega(Q) = \max \{ |k\omega|^{-1} : k \in \mathbb{Z}^n, 0 < |k| < Q \}.$$

where $k\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n$ and $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Now assume that ω is non-resonance that is $|k\omega| \neq 0$ for any non zero $k \in \mathbb{Z}^n$. The function Ψ_ω is non-decreasing, piecewise constant, and has a countable number of discontinuities (see [7]). Then, α -Brjuno-Rüssmann condition defined as follows:

Definition 1.1. (see [7]) A vector ω is said to satisfy α -Brjuno-Rüssmann condition if

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \Psi_\omega(Q)}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} dQ < \infty, \quad \alpha \geq 1. \quad (1)$$

This condition prevents Ψ_ω from growing too fast at large Q . The set of such vectors is denote by BR_α . This set becomes smaller as α increases and when $\alpha = 1$ the condition reduces to the classic Brjuno-Rüssmann condition.

In this area significant results obtained by H. Rüssmann, C. Chavaudret, S. Marmi, S. Fischler, A. Bounemoura and J. Féjzo (see [11], [7-9]) and others.

Now, let ν be an irrational number. Denote $v_0 = [\nu]$ the whole part of ν and define

$$v_0 = \nu - v_0, \quad \nu_{k+1} = \frac{1}{\nu_k} - \left[\frac{1}{\nu_k} \right], \quad v_{k+1} = \left[\frac{1}{\nu_k} \right], \quad k \geq 0$$

Since ν is irrational, it can be written as the continued fraction

$$\nu = v_0 + \frac{1}{v_1 + \frac{1}{v_2 + \dots \frac{1}{v_n + \dots}}}} = [v_0; v_1, v_2, \dots, v_n, \dots].$$

The finite part of this continued fraction becomes a rational number

$$[v_0; v_1, v_2, \dots, v_n] = \frac{P_n}{Q_n}. \tag{2}$$

Fix $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ and define the set

$$\mathcal{A}(\beta, \gamma) = \left\{ \nu \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta} Q_{n+1}}{Q_n^{\gamma}} < +\infty \right\}. \tag{3}$$

This set contracts as β increases or γ decreases. Conversely, as β decreases or γ increases, the set $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$ expands. When $\beta = 1$ and $\gamma = 1$, the condition reduces to the classic Brjuno condition in \mathbb{C} (see [1]).

In earlier work, A. Sadullaev and K. Rakhimov (see [2]) studied capacity dimension of the Brjuno set in \mathbb{C} . Definition of C_{σ} -capacity provided in Section 2. Our main results generalize their work by considering the condition (3). The relationship between the set $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$ and the set BR_{α} established in Section 2.

Theorem 1.2. *Let $\beta > 0$ and $\gamma > 0$. The complement $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{A}(\beta, \gamma)$ has zero C_{σ} -capacity with respect to the logarithmic kernel*

$$k_1(z, \xi) = |\ln |z - \xi||^{\sigma},$$

where $\sigma > \max \left\{ \frac{2\beta}{\gamma}, \beta \right\}$. In particular, it has zero h -Hausdorff measure with respect to the function $h(t) = |\ln t|^{-\delta}$ for any $\delta > \max \left\{ \frac{2\beta}{\gamma}, \beta \right\}$.

Special case of Theorem 1.2 when $\beta = 1$ and $\gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}$ for $\alpha \geq 1$ is given by the following corollary.

Corollary 1.3. *The complement of the α -Brjuno-Rüssmann set has zero C_{σ} -capacity with respect to the kernel*

$$k_{\sigma}(z, \xi) = |\ln |z - \xi||^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$$

for any $\alpha \geq 1$. In particular, it has zero h -Hausdorff measure with respect to the function $h_{\delta}(t) = |\ln t|^{-\delta}$ for any $\delta > \frac{2\alpha}{\alpha+1}$.

2. Preliminary

2.1. Some properties of the continued fraction. Let ν be an irrational number and $\frac{P_n}{Q_n}$ be as in (2). We will use the following properties of the sequence of fraction $\frac{P_n}{Q_n}$ for any $n \geq 1$ (see [6]).

1. Denominator Q_n satisfies

$$Q_n > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{n-1}.$$

2. We have classic two-sided inequality:

$$\frac{1}{2Q_n Q_{n+1}} < \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

3. For any $0 < Q < Q_n, P \in \mathbb{Z}, (P, Q) \neq (P_n, Q_n)$, we have

$$|Q\nu - P| > |Q_n\nu - P_n|.$$

2.2. Connection between BR_{α} and $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$. We now prove the following proposition concerning the complement of the α -Brjuno Rüssmann set and the complement of the $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$ set.

Proposition 2.1. *Let $\omega = (1, \nu) \in \mathbb{R}^2$ non-resonant. If*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta} Q_{n+1}}{Q_n^{\gamma}} = +\infty,$$

for $\beta = 1, \gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}$ and $\alpha \geq 1$, then

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \Psi_\omega(Q)}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} dQ = +\infty.$$

Proof. Equivalence of α -Brjuno-Rüssmann condition and

$$\sum_{Q=1}^{\infty} \frac{\ln \Psi_\omega(Q)}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} < +\infty$$

is established in [7]. By Property 2 and 3 of the continued fractions, we have

$$\sum_{Q=1}^{\infty} \frac{\ln \Psi_\omega(Q)}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} = \sum_{Q=1}^{\infty} \frac{\ln |Q_n \nu - P_n|^{-1}}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} \geq \sum_{Q \neq Q_n} \frac{\ln Q}{Q^{1+\frac{1}{\alpha}}} + \sum_{n=1, Q=Q_n}^{\infty} \frac{\ln Q_{n+1}}{Q_n^{1+\frac{1}{\alpha}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln Q_{n+1}}{Q_n^{1+\frac{1}{\alpha}}}.$$

□

2.3. C_σ - capacity. Capacity is one of the main concepts in potential theory. The capacity of the Brjuno set is the one of the connection points between potential theory and complex dynamical systems (see [2]).

Let $K \subset \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ be a compact set and consider the kernel $k_\sigma(z, \xi) = |\ln |z - \xi||^\sigma$ with $\sigma > 0$. Then, the potential $U^\mu(z)$ for a positive Borel probability measure $\mu \in \overset{\circ}{M}_K^+$ at a point $z \in \mathbb{C}$ is defined as

$$U^\mu(z) = \int_K k_\sigma(z, \xi) d\mu(\xi).$$

Let

$$I(\mu) = \int_K U^\mu(z) d\mu(z) = \iint_{K \times K} k_\sigma(z, \xi) d\mu(z) d\mu(\xi)$$

and $W_\sigma(K) = \inf\{I(\mu) : \mu \in \overset{\circ}{M}_K^+\}$. Then, C_σ -capacity of the set K is defined as

$$C_\sigma(K) = \frac{1}{W_\sigma(K)} = \left(\inf_{\mu \in \overset{\circ}{M}_K^+} \int_K U^\mu(z) d\mu(z) \right)^{-1} = \left(\inf_{\mu \in \overset{\circ}{M}_K^+} \iint_{K \times K} k_\sigma(z, \xi) d\mu(z) d\mu(\xi) \right)^{-1}.$$

The outer and inner C_σ -capacities defined as

$$\begin{aligned} \underline{C}_\sigma &= \sup\{C_\sigma(K) : K \subset E, K - \text{compact}\} \\ \overline{C}_\sigma &= \inf\{\underline{C}_\sigma(U) : E \supset U, U - \text{open}\} \end{aligned}$$

We note the following properties of the C_σ -capacity (see [4-5]).

1. For any Borel set $E \subset \mathbb{C}$, the outer and inner C_σ -capacities coincides:

$$\overline{C}_\sigma(E) = \underline{C}_\sigma(E) = C_\sigma(E).$$

2. The capacity of a Borel set is zero $C_\sigma(E) = 0$, if and only if there exists a finite Borel measure μ supported on E such that its potential satisfies $U^\mu(z) \equiv +\infty$ for all $z \in E$.
3. If $C_\sigma(E) = 0$, then the h_δ -Hausdorff measure of E with gauge function $h(t) = \log^{-\delta} \frac{1}{t}$ is zero for any $\delta > \sigma$ (see [3]).
4. For any sequence of compact sets K_j ,

$$\overline{C}_\sigma \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} C_\sigma(K_j).$$

2.4. h -Hausdorff measure. Let $h : [0, r_0] \rightarrow [0, +\infty)$ be a gauge function - continuous, strictly increasing function with $h(0) = 0$ and $r_0 > 0$. For a bounded subset $E \subset \mathbb{R}^n$ and any $0 < \varepsilon < r_0$, consider a finite covering of E by open balls $B_j(x_j, r_j)$ with center at x_j and radius r_j such that $r_j < \varepsilon$. Define

$$H^h(E, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m h(r_j) : \bigcup_{j=1}^m B_j \supset E, r_j < \varepsilon \right\}$$

for all $1 \leq j \leq m$, where m depends on the chosen cover. It is obvious that, $H^h(E, \varepsilon)$ non-decreasing as ε decreases. Hence, the limit

$$H^h(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} H^h(E, \varepsilon)$$

exists and defines the h -Hausdorff measure of E . When $h(t) = t^\delta$ for $\delta > 0$, it is called the classic δ -dimensional Hausdorff measure of E .

3. Capacity of the complement of the set $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$.

Firstly, we need the following lemma.

Lemma 3.1. *If*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta Q_{n+1}}{Q_n^\gamma} = +\infty$$

where $\beta > 0$ and $\gamma \leq 2$. Then for any $\varepsilon > 0$ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} = +\infty.$$

Proof. Let $\delta > 0$ be so small that $(1 - \delta)(2 + \varepsilon) \geq 2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Then, by using the Hölder inequality, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta Q_{n+1}}{Q_n^\gamma} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{(1-\delta)(2+\varepsilon)}} \right)^{\frac{\gamma}{2+\varepsilon}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Q_n^{\frac{\delta\gamma(2+\varepsilon)}{2+\varepsilon-\gamma}}} \right)^{\frac{2+\varepsilon-\gamma}{2+\varepsilon}}. \tag{4}$$

By the property 1 of the continues fractions, it is obvious that the second series on the right-hand side converges. Since, $(1 - \delta)(2 + \varepsilon) \geq 2 + \frac{\varepsilon}{4}$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{(1-\delta)(2+\varepsilon)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}}.$$

Therefore, by inequality (4), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} = +\infty.$$

Hence, by the property 2 of the continued fractions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| \right|}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_n Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} = +\infty.$$

□

Now, we going to prove our main results.

Proof. (Proof of Theorem 1.2) To prove the main result by the second property of C_σ capacity, it is enough to show that $U^\mu(\nu) = +\infty$ for any compact $K \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}(\beta, \gamma)$ where $\beta > 0, \gamma > 0$. For this we use the following Borel measure

$$\mu = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{\delta_{\frac{p}{q}}}{q^{2+\frac{\varepsilon}{4}}}, \quad \varepsilon > 0 \tag{5}$$

where $\delta_{\frac{p}{q}}$ is a Dirac measure supported at the point $\frac{p}{q}$. This measure is finite.

If $\gamma \leq 2$, the potential of μ with respect to the kernel $k_1(z, \xi) = |\ln|z - \xi||^{\frac{2\beta}{\gamma}}$ is

$$U_1^\mu(z) = \int k_1(z, \xi) d\mu(\xi) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{q^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \left| \ln \left| z - \frac{p}{q} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}}.$$

We need to show that $U_1^\mu(z) = +\infty$ for any $z \in K$. Indeed, if $z \in K$ is rational number, it is clean. In the case, when z is irrational number ν we will use the following

$$\begin{aligned} U_1^\mu(\nu) &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{q^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \left| \ln \left| \nu - \frac{p}{q} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \ln \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \neq P_n, \\ p=1}}^{Q_n-1} \frac{1}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \left| \ln \left| \nu - \frac{p}{Q_n} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \neq P_n, \\ p=1}}^{q-1} \frac{1}{q^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \left| \ln \left| \nu - \frac{p}{q} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \ln \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| \right|^{\beta \frac{2+\varepsilon}{\gamma}}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}}. \end{aligned}$$

Therefore, by lemma 3.1 we can conclude that

$$U_1^\mu(\nu) = +\infty.$$

If $\gamma > 2$, we will use the same measure (5) and the kernel

$$k_2(z, \xi) = |\ln|z - \xi||^\beta.$$

Then the potential is given by

$$U_2^\mu(\nu) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{q^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \left| \ln \left| \nu - \frac{p}{q} \right| \right|^\beta \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \ln \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| \right|^\beta}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}}.$$

As in the previous proof, using property 2 of continued fraction, we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \ln \left| \nu - \frac{P_n}{Q_n} \right| \right|^\beta}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta Q_{n+1}}{Q_n^{2+\frac{\varepsilon}{4}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta Q_{n+1}}{Q_n^\gamma} = +\infty.$$

Therefore, $C_\sigma(K) = 0$ for the set of real numbers that does not satisfy $\mathcal{A}(\beta, \gamma)$ condition for any $\beta > 0$ and $\gamma > 0$, so $C_\sigma(\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}(\beta, \gamma)) = 0$. The last assertion follows from property 4 of C_σ -capacity. □

REFERENCES

1. A. D. Brjuno, *Analytical form of differential equations*, Trans. Moscow Math. Soc. Volume 25 (1971), 131-288.
2. A. Sadullaev, K. Rakhimov, *Capacity Dimension of the Brjuno Set*, Indiana University Mathematics Journal Volume 64, No. 6 (2015), 1829-1834.
3. N. S. Landkof, *Capacity and Hausdorff measure. Estimates for potentials*, Uspekhi Mat. Nauk, 1965, Volume 20, Issue 2, 189-195.
4. N. S. Landkof, *The modern theory of potentials*, Nauka [Science] (1966).
5. L. Carleson, *Selected Problems on Exceptional Sets*, Van Nostrand Mathematical Studies, vol. 13, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.
6. S. Marmi, *An introduction to small divisors problems*, Dottorato di ricerca in matematica [PhD Thesis], Universita Di Pisa, Dipartimento Di Matematica, 1999.
7. A. Bounemoura, J. Féjzo, *KAM α -Gevrey regularity and the α -Bruno-Rüssmann condition*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 2019, 19 (4), pp.1225-1279.
8. A. Bounemoura, S. Fischler, *A diophantine duality applied to the KAM and Nekhoroshev theorems*, Math. Z. 275 (2013), no. 3, 1135-1167.
9. C. Chavaudret, S. Marmi. *Reducibility of quasiperiodic cocycles under a Brjuno-Rüssmann arithmetical condition*. Journal of Modern Dynamics, 2012, 6(1): 59-78.
10. A.N. Kolmogorov, *On the preservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 98 (1954), 527-530.
11. H. Rüssmann, *Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems*, Regul. Chaotic Dyn. 6 (2001), no. 2, 119-204.

РЕЗЮМЕ

Ushbu ishda umumlashtirilgan Brjuno-Ryusman sharti o'rganilib, ushbu shart parametrlari to'plamlari uchun yangi sig'im bahosi isbotlanadi. Xususan, α -Brjuno-Ryusman sharti parametrlari to'plamining to'ldiruvchisi nol logarifmik sig'imga ega ekani ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: α -Brjuno-Ryusman sharti, Brjuno sharti, C_σ -sig'im, h-Hausdorff o'lchovi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется обобщённое условие Брюно-Рюссмана и доказывается новая оценка ёмкости для множеств параметров этого условия. В частности, показано, что дополнение множества параметров, удовлетворяющих условию α -Брюно-Рюссмана, имеет нулевую логарифмическую ёмкость.

Ключевые слова: α -условие Брюно-Рюссмана, условие Брюно, C_σ -ёмкость, h-мера Хаусдорфа.

UDC 004.93

ATOQLI OTLARNI ANIQLASHNING ANNOTATSIYA QOIDALARI VA MATEMATIK MODELLARI

ALLABERDIYEV BOBUR BAXTIYOROVICH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
O‘ZBEKISTON XALQARO ISLOMUSHUNOSLIK AKADEMIYASI
allaberdiyev_91@mail.ru

MATLATIPOV SAN‘ATBEK G‘AYRATOVICH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
s.matlatipov@nuu.uz

MAVLONOVA MUJGONABONU MIRKOMILOVNA

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
mujgonmavloova@gmail.com

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqolada matnlardagi atoqli otlarni (Named Entity) aniqlash uchun annotatsiya qoidalari, BIO markalash tizimi, matematik modellar (CRF, BiLSTM-CRF, Transformer), agglutinatив tillarga xos xususiyatlar, hamda real O‘zbek matnlari misolida amaliy misollar bayon qilinadi. Model qurilishining formal ifodasi, ehtimollik asosidagi yondashuv, annotatorlar o‘rtasidagi kelishuv (Cohen’s Kappa) va annotatsiya sifatini oshirish bo‘yicha usullar ham yoritiladi. Maqola natural tilni qayta ishlash (NLP) yo‘nalishida NER tizimi yaratish istagidagi tadqiqotchilar uchun metodik qo‘llanma sifatida xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: token, indekslash, agglutinatив, annotatsiya, obyekt.

Kirish

Atoqli otlarni aniqlash (Named Entity Recognition, NER) zamonaviy NLP tizimlarining asosiy komponentlaridan biridir. U matndan shaxslar (PER), joylar (LOC), tashkilotlar (ORG), mahsulotlar yoki maxsus obyektlar (MISC) kabi birliklarni aniqlashni maqsad qiladi [1].

NER tizimlari quyidagi sohalarda keng qo‘llanadi:

- qidiruv tizimlarida kontekstga mos natija chiqarish,
- chat-botlarda mazmuni tushunish,
- avtomatik tarjima tizimlarida atoqli otlarni to‘g‘ri tarjimasiz qoldirish,
- hujjatlarni indekslash,
- axborotlarni avtomatik tahlil qilish.

O‘zbek tilida NER bo‘yicha tadqiqotlar nisbatan kam, tilning agglutinatив tuzilishi va ko‘p shaklli qo‘shimchalari modelni murakkablashtiradi. Shu sababli, aniq annotatsiya qoidalari va matematik modellardan foydalanish talab etiladi [3].

BIO markalash tizimi – bu NER (Named Entity Recognition) jarayonida matndagi har bir tokenning (so‘zning) qaysi qismga tegishli ekanini belgilash uchun ishlatiladigan eng mashhur va standart belgilash formati.

Annotatsiya qoidalari va BIO markalash tizimi
BIO markalashning formal ta‘rifi

Label	Mazmuni	Misol
PER	Shaxs ismlari	Islom Karimov, Alisher Navoiy
LOC	Joy nomlari	Toshkent, Yevropa, Sirdaryo
ORG	Tashkilot, muassasa	Oliy Majlis, Samsung, To‘palang HES AJ
MISC	Mahsulot, asar, tadbir	iPhone 15, Qur’oni Karim, Expo-2025

Jadval 3: Entity toifalari

Matn tokenlar to‘plami sifatida belgilansin:

$$T = (t_1, t_2, \dots, t_3).$$

Har bir token uchun annotatsiya funksiyasi:

$$L(t_i) \in \{B-X, I-X, O\},$$

Bu yerda: X - PER, LOC, ORG yoki MISC .

Misol 1. Oddiy jumla annotatsiyasi

“Alisher Navoiy Samarqandga safar qildi.”

Token	Label
Alisher	B-PER
Navoiy	I-PER
Samarqandga	B-LOC
safar	O
qildi	O

Jadval 4: Entity toifalari

Agglutinativ tillarda qo‘shimchali shakllarni belgilash

O‘zbek tilida atoqli otlarga qo‘shimchalar qo‘shilishi odatiy hol:

“Toshkentdan”, “Turkiyaning”, “Germaniyaga”, “Navoiyda”.

Annotatsiya qoidasiga ko‘ra, qo‘shimchalar mavjud bo‘lsa ham, entitining ildiz qismi label belgilanadi.

Formal ta‘rif:

Agar token ildiz va qo‘shimchadan tashkil topgan bo‘lsa:

$$t_i = r + s,$$

bu yerda r – ildiz (entity), s – qo‘shimcha.

U holda:

$$L(t_i) = L(r).$$

Misol 2. Qo‘shimchali entitilar

“O‘zbekistonning iqtisodiyoti barqaror o‘smoqda.”

NERning matematik modellari

Token	Label
O‘zbekistonning	B-LOC
iqtisodiyoti	O
barqaror	O
o‘smoqda	O

Jadval 5: Entity toifalari

NER – ketma-ketlik belgilash masalasi bo‘lib, modelning vazifasi:

$$\hat{Y} = \arg \max_Y P(Y | X)$$

Bu yerda:

- $X = (x_1, \dots, x_n)$ – tokenlar ketma-ketligi,
- $Y = (y_1, \dots, y_n)$ – BIO label ketma-ketligi.

CRF (Conditional Random Fields)

NER uchun keng qo‘llaniladigan ehtimollik modeli.

CRF (Conditional Random Fields) – bu ketma-ketlikdagi ma‘lumotlarga (masalan, matn so‘zlariga) teglar berish uchun ishlatiladigan model bo‘lib, u har bir so‘zni alohida emas, balki butun jumla kontekstida baholaydi. Ya‘ni CRF nafaqat so‘zning o‘ziga, balki undan oldin va keyin kelgan so‘zlarga, ularning teglariga va ular orasidagi mantiqiy bog‘lanishga qarab qaror chiqaradi. Shu sababli u “Alisher Navoiy” deganda ikkala so‘zni birga PERSON deb belgilash yoki “Apple kompaniyasi” da Apple ORGANIZATION bo‘lishi kerakligini kontekst orqali aniqlay oladi. Oddiy tasniflovchilardan farqli ravishda, CRF eng mos, uyg‘un va mantiqiy teglar ketma-ketligini tanlaydi, shuning uchun NER, POS tagging, chunking kabi vazifalarda juda aniq ishlaydi.

CRFning taqsimot funksiyasi odatda quyidagicha ifodalanadi:

$$P(Y | X) = \frac{1}{Z(X)} \exp \left(\sum_i \sum_k \lambda_k f_k(y_{i-1}, y_i, X, t) \right),$$

bu yerda:

- f_k – xususiyat funksiyalari (so‘z shakli, suffiks, POS tag va h.k.),
- λ_k – ularning vaznlari,
- $Z(X)$ – normallashtiruvchi koeffitsient.

CRF ketma-ket tokenlarga to‘g‘ri label berishda juda samarali.

Misol 3. CRF uchun xususiyatlar

Token	Feature
Toshkentga	suffix=ga
O‘zbekistonning	suffix=ning, capital=True
Navoiy	capital=True

Jadval 6: Entity toifalari

BiLSTM + CRF modeli

BiLSTM+CRF modeli – bu ketma-ketlikni belgilash vazifalarida, ayniqsa NER kabi kontekstga juda bog‘liq masalalarda eng samarali ishlaydigan chuqur o‘rganish arxitekturasi bo‘lib, unda BiLSTM qatlamlar matnning har ikki yo‘nalishdan – chapdan o‘ngga va o‘ngdan chapga qarab o‘qilgan kontekstini chuqur tahlil qiladi va har bir so‘z uchun boy semantik ma’lumotga ega yashirin vektor yaratadi, CRF esa shu vektorlardan chiqqan ehtimolliklar asosida faqat har bir so‘zning individual belgisinigina tanlab qo‘ymay, balki butun jumla bo‘yicha eng mantiqiy, ketma-ketlik jihatidan to‘g‘ri keladigan label zanjirini tanlaydi. Bunda BiLSTM matndagi uzun masofali bog‘lanishlarni – masalan, shaxsning familiyasi oldin kelishi yoki tashkilot nomi bir nechta so‘zdan tarkib topishi – kabi murakkab til hodisalarini o‘rganadi, CRF esa label-lar orasidagi mantiqiy cheklovlarni – masalan, B-PER ortidan I-PER kelishi yoki LOCATION ketidan ORGANIZATION kelmasligi kabi qoidalarga rioya qilgan holda yakuniy qarorni optimallashtiradi. Shu ikki mexanizm birgalikda ishlagani sababli model matnning semantikasini chuqur tushunadi, lekin natijada belgilangan teglar ketma-ketligi mantiqan to‘g‘ri, silliq va izchil bo‘ladi; shuning uchun BiLSTM+CRF arxitekturasi ko‘plab tillar uchun an’anaviy NER tizimlarida eng barqaror va yuqori aniqlikka ega yondashuvlardan biri hisoblanadi.

LSTM chiqishi:

$$h_t = [\vec{h}_t; \overleftarrow{h}_t],$$

emissiya ballari:

$$s_t = Wh_t + b,$$

CRF layer esa bu ballar asosida yakuniy label ketma-ketligini tanlaydi:

$$\hat{Y} = \arg \max_Y \text{CRF}(s_1, \dots, s_n).$$

Modelning ustunligi:

- uzoq kontekstni o‘rganadi,
- agglutinativ tillarda yuqori natija beradi.

Transformer modellari (BERT, XLM-R)

Transformer arxitekturasiga asoslangan modellar – BERT, XLM-R kabi tizimlar – matni chuqur va ikki yo‘nalishda (bidirectional) kontekst asosida tushunish qobiliyati bilan NLPda inqilob qilgan modellar hisoblanadi; ular matni ketma-ketlik sifatida emas, balki to‘liq kontekstli blok sifatida qayta ishlaydi va self-attention mexanizmi yordamida har bir so‘zning mazmunini jumladagi barcha boshqa so‘zlar bilan o‘zaro bog‘lab baholaydi, bu esa murakkab semantik va sintaktik munosabatlarni juda aniq o‘rganishga imkon beradi. BERT ingliz tili uchun juda katta hajmdagi matnlarda oldindan o‘qitilgan bo‘lib, Masked Language Modeling orqali so‘zlarning yashirilgan qismlarini topishni o‘rganadi, natijada model kontekstni chuqur anglay oladi; XLM-R esa ko‘p tilli (cross-lingual) yondashuvga ega bo‘lib, yuzlab tillardan iborat ulkan korpuslarda o‘qitilgan va turli tillar o‘rtasida bilimlarni uzatish qobiliyati bilan mashhur – ya’ni bitta tilda o‘rgatilgan vazifa boshqasida ham samarali ishlashi mumkin. Transformer modellaridan foydalanishning eng katta afzalligi – ular uzoq masofali bog‘lanishlarni BiLSTMga qaraganda ancha kuchli ushlab turadi, murakkab kontekstlarni aniq ajratadi va oldindan o‘qitilgan yirik til modellari sifatida turli NLP vazifalarida, jumladan NER, sentiment tahlili, mashina tarjimai, matn tasnifi va savol-javob tizimlarida minimal moslashtirish bilan juda yuqori natijalar beradi.

Self-Attention mexanizmi asosida ishlaydi.

Attention formulasi:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^t}{\sqrt{d_k}}\right)V.$$

Misol 4. BERT yordamida NER

“Bobur Baxtiyorovich Toshkent shahrida nutq so‘zladı.”

Natija:

Bobur Baxtiyorovich → PER

Toshkent → LOC

Annotatsiya jarayoni: formal yondashuv

Annotatsiya jarayoni formal yondashuvda matn korpusiga izohlar (teglar)ni oldindan belgilangan qoidalar asosida qo‘llashni anglatadi va u qat’iy struktura, aniq yo‘riqnomalar hamda annotatorlar o‘rtasidagi izchillikni ta‘minlashga qaratilgan metodik bosqichlardan iborat bo‘ladi. Ushbu jarayon avvalo annotatsiya sxemasini ishlab chiqishdan boshlanadi, bunda obyektlar toifalari (masalan, PERSON, LOCATION, ORGANIZATION), ularning chegaralari va ularni belgilash qoidalari normativ ravishda tavsiflanadi; sxema barcha holatlar uchun birxillashtirilgan misollar va kontrmisollar bilan boyitiladi. Keyingi bosqichda annotatsiya instruksiyasi tayyorlanadi – bu annotatorlar amal qilishi kerak bo‘lgan formal hujjat bo‘lib, unda teglar hierarxiyasi, cheklovlar, ko‘p ma‘noli holatlarni hal qilish qoidalari, nominativ birikmalarni belgilash tartibi, kontekstga bog‘liq istisnolar va murakkab lingvistik vaziyatlar bo‘yicha izohlar qat’iy qayd etiladi. Annotatorlar ish jarayoniga kirishdan oldin mazkur yo‘riqnomaga asoslangan trening va kalibrlash bosqichidan o‘tadi; bunda ularning teg qo‘llashdagi izchilligi tekshiriladi va inter-annotator agreement (IAA) ko‘rsatkichlari – masalan, Cohen’s Kappa yoki F1 bo‘yicha mosligi baholanadi. Rasmiy annotatsiya bosqichida annotatorlar matnga qat’iy ko‘rsatmalar asosida teglar qo‘llaydi, jarayon davomida esa barcha izohlar qayta tekshiriladi va muvofiqlashtiriladi [5]. Yakunda verifikatsiya va validatsiya bosqichlari amalga oshirilib, annotatsiyalarning formal talablar bilan mosligi baholanadi, aniqlangan nomuvofiqliklar tahrir qilinadi va korpusning yakuniy versiyasi sifat jihatidan tasdiqlanadi. Shu tarzda formal yondashuv annotatsiya jarayonini me‘yorlashtirilgan, nazorat qilinadigan va takror ishlab chiqarilishi mumkin bo‘lgan holga keltiradi.

Annotatsiya – matnni to‘g‘ri belgilangan label ketma-ketligiga xaritalash:

$$A(X) = Y.$$

Bir nechta annotator bo‘lsa:

$$A_i(X) = Y_i.$$

Annotatorlar o‘rtasidagi moslik:

Cohen’s Kappa statistic ko‘rsatkichidan foydalanamiz.

Cohen’s Kappa – bu ikki annotator (yoki ikki mutaxassis) bir xil ma‘lumotni qanday darajada bir xil belgilaganini baholaydigan statistik ko‘rsatkich [2].

U ayniqsa NER, sentiment analysis, tasniflash, tibbiy diagnostika kabi sohalarda annotatorlar orasidagi kelishuv darajasini (inter-annotator agreement) o‘lchash uchun ishlatiladi.

Oddiy aniqlikdan farqli ravishda, Cohen’s Kappa tasodifiy mos kelishni ham hisobga oladi, ya’ni annotatorlar tasodifiy ravishda bir xil belgi qo‘ygan bo‘lishi mumkinligini tuzatadi.

Kappa quyidagicha aniqlanadi:

$$\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e},$$

bu yerda:

- P_o – annotatorlar o‘rtasidagi real kelishuv (observed agreement),
- P_e – tasodifiy kelishuv ehtimoli (expected agreement).

Bu qiymat 0.8 dan yuqori bo‘lsa – annotatsiya yuqori sifatga ega [4].

Misol:

Quyida haqiqiy o‘zbek matnidan olingan namunalar annotatsiya bilan beriladi.

Misol 5. Rasmiy matn

“Oliy Majlis bugun Toshkent shahrida yangi qonunni muhokama qildi.”

Token	Label
Oliy	B-ORG
Majlis	I-ORG
bugun	O
Toshkent	B-LOC
shahrida	O
yangi	O
qonunni	O
muhokama	O
qildi	O

Jadval 7: Entity toifalari

Misol 6. Tarixiy matn

“Amir Temur 1395-yilda Moskva tomon yurish boshlagan.”

Token	Label
Amir	B-PER
Temur	I-PER
1395-yilda	O
Moskva	B-LOC
tomon	O
yurish	O
boshlagan	O

Jadval 8: Entity toifalari

Misol 7. Texnologik yangilik

“Samsung kompaniyasi Galaxy S25 Ultra modelini taqdim etdi.”

Token	Label
Samsung	B-ORG
kompaniyasi	O
Galaxy	B-MISC
S25	I-MISC
Ultra	I-MISC
modelini	O
taqdim	O
etdi	O

Jadval 9: Entity toifalari

Xatoliklar tahlili

NER tizimlarida keng uchraydigan xatoliklar mavjud bo‘lib, ular quyidagilar:

Bunday xatoliklarni bartaraf etish uchun xatoliklarni statistik jihatdan baholash (F1-score tahlili) amalga oshiriladi.

Xato turi	Misol	Sabab
Boundary error	“Oliy Majlis binosi”da “Oliy Majlis binosi”ni ORG deb olish	Entity chegarasi noto‘g‘ri
Wrong label	“Yevropa Ittifoqi” → MISC deb belgilash	Murakkab tashkilot nomi
Missing entity	“Samarqandlik” tokenida rootni ajratmaslik	Agglutinatív tuzilma

Jadval 10: Entity toifalari

Har bir toifa bo‘yicha Precision, Recall va F1-score quyidagicha hisoblanadi:

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}, \quad \text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN},$$

$$F_1 = \frac{2PR}{P + R}.$$

Agar:

- Precision past bo‘lsa → model juda ko‘p FP qiladi,
- Recall past bo‘lsa → model juda ko‘p FN qiladi.

Bu tahlil modelni qaysi yo‘nalishda yaxshilash kerakligini ko‘rsatadi.

XULOSA

Atoqli otlarni aniqlash (Named Entity Recognition – NER) tabiiy tilni qayta ishlash (NLP) sohasining eng muhim komponentlaridan biri bo‘lib, u matnlardan informatsion obyektlarni – shaxs, joy, tashkilot, sana, mahsulot, ilmiy atama va boshqa maxsus kategoriyalarni avtomatik ajratishga xizmat qiladi. Ushbu maqolada NER tizimi uchun zarur bo‘lgan barcha asosiy jarayonlar – annotatsiya qoidalarini shakllantirishdan tortib, matematik modellarni qo‘llash va xatoliklarni tahlil qilishgacha bo‘lgan bosqichlar batafsil yoritildi.

Maqolada NER modellari uchun qo‘llaniladigan zamonaviy yondashuvlar keng ko‘lamda tahlil qilindi. CRF modelining ketma-ketlikdagi bog‘liqlikni hisobga olishi, BiLSTM-CRF arxitekturasining uzun kontekstni chuqur anglash imkoniyati, Transformer asosidagi modellar – BERT va XLM-Rning ikki yo‘nalishli kontekstni oqilona qayta ishlashi kabi jihatlar keng yoritildi. Ayniqsa, self-attention mexanizmi orqali matnning barcha tokenlari o‘zaro bog‘lanishi va semantik ma‘noni chuqurroq aks ettirishi NERda yuksak natijalar berishi ilmiy jihatdan asoslab berildi.

Annotatsiya jarayonining formal yondashuv asosida tashkil qilinishi NER tizimining muvaffaqiyatini keskin oshiradi. Annotatorlar uchun ishlab chiqilgan qat‘iy qoida, yo‘riqnomalar, murakkab holatlar bo‘yicha talqinlar, inter-annotator agreement (Cohen’s Kappa) orqali moslikni baholash, annotatsiyaning ishonchligi va qayta tiklanish imkoniyatini ta‘minlaydi. Aynan shu jihatlar yuqori sifatli korpuslar yaratishda muhim o‘rin tutadi.

Shuningdek, maqolada model ishlash jarayonida uchraydigan xatoliklar – boundary error, misclassification, missing entity va spurious entity kabi holatlar tizimli ravishda tasniflandi. NER tizimini takomillashtirish uchun xatoliklarni statistik tahlil qilish, ya‘ni Precision, Recall, F1-score ko‘rsatkichlarini hisoblash zarurligi qayd etildi. Bu ko‘rsatkichlar modelning qaysi yo‘nalishda kuchsiz ishlashini aniqlashga yordam beradi va yanada puxta NLP tizimi yaratish uchun asos bo‘ladi.

Umuman olganda, ushbu tadqiqot o‘zbek tilida NER tizimini yaratish uchun ilmiy asoslarni, amaliy metodlarni va texnik yondashuvlarni bir butun shaklda bayon qiluvchi kompleks ish bo‘lib, til texnologiyalarini rivojlantirish yo‘lida muhim qadamlardan biridir. Kelajakda ushbu yondashuvlar asosida kengroq korpuslar yaratish, modelni ko‘p tillilik (multilingual) imkoniyatlari bilan kengaytirish, shuningdek, o‘zbek tiliga xos lingvistik xususiyatlarni chuqurroq modellarga integratsiya qilish NER tizimlarining yanada yuqori aniqlikka ega bo‘lishiga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Lample, G., Ballesteros, M., Subramanian, S., Kawakami, K., & Dyer, C. (2016). Neural Architectures for Named Entity Recognition. NAACL-HLT. (BiLSTM-CRF asosidagi mashhur NER modeli)
2. Huang, Z., Xu, W., & Yu, K. (2015). Bidirectional LSTM-CRF Models for Sequence Tagging. arXiv:1508.01991. (NER va boshqa tegishli masalalar uchun LSTM-CRFning klassik varianti)
3. Devlin, J., Chang, M. W., Lee, K., & Toutanova, K. (2019). BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. NAACL-HLT. (Transformer asosida kontekstli model – zamonaviy NERning asosi)
4. Jurafsky, D., & Martin, J. H. (2023). Speech and Language Processing. Prentice Hall. (NLP bo'yicha eng mashhur darslik, NER bo'limi mavjud)
5. Rajabov J.Sh., Formalizing the Uzbek Language: A Comprehensive Exploration Using Backus-Naur Forms, Acta NUUZ, vol. 1(1), 2023 (01.00.00. №- 8).

АННОТАЦИЯ

В статье описываются правила аннотирования для выделения именованных сущностей в текстах, система разметки BIO, математические модели (CRF, BiLSTM-CRF, Transformer), признаки, специфичные для агглютинативных языков, и практические примеры на основе реальных узбекских текстов. Также рассматриваются формальное выражение построения модели, вероятностный подход, соглашение между аннотаторами (каппа Коэна) и методы повышения качества аннотирования. Статья служит методическим руководством для исследователей, стремящихся создать систему NER в области обработки естественного языка (NLP).

Ключевые слова: токен, индексация, агглютинативный, аннотация, объект.

ABSTRACT

This article describes annotation rules for identifying Named Entities in texts, the BIO tagging system, mathematical models (CRF, BiLSTM-CRF, Transformer), features specific to agglutinative languages, and practical examples using real Uzbek texts. The formal expression of model construction, a probability-based approach, agreement between annotators (Cohen's Kappa), and methods for improving annotation quality are also covered. The article serves as a methodological guide for researchers who want to create a NER system in the field of natural language processing (NLP).

Keywords: token, indexing, agglutinative, annotation, object.

UDC 517.98

CRITERION OF COMPLETENESS FOR TWO-SIDED IDEALS OF COMPACT OPERATORS

AZIZOV AZIZKHON NODIRKHON UGLI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN
 azizov.07@mail.ru

RESUME

In this paper established a sufficient condition for a two-sided ideal of compact operators to form a Banach ideal. We prove that any proper, commutatively complete ideal $X \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$, which equipped with a monotone norm $\|\cdot\|_X$, is a Banach ideal.

Key words: non-increasing rearrangement, compact operator, Calkin's correspondence, Banach ideals of compact operators.

Preliminaries and main result. Let l^∞ (respectively, c_0) be the Banach space of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$, where \mathbb{N} is the set of natural numbers.

In l^∞ we consider the natural partial order

$$\{\xi_n\} \leq \{\eta_n\} \iff \xi_n \leq \eta_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, then the *non-increasing rearrangement* $\xi^* : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ of ξ is defined by

$$\xi^*(t) = \inf\{\lambda : \mu\{|\xi| > \lambda\} \leq t\}, \quad t > 0,$$

(see, for example, [2, Ch. 2, Definition 1.5]). As such, the non-increasing rearrangement of a sequence $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$ can be identified with the sequence $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, where

$$\xi_n^* = \inf \left\{ \sup_{n \notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N}, |F| < n \right\}.$$

If $\{\xi_n\} \in c_0$, then $\xi_n^* \downarrow 0$; in this case there exists a bijection $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space l^∞ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec\prec \eta = \{\eta_n\} \iff \sum_{n=1}^m \xi_n^* \leq \sum_{n=1}^m \eta_n^* \text{ for all } m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l^\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric (fully symmetric) sequence space* if

$$\eta \in E, \xi \in l^\infty, \xi^* \leq \eta^* \text{ (resp., } \xi^* \prec\prec \eta^*) \implies \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E.$$

Every fully symmetric sequence space is a symmetric sequence space. The converse is not true in general. At the same time, any separable symmetric sequence space is a fully symmetric space.

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then

$$\|\xi\|_E = \|\xi^*\|_E = \|\xi^*\|_E \text{ for all } \xi \in E.$$

Immediate examples of fully symmetric sequence spaces are $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ and the Banach spaces

$$l^p = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty : \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

For any symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E)$ the following continuous embeddings hold [2, Ch. 2, § 6, Theorem 6.6]: $(l^1, \|\cdot\|_1) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Besides, $\|\xi\|_E \leq \|\xi\|_1$ for all $\xi \in l^1$ and $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_E$ for all $\xi \in E$.

If there is $\xi \in E \setminus c_0$, then $\xi^* \geq \alpha \mathbf{1}$ for some $\alpha > 0$, where $\mathbf{1} = \{1, 1, \dots\}$. Consequently, $\mathbf{1} \in E$ and $E = l^\infty$. Therefore, either $E \subset c_0$ or $E = l^\infty$.

Let now $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ be an infinite-dimensional separable Hilbert space over \mathbb{C} , and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the C^* -algebra of all bounded linear operators in \mathcal{H} . Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Denote $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty]$ be the canonical trace on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, that is,

$$\tau(x) = \sum_{j \in J} (x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

where $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ is an orthonormal basis in \mathcal{H} (see, for example, [6, Ch. 7, E. 7.5]).

Let $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ be the lattice of projectors in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of x , that is, $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. If $t > 0$, then the t -th generalized singular number of x , or the non-increasing rearrangement of x , is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}$$

(see [3]).

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called symmetric (fully symmetric) if the conditions

$$x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \mu_t(y) \leq \mu_t(x) \quad \text{for all } t > 0$$

(respectively,

$$x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \int_0^s \mu_t(y) dt \leq \int_0^s \mu_t(x) dt \quad \text{for all } s > 0 \quad (\text{writing } y \prec\prec x))$$

imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ as well as the classical Banach two-sided ideals

$$\mathcal{C}^p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

are examples of fully symmetric spaces.

It should be noted that for every symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and all $x \in X, a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\|x\|_X = \||x|\|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \quad \text{and} \quad \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Remark 1. If $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a symmetric space and there exists a projection $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap X$ such that $\tau(e) = \infty$, that is, $\dim e(\mathcal{H}) = \infty$, then $\mu_t(e) = \mu_t(\mathbf{1}) = 1$ for every $t \in (0, \infty)$. Consequently, $\mathbf{1} \in X$ and $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $X \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $x \in X$, then $e_\lambda(|x|)^\perp = \{|x| > \lambda\}$ is a finite-dimensional projection, that is, $\dim e_\lambda(|x|)^\perp(\mathcal{H}) < \infty$ for all $\lambda > 0$. This means that $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, hence $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Therefore, either $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ or $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Throughout this paper, we assume that for a symmetric space $(X, \|\cdot\|_X)$ the embedding $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ holds, and we call the pair $(X, \|\cdot\|_X)$ a Banach ideal of compact operators (cf. [4, Ch. III]).

We say that the norm $\|\cdot\|_X$ of the Banach ideal $(X, \|\cdot\|_X)$ is monotone if for any two positive compact operators $A \geq 0$ and $B \geq 0$ with $A \leq B$, the inequality $\|A\|_X \leq \|B\|_X$ holds.

We say that $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is commutatively complete if every Cauchy sequence of pairwise commuting self-adjoint elements in X converges in X with respect to the operator norm (i.e., converges uniformly).

We now state the criterion of completeness for two-sided ideals of compact operators.

Theorem 1. Let X be a proper, commutatively complete two-sided ideal of compact operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, equipped with a monotone norm $\|\cdot\|_X$. Then $(X, \|\cdot\|_X)$ is a Banach ideal of compact operators.

Proof. To prove that $(X, \|\cdot\|_X)$ is a Banach ideal, we show that every Cauchy sequence in $(X, \|\cdot\|_X)$ converges to a limit within X with respect to the $\|\cdot\|_X$ norm.

Let $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ be a Cauchy sequence in $(X, \|\cdot\|_X)$. Since $\|\cdot\|_X$ is a monotone norm on the ideal of compact operators X , it follows from [6, Theorem 2.7 (a)] that

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_X \quad \text{for all } A \in X.$$

Thus, $\{T_n\}$ is also a Cauchy sequence with respect to $\|\cdot\|_\infty$. Since the space of compact operators $K(\mathcal{H})$ is complete, there exists a unique compact operator $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\|_\infty = 0.$$

We must show that $T \in X$. Consider the positive compact operator $|T| = (T^*T)^{1/2}$. By the Spectral Theorem (see, for example, [2]), $|T|$ admits a decomposition in terms of its singular values $s_k(T)$ and corresponding orthogonal rank-one projections $P_k \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$:

$$|T| = \sum_{k=1}^\infty s_k(T)P_k.$$

Define the sequence of finite-rank partial sums A_m by

$$A_m = \sum_{k=1}^m s_k(T)P_k.$$

Since X contains all finite-rank operators, we have $A_m \in X$ for all $m \in \mathbb{N}$. The elements A_m are self-adjoint and pairwise commuting. Therefore, the sequence $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ converges uniformly to $|T|$, i.e.,

$$\| |T| - A_m \|_\infty = s_{m+1}(T) \rightarrow 0.$$

Hence, $\{A_m\}$ is a Cauchy sequence in $\|\cdot\|_\infty$.

By the commutative completeness of X , it follows that $|T| \in X$.

Now, using the polar decomposition $T = U|T|$ (where $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a partial isometry) and the two-sided ideal property of X , we conclude that $T \in X$.

Next, we show that $\|T_n - T\|_X \rightarrow 0$. Let $\varepsilon > 0$. Since $\{T_n\}$ is Cauchy, there exists N such that for all $n, m \geq N$, $\|T_n - T_m\|_X < \varepsilon$.

A key property of monotone norms on compact operator ideals is lower semi-continuity with respect to the uniform operator topology, i.e., if $S_m \rightarrow S$ in $\|\cdot\|_\infty$, then

$$\|S\|_X \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|S_m\|_X$$

(see [6, Theorem 2.7(d)]).

Fix $n \geq N$. The sequence $T_n - T_m$ converges uniformly to $T_n - T$ as $m \rightarrow \infty$, because

$$\|(T_n - T_m) - (T_n - T)\|_\infty = \|T - T_m\|_\infty \rightarrow 0.$$

Applying the lower semi-continuity property to the sequence $S_m = T_n - T_m$ we get

$$\|T_n - T\|_X \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\|_X.$$

Since $\|T_n - T_m\|_X < \varepsilon$ for all $m \geq N$, we obtain

$$\|T_n - T\|_X \leq \varepsilon.$$

Since ε was arbitrary, it follows that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\|_X = 0.$$

Therefore, $(X, \|\cdot\|_X)$ is a Banach ideal. □

Application. If $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, then $|x| = \sum_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges uniformly), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of singular values of x , that is, the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and p_n is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. Consequently, the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$, we set $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Let $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ be a symmetric space. Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} . Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C} \cdot \varphi_n \subset \mathcal{H}$. It is clear that the set

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : x_{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n p_n \in X \right\}$$

(the series converges uniformly), is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_{\xi}\|_X$ (see, for example, [1]). Therefore, each symmetric subspace $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ uniquely generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ uniquely generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see, for example, [4, Ch. 3, Section 3.5]):

$$\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$$

In addition,

$$E(\mathcal{C}_E) = E, \quad \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E, \quad \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}.$$

The construction described above is known as Calkin's construction.

From the Theorem 1 we obtain the following useful corollaries, which are represents a key component of Calkin's correspondence.

Corollary 1. Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a symmetric sequence space. Then the associated operator ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a Banach ideal of compact operators.

Corollary 2. Let $(E, \|\cdot\|_E) = (l^p, \|\cdot\|_p)$ be a classical symmetric sequence space. Then the associated operator ideal (Schatten's ideal) $(\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}}) = (\mathcal{C}^p, \|\cdot\|_p)$ is a Banach ideal of compact operators (see, for example, [1]).

REFERENCES

1. A. Azizov, *An abstract characterization of trace class ideal \mathcal{C}_1* , Acta NUUZ (Exact sciences), No. 2/2 (2025), 23-28.
2. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press Inc., 1988.
3. T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s -numbers of τ -measurable operators*, Pacific. J. Math., **123** (1986), 269–300.
4. I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 02904, 1969.
5. S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, *Singular Traces*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2013.
6. B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, **120**, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

REZYUME

Ushbu maqolada kompakt operatorlarning ikki tomonlama ideali Banax idealini hosil qilishi uchun yetarli shart o'rnatilgan. Biz monoton norma $\|\cdot\|_X$ bilan berilgan har qanday xos, kommutativ to'la $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ideal Banax ideali ekanligini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: o'smaydigan o'rin almashtirish, kompakt operator, Kalkin munosabati, kompakt operatorlar Banax ideali.

РЕЗЮМЕ

В этой статье приводится и доказывается достаточное условие для того, чтобы двусторонний идеал компактных операторов образовывал банахов идеал. Мы доказываем, что любой собственный, коммутативно полный идеал $(X \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, оснащенный монотонной нормой $\|\cdot\|_X$, является банаховым идеалом.

Ключевые слова: невозрастающая перестановка, компактный оператор, соответствие Калкина, Банаховы идеалы компактных операторов.

UDC 517.953

THE FOKAS' METHOD FOR HEAT TRANSFER EQUATION ON SYMMETRIC GRAPHS**ERGASHOV RUZIMUROD ERKIN UGLI**NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK, TASHKENT, UZBEKISTAN
rozimurodergashov357@gmail.com**RESUME**

In the present paper we obtained integral-representation of solutions in terms of given initial and boundary data for the initial-boundary value problems for heat transfer equation on symmetric metric graph via Fokas' unified transformation method.

Key words: Heat transfer equation, metric graphs, branched structures, Fokas' method, unified transformation, Fourier transformation, initial problem, boundary value problem.

1. Introduction

During the last years the branched thin structures and metric graphs are widely used as a model in theoretical investigation of many complex systems from physics, biology, ecology, sociology, economy and finance [1]-[3]. Despite to high interest for diffusive and dispersive wave transfer problems in such system, here only few papers on the initial-boundary value problems (IBVP) on metric graphs. Firstly IBVP for heat equation on graphs are investigated in [7]. Some numerical methods for solution of IBVP for heat equation can be found in [8]. In the paper [13] it is proved existence and uniqueness of the generalized (weak) solution of initial boundary value problem on general graphs in Sobolev spaces. In [9] and [10] thermal diffusion in branched structures based on linear and nonlinear heat equation and some other physical applications are discussed.

Usually, for investigation physical properties of quantum graphs used static Schrödinger equation [3]-[7]. In the references [16] was investigated nonlinear Schrödinger equation on two dimensional thin tabular branched domain and proved that the problem on metric graphs for one dimensional nonlinear Schrödinger equation on metric graph, with gluing (Kirchhoff) conditions on the vertex point, can be obtained when width of the branches tends to zero. Similar convergence result in the case of linear Schrödinger equation with different approaches can be found in [6]-[7].

Schrödinger equation can be also called to be heat equation with imaginary time. The heat equation on branched structures firstly used in the 50's of the nineteenth century. Thomson (Lord Kelvin) used heat equation (Thomson's cable equation) as mathematical models of signal decay in submarine (under water) telegraphic cables (Ch. IV in [9]). Later this method was widely used in neuroscience for theoretical analyzing data collected from intracellular micro electrode recordings and for analyzing the electrical properties of neuronal dendrites (see [10]). Initial and boundary value problems for some other types of PDE on metric graphs and their possible applications can be found in [11], [16]-[17].

In this paper we construct the integral representation of solution of IBVP for heat equation on general star graph with both finite and semi infinite bonds [11]. For this purpose we generalize so called Fokas' method in the case of metric graph [12]-[15]. It should be noted that this method was used in [16], [17] for the IBVP for heat equation on star graphs with only finite or semi infinite bonds.

2. Formulation of the problem and main result

We consider symmetric metric graph which obtained by connecting n finite B_1, \dots, B_n and m semi infinite $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_{n+m}$ bonds at one point, called to be vertex of the graph. We correspond the bonds B_j , ($j = \overline{1, n}$) to the intervals $(0, L_j)$ and the bonds B_r , ($r = \overline{n+1, n+m}$) to intervals $(0, \infty)$ to define coordinates in each bond. Here vertex of the graph corresponds to 0 on each bond (Figure 1).

In each bond of the graph consider the heat transfer equation

$$V_t^{(j)}(x, t) = V_{xx}^{(j)}(x, t) + f^{(j)}(x, t), \quad j = \overline{1, n+m}. \quad (1)$$

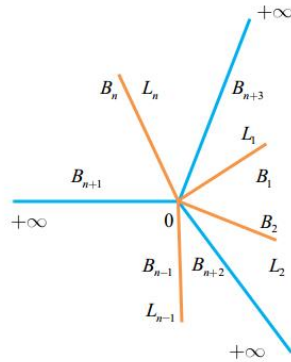


Figure 1. Symmetric metric graph

Define initial conditions

$$V^{(j)}(x, 0) = V_0^{(j)}(x), \quad x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, n+m}. \tag{2}$$

Boundary and the asymptotic conditions

$$\left(\alpha_j V^{(j)}(x, t) + \beta_j V_x^{(j)}(x, t) \right) |_{x=L_j-0} = 0, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V^{(r)}(x, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad r = \overline{n+1, n+m} \tag{4}$$

on finite and semi infinite bonds, respectively.

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$V^{(1)}(+0, t) = V^{(2)}(+0, t) = \dots = V^{(n+m)}(+0, t), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2 V_x^{(j)}(+0, t) = 0. \tag{6}$$

The last conditions usually called continuity and Kirchhoff conditions on branching point of the graphs. We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3)–(6).

Step 1. Write the PDE as a one-parameter "family" of equations, each of which is in divergence form [14]–[15].

For problem (1), a clear choice of an integrating factor to achieve this is $\tilde{q}(x, t) = e^{-ikx+k^2t}$, leading to the form

$$\left[e^{-ikx+k^2t} V^{(j)}(x, t) \right]_t = \left[e^{-ikx+k^2t} \left(V_x^{(j)}(x, t) + ikV^{(j)}(x, t) \right) \right]_x + e^{-ikx+k^2t} f^{(j)}(x, t), \quad j = \overline{1, n+m}. \tag{7}$$

Step 2. Use the divergence form to determine a global relation coupling the various boundary values.

In the case of (7), this takes the form

$$e^{wt} \widehat{V}^{(j)}(k, t) - \widehat{V}_0^{(j)}(k) = e^{-ikL_j} \left(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t) \right) - \left(g_j(w, t) + ikg_0(w, t) \right) + \widehat{F}^{(j)}(k, t), \quad j = \overline{1, n}; \tag{8}$$

$$e^{wt} \widehat{V}^{(r)}(k, t) - \widehat{V}_0^{(r)}(k) = -g_r(w, t) - ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(r)}(k, t), \quad r = \overline{n+1, n+m}. \tag{9}$$

where $w = k^2, \{k \in \mathbb{C} : Imk > 0\}$.

However dispersion relation $w = k^2$ invariant with respect to substitution $k \rightarrow -k$ then functions $g_0(w, t), g_j(w, t), g_r(w, t), h_0^{(j)}(w, t), h_1^{(j)}(w, t), j = \overline{1, n}, r = \overline{n+1, n+m}$ also be invariant. Hence from (8) and (9) we have:

$$e^{wt}\widehat{V}^{(j)}(-k, t) - \widehat{V}_0^{(j)}(-k) = e^{ikL_j} \left(h_1^{(j)}(w, t) - ikh_0^{(j)}(w, t) \right) - (g_j(w, t) - ikg_0(w, t)) + \widehat{F}^{(j)}(-k, t), \quad j = \overline{1, n}; \tag{10}$$

$$e^{wt}\widehat{V}^{(r)}(-k, t) - \widehat{V}_0^{(r)}(-k) = -g_r(w, t) + ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(r)}(-k, t), \tag{11}$$

where $r = \overline{n+1, n+m}, \{k \in \mathbb{C} : Imk < 0\}$.

We can write solution in following form with using inverse Fourier transformation in global relation (8) and (9) [16]–[17].

$$V^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \left(\widehat{V}_0^{(j)}(k) + \widehat{F}^{(j)}(k, t) \right) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-ikL_j-wt} \left(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t) \right) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} (g_j(w, t) + ikg_0(w, t)) dk, \quad j = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$V^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \left(\widehat{V}_0^{(r)}(k) + \widehat{F}^{(r)}(k, t) \right) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} (g_r(w, t) + ikg_0(w, t)) dk, \quad r = \overline{n+1, n+m}. \tag{13}$$

The integrand of the second integral in (12) and (13) is entire and decays as $k \rightarrow \infty$ for $k \in \mathbb{C}^- \setminus D^-$. The third integral has an integrand that is entire and decays as $k \rightarrow \infty$ for $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$. Using the analyticity of the integrand and applying Jordan’s Lemma we can replace the contour of integration of the second integral by $-\int_{\partial D^-}$ and of the third integral by $-\int_{\partial D^+}$ (see [12], [14]–[17]):

$$V^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \left(\widehat{V}_0^{(j)}(k) + \widehat{F}^{(j)}(k, t) \right) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt} \left(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t) \right) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} (g_j(w, t) + ikg_0(w, t)) dk, \quad j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

$$V^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \left(\widehat{V}_0^{(r)}(k) + \widehat{F}^{(r)}(k, t) \right) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} (g_r(w, t) + ikg_0(w, t)) dk, \quad r = \overline{n+1, n+m}, \tag{15}$$

where $D^\pm = \{k \in \mathbb{C}^\pm : Re k^2 < 0\}, \mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C} : Imk > 0\},$

$$\mathbb{C}^- = \{k \in \mathbb{C} : Imk < 0\}.$$

We need to find unknowns $g_0(w, t), g_j(w, t), g_r(w, t), h_0^{(j)}(w, t), h_1^{(j)}(w, t), j = \overline{1, n}, r = \overline{n+1, n+m}$ representation of the solution.

Now, using vertex conditions we get

$$\begin{cases} e^{wt}\widehat{V}^{(j)}(k, t) - \widehat{V}_0^{(j)}(k) = e^{-ikL_j} h_1^{(j)}(w, t) + ik e^{-ikL_j} h_0^{(j)}(w, t) - g_j(w, t) - ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(j)}(k, t); \\ e^{wt}\widehat{V}^{(j)}(-k, t) - \widehat{V}_0^{(j)}(-k) = e^{ikL_j} h_1^{(j)}(w, t) - ik e^{ikL_j} h_0^{(j)}(w, t) - g_j(w, t) + ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(j)}(-k, t); \\ e^{wt}\widehat{V}^{(r)}(k, t) - \widehat{V}_0^{(r)}(k) = -g_r(w, t) - ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(r)}(k, t); \\ \sum_{j=1}^6 \delta_j^2 g_j(w, t) = 0; \\ \alpha_j h_0^{(j)}(w, t) + \beta_j h_1^{(j)}(w, t) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

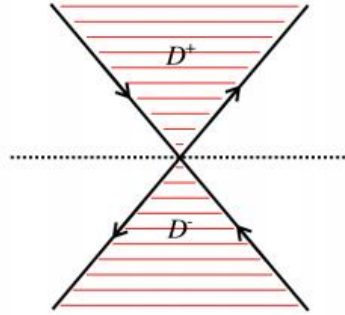


Figure 2. The domains D^+ and D^- for the heat transfer equation

Where $j = \overline{1, n}$, $r = \overline{n + 1, n + m}$.

Solving this equations for $ikg_0(w, t)$, we have

$$\begin{aligned}
 ikg_0(w, t) = & \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \cdot B_j} \left[e^{ikL_j} \left(1 + i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}_0^{(j)}(k) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - e^{-ikL_j} \left(1 - i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}_0^{(j)}(-k) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \widehat{V}_0^{(r)}(k) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \cdot B_j} \left[e^{ikL_j} \left(1 + i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{F}^{(j)}(k, t) - \right. \\
 & \left. - e^{-ikL_j} \left(1 - i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{F}^{(j)}(-k, t) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \widehat{F}^{(r)}(k, t) - \\
 & - \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2 e^{wt}}{A_j + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \cdot B_j} \left[e^{ikL_j} \left(1 + i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}^{(j)}(k, t) - \right. \\
 & \left. \left. - e^{-ikL_j} \left(1 - i \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}^{(j)}(-k, t) \right] - \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 e^{wt} \widehat{V}^{(r)}(k, t) \right], \tag{17}
 \end{aligned}$$

where $A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}$, $B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}$, $j = \overline{1, n}$, $\alpha_j \neq 0$.

Now putting $G^{(j)}(k, t) = \widehat{V}_0^{(j)}(k) - ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(j)}(k, t)$, $j = \overline{1, n}$ we can rewrite

$$\begin{cases} e^{wt} V^{(j)}(k, t) = G^{(j)}(k, t) + e^{-ikL_j} \left(1 - i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) h_1^{(j)}(w, t) - g_j(w, t), \\ e^{wt} V^{(j)}(-k, t) = G^{(j)}(-k, t) + e^{ikL_j} \left(1 + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) h_1^{(j)}(w, t) - g_j(w, t). \end{cases} \tag{18}$$

So, we have

$$\begin{aligned}
 h_1^{(j)}(w, t) = & \frac{1}{A_j + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \cdot B_j} \left[G^{(j)}(k, t) - G^{(j)}(-k, t) - \right. \\
 & \left. - e^{wt} \left(\widehat{V}^{(j)}(k, t) - \widehat{V}^{(j)}(-k, t) \right) \right], \tag{19}
 \end{aligned}$$

where $h_0^{(j)}(w, t) = -\frac{\beta_j}{\alpha_j} h_1^{(j)}(w, t)$, $\alpha_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$.

$$\begin{aligned}
 g_j(w, t) = & \frac{1}{A_j + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \cdot B_j} \left[e^{ikL_j} \left(1 + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) G^{(j)}(k, t) - \right. \\
 & - e^{-ikL_j} \left(1 - i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) G^{(j)}(-k, t) - e^{wt+ikL_j} \left(1 + i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}^{(j)}(k, t) - \\
 & \left. - e^{wt-ikL_j} \left(1 - i \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j} \cdot k \right) \widehat{V}^{(j)}(-k, t) \right], \tag{20}
 \end{aligned}$$

this $\alpha_j \neq 0, j = \overline{1, n}$.

Solving (11) for $g_r(w, t)$ we find

$$g_r(w, t) = \widehat{V}_0^{(r)}(-k) + ikg_0(w, t) + \widehat{F}^{(r)}(-k, t) - e^{wt}\widehat{V}^{(r)}(-k, t). \tag{21}$$

Replacing in equation (15) $g_r(w, t)$ with the RHS of (21) we find [16]–[17]

$$\begin{aligned}
 V^{(r)}(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \left(\widehat{V}_0^{(r)}(k) + \widehat{F}^{(r)}(k, t) \right) dk - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \left(2ikg_0(w, t) + \widehat{V}_0^{(r)}(-k) + \widehat{F}^{(r)}(-k, t) \right) dk, r = \overline{n+1, n+m}, \tag{22}
 \end{aligned}$$

The term $e^{wt}\widehat{V}^{(r)}(-k, t)$ gives rise to the term [13]

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx}\widehat{V}^{(r)}(-k, t)dk, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

which vanishes, since both e^{wt} and $\widehat{V}^{(r)}(-k, t)$ are bounded and analytic in the upper half of the complex k plane, and furthermore $\widehat{V}^{(r)}(-k, t)$ is of $O\left(\frac{1}{k}\right)$ as $k \rightarrow \infty$:

$$\widehat{V}^{(r)}(-k, t) = \int_0^\infty e^{ikx}V^{(r)}(x, t)dx \sim -\frac{V^{(r)}(0, t)}{ik}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Thus, Cauchy’s theorem supplemented with Jordan Lemma in the domain D^+ [12].

We next substitute $g_1^{(j)}(w, t)$ and $h_1^{(j)}(w, t)$ in (14). We claim that the terms involving $\widehat{V}^{(j)}(\pm k, t)$ yield a zero contribution. Indeed, since this is a well-posed BVP, the relevant terms are bounded as $k \rightarrow \infty$. Let us verify this explicitly: the term in $g_1^{(j)}(w, t)$ involves the following contribution from $\widehat{V}^{(j)}(\pm k, t)$:

$$\frac{e^{ikL_j}\widehat{V}^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j}\widehat{V}^{(j)}(-k, t)}{e^{ikL_j} \left(1 + i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k \right) - e^{-ikL_j} \left(1 - i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k \right)}.$$

Since $Imk \geq 0, e^{-ikL_j}$ grows, and then the above expression, as $k \rightarrow \infty$, becomes

$$\frac{-\widehat{V}^{(j)}(-k, t) + e^{ikL_j} \int_0^{L_j} e^{ik(L_j-x)}V^{(j)}(x, t)dx}{i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k - 1},$$

which is clearly bounded as $k \rightarrow \infty$ with $Imk \geq 0$. Similarly the term in $h_1^{(j)}(w, t)$ involves the following contribution from $\widehat{V}^{(j)}(\pm k, t)$:

$$\frac{\widehat{V}^{(j)}(k, t) - \widehat{V}^{(j)}(-k, t)}{e^{ikL_j} \left(1 + i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k \right) - e^{-ikL_j} \left(1 - i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k \right)},$$

which as $k \rightarrow \infty, Imk \leq 0$, simplifies to the expression

$$\frac{\int_0^{L_j} e^{-ik(L_j+x)}V^{(j)}(x, t)dx - e^{-ikL_j}\widehat{V}^{(j)}(-k, t)}{i \frac{\beta_j}{\alpha_j} k - 1},$$

which is clearly bounded as $k \rightarrow \infty$, $Imk \leq 0$ [12].

3. Conclusion and results

In this paper, we presented a method for constructing solutions to initial-boundary value problems on certain metric graphs, such as star-shaped graphs. In general, this method is applicable to solving initial-boundary value problems on arbitrary metric graphs. In solving the problem, we use the so-called global relation and another relation obtained by replacing the complex parameter with its negative. These two relations are equivalent to mapping Dirichlet conditions to Neumann conditions at the vertices. Using these relations, the considered problem is reduced to a system of algebraic equations with respect to the unknown values of the solution at the branching points of the graph. The solution is expressed in the form of contour integrals of known functions. The contours are chosen so that the integrand functions decay exponentially at infinity along these contours. This property ensures good convergence of the integrals, which is very important, for example, for the numerical computation of the solution.

REFERENCES

1. R. Albert, A. L. Barabasi, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys. A*, 74, 47. 2002.
2. R. Cohen, S. Havlin, *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*, Cambridge University Press. 2010.
3. Tsampikos Kottos and Uzy Smilansky, Quantum Chaos on Graphs, *Ann. Phys.*, 76. 274. 1999.
4. Sven Gnutzmann and Uzy Smilansky, Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics, *Adv. Phys.* 55 527. 2006.
5. S. Gnutzmann, J. P. Keating, F. Piotet, Eigenfunction statistics on quantum graphs, *Ann. Phys.*, 325 2595. 2010.
6. G. F. Dell'Antonio and E. Costa, Effective Schrödinger dynamics on o-thin Dirichlet waveguides via quantum graphs: I. Star-shaped graphs, *J. Phys. A, Math. Theor.*, 43, 474014, 23. 2010.
7. P. Exner, O. Post, A General Approximation of Quantum Graph Vertex Couplings by Scaled Schrödinger Operators on Thin Branched Manifolds, *Commun. Math. Phys.*, 1322 207-227. 2013.
8. H. Uecker, D. Grieser, Z. Sobirov, D. Babajanov, D. Matrasulov, Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit, *Phys. Rev. E* 91, 023209, 2015.
9. Gustav Doetsch, *Guide to the applications of the Laplace and Z-transforms*, Munchen, Wien : Oldenbourg. 1971.
10. Wilfrid Rall, Branching Dendritic Trees and Motoneuron Membrane Resistivity, *Experimental neurology* 1, 491-527. 1959.
11. Z.A. Sobirov, M.I. Akhmedov, H. Uecker, Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs, *Наносистемы: физика, химия, математика*, 6:2 (2015), 198–204.
12. A.S. Fokas, *A Unified Approach to Boundary Value Problems*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. 2008., p: 352.
13. A.S. Fokas, A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs, In *Proc. R. Soc. A*, volume 453, pages 1411–1443. The Royal Society, 1997.
14. N.E. Sheils and D.A. Smith, Heat equation on a network using the Fokas method, *J. Phys. A: Math. Theor.* 48 335001. 2015.
15. N.E. Sheils, Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact, *Applied Mathematical Modelling* Volume 46, June 2017, Pages 450-464.

16. G.Khudayberganov, Z.A.Sobirov, M.R.Eshimbetov, Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.
17. З.А.Собиров, М.Р.Эшимбетов, Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах, Современная математика. Фундаментальные направления, 2021, том 67, выпуск 4, страницы 766–782.

REZYUME

Ushbu maqolada issiqlik uzatish tenglamasi uchun simmetrik metrik grafda boshlang'ich-chegaraviy masalalar yechimining integral ko'rinishdagi ifodasi Fokasning umumlashtirilgan almashtirish usuli yordamida, berilgan boshlang'ich va chegaraviy ma'lumotlar asosida topildi.

Kalit so'zlar: Issiqlik uzatish tenglamasi, metrik graflar, tarmoqlangan tuzilmalar, Fokas usuli, umumlashtirilgan almashtirish, Furey almashtirish, boshlang'ich masala, chegaraviy qiymat masalasi.

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье получено интегральное представление решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на симметричном метрическом графе в терминах заданных начальных и граничных данных с использованием унифицированного метода преобразования Фокаса.

Ключевые слова: Уравнение теплопередачи, метрические графы, разветвлённые структуры, метод Фокаса, унифицированное преобразование, преобразование Фурье, начальная задача, краевая задача.

UDC 15A.80

ON THE SOLUTION OF A SYSTEM MAX-PLUS LINEAR EQUATIONS IN THREE VARIABLES

ESHIMBETOV MUZAFFAR REYIMBAYEVICH

TASHKENT INTERNATIONAL UNIVERSITY OF FINANCIAL MANAGEMENT AND TECHNOLOGIES, TASHKENT
UZBEKISTAN;CHIRCHIK STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY, CHIRCHIK, TASHKENT REGION, UZBEKISTAN;
mr.eshimbetov@gmail.com

ESHIMBETOV JO'RABEK REYIMBAYEVICH

TASHKENT UNIVERSITY OF HUMAN SCIENCES, REPUBLIC OF KARAKALPAKSTAN, UZBEKISTAN;
eshimbetovjurabek1990@gmail.com

ASHUROVA NIGINA ABDUNAZAR QIZI

TASHKENT INTERNATIONAL UNIVERSITY OF FINANCIAL MANAGEMENT AND TECHNOLOGIES, TASHKENT,
UZBEKISTAN;
nashurova881@gmail.com

ABSTRACT

This research work is devoted to study solutions of a max-plus linear equation system. The study outlines the fundamental concepts and properties of max-plus algebra and highlights the theoretical and practical aspects of solving systems of equations within this algebraic structure. In addition, the article analyzes the conditions for the existence of solutions and presents methods for determining them using max-plus techniques. The results obtained are of significant importance for applications of idempotent algebra and tropical mathematics, particularly in optimization and modeling of discrete event systems. Then, we provided examples of finding roots of a max-plus system and plotted the graphs of these max-plus equations in the Cartesian coordinate system.

Key words: Max-plus algebra; idempotent semi-ring; max-plus linear equation system.

1. Introduction

Max-Plus Linear (MPL) systems are a class of discrete-event dynamic systems (DEDS) based on the Max-Plus algebra, an algebraic structure that uses maximisation and addition as its binary operations. MPL systems are employed to model processes with features of synchronization but without concurrency, and as such are widely used for applications in transportation networks [1, 2], biological systems [3, 4] and manufacturing [7, 8]. In MPL models, the states correspond to time instances related to discrete events.

Max-plus algebra has been studied in research papers and books from the early 1960's. Perhaps the first paper was that of R. A. Cuninghame-Green [5] in 1960, followed by [10, 11, 12, 13] and numerous other articles. Independently, a number of pioneering articles were published, e. g. by B. Giffler, M. Gondran and M. Minoux. Intensive development of max-algebra has followed since 1985 in the works of M. Akian, R. Bapat, R. E. Burkard, G. Cohen, B. De Schutter, P. van den Driessche, S. Gaubert, M. Gavalec, R. Goverde, J. Gunawardena, B. Heidergott, M. Joswig, R. Katz, G. Litvinov, J. -J. Loiseau, G. -J. Olsder, J. Plávka, J. -P. Quadrat, I. Singer, S. Sergeev, E. Wagneur, K. Zimmermann, U. Zimmermann and many others. Note that idempotency of addition makes max-algebra part of idempotent mathematics [9, 17, 18].

2. Preliminary notions

The max-plus algebra is an algebraic structure consisting of real numbers where the standard operations of addition and multiplication are replaced by the operation of taking a maximum and the operation of standard addition, respectively. More precisely, let \mathbb{R}_{\max} denote the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, let \oplus be a binary operator on \mathbb{R}_{\max} with $x \oplus y = \max\{x, y\}$, and let \odot be the binary operator on \mathbb{R}_{\max} with $x \odot y = x + y$. The resulting algebraic structure $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \odot)$ is called a *max-plus semi-field* or simply a *max-plus algebra*. \mathbb{R}_{\max} is also called a commutative idempotent semiring or a dioid. In max-plus algebra $\varepsilon = -\infty$ is the additive identity: $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$, for each $x \in \mathbb{R}_{\max}$ and the multiplicative identity is $e = 0$: $x \odot e = e \odot x = x$, for all $x \in \mathbb{R}_{\max}$ [14], [15].

Let $n \in \mathbb{R}$. The n^{th} max-plus algebraic power of $x \in \mathbb{R}$ is denoted by $x^{\odot n}$ and corresponds to nx in conventional algebra. If $x \in \mathbb{R}$ then $x^{\odot 0} = 0$ and the inverse element of x written \odot is $x^{\odot -1} = -x$. There is no inverse element for ε written \odot since ε is absorbing for \odot . If $n > 0$ then $\varepsilon^{\odot n} = \varepsilon$. If $n < 0$ then $\varepsilon^{\odot n}$ is not defined [15].

The max-plus algebraic division operation is defined as follows:

$$\text{if } x, y \in \mathbb{R}_{\max} \text{ and } y \neq \varepsilon, \text{ then } \frac{x}{y} = x \odot y^{\odot -1} = x \odot (-y).$$

If y is equal to ε then the max-plus algebraic division is not defined [16].

In [6], we studied how to determine the solution set of the system

$$\begin{cases} a_{11} \odot x \oplus a_{12} \odot y = b_1, \\ a_{21} \odot x \oplus a_{22} \odot y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

by applying the Theorem 1 stated below.

We denote:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Theorem 1. [6] Let $\Delta \neq \varepsilon$.

1. If $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$, then the solution system () consists of the pairs (x, v) here

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ and } v \in \{s \in \mathbb{R}_{\max} : s \leq \frac{\Delta_y}{\Delta}\};$$

2. If $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, then the solution system () consists of the pairs (u, y) here

$$u \in \{t \in \mathbb{R}_{\max} : t \leq \frac{\Delta_x}{\Delta}\} \text{ and } y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

3. If $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$, then the solution system () consists of the pairs (u, v) here

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad v \in \{s \in \mathbb{R}_{\max} : s \leq \frac{\Delta_y}{\Delta}\} \text{ and } u \in \{t \in \mathbb{R}_{\max} : t \leq \frac{\Delta_x}{\Delta}\}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

4. If $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$, then the system () has no solution;

5. If $\frac{a_{12}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{21}}$ or $\frac{a_{11}}{a_{21}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{12}}{a_{22}}$, then the system () consists of a unique root (x, y) with

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ and } y = \frac{\Delta_y}{\Delta};$$

6. If $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ and both of inequalities in 5) do not hold, then the system () has no solution.

3. Main part

Let us be given the following max-plus linear system:

$$\begin{cases} a_{11} \odot x \oplus a_{12} \odot y \oplus a_{13} \odot z = b_1, \\ a_{21} \odot x \oplus a_{22} \odot y \oplus a_{23} \odot z = b_2, \\ a_{31} \odot x \oplus a_{32} \odot y \oplus a_{33} \odot z = b_3. \end{cases} \tag{2}$$

Assume that $a_{11} \neq \varepsilon$. In this case, we divide the first equation of the system by a_{11} and denote the resulting new coefficients by a'_{12}, a'_{13} . Similarly, if $a_{21} \neq \varepsilon$ and $a_{31} \neq \varepsilon$, then we divide the second and third equations of the system by a_{21} and a_{31} , respectively, and denote the resulting new coefficients by a'_{22}, a'_{23} and a'_{32}, a'_{33} , respectively. As a result, we obtain system (3), which is equivalent to system (2):

$$\begin{cases} x \oplus a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ x \oplus a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \\ x \oplus a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases} \tag{3}$$

We now construct the following systems based on system (3):

$$\begin{cases} a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases} \tag{5}$$

It is known that the following system consists of the common solution of systems (4) and (5)

$$\begin{cases} a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases}$$

The solution of systems (4) and (5) can be found according to Theorem 1.

We denote the solution sets of systems (4) and (5) by W_1 and W_2 , respectively.

Theorem 2. If systems (4) and (5) have solutions, then system (3) also has a solution and the solution set of system (3) is given as follows:

$$W = \{(x, y, z) : x \leq \min\{b'_1, b'_2, b'_3\}, (y, z) \in W_1 \cap W_2\}.$$

Proof. We divide system (3) into the following cases and find its solution.

1-case. Let $x < \min\{b'_1, b'_2, b'_3\}$. Then we obtain the systems (4) and (5). Consequently, the solution of system (3)

$$W = \{(x, y, z) : x < \min\{b'_1, b'_2, b'_3\}, (y, z) \in W_1 \cap W_2\}.$$

2-case. Let $x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_1$. Then we have the following system:

$$\begin{cases} a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z \leq b'_1, \\ a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases}$$

This case, the system (3) of solution:

$$W = \{(x, y, z) : x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_1, (y, z) \in W_2, y \leq \frac{b'_1}{a'_{12}} \wedge z \leq \frac{b'_1}{a'_{13}}\}.$$

3-case. Let $x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_2$. Then we have the following system:

$$\begin{cases} a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z \leq b'_2, \\ a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z = b'_3. \end{cases}$$

This case, the system (3) of solution:

$$W = \{(x, y, z) : x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_2, (y, z) \in W_1 \cap W_2, y \leq \frac{b'_2}{a'_{22}} \wedge z \leq \frac{b'_2}{a'_{23}}\}.$$

4-case. Let $x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_3$. Then we have the following system:

$$\begin{cases} a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z \leq b'_3, \\ a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z = b'_1, \\ a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z = b'_2. \end{cases}$$

This case, the system (3) of solution:

$$W = \{(x, y, z): x = \min\{b'_1, b'_2, b'_3\} = b'_3, (y, z) \in W_1, y \leq \frac{b'_3}{a'_{32}} \wedge z \leq \frac{b'_3}{a'_{33}}\}.$$

5-case. Let $x = b'_1 = b'_2 = b'_3$. Then we have the following system:

$$\begin{cases} a'_{12} \odot y \oplus a'_{13} \odot z \leq b'_1, \\ a'_{22} \odot y \oplus a'_{23} \odot z \leq b'_2, \\ a'_{32} \odot y \oplus a'_{33} \odot z \leq b'_3. \end{cases}$$

This case, the system (3) of solution:

$$W = \{(x, y, z): x = b'_1, y \leq \min\{\frac{b'_1}{a'_{12}}, \frac{b'_2}{a'_{22}}, \frac{b'_3}{a'_{32}}\} \wedge z \leq \min\{\frac{b'_1}{a'_{13}}, \frac{b'_2}{a'_{23}}, \frac{b'_3}{a'_{33}}\}\}.$$

6-case. It is clear that in the remaining cases, system (3) has no solution.

Thus, the general solution set of the system (3) is

$$W = \{(x, y, z): x \leq \min\{b'_1, b'_2, b'_3\}, (y, z) \in W_1 \cap W_2\}.$$

□

Example 1. Solve the system:

$$\begin{cases} 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus z = -3, \\ 2 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 6 \odot z = -1, \\ 2 \odot x \oplus y \oplus 9 \odot z = 0. \end{cases}$$

Solution. We rewrite the given system as follows:

$$\begin{cases} x \oplus 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = -5, \\ x \oplus 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ x \oplus (-2) \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

1-case. $x < \min\{-5, -3, -2\} = -5$. Then we obtain the following systems:

$$\begin{cases} 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = -5, \\ 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ -2 \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

Now according to Theorem 1, we find the solution of these systems. In the first system, since $\frac{-2}{4} < \frac{-5}{-3} = \frac{1}{3}$, its solution is $y = -6, z \leq -7$ and in the second system, since $\frac{4}{7} < \frac{-3}{-2} < \frac{3}{-2}$, its solution is $y = -6, z = -9$.

Thus, in this case, the solution set of the system is $\{(x, y, z): x < -5, y = -6, z = -9\}$.

2-case. $x = \min\{-5, -3, -2\} = -5$. Then we get the following system:

$$\begin{cases} 1 \odot y \oplus (-2) \odot z \leq -5, \\ 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ -2 \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

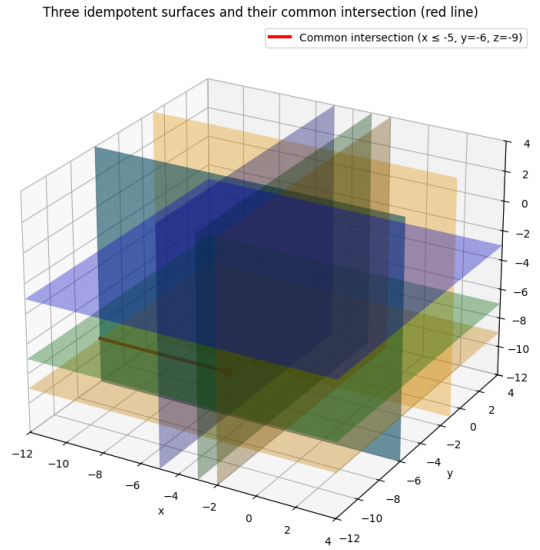
According to Theorem 1, since $\frac{4}{7} < \frac{-3}{-2} < \frac{3}{-2}$, its solution is $y = -6, z = -9$. By the first inequality of the system $y \leq -6$ and $z \leq -3$.

Therefore, in this case, the solution set of the system is $\{(x, y, z): x = -5, y = -6, z = -9\}$.

So, the general solution set of the system is

$$W = \{(x, y, z): x \leq -5, y = -6, z = -9\}.$$

The graphical representation of these planes in the coordinate system is as follows:



Example 2. Solve the system:

$$\begin{cases} 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus z = 3, \\ -1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 3 \odot z = -4, \\ -2 \odot x \oplus (-4) \odot y \oplus 5 \odot z = -4. \end{cases}$$

Solution. We rewrite the given system as follows:

$$\begin{cases} x \oplus 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = 1, \\ x \oplus 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ x \oplus (-2) \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

1-case. $x < \min\{1, -3, -2\} = -3$. Then we obtain the following systems:

$$\begin{cases} 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = 1, \\ 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ -2 \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

Now according to Theorem 1, we find the solution of these systems. In the first system, since $\frac{-2}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{-3}$, its solution is empty set, i. e. the first system has no solution and in the second system, since $\frac{4}{7} < \frac{-3}{-2} < \frac{3}{-2}$, its solution is $y = -6, z = -9$.

Thus, in this case, the solution set of the system is empty set.

2-case. $x = \min\{1, -3, -2\} = -3$. Then we get the following system:

$$\begin{cases} 3 \odot y \oplus 4 \odot z \leq -3, \\ 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = 1, \\ -2 \odot y \oplus 7 \odot z = -2. \end{cases}$$

Example 3. Solve the system:

$$\begin{cases} 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus z = -3, \\ 1 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 5 \odot z = -2, \\ -2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 7 \odot z = 1, \\ -3 \odot x \oplus 4 \odot y \oplus 1 \odot z = 0. \end{cases}$$

Solution. We rewrite the given system as follows:

$$\begin{cases} x \oplus 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = -5, \\ x \oplus 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ x \oplus 5 \odot y \oplus 9 \odot z = 3, \\ x \oplus 7 \odot y \oplus 4 \odot z = 3. \end{cases}$$

1-case. $x < \min\{-5, -3, 3, 3\} = -5$. Then we obtain the following systems:

$$\begin{cases} 1 \odot y \oplus (-2) \odot z = -5, \\ 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ 5 \odot y \oplus 9 \odot z = 3 \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} 5 \odot y \oplus 9 \odot z = 3, \\ 7 \odot y \oplus 4 \odot z = 3. \end{cases}$$

Now according to Theorem 1, we find the solution of these systems. In the first system, since $\frac{-2}{4} < \frac{-5}{-3} = \frac{1}{3}$, its solution is $y = -6$, $z \leq -7$ and in the second system, since $\frac{-3}{3} < \frac{4}{9} < \frac{3}{5}$, it has no solution and in the third system, since $\frac{5}{7} < \frac{3}{3} < \frac{9}{4}$, its solution is $y = -4$, $z = -6$

Thus, in this case, the solution set of the system is empty set.

2-case. $x = \min\{-5, -3, 3, 3\} = -5$. Then we get the following system:

$$\begin{cases} 1 \odot y \oplus (-2) \odot z \leq -5, \\ 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ 5 \odot y \oplus 9 \odot z = 3, \\ 7 \odot y \oplus 4 \odot z = 3. \end{cases}$$

Obviously, the system

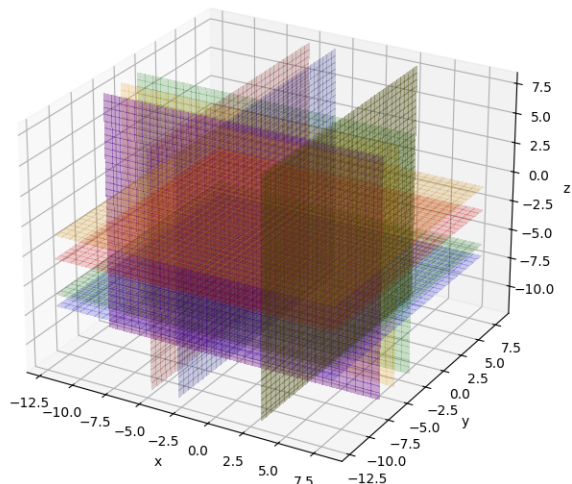
$$\begin{cases} 3 \odot y \oplus 4 \odot z = -3, \\ 5 \odot y \oplus 9 \odot z = 3, \\ 7 \odot y \oplus 4 \odot z = 3. \end{cases}$$

has no solution.

So, the given system has no solution.

The graphical representation of these planes in the coordinate system is as follows:

12 planes — NO common line (inconsistent)



REFERENCES

1. Akian M., Bapat R. and Gaubert S. Max-plus algebras, Chapter 25 in the Handbook of Linear Algebra, Hogben L., Brualdi R., Greenbaum A. and Mathias R. (editors), Discrete Mathematics and Its Applications. 2007. Chapman and Hall.
2. Baccelli F., Cohen G., Olsder G., and Quadrat J. Synchronization and Linearity. 1992. New York: John Wiley and Sons.
3. Brackley C. A., Broomhead D. S., Romano M. C., and Thiel M. A max-plus model of ribosome dynamics during mRNA translation, Journal of Theoretical Biology, Vol. 303, pp. 128–140, 2012.
4. Comet J. -P. Application of max-plus algebra to biological sequence comparisons, Theoretical computer science, Vol. 293, no. 1, pp. 189–217, 2003.
5. Cuninghame-Green R. Minimax Algebra, ser. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1979. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
6. Eshimbetov M., Eshimbetov J., Abduraimov Y. On solution of systems of max-plus linear equations, Bul. Ins. Math., Vol. 8, No 2, pp. 24–35 (2025).
7. Heidergott B., Olsder G., and Van der Woude J. Max-plus at Work. 2006. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
8. Heidergott B., Olsder G., and Van der Woude J. Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications. Princeton University Press, 2014
9. Kőcinac L. R., Zaitov A. A., Eshimbetov M. R. On Čech-completeness of the space of τ -smooth idempotent measures. Axioms. 2024. Vol. 13, Issue 8, pp. 569-582.
10. Gaubert S. Methods and applications of $(\max, +)$ linear algebra. ST ACS 1997. Lecture Notes in Computer Science 500. Springer-Verlag, Berlin, pp. 261–282.
11. Gondran M. and Minoux M. Linear algebra in dioides: A survey of recent results. Annals of Discrete Mathematics. 1984. Vol. 19, pp. 147–164.

12. Gunawardena J. Idempotency. 1998. Cambridge: Publ. of the Newton Institute, Cambridge University Press (Online publication date: May 2010).
13. Olsder G. J. and Roos C. Cramer and Cayley-Hamilton in the max-algebra. Linear Algebra and its Applications. 1998. Vol. 101, pp. 87–108.
14. Sennosuke W., Akiko F., Etsuo S., Iwao S. A walk on max-plus algebra. Linear Algebra and its Applications. 2020. Vol. 598, pp. 29–48.
15. Schutter B. De, Van den Boom T. Max-plus algebra and max-plus linear discrete event systems: An introduction, Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), May 2008 Göteborg, Sweden, pp. 36–42.
16. Yonggu K., Hyun-Hee Sh. An overview of max-plus linear systems. Honam Math. J.. 2011. Vol. 33, Issue 1, pp. 93–113.
17. Zaitov A. A. On a metric on the space of idempotent probability measures. Applied General Topology. 2020. Vol. 16, Issue 1, pp. 35–51.
18. Zarichnyi M. Spaces and mappings of idempotent measures. Izvestiya: Math., 2010. Vol. 74, Issue 3, pp. 45–64.

ANNOTATSIYA

Ushbu tadqiqot ishi max-plus chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlarini o'rganishga bag'ishlangan. Tadqiqotda max-plus algebra asosiy tushunchalari va xossalari eslatib o'tilgan hamda ushbu algebraik tuzilma doirasida tenglamalar sistemasini yechishning nazariy va amaliy jihatlari yoritilgan. Shu bilan birga, maqolada yechimlarning mavjudlik shartlari tahlil qilingan va max-plus metodlari yordamida ularni aniqlash usullari ko'rsatib berilgan. Olingan natijalar idempotent algebra va tropik matematikaning qo'llanilish sohalari, jumladan, optimallashtirish va diskret hodisalar sistemasini modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. So'ngra max-plus sistemaning ildizlarini topishga doir misollar keltirilgan va Dekart koordinatalar sistemasida bu max-plus tenglamalarning grafiklari yasalgan.

Kalit so'zlar: Max-plus algebra; idempotent yarim halqa; max-plus chiziqli sistema.

АННОТАЦИЯ

Данная исследовательская работа посвящена изучению решений систем max-plus линейных уравнений. В исследовании упомянуты основные понятия и свойства max-plus алгебры, а также освещены теоретические и практические аспекты решения систем уравнений в рамках данной алгебраической структуры. Кроме того, в статье проанализированы условия существования решений и показаны методы их определения с использованием max-plus подходов. Полученные результаты имеют важное значение для применения идемпотентной алгебры и тропической математики, в частности, в оптимизации и моделировании дискретных систем событий. Затем приведены примеры нахождения корней max-plus линейной системы, и построены графики этих max-plus уравнений в декартовой системе координат.

Ключевые слова: max-plus алгебра; идемпотентное полукольцо; max-plus линейная система.

UDC 519.4

SOME SOLVABLE COMPATIBLE LIE EXTENSIONS OF A NILPOTENT COMPATIBLE LIE ALGEBRA

GAYBULLAEV RUSTAMJON KAKHRAMONOVICH

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M.ULUGBEK, TASHKENT, UZBEKISTAN
r.gaybullaev@nuu.uz

SOLIJANOVA GULKHAYO OYBEK KIZI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER M.ULUGBEK, TASHKENT, UZBEKISTAN
gulhayo.solijonova@mail.ru

RESUME

Throughout this paper we construct some solvable compatible Lie algebras by including maximal nilpotent ideal \mathcal{N} which its component Lie algebras are classical filiform Lie algebras \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n .

Key words: compatible Lie algebras, derivations, nilpotency, solvability.

Introduction

Compatible algebraic structures arise when a vector space carries two product operations whose arbitrary linear combinations remain valid products of the same type. In recent years, such structures especially compatible Lie algebras have attracted considerable attention in mathematics and mathematical physics.

One of the central problems in the field is the classification of these algebras. A major step in this direction has been the classification of nilpotent compatible Lie algebras. This approach constructs nilpotent algebras as central extensions of smaller ones and has proved effective for obtaining complete classifications in low dimensions.

After understanding the nilpotent case, a natural continuation is the study of solvable compatible Lie algebras. In the classical theory of Lie algebras, solvable algebras are typically built by first determining their maximal nilpotent ideal the nilradical and then forming solvable extensions through non-nilpotent derivations. This strategy, often attributed to Mubarakzyanov, forms the basis for many classification results; see, for example, [1,2,6,9].

The aim of this paper is to adapt this construction method to compatible Lie algebras. However, several fundamental difficulties arise. For instance, in a compatible Lie algebra, the sum of two nilpotent ideals is not necessarily nilpotent, so the usual notion of a nilradical does not behave well.

We analyze the compatibility conditions for semidirect products and employ maximal tori of diagonal derivations to construct solvable extensions. Within this framework, we develop solvable compatible Lie algebras whose nilpotent ideal is a nilpotent compatible Lie algebra whose Lie components are classical filiform Lie algebras, such as \mathcal{L}_n , and \mathcal{Q}_n . In particular, we treat the compatible pairs $(\mathcal{L}_n, \mathcal{Q}_n)$ obtaining explicit one-dimensional solvable extensions by means of non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n and proving the nonexistence of higher-dimensional ones.

Throughout the paper, all vector spaces and algebras are considered over the complex numbers. We assume that the reader is familiar with the basic concepts of Lie theory.

Preliminaries

In this section we define compatible Lie algebras and the basics about them. We let \mathbb{K} be an arbitrary field of characteristic different from 2.

Proposition 1. [4] Let $\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}, [-, -]_1)$ and $\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}, [-, -]_2)$ be two Lie algebras over the same vector space \mathfrak{g} . Then the following conditions are equivalent:

- (i) $(\mathfrak{g}, [-, -])$ is a Lie algebra, where $[x, y] = [x, y]_1 + [x, y]_2$ for all $x, y \in \mathfrak{g}$;
- (ii) $(\mathfrak{g}, [-, -]_{\lambda_1, \lambda_2})$ is a Lie algebra for all $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, where

$$[x, y] = \lambda_1[x, y]_1 + \lambda_2[x, y]_2;$$

- (iii) The following identity (named the mixed Jacobi identity) holds for all $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$[[x, y]_1, z]_2 + [[y, z]_1, x]_2 + [[z, x]_1, y]_2 + [[x, y]_2, z]_1 + [[y, z]_2, x]_1 + [[z, x]_2, y]_1 = 0.$$

Let denote the second cocycle identity by

$$Z(x, y, z) = [x, \varphi(y, z)] - [\varphi(x, y), z] + [\varphi(x, z), y] + \varphi(x, [y, z]) - \varphi([x, y], z) + \varphi([x, z], y).$$

Thus, we have the definition of compatible Lie algebras.

Definition 1. [4] A compatible Lie algebra is a triple $(\mathfrak{g}, [-, -]_1, [-, -]_2)$, where $\mathfrak{g}_1 = (\mathfrak{g}, [-, -]_1)$ and $\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}, [-, -]_2)$ are Lie algebras satisfying any of the three equivalent conditions in above Proposition.

A subalgebra of a compatible Lie algebra \mathfrak{g} is a vector subspace of \mathfrak{g} which is closed for both products. An ideal \mathfrak{i} of a compatible Lie algebra \mathfrak{g} is a vector subspace such that $[\mathfrak{i}, \mathfrak{g}]_1, [\mathfrak{i}, \mathfrak{g}]_2 \subseteq \mathfrak{i}$.

Definition 2. [4] Let \mathfrak{s} and \mathfrak{t} be two subspaces of a compatible Lie algebra \mathfrak{g} . The commutator $[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}]$ of \mathfrak{s} and \mathfrak{t} is

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{t}]_1 + [\mathfrak{s}, \mathfrak{t}]_2 = \text{span}_{\mathbb{K}}\{[s, t]_1, [s, t]_2 \mid s \in \mathfrak{s}, t \in \mathfrak{t}\}$$

Remark that if \mathfrak{i} and \mathfrak{j} are ideals of \mathfrak{g} , then their commutator $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ is a subalgebra and $[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}]$ is an ideal.

In general, the *descending central sequence* or *lower central series* of a compatible Lie algebra \mathfrak{g} is defined in the same way as for Lie algebras [4]:

$$\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})], \quad \text{for all } k \geq 0.$$

Consequently, if $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ for some k , then the compatible Lie algebra is called *nilpotent*. Then the smallest integer k such that $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ is called the nilindex of the compatible Lie algebra \mathfrak{g} .

Applying induction, one can prove that $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ is an ideal of \mathfrak{g} and $[\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^j(\mathfrak{g})] \subseteq \mathcal{C}^{i+j}(\mathfrak{g})$ for any $i, j \in \mathbb{N}$.

Likewise, the *derived sequence* of \mathfrak{g} can be defined as follows.

Definition 3. Given a compatible Lie algebra \mathfrak{g} we define the derived sequence as

$$\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^{k+1}(\mathfrak{g}) := [\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^k(\mathfrak{g})] \quad \text{for all } k \geq 0$$

If this sequence is stabilized in zero, then the compatible algebra is said to be *solvable*.

In this paper, we construct solvable compatible Lie extensions of a compatible Lie algebras with two component Lie algebras \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_{2m} (where $n = 2m$) [3].

1. Let \mathcal{L}_n be the n -dimensional Lie algebra defined by non-zero products

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n - 1,$$

where $\{e_1, \dots, e_n\}$ is a basis of \mathcal{L}_n .

2. Let \mathcal{Q}_{2m} be the $2m$ -dimensional nilpotent Lie algebra defined in the basis $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ by

$$\{e_1, e_i\} = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2m - 1, \quad \{e_j, e_{2m+1-j}\} = (-1)^j e_{2m}, \quad 2 \leq j \leq m.$$

A straightforward verification confirms that the algebras \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n satisfy the hypotheses of Proposition 1. Consequently, \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n may be realised as the Lie algebra components of a compatible Lie algebra. We shall denote this compatible Lie algebra by \mathcal{N} .

Main part

In this section we construct solvable extensions of a nilpotent compatible Lie algebra with components \mathcal{L}_\setminus and \mathcal{Q}_\setminus , where n is an even natural number. First of all we analyze derivations spaces of the algebras \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n .

Proposition 2. Let $d_1 \in \text{End}(\mathcal{L}_n)$ and $d_2 \in \text{End}(\mathcal{Q}_n)$ be any derivations of the algebras \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n , respectively. Then the derivations admit the following explicit descriptions.

$$\left\{ \begin{aligned} d_1(e_1) &= \sum_{t=1}^n \alpha_{1,t} e_t, \\ d_1(e_i) &= ((i-2)\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})e_i + \sum_{t=3}^{n-i+2} \alpha_{2,t} e_{t+i-2}, \quad 2 \leq i \leq n; \end{aligned} \right.$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} d_2(e_1) &= \sum_{t=1}^{2m} \beta_{1,t} e_t, \\ d_2(e_2) &= (\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \beta_{2,2t+1} e_{2t+1} + \beta_{2,2m} e_{2m}, \\ d_2(e_{2j}) &= ((2j-1)\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \beta_{2,2t+1} e_{2t+2j-1} + \beta_{1,2m-2j+1} e_{2m}, \\ d_2(e_{2j+1}) &= (2j\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \beta_{2,2t+1} e_{2t+2j} + (-\beta_{1,2m-2j+1} + \beta_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \\ d_2(e_{2m}) &= ((2m-1)\beta_{1,1} + 2\beta_{1,2})e_{2m}, \end{aligned} \right.$$

where $1 \leq j \leq m-1$ and $n = 2m$. In particular, these formulas completely characterize all derivations of \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n .

Proof. Let take denotations as

$$d_1(e_i) = \sum_{t=1}^n \alpha_{i,t} e_t, \quad (\text{respectively, } d_2(e_i) = \sum_{t=1}^n \beta_{i,t} e_t) \quad 1 \leq i \leq 2.$$

By straightforward computations, we get the restrictions for the parameters $\alpha_{i,t}$ (respectively, $\beta_{i,t}$) given in the proposition.

Next, we consider a nilpotent compatible Lie algebra with two component are \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n . Below we describe solvable extensions of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n , \mathcal{Q}_n and \mathcal{N} .

Let consider two-dimensional non-nilpotent solvable extensions of \mathcal{L}_n .

Theorem 1. There is no $(n+2)$ -dimensional solvable compatible Lie extension of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n .

Proof. Let \mathcal{R}_1 be a $(n+2)$ -dimensional solvable Lie algebras with nilradical \mathcal{L}_n and $\{e_1, \dots, e_n, x, y\}$ is a basis of \mathcal{R}_1 . By using derivation properties we have the following products:

$$\left\{ \begin{aligned} [e_1, x] &= \sum_{t=1}^n \alpha_{1,t} e_t, \\ [e_i, x] &= ((i-2)\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})e_i + \sum_{t=i+1}^n \alpha_{2,t-i+2} e_t, \quad 2 \leq i \leq n, \\ [e_1, y] &= \beta_{1,1} e_1 + \sum_{t=2}^n \beta_{1,t} e_t, \\ [e_i, y] &= ((i-2)\beta_{1,1} + \beta_{2,2})e_i + \sum_{t=i+1}^n \beta_{2,t-i+2} e_t, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned} \right.$$

where $\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,2} \\ \beta_{1,1} & \beta_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$.

Then by taking changing of basis we get

$$x' = (\alpha_{1,1}\beta_{2,2} - \alpha_{2,2}\beta_{1,1})^{-1}(\beta_{2,2}x - \alpha_{2,2}y), \quad y' = (\alpha_{1,1}\beta_{2,2} - \alpha_{2,2}\beta_{1,1})^{-1}(\alpha_{1,1}y - \beta_{1,1}x),$$

we can suppose:

$$\begin{cases} [e_1, x] = e_1 + \sum_{t=2}^n \alpha_{1,t}e_t, & [e_i, x] = (i-2)e_i + \sum_{t=i+1}^n \alpha_{2,t-i+2}e_t, \\ [e_1, y] = \sum_{t=2}^n \beta_{1,t}e_t, & [e_i, y] = e_i + \sum_{t=i+1}^n \beta_{2,t-i+2}e_t, \end{cases}$$

where $2 \leq i \leq n$. In addition, setting

$$x' = x + \alpha_{2,3}e_1 - \sum_{t=2}^{n-1} \alpha_{1,t+1}e_t, \quad y' = y + \beta_{2,3}e_1 - \sum_{t=2}^{n-1} \beta_{1,t+1}e_t,$$

one can assume

$$\begin{aligned} [e_1, x] &= e_1 + \alpha_{1,2}e_2, & [e_i, x] &= (i-2)e_i + \sum_{t=i+2}^n \alpha_{2,t-i+2}e_t, & 2 \leq i \leq n, \\ [e_1, y] &= \beta_{1,2}e_2, & [e_i, y] &= e_i + \sum_{t=i+2}^n \beta_{2,t-i+2}e_t, & 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Set the following basis transformation:

$$e'_1 = e_1, \quad e'_i = e_i + \sum_{t=4}^{n-i+2} \mu_t e_{t+i-2}, \quad 2 \leq i \leq n, \quad \text{with} \quad \mu_t = \frac{1}{2-t} \left(\alpha_{2,t} + \sum_{p=4}^{t-2} \alpha_{2,p} \mu_{t-p+2} \right).$$

Thus we obtain $[e_i, x] = (i-2)e_i$, $2 \leq i \leq n$.

Note that under the above basis transformation the multiplications table of \mathcal{Q}_n does not change.

Applying the Jacobi identity for the obtained products, we obtain

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} [e_1, x] = e_1 + \alpha e_2, & [e_1, y] = -\alpha e_2, \\ [e_i, x] = (i-2)e_i, & [e_i, y] = e_i, & 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

For $\varphi \in Hom(\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_1, \mathcal{N})$ such that $\{e_i, e_j\} = \varphi(e_i, e_j)$ and $\varphi(e_i, y) = d_2(e_i)$, we verify the 2-cocycle property.

$$\begin{aligned} Z(e_2, e_{n-1}, y) &= [e_2, \varphi(e_{n-1}, y)] - [\varphi(e_2, e_{n-1}), y] + [\varphi(e_2, y), e_{n-1}] + \\ &+ \varphi(e_2, [e_{n-1}, y]) - \varphi([e_2, e_{n-1}], y) + \varphi([e_2, y], e_{n-1}) = e_n \neq 0. \end{aligned}$$

This contradiction complete the proof of theorem.

We present the description of one-dimensional solvable extensions of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n .

Theorem 2. Let \mathcal{R} be a one-dimensional solvable extension of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n . Then it admits a basis $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ such that its table of multiplications in the basis has the following form:

$$\left\{ \begin{aligned} [e_1, x] &= \alpha_{1,1}e_1 + \alpha_{1,2}e_2, \\ [e_i, x] &= ((i-2)\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})e_i + \sum_{t=i+1}^n \alpha_{2,t-i+2}e_t, \\ \{e_1, x\} &= \beta_{1,1}e_1 - \alpha_{1,2}e_2 + \sum_{t=3}^{2m} \beta_{1,t}e_t, \\ \{e_2, x\} &= (\beta_{1,1} - \alpha_{1,2})e_2 + \beta_{2,2m}e_{2m}, \\ \{e_{2j}, x\} &= ((2j-1)\beta_{1,1} - \alpha_{1,2})e_{2j} + \beta_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ \{e_{2j+1}, x\} &= (2j\beta_{1,1} - \alpha_{1,2})e_{2j+1} - \beta_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ \{e_{2m}, x\} &= ((2m-1)\beta_{1,1} - 2\alpha_{1,2})e_{2m}, \end{aligned} \right.$$

where $2 \leq i \leq n, \quad 2 \leq j \leq m - 1$.

Proof. By using derivations properties we obtain the solvable extension of \mathcal{L}_n

$$\begin{cases} [e_1, x] = \alpha_{1,1}e_1 + \sum_{t=2}^n \alpha_{1,t}e_t, \\ [e_i, x] = ((i - 2)\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})e_i + \sum_{t=i+1}^n \alpha_{2,t-i+2}e_t, \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Setting $x' = x + \alpha_{2,3}e_1 - \sum_{i=3}^n \alpha_{1,i}e_{i-1}$, we get $[e_1, x] = \alpha_{1,1}e_1 + \alpha_{1,2}e_2$.

Applying the description of $Der(\mathcal{Q}_n)$ we derive the products

$$\begin{cases} \{e_1, x\} = \sum_{t=1}^{2m} \beta_{1,t}e_t, \\ \{e_2, x\} = (\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+1} + \beta_{2,2m}e_{2m}, \\ \{e_{2j}, x\} = ((2j - 1)\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j-1} + \beta_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ \{e_{2j+1}, x\} = (2j\beta_{1,1} + \beta_{1,2})e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j} + (-\beta_{1,2m-2j+1} + \beta_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \\ \{e_{2m}, x\} = ((2m - 1)\beta_{1,1} + 2\beta_{1,2})e_{2m}, \end{cases}$$

where $1 \leq j \leq m - 1, \quad n = 2m$.

Using the condition (i) in Proposition 1 we obtain the products $[[-, -]] = [-, -] + \{-, -\}$.

Jacobi identity		Constraints
$L(e_1, e_{2j-1}, x) = 0,$	\Rightarrow	$\alpha_{1,2} = -\beta_{1,2},$
$L(e_1, e_{2j}, x) = 0,$	\Rightarrow	$\beta_{2,2m-2j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq m - 1,$

Therefore, we obtain the multiplications table of the algebra \mathcal{R} .

Due to the result [5], \mathcal{L}_n admits solvable compatible Lie extensions of dimension less than two. Consequently, we conclude that \mathcal{N} possesses only one-dimensional solvable compatible Lie extensions via non-nilpotent derivations of \mathcal{L}_n .

Let now consider the solvable extensions of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations from $Der(\mathcal{L}_n) \cap Der(\mathcal{Q}_n)$.

Theorem 3. Let $\mathcal{R} = \mathcal{N} \oplus Span\{x\}$ be a one-dimensional solvable extension of \mathcal{N} by means of non-nilpotent derivations of $Der(\mathcal{L}_n) \cap Der(\mathcal{Q}_n)$. Then \mathcal{R} admits one of the following two multiplications tables:

$$\begin{cases} [e_1, x] = e_1, \quad [e_i, x] = (i - 1)e_i, \quad 2 \leq i \leq 2m, \\ \{e_1, x\} = \beta_{1,1}e_1 + \sum_{t=3}^{2m} \beta_{1,t}e_t, \\ \{e_2, x\} = \beta_{1,1}e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+1} + \beta_{2,2m}e_{2m}, \\ \{e_{2j}, x\} = (2j - 1)\beta_{1,1}e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j-1} + \beta_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ \{e_{2j+1}, x\} = 2j\beta_{1,1}e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j} + (-\beta_{1,2m-2j+1} + \beta_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \end{cases}$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} [e_1, x] &= \alpha_{1,1}e_1 + \sum_{t=3}^{2m} \alpha_{1,t}e_t, \\ [e_2, x] &= \alpha_{1,1}e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+1} + \alpha_{2,2m}e_{2m}, \\ [e_{2j}, x] &= (2j-1)\alpha_{1,1}e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+2j-1} + \alpha_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ [e_{2j+1}, x] &= 2j\alpha_{1,1}e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+2j} + (-\alpha_{1,2m-2j+1} + \alpha_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \\ \{e_1, x\} &= e_1, \quad \{e_i, x\} = (i-1)e_i, \quad 2 \leq i \leq 2m, \end{aligned} \right.$$

where $1 \leq j \leq m-1$, $n = 2m$.

Proof. Applying derivations of \mathcal{L}_n and \mathcal{Q}_n , we have the products in \mathcal{R} :

$$\left\{ \begin{aligned} [e_1, x] &= \alpha_{1,1}e_1 + \sum_{t=3}^{2m} \alpha_{1,t}e_t, \\ [e_2, x] &= \alpha_{1,1}e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+1} + \alpha_{2,2m}e_{2m}, \\ [e_{2j}, x] &= (2j-1)\alpha_{1,1}e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+2j-1} + \alpha_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ [e_{2j+1}, x] &= 2j\alpha_{1,1}e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \alpha_{2,2t+1}e_{2t+2j} + (-\alpha_{1,2m-2j+1} + \alpha_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \end{aligned} \right.$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} \{e_1, x\} &= \beta_{1,1}e_1 + \sum_{t=3}^{2m} \beta_{1,t}e_t, \\ \{e_2, x\} &= \beta_{1,1}e_2 + \sum_{t=1}^{m-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+1} + \beta_{2,2m}e_{2m}, \\ \{e_{2j}, x\} &= (2j-1)\beta_{1,1}e_{2j} + \sum_{t=1}^{m-j} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j-1} + \beta_{1,2m-2j+1}e_{2m}, \\ \{e_{2j+1}, x\} &= 2j\beta_{1,1}e_{2j+1} + \sum_{t=1}^{m-j-1} \beta_{2,2t+1}e_{2t+2j} + (-\beta_{1,2m-2j+1} + \beta_{2,2m-2j+1})e_{2m}, \end{aligned} \right.$$

where $1 \leq j \leq m-1$, $n = 2m$.

The solvability of extension \mathcal{R} leads that $(\alpha_{1,1}, \beta_{1,1}) \neq (0, 0)$.

Let $\alpha_{1,1} \neq 0$, then by setting

$$x' = \frac{1}{\alpha_{1,1}}(x - \sum_{t=3}^{2m} \alpha_{1,t}e_{t-1}),$$

we can assume $[e_1, x] = e_1$. Then, setting

$$e'_1 = e_1, \quad e'_i = e_i + \sum_{t=3}^{2m-i+2} A_t e_{t+i-2}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

with

$$\begin{aligned} A_3 &= -\alpha_{2,3}, & A_{2j+1} &= -\frac{1}{2j-1}(\alpha_{2,2j+1} + \sum_{t=2}^j A_{2,t}\alpha_{2,2j-2t+3}), \\ A_{2j} &= -\frac{1}{2j-2} \sum_{t=1}^{j-1} A_{2t+1}\alpha_{2,2j-2t+1}, & A_{2m} &= -\frac{1}{2m-2}(\alpha_{2,2m} + \sum_{t=1}^{m-1} A_{2t+1}\alpha_{2,2m-2t+1}), \end{aligned}$$

where $2 \leq j \leq m-1$, we obtain

$$[e_i, x] = (i-1)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Note that the basis transformation leaves the multiplication tables of \mathcal{Q}_n unchanged. Similarly, when $\beta_{1,1} \neq 0$, we get

$$\{e_1, x\} = e_1, \quad \{e_i, x\} = (i-1)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

REFERENCES

1. Ancochea Bermúdez, J. M.; Campoamor-Stursberg, R.; García Vergnolle, L. Indecomposable Lie algebras with nontrivial Levi decomposition cannot have filiform radical. *Int. Math. Forum* **1** (2006), 309–316.
2. Ancochea Bermúdez, J. M.; Campoamor-Stursberg, R.; García Vergnolle, L. Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradicals. *J. Geom. Phys.* **61** (2011), no. 11, 2168–2186.
3. Goze, M.; Khakimdjanov, Yu. *Nilpotent Lie algebras. Mathematics and Its Applications*, 361. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. xvi+336 pp. ISBN 0-7923-3932-0.
4. Ladra, M.; Leite da Cunha, B.; Lopes, S. A. A classification of nilpotent compatible Lie algebras. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **74** (2025), 70.
5. Mubarakzhanov, G. M. The classification of real structures of Lie algebra of order five. *Izv. VUZ. Mat.* **3** (1963), 99–106.
6. Ndogmo, J. C.; Winternitz, P. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals. *J. Phys. A* **27** (1994), 405–423.
7. Omirov, B. A.; Solijanov, G. O. On the uniqueness of maximal solvable extensions of nilpotent Lie superalgebras. *arXiv* 2402.03012, 21 pp.
8. Šnobl, L.; Karásek, D. Classification of solvable Lie algebras with a given nilradical by means of solvable extensions of its subalgebras. *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 7, 1836–1850.
9. Tremblay, S.; Winternitz, P. Solvable Lie algebras with triangular nilradicals. *J. Phys. A* **31** (1998), 789–806.

REZYUME

Ushbu maqolada Li komponentlari klassik filiform Li algebralari \mathcal{L}_n va \mathcal{Q}_n bo'lgan nilpotent kompatibl Li algebrasini maksimal nilpotent ideal sifatida o'z ichiga olgan ba'zi yechiluvchan kompatibli Li algebralari qurilgan.

Kalit so'zlar: mos keluvchi Li algebralari, differensiyallashlar, nilpotentlik, yechiluvchanlik.

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье мы конструируем ряд разрешимых совместимых алгебр Ли, содержащих максимальный нильпотентный идеал \mathcal{N} , компоненты которого представляют собой классические филиформные алгебры Ли \mathcal{L}_n и \mathcal{Q}_n .

Ключевые слова: совместимые алгебры Ли, дифференцирования, нильпотентность, разрешимость.

UDC 517.44

ONE OF THE MATHEMATICAL MODELS OF ECONOMIC, SOCIAL AND ENVIRONMENTAL SUSTAINABILITY IN TOURISM

JABBOROV NASRIDDIN MIRZOODILOVICH

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON

jabborovnasriddin@gmail.com

YUSUPOVA SHAXLO BAXTIYOR QIZI

BELARUS-O‘ZBEKISTON QO‘SHMA TARMOQLARARO AMALIY-TEXNIK KVALIFIKATSIYALAR INSTITUTI,

TOSHKENT, O‘ZBEKISTON

shaxlo.yusupova@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada turizm tizimining uzoq muddatli barqarorligini matematik modellashtirish asosida tahlil qilish yondashuvi ishlab chiqilgan. Taklif etilgan model iqtisodiy (E), ijtimoiy (S) va ekologik (Q) omillar o‘rtasidagi chiziqli bo‘lmagan o‘zaro ta’sirlarni birgalikda hisobga olib, ularning vaqt o‘tishi bilan qanday barqaror holatga kelishini aniqlaydi.

Kalit so‘zlar: Turizm barqarorligi, statsionar nuqta, asimptotik barqarorlik, Yakobiyan matritsasi, antropogen yuk, matematik modellashtirish, ekologik yuk, raqamli simulyatsiya.

Kirish. So‘nggi yillarda turizm sohasi nafaqat iqtisodiy rivojlanishning muhim omillaridan biriga, balki ijtimoiy farovonlik va ekologik muvozanatni ta‘minlovchi kompleks tizimga aylanib bormoqda. Turizmning iqtisodiyotga ta’siri, ijtimoiy barqarorlikka qo‘shgan hissasi va tabiiy muhitga yuklamasi o‘zaro chambarchas bog‘liq bo‘lib, ularni alohida emas, balki yagona tizim sifatida o‘rganish zarur.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili: Turizmning iqtisodiy, ijtimoiy va ekologik tizimlarga ko‘rsatadigan ta’sirini ilmiy jihatdan o‘rganish masalasi XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab iqtisodiyot va biologiya fanlarida shakllangan differensial modellar nazariyasining rivojlanishi bilan uzviy bog‘liqdir. Dastlabki matematik asoslar P.-F. Verhulst (1838) tomonidan taklif etilgan logistika modeli orqali populyatsiya o‘rishini tavsiflashda qo‘llanilgan bo‘lsa, A. J. Lotka (1925) va V. Volterra (1926) tomonidan biologik sistemalarda turlarning o‘zaro ta’sirini ifodalovchi klassik differensial tenglamalar tizimi ishlab chiqilgan. Bu yondashuvlar keyinchalik turizm jarayonlarini modellashtirishga ham tatbiq etila boshlandi.

Tadqiqot metodologiyasi: Mazkur model, uch omil o‘rtasidagi chiziqli bo‘lmagan o‘zaro ta’sirlarni birgalikda hisobga olish orqali, turizmning uzoq muddatli barqarorligini tahlil qilish imkonini beradi. Bu yondashuv yordamida real statistik ma’lumotlar asosida parametrlarni aniqlab, barqarorlik holatlari va ularning hududiy sharoitlarga mosligini baholash mumkin.[1,5]

Model:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = a_1 E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) + b_1 S - c_1 Q, \\ \frac{dS}{dt} = a_2 S \left(1 - \frac{S}{K_S}\right) + b_2 S - c_2 Q, \\ \frac{dQ}{dt} = a_3 EQ + b_3 S - d_3 Q, \end{cases} \quad (1)$$

Statsionar nuqta (E^*, S^*, Q^*) (yoki muvozanat holati) barcha hosilalari nolga teng bo‘lgan holat sifatida aniqlanadi. Ya’ni, statsionar nuqtada tizim tenglamalarni qondiradi:

Tahlil va natijalar. Muvozanatga quyidagi hollarda erishiladi:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Bu tenglamalar sistemasini analitik tarzda hal qilish qiyin, ammo muvozanat nuqta atrofidagi o‘zgarishlarni o‘rganish mumkin (mahalliy tahlil).

Ushbu chiziqli bo‘lmagan algebraik tenglamalar tizimining yechimi statsionar qiymatlar (E^*, S^*, Q^*) ni beradi. Analitik yechim topish qiyin, shuning uchun raqamli modellashtirishga murojaat qilamiz. Biz dastlabki tizimni boshlang‘ich shartlari va parametrlar qiymatlarini quyidagicha kiritdik:

$$\begin{aligned} E(0) &= 20, & S(0) &= 15, & Q(0) &= 30, & t &= 100 \\ a_1 &= 0.1, & a_2 &= 0.05, & a_3 &= 0.02, \\ b_1 &= 0.02, & b_2 &= 0.03, & b_3 &= 0.05, \\ c_1 &= 0.04, & c_2 &= 0.03, & c_3 &= 0.01 \\ K_E &= 100, & K_S &= 80 \end{aligned}$$

(masalan, Eyler usuli yordamida kichik qadam) $E(t)$ (iqtisodiyot), $S(t)$ (ijtimoiy barqarorlik) va $Q(t)$ (ekologiya) bilan berilgan boshlang‘ich sharoitlarda birlashtiramiz. Vaqt o‘tishi bilan statsionar holatga yaqinlashishi ko‘zatiladi.

Sonli yechim. Simulyatsiya paytida, vaqtinchalik jarayonlardan so‘ng, $E(t), S(t), Q(t)$ qiymatlari doimiy qiymatlarga moyilligi kuzatiladi. Hozirgi vaqtda o‘zgaruvchilar deyarli o‘zgarishsiz qolmoqda, bu muvozanatga erishilganligini ko‘rsatadi. Biz taxminan statsionar yechimni olamiz:

$$(E^*, S^*, Q^*) \approx (119.06, 2.59)$$

Ya‘ni, muvozanat holati taxminan $(E^*, S^*, Q^*) \approx (119.06, 2.59)$ ga teng. E‘tibor bering, S ning E ga ijobiy ta‘siri va aksincha, ning ga muvozanat qiymatlari ularning avtonom chegara darajalari $K_E = 100$ va $K_S = 80$ dan oshadi (har bir populyatsiyaning o‘zi o‘zining ekologik imkoniyatlarini oshira olmaydi, lekin o‘zaro yordam va Q ning qiymatining kamayishi kattaroq natijalarga erishish imkonini beradi). Tekshirish uchun, topilgan E, S, Q muvozanat tenglamalariga almashtiriladi va ularni nolga aylantiradi (kichik sonli xato bilan), bu hisoblangan statsionar yechimning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Teorema. (E^*, S^*, Q^*) barqaror turizm modelini tavsiflovchi nochiqli differensial tenglamalar sistemasining statsionar yechimi bo‘lsin. Agar (E^*, S^*, Q^*) nuqtasida hisoblangan Yakobiyani matritsasi J ning barcha xos qiymatlari, manfiy haqiqiy qismlarga ega bo‘lsa, u holda statsionar nuqta **asimptotik barqarordir**.

Isbot (quyidagiga qisqartirildi). Statsionar nuqtaga yaqin joyda sistemani chiziqli qilish natijasida olingan J Yakobiyani matritsasi muvozanat atrofida kichik buzilishlarning harakatini tavsiflaydi. Lyapunovning chiziqli barqarorlik teoremasiga ko‘ra, agar Yakobiyani matritsasining $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ spektri barcha i uchun $Re(\lambda_i) < 0$ shartini qanoatlantirsa, u holda muvozanat mahalliy asimptotik barqarordir.

Yakobiyani matritsasi. Chiziqli yaqinlashtirish (Teylorning birinchi tartibi) amalga oshiriladi. Qisman hosilalar hisoblab chiqiladi, keyin muvozanat qiymatlari almashtiriladi:

$$J(E^*, S^*, Q^*) \approx \begin{pmatrix} -0.14 & 0.02 & -0.04 \\ 0.03 & -0.11 & -0.03 \\ -0.052 & 0.05 & -2.41 \end{pmatrix}$$

Sistema va Yakobiyani matritsasining chiziqilashtirilishi. Topilgan muvozanatning mahalliy barqarorligini tahlil qilish uchun (E^*, S^*, Q^*) nuqta atrofida sistemani chiziqli qilamiz. Chiziqilashtirish asl nochiqli modelni Teylor qatoriga kengaytirish va kichiklikning yuqori tartiblarini bekor qilish natijasida olingan birinchi yaqinlashuvi (chiziqli model) bilan almashtirishdan iborat. Yakobiyani matritsasi J - statsionar nuqtada hisoblangan o‘zgaruvchilarga nisbatan tizimning o‘ng tomonlarining qisman hosilalari matritsasi. Ushbu sistema uchun Yakobiyani matritsasining umumiy shakli (E, S, Q) uchun tenglamalarning o‘ng tomonlarini f_1, f_2, f_3 deb belgilaymiz. Kerakli hosilalarni

$$f_1(E, S, Q) = a_1 E \left(1 - \frac{E}{K_E}\right) + b_1 S - c_1 Q :$$

funksiya uchun hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f_1}{\partial E} = a_1 \left(1 - \frac{2E}{K_E}\right), \quad \frac{\partial f_1}{\partial S} = b_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial Q} = -c_1.$$

$$f_2(S, E, Q) = a_2S(1 - \frac{S}{K_S}) + b_2E - c_2Q$$

uchun

$$\frac{\partial f_2}{\partial E} = b_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial S} = a_2(1 - \frac{2S}{K_S}), \quad \frac{\partial f_2}{\partial Q} = -c_2$$

$$f_3(E, S, Q) = -a_3EQ + b_3S - d_3Q$$

uchun $\frac{\partial f_3}{\partial E} = -a_3Q$, $\frac{\partial f_3}{\partial S} = b_3$, $\frac{\partial f_3}{\partial Q} = -a_3Q - d_3$, Ushbu hosilalarga muvozanat qiymatlari $(E^*, S^*, Q^*) = (119.98, 125.06, 2.59)$ ni qo'yib, muvozanat nuqtasida Yakobiyan matritsasini olamiz:

$$\frac{\partial f_1}{\partial E} \approx -0.14, \quad \frac{\partial f_2}{\partial S} \approx -0.11, \quad \frac{\partial f_3}{\partial E} \approx -0.0518, \quad \frac{\partial f_3}{\partial Q} \approx -2.4096,$$

Bundan:

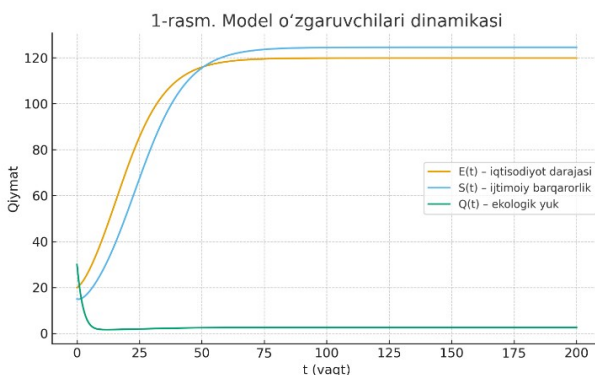
$$J(E^*, S^*, Q^*) \approx \begin{pmatrix} -0.14 & 0.02 & -0.04 \\ 0.03 & -0.11 & -0.03 \\ -0.052 & 0.05 & -2.41 \end{pmatrix}$$

ni aniqlaymiz. (Bu yerda elementlar verguldan so'ng ikki xonagacha yaxlitlandi.)

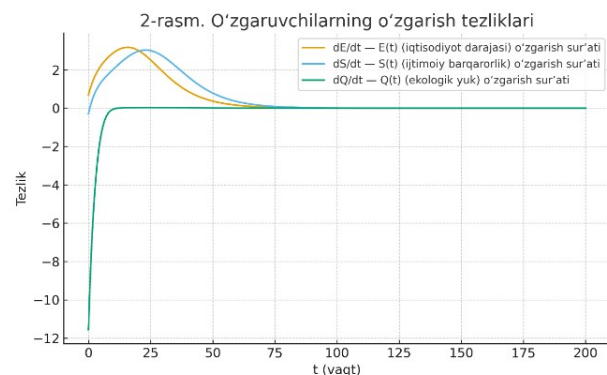
Xususiylar va muvozanat barqarorligi. Endi, Yakobiyan matritsasi asosida biz muvozanat nuqtasining mahalliy barqarorligini tahlil qilamiz. Buning uchun $|J - \lambda I| = 0$ tenglamasini yechish Jorqali matritsasining λ xos qiymatlarini topamiz. Yakobiyan matritsasi uchun sonli hisoblangan xos qiymatlar:

$$\lambda_1 \approx -2.410, \lambda_2 \approx -0.152, \lambda_3 \approx -0.094,$$

Yakobiyaning barcha xos qiymatlari manfiy, ular chiziqli bo'lmagan dinamik tizimlar nazariyasiga ko'ra, muvozanat barqarorligi uchun yetarli shartdir. Statsionar holat nuqtasi $(E^*, S^*, Q^*) \approx (120, 125, 2.59)$ topildi va u barqaror.



(a) Turizm barqarorligi modelining dinamikasi

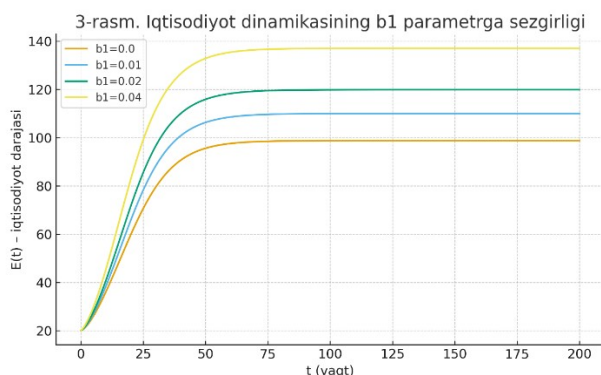


(b) Vaqt bo'yicha o'zgaruvchilarning o'zgarish sur'atlari

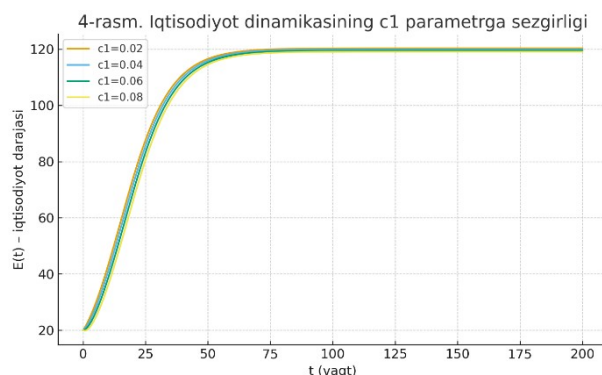
Model natijalarining grafik tasviri

Grafikda (Rasm 1. da) barqaror turizm modelining uchta o'zgaruvchisi dinamikasi ko'rsatilgan. Grafikdan ko'rinib turibdiki, o'zgaruvchilar ayni payt $t = 60 - 80$ da barqaror qiymatlarga moyil bo'lib, bu barqaror holatga erishishni tasdiqlaydi. Ekologiya $Q(t)$ ga nisbatan past darajada kamayadi va barqarorlashadi. Iqtisodiyot $E(t)$ va ijtimoiy barqarorlik $S(t)$ tiklanadi va o'zaro ijobiy munosabatlar tufayli o'zlarining chegaraviy qiymatlari K_E, K_S dan oshadi. Grafikda (Rasm 2 da) model o'zgaruvchilarining o'zgarish tezligi ko'rsatilgan. Barcha hosilalar vaqt o'tishi bilan nolga aylanib boradi, bu barqaror holatga erishishni tasdiqlaydi. Boshida o'tkinchi jarayonlar kuzatiladi: iqtisodiyot va ijtimoiy barqarorlik o'sib boradi, ekologik yomonlashuv esa kamayadi. Tebranishlar to'xtagandan so'ng, tizim barqarorlashadi va barcha o'zgarishlar ahamiyatsiz darajada kichik bo'ladi.

Grafikda (Rasm 3 da) b_1 (ijtimoiy sohaning iqtisodiyotga ta'siri) parametrining o'zgarishi $E(t)$ iqtisodiyot dinamikasiga qanday ta'sir qilishini ko'rsatadi:



(a) b_1 parametrga modelning sezgirligi



(b) Modelning c_1 parametrga sezgirligi

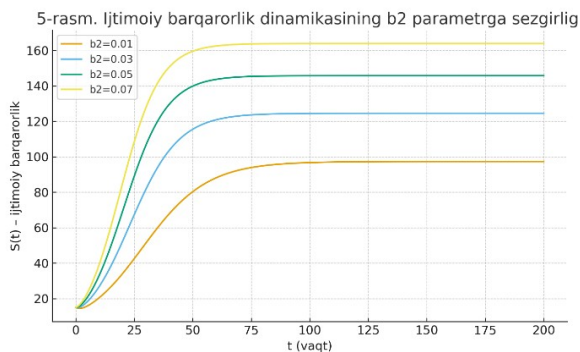
Model parametrlariga sezgirlik tahlili

- $b_1 = 0$: ijtimoiy soha iqtisodiyotni umuman qo'llab-quvvatlamaydi - $E(t)$ sekin tiklanadi va pastroq bo'lib qoladi. :
- $b_1 = 0.01$ ijtimoiy sohaning kichik hissasi paydo bo'ladi va iqtisodiyot tezroq tiklanadi.
- $b_1 = 0.02$: asosiy modeldagi qiymat - iqtisodiyot yuqori qiymatga yetadi. :
- $b_1 = 0.04$ ijtimoiy sohadan kuchli yordam - $E(t)$ yanada yuqori darajaga yetadi.

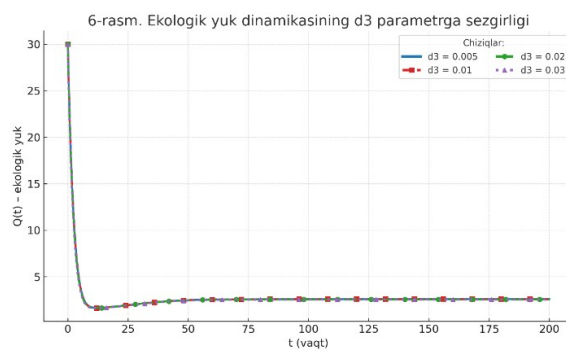
Grafik (Rasm 4 da) c_1 parametrining o'zgarishi - Q ekologiya yukining E iqtisodiyotga salbiy ta'sirining intensivligi.

- $c_1 = 0.02$ iqtisodiyot sekin o'sib boradi va yuqori darajada barqarorlashadi;
- $c_1 = 0.04$ asosiy holati - iqtisodiyot yuqori barqaror darajaga yetadi;
- $c_1 = 0.06$ ifloslanish ortdi - iqtisodiyot darajasi sezilarli darajada past;
- $c_1 = 0.08$ kuchli ifloslanish iqtisodiyotning tiklanishiga to'sqinlik qiladi, o'sish deyarli to'liq to'xtaydi.

Natija: c_1 parametri juda muhim - hatto undagi kichik o'sish ham iqtisodiy o'zgaruvchining tiklanishini sezilarli darajada bostiradi. Bu tabiiy tizimning ifloslanishga qanchalik zaif ekanligini ko'rsatadi.



(a) Modelning b_2 parametrga sezgirligi



(b) Modelning d_3 parametrga sezgirligi

Model parametrlariga sezgirlik tahlili

Grafikda (Rasm 5 da) b_2 parametrining o'zgarishi - ijtimoiy barqarorlikning o'sishiga E iqtisodiyotning ta'sirini, turistik faollik dinamikasiga qanday ta'sir qilishini ko'rsatadi:

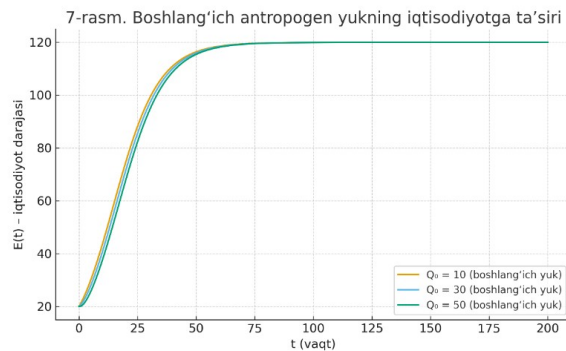
- $b_2 = 0.01$ zaif aloqa – turizm sekin rivojlanadi va past darajada qolmoqda;
- $b_2 = 0.01$ asosiy qiymat - turizm o'rtacha barqaror holatga yetadi,
- $b_2 = 0.01$ kuchli ta'sir - turizm tezroq va yuqori darajada rivojlanadi,
- $b_2 = 0.01$ kuchli aloqa – turizm tez rivojlanadi va yuqori darajaga yetadi.

Natija: b_2 parametri turizm rivojlanishi uchun iqtisodiy o'sish qanchalik muhimligini belgilaydi. Yuqori qiymatlar shuni ko'rsatadiki, turizm iqtisodiyot o'sishiga bog'liq va bu ijtimoiy barqarorlikga ham ta'sir qiladi.

Endi d_3 – ifloslanishni tozalash/kamaytirish tezligi. Grafikda d_3 (Rasm 6 da) parametrning o'zgarishi - tabiiy ifloslanishni kamaytirish tezligi ekologiya $Q(t)$ dinamikasiga qanday ta'sir qilishini ko'rsatadi:

- $d_3 = 0.005$: juda sekin tozalash - yuk uzoq vaqt davomida yuqori bo'lib qoladi,
- $d_3 = 0.001$: asosiy qiymat – yuk asta-sekin kamayadi.
- $d_3 = 0.002$: tozalash tezlashdi $-Q(t)$ tezroq tushadi.
- $d_3 = 0.03$: tez tozalash – ifloslanish keskin kamayadi va minimal darajada barqarorlashadi.

Natija: Parametr d_3 tabiiy degradatsiya yoki boshqariladigan tozalash choralarining samaradorligini tavsiflaydi. d_3 qanchalik yuqori bo'lsa, tizim yukdan tezroq xalos bo'ladi, ekologiya va turizm uchun qulay sharoitlar paydo bo'ladi.



(a) Dastlabki antropogen yukning iqtisodiyotga ta'siri

Grafikda antropogen yukning boshlang'ich darajasi $Q(0)$ ning iqtisodiyotning tiklanishi $E(t)$ ga qanday ta'sir qilishini ko'rsatadi: $Q(0) = 10$ - past ifloslanish darajasi: iqtisodiyot tezda tiklanadi va yuqori barqaror darajaga etadi. $Q(0) = 30$ - o'rtacha yuk: Qayta tiklash sekinroq va barqaror daraja pastroq. $Q(0) = 50$ - yuqori yuk: iqtisodiy holat uzoq vaqt davomida tiklana olmaydi. Dastlabki antropogen yuk qancha ko'p bo'lsa, iqtisodiyot shunchalik yomon tiklanadi.

Xulosa va takliflar. Maqolada ishlab chiqilgan matematik model turizm tizimining uzoq muddatli rivojlanishini chuqur tahlil qilish imkonini beradi. Tahlillar natijasida, tizimda iqtisodiyot, ijtimoiy barqarorlik va ekologiya o'zaro bog'liq holda harakatlanishi aniqlangan. Statsionar nuqta va uning atrofida dinamikani o'rganish shuni ko'rsatdiki, tizim ma'lum parametrlar ostida barqaror muvozanat holatiga yaqinlashadi va bu holat asimptotik barqaror hisoblanadi. Parametrlarning sezgirlik tahlili turizm rivojlanishini aniqlashga yordam berdi: ijtimoiy omillar iqtisodiyot tiklanishida muhim rol o'ynaydi, ekologik yuk esa o'sish jarayonini sezilarli darajada cheklaydi.

ADABIYOTLAR

1. Casagrandi, R., & Rinaldi, S. A theoretical approach to tourism sustainability // Conservation Ecology. - 2002. - Vol. 6, No. 1. - P. 1–15.

2. Verhulst, P.F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance Mathematique et Physique. 1838. Vol.10. P. 113–121.
3. Murray, J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. - 3rd ed. - New York: Springer-Verlag, 2002. - P. 73–85; 302–310.
4. Lotka, A. J. Elements of Physical Biology. - Baltimore: Williams & Wilkins Company, 1925. - P. 123–135; 350–360.
5. Volterra, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // Nature. - 1926. - Vol. 118, No. 2972. - P. 558–560.
6. Bianchi, R. V. The ‘Critical Turn’ in Tourism Studies: A radical critique // Tourism Geographies. - 2009. - Vol. 11, No. 4. - P. 484–504.
7. The International Ecotourism Society (TIES). Ecotourism and Sustainability Guidelines. - Ecotourism.org, 2020. - P. 7–42.
8. Kuznetsova, Z. V. Математическое моделирование социально-экономических систем. - Moskva: Finansy i Statistika, 2010. - P. 57–225.
9. Coccossis, H., & Mexa, A. The Challenge of Tourism Carrying Capacity Assessment. - Aldershot: Ashgate, 2004. - 300 p
10. Батлер Р. Эволюция туристических территорий и её значение для управления ресурсами // Canadian Geographer. 1980. – Т. 24, № 1. С. 5–12.
11. Zurlini G., Muller F. Modelling the environment: techniques and tools for ecological risk assessment // Ecological Modelling. 2008. Vol. 217. P.123–134.

RESUME

In this article, an approach to analyzing the long-term sustainability of the tourism system based on mathematical modeling has been developed. The proposed model simultaneously takes into account the nonlinear interactions between economic (E), social (S), and environmental (Q) factors and determines how they reach a stable state over time.

Key words: Tourism sustainability, stationary point, asymptotic stability, Jacobian matrix, anthropogenic load, mathematical modeling, ecological load, numerical simulation.

РЕЗЮМЕ

В данной статье разработан подход к анализу долгосрочной устойчивости туристской системы на основе математического моделирования. Предлагаемая модель одновременно учитывает нелинейные взаимодействия между экономическими (E), социальными (S) и экологическими (Q) факторами и определяет, каким образом они достигают устойчивого состояния с течением времени.

Ключевые слова: Устойчивость туризма, стационарная точка, асимптотическая устойчивость, матрица Якоби, антропогенная нагрузка, математическое моделирование, экологическая нагрузка, численное моделирование.

UDC 34A05, 34A12, 34B05

THE CAUCHY PROBLEM FOR A HIGH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION INVOLVING THE BESSEL OPERATOR AND LOWER-ORDER TERMS

KARIMOV SHAKHOBIDDIN TUYCHIBOYEVICH
 FERGANA STATE UNIVERSITY. FERGANA, UZBEKISTAN
 shaxkarimov@gmail.com

BOYNAZAROV AKHRORJON NUMONJONOVICH
 FERGANA STATE UNIVERSITY. FERGANA, UZBEKISTAN
 ahror010185@gmail.com

RESUME

This paper investigates the Cauchy problem for a high-order ordinary differential equation involving the Bessel operator with a spectral parameter. This type of problem presents significant challenges and has received limited attention in the literature due to the lack of appropriate analytical tools. The main objective of the study is to solve the Cauchy problem by employing a transmutation operator. As the transmutation operator, the generalized Erdelyi-Kober fractional operator is utilized. When this operator is applied, the considered problem is transformed into an equation without degeneration and without a lower-order term. A key advantage of the proposed approach is that it leads to an explicit solution of the formulated problem. Despite the significant progress in modern computational techniques, obtaining exact solutions for boundary value problems of ordinary differential equations remains an important and relevant challenge. Such solutions provide a deeper understanding of the qualitative behavior of the described processes and phenomena, reveal the intrinsic properties of the underlying mathematical models, and can also serve as benchmark examples for asymptotic and numerical methods.

Key words: high-order ordinary differential equation, Cauchy problem, generalized Erdelyi-Kober fractional operator, function of Mittag-Liffler.

1. Introduction

In this article, we consider the following ordinary differential equation

$$(A_{a,b}^m - c^2) y(x) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} + b^2 \right)^m y(x) - c^2 y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad b, c \in R, \quad (1)$$

with an integer power of the Bessel operator

$$A_{a,b}^m \equiv (B_a + b^2)^m, \quad a \in R, \quad a > 0 \quad (2)$$

where $B_a = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}$ is the Bessel operator, $m \in N$, $f(x)$ is a given function, $A_{0,0} = \frac{d^2}{dx^2}$, $A_{a,b}^0 = E$, E is identity operator, $A_{a,b}^m = A_{a,b}^{m-1} A_{a,b}$ is the m -th power of the operator in (2).

In the theory of differential equations, problems involving the Bessel operator hold special significance, as they appear in various fields of physics, engineering, and applied mathematics. The Bessel operator typically arises in problems with radial symmetry, such as the wave equation, heat conduction, beam vibrations, and quantum mechanics [14,15].

The entire range of equations with Bessel operators was most fully studied by the Voronezh mathematician I.A. Kipriyanov and his students [1,2,3]. These studies are closely connected to, and often based upon, transmutation theory [4,6,7]. Also methods and results from fractional calculus are very useful, [3,5,6,7,8], including special types of fractional operators that are important in applications to differential equations, namely, the Erdelyi-Kober [2,5,7,8,9], Buschman-Erdelyi [3,10] ones and fractional type operators with Gauss

and Legendre kernels [11]. Some problems for products of Bessel-type operators are considered in [12], for products of Sturm-Liouville operators in [13]. We highlight in particular the remarkable paper [14], which presents many original and valuable findings. Among them problems for 3 types of integer powers of the following operators were explicitly solved in terms of integral operators with hypergeometric function kernels

$$D_1 = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^m, \quad D_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}\right)^k, \quad D_3 = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}\right)^k$$

with additional conditions at $x = 1$ on solution and its derivatives. The choice of $x = 1$ avoids the complications associated with the singularity at $x = 0$. It should be noted that we consider a more complex case with additional conditions imposed precisely at $x = 0$. For differential equations for Bessel type operators with conditions on lines of singularities as in (1) special conditions are needed, namely Kipriyanov’s evenness conditions, [12, p.235], [3, p.33]. Regarding the difficulties with conditions on singularity lines for Bessel-type equations [15].

Another significant section of the paper [14] introduced and outlined explicit constructions for fractional powers of the Bessel operator (2). Further developments of these results can be found in [3,6,16.17].

It should also be noted that for operators of type (1) with a spectral parameter, a special class of transmutations was introduced by S.M. Sitnik. They were named Vekua-Erdelyi-Lowndes (VEL) transmutations after authors of first known special cases, for any operator A and a constant λ these VEL transmutations T are defined by a property

$$T(A + \lambda) = AT,$$

see [18,19]. In this paper, we use such VEL transmutations introduced by Lowndes [20]. Also our main method is to use as transmutations the generalized Erdelyi-Kober fractional operator [5,8,9].

1.1 The Cauchy Problem

In the domain $\Omega = \{x \in R : x > 0\}$ we look for the solution $y(x) \in C^{2m}[0; +\infty)$ of the equation (1) satisfying the following initial conditions.

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2m - 1. \tag{3}$$

We now turn to the main properties of the generalized Erdelyi-Kober fractional operator.

1.2. Generalized Erdelyi-Kober fractional operator with Bessel functions in the Kernel

In the works of Erdelyi and Kober, the following modification of fractional integration was introduced:

$$I_{\gamma,\alpha}\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\gamma+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\gamma+1} \varphi(t) dt \tag{4}$$

$$K_{\gamma,\alpha}\varphi(x) = \frac{2x^{2\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{1-2(\gamma+\alpha)} \varphi(t) dt, \tag{5}$$

where $\alpha > 0, \gamma > 0, \varphi(x) \in L(R^+)$.

Operators (4), (5) and their generalizations are called Erdelyi-Kober operators [5].

The results of Erdelyi and Kober are generalized in the works of J.S. Lowndes [20], who introduced and studied generalized Erdelyi-Kober operators of the form:

$$J_\lambda(\gamma, \alpha)\varphi(x) = 2^\alpha \lambda^{1-\alpha} x^{-2\alpha-2\eta} \int_0^x t^{2\gamma+1} (x^2 - t^2)^{(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}) \varphi(t) dt \tag{6}$$

$$R_\lambda(\gamma, \alpha)\varphi(x) = 2^\alpha \lambda^{1-\alpha} x^{2\gamma} \int_x^{+\infty} t^{1-2\alpha-2\gamma} (t^2 - x^2)^{(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^2 - x^2}) \varphi(t) dt, \tag{7}$$

where $\gamma, \alpha, \lambda \in R$ and $\alpha > 0, \gamma \geq -1/2, J_\nu(z)$ is the Bessel function of the first kind. It is clear that, when $\lambda \rightarrow 0$ da (6) and (7) operators coincide with the classical operators (4) and (5): $J_0(\gamma, \alpha) = I_{\gamma,\alpha}, R_0(\gamma, \alpha) = K_{\gamma,\alpha}$.

The following representation of operator (6) will be required later:

$$J_\lambda(\gamma, \alpha)\varphi(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\gamma)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1} \left(\lambda\sqrt{x^2 - t^2} \right) t^{2\gamma+1} \varphi(t) dt, \tag{8}$$

where $\bar{J}_\nu(z)$ is the normalized Bessel function [6] defined by

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-z^2/4)^k}{(\nu + 1)_k k!}.$$

The function $\bar{J}_\nu(z)$ is even and infinitely differentiable. Moreover, $|\bar{J}_\nu(z)| \leq 1$ for $\nu > -1/2$ and it satisfies the following equation:

$$B_\gamma^x \bar{J}_\gamma(\lambda x) + \lambda^2 \bar{J}_\gamma(\lambda x) = 0,$$

with the initial conditions

$$\bar{J}_\nu(0) = 1, (d/dx)\bar{J}_\nu(\lambda x)|_{x=0} = 0.$$

The inverse operator to (8) is given by [5]:

$$J_\lambda^{-1}(\gamma, \alpha)\varphi(x) = \frac{2x^{-2\gamma}}{\Gamma(p - \alpha)} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \right)^p \int_0^x \bar{I}_{p-\alpha-1} \left(\lambda\sqrt{x^2 - s^2} \right) \frac{s^{2(\gamma+\alpha)+1}}{(x^2 - s^2)^{\alpha-p+1}} \varphi(s) ds, \tag{9}$$

where $p = [\alpha] + 1$, $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} I_\nu(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}$, $I_\nu(z)$ is the Bessel function with imaginary argument.

From [21,22] we cite the following theorem for (2):

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$, $\gamma \geq -\frac{1}{2}$, $\varphi(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, and the function $x^\gamma [A_{a,0}^x]^{k+1} \varphi(x)$, be integrable at zero and $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\gamma+1} \frac{d}{dx} [A_{a,0}^x]^{k+1} \varphi(x) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Then the following equality holds:*

$$A_{\gamma+a,b}^m J_b \left(\frac{\gamma - 1}{2}, \frac{a}{2} \right) \varphi(x) = J_b \left(\frac{\gamma - 1}{2}, \frac{a}{2} \right) A_{\gamma,0}^m \varphi(x).$$

In particular, if $b = 0$, then

$$A_{\gamma+a,0}^m I_{\frac{\gamma-1}{2}, \frac{a}{2}} \varphi(x) = I_{\frac{\gamma-1}{2}, \frac{a}{2}} A_{\gamma,0}^m \varphi(x).$$

Moreover, for $\gamma = 0$ we have:

$$A_{a,b}^m J_b \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) \varphi(x) = J_b \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) A_{0,0}^m \varphi(x). \tag{10}$$

In the subsequent calculations, we utilize of these special functions.

1.3 Hypergeometric Functions

The Gauss hypergeometric function, inside the circle $|z| < 1$, is defined as the sum of the hypergeometric series [23,24]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = F(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}, \tag{11}$$

for $|z| < 1$, the function is defined by the series expansion. For $|z| \geq 1$, it is defined by the analytic continuation of this series. In expression (10), the parameters a, b, c and the variable z may be complex, where $c \neq 0, -1, -2, \dots$. The product $(a)_k$ is the Pochhammer symbol:

$$(a)_n = a(a + 1) \dots (a + n - 1), \\ n = 1, 2, \dots, (a)_0 \equiv 1.$$

In the following computations, the needed relations and transformations include:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt \tag{12}$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-zt)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) \tag{13}$$

$$F(a, b, a-b+1; z) = \frac{1}{(1-z)^a} F\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2} - b; a-b+1; -\frac{4z}{(1-z)^2}\right). \tag{14}$$

The function $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2; \gamma; x, y)$ is Appell’s hypergeometric function of two variables [23,24], and its series representation is given by

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} (x)^m(y)^n, \max[|x|, |y|] < 1, \tag{15}$$

it also satisfies the formula

$$F_3(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\beta_1)_n}{(\gamma)_n n!} (x)^n {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma+n; y), \tag{16}$$

where ${}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma+n; y)$ is the Gauss hypergeometric function. Moreover,

$$F_3\left(a, a', b, b', a'+b; x, \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(a', a+b'; a'+b; \frac{x}{x-1}\right) \tag{17}$$

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(c)_n n!} {}_2F_1(a, b; c+n; x), |x| < 1, \tag{18}$$

where $\Xi_2(a, b, c; x, y)$ is Humbert’s confluent hypergeometric function [24].

The general triple hypergeometric function introduced by Srivastava [25].

$$\begin{aligned} F^{(3)}(x, y, z) &= F^{(3)} \left[\begin{matrix} (a) :: (b); (b'); (b''); (c); (c'); (c'') \\ (e) :: (g); (g'); (g''); (h); (h'); (h'') \end{matrix} \middle| x, y, z \right] = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \Lambda(m, n, k) \frac{x^m y^n z^k}{m! n! k!}, \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$\Lambda(m, n, k) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m+n+k} \prod_{j=1}^B (b_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_{n+k} \prod_{j=1}^{B''} (b''_j)_{m+k} \prod_{j=1}^C (c_j)_m \prod_{j=1}^{C'} (c'_j)_n \prod_{j=1}^{C''} (c''_j)_k}{\prod_{j=1}^E (e_j)_{m+n+k} \prod_{j=1}^G (g_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{G'} (g'_j)_{n+k} \prod_{j=1}^{G''} (g''_j)_{m+k} \prod_{j=1}^H (h_j)_m \prod_{j=1}^{H'} (h'_j)_n \prod_{j=1}^{H''} (h''_j)_k}.$$

$F^{(3)}(x, y, z)$ is Srivastava’s generalized triple hypergeometric function .

2. Application of the generalized Erdelyi-Kober operator to the solution of the Cauchy problem

Assuming that the solution to problem (1), (3) exists, we seek it in the form

$$y(x) = J_b\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) z(x) = \frac{2x^{1-a}}{\Gamma(a/2)} \int_0^x (x^2-t^2)^{\frac{a}{2}-1} \bar{J}_{\frac{a}{2}-1}\left(b\sqrt{x^2-t^2}\right) z(t) dt, \tag{20}$$

where $z(x)$ is an unknown function, and we assume that $z(x)$ is sufficiently smooth.

Equation (1), according to equality (10), can be expressed as follows:

$$J_b \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) z^{(2m)}(x) - c^2 J_b \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) z(x) = f(x). \tag{21}$$

For the case $0 < \frac{a}{2} < 1$, $p = \lceil \frac{a}{2} \rceil + 1 = 1$ in equation (21), we apply (9) in the form $J_b^{-1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right)$, and using the initial conditions (3), we obtain the following equation for the function $z(x) \in C^{2m}(R^+)$ to

$$z^{(2m)}(x) - c^2 z(x) = F(x), \quad x > 0 \tag{22}$$

with the initial condition

$$z^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2m - 1, \tag{23}$$

where

$$F(x) = J_\lambda^{-1} \left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2} \right) f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{a}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\bar{I}_{-\frac{a}{2}} \left(\lambda \sqrt{x^2 - \eta^2} \right)}{(x^2 - \eta^2)^{\frac{a}{2}}} \eta^a f(\eta) d\eta. \tag{24}$$

The unique solution of equation (22) is obtained as follows (see [26, p. 245]):

$$z(x) = \sum_{k=1}^{2m} B_k (x - A)^{2m-k} E_{2m, 2m-k+1} [c^2(x - A)^{2m}] + \int_0^x (x - s)^{2m-1} E_{2m, 2m} [c^2(x - s)^{2m}] F(s) ds, \tag{25}$$

where $E_{2m, 2m} [c^2(x - s)^{2m}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k} (x-s)^{2mk}}{\Gamma(2mk+2m)}$ is the Mittag - Leffler function.

Expression (25), according to the initial condition (23), takes the following form

$$z(x) = \int_0^x (x - s)^{2m-1} E_{2m, 2m} [c^2(x - s)^{2m}] F(s) ds, \tag{26}$$

Substituting (24) into (26), we have

$$z(x) = \frac{1}{(1 - \frac{a}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{\Gamma(2mk + 2m)} \int_0^x (x - s)^{2mk+2m-1} \frac{d}{ds} G(s) ds, \tag{27}$$

where

$$G(s) = \int_0^s (s^2 - \eta^2)^{-\frac{a}{2}} \bar{I}_{-\frac{a}{2}} \left(\lambda \sqrt{s^2 - \eta^2} \right) \eta^a f(\eta) d\eta. \tag{28}$$

The following lemma is applicable to expression (28):

Lemma. *If the function $f(\eta)$ is continuous, then $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0$.*

Proof. We make the change of variable $\eta = st$ in equation (28).

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^1 s^{-a} (1 - t^2)^{-\frac{a}{2}} \bar{I}_{-\frac{a}{2}} \left(\lambda s \sqrt{1 - t^2} \right) s^a t^a f(st) s dt \\ &= s \int_0^1 (1 - t^2)^{-\frac{a}{2}} \bar{I}_{-\frac{a}{2}} \left(\lambda s \sqrt{1 - t^2} \right) t^a f(st) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} G(s) &= 0 \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{a}{2}} \bar{I}_{-\frac{a}{2}}(0) t^a f(0) dt \\ &= 0 f(0) \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{a}{2}} t^a dt = 0. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

By integrating (27) by parts and applying Lemma 1, we obtain:

$$z(x) = \frac{2mk + 2m - 1}{\left(1 - \frac{a}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k}}{\Gamma(2mk + 2m)} H(x), \tag{29}$$

where

$$H(x) = \int_0^x (x-s)^{2mk+2m-2} G(s) ds. \tag{30}$$

We substitute expression (28) into integral (30) and, after changing the order of integration and performing some simplifications, we have

$$H(x) = \int_0^x \eta^a f(\eta) h(x, \eta) d\eta, \tag{31}$$

where

$$h(x, \eta) = \int_{\eta}^x (x-s)^{2mk+2m-2} (s^2 - \eta^2)^{-\frac{a}{2}} \bar{I}_{-\frac{a}{2}}\left(b\sqrt{s^2 - \eta^2}\right) ds. \tag{32}$$

We perform the substitution of variable in integral (32) as $s = \eta + (x - \eta)\tau$ and, using formulas (12), (13), (14), and (18), we get

$$\begin{aligned} h(x, \eta) &= \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x}\right)^{2mk+2m-1} (x^2 - \eta^2)^{-\frac{a}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) \Gamma(2mk + 2m - 1)}{\Gamma\left(2mk + 2m - \frac{a}{2}\right)} \\ &\times \Xi_2\left(mk + m - \frac{1}{2}, mk + m; 2mk + 2m - \frac{a}{2}; \frac{x^2 - \eta^2}{x^2}, \frac{b^2}{4}(x^2 - \eta^2)\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Equation (33) is substituted into (31), and the resulting expression is then substituted into (29). After simplification, we obtain the following result:

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^x \eta^a \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x}\right)^{2m-1} (x^2 - \eta^2)^{-\frac{a}{2}} E_{2m, 2m-\frac{a}{2}} \left[c^2 \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x}\right)^{2m} \right] \\ &\times \Xi_2\left(mk + m - \frac{1}{2}, mk + m; 2mk + 2m - \frac{a}{2}; \sigma, \omega\right) f(\eta) d\eta. \end{aligned} \tag{34}$$

Substituting equation (34) into (20) and performing some simplifications, we have

$$y(x) = \frac{2x^{1-a}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^x \eta^a f(\eta) K(x, \eta) d\eta, \tag{35}$$

where

$$K(x, \eta) = \int_{\eta}^x (x^2 - t^2)^{\frac{a}{2}-1} \bar{J}_{\frac{a}{2}-1}\left(b\sqrt{x^2 - t^2}\right) \left(\frac{t^2 - \eta^2}{2t}\right)^{2m-1} (t^2 - \eta^2)^{-\frac{a}{2}} E_{2m, 2m-\frac{a}{2}} \left[c^2 \left(\frac{t^2 - \eta^2}{2t}\right)^{2m} \right]$$

$$\times \Xi_2 \left(mk + m - \frac{1}{2}, mk + m; 2mk + 2m - \frac{a}{2}; \sigma, \omega \right) dt. \tag{36}$$

We will now perform some calculations and simplifications on expression (36), first using formula (18) and then formulas (16) and (17), ultimately obtaining the following:

$$K(x, \eta) = \Gamma \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2m} (x^2 - \eta^2)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k} \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2mk}}{\Gamma(2mk + 2m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4} (x^2 - \eta^2) \right)^n}{(2mk + 2m)_n n!}$$

$$\times \Xi_2 \left(m + mk, mk + m + n + \frac{a-1}{2}; 2mk + 2m + n; \frac{x^2 - \eta^2}{x^2}, \frac{b^2}{4} (x^2 - \eta^2) \right). \tag{37}$$

By substituting expression (37) into (35) and performing simplifications, the explicit form of the solution can be written as

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2m-1} \left(\frac{\eta}{x} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k} \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2mk}}{\Gamma(2mk + 2m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4} (x^2 - \eta^2) \right)^n}{(2mk + 2m)_n n!}$$

$$\times \Xi_2 \left(m + mk, mk + m + n + \frac{a-1}{2}; 2mk + 2m + n; \sigma, \omega \right) f(\eta) d\eta, \tag{38}$$

where $\sigma = \frac{x^2 - \eta^2}{x^2}, \omega = \frac{b^2}{4} (x^2 - \eta^2)$.

If we express the last triple series under the integral in expression (38) using (19), then the solution is expressed as follows:

$$y(x) = \int_0^x \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2m-1} \left(\frac{\eta}{x} \right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{2k} \left(\frac{x\sigma}{2} \right)^{2mk}}{\Gamma(2mk + 2m)}$$

$$\times F^{(3)} \left[\begin{matrix} ((-): (-); (-); (mk + m + \frac{a-1}{2}); (mk + m); (-); (-) \\ ((2mk + 2m): (-); (-); (-); (mk + m + \frac{a-1}{2}); (-); (-) \end{matrix} \middle| \sigma, \omega, -\omega \right] f(\eta) d\eta. \tag{39}$$

Consequently, the following theorem is established.

Theorem 2. *If $f(x) \in C[0, \infty)$, then the solution of the Cauchy problem can be represented in the form (39).*

Remark. *When $c = 0$, equation (1) $(A_{a,b}^m - c^2) y(x) = f(x)$ transforms into the form $A_{a,b}^m y(x) = f(x)$, and its solution, when $a = 2\alpha$, takes the following form and coincides with the result obtained from reference[27]*

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(2m)} \int_0^x \left(\frac{x^2 - \eta^2}{2x} \right)^{2m-1} \left(\frac{\eta}{x} \right)^{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{(2m)_n n!}$$

$$\times \Xi_2 \left(m, m + n + \alpha - \frac{1}{2}; 2m + n; \sigma, \omega \right) f(\eta) d\eta.$$

REFERENCES

1. Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Boundary Value Problems. - Moscow: Nauka, 1997, 208 p.
2. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. The method of transmutation operators and boundary value problems for singular elliptic equations. - Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, Moscow, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211-426.

3. Sitnik S.M., Shishkina E.L. The method of transmutation operators for differential equations with Bessel operators. - Moscow: Fizmatlit, 2018, 224 p.
4. Carroll R. Transmutation Theory and Applications. - North-Holland, 1986, 351 p.
5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications. - Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p.
6. Shishkina E., Sitnik S. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. - Elsevier, Academic Press, 2020, 592 p.
7. Urinov A.K., Sitnik S.M., Karimov Sh.T. Transmutation operators based on various forms of fractional integro-differentiation. - Lambert Academic Publishing, 2025, 333 p.
8. Urinov A.K., Sitnik S.M., Shishkina E.L., Karimov Sh.T. Fractional Integrals and Derivatives (Generalizations and Applications). - Fergana: Publishing House "Fargona 2022, 192 p.
9. Urinov A.K., Karimov Sh.T. Erdelyi-Kober Operators and Applications to Partial Differential Equations. - Fergana: Publishing House "Fargona 2021, 202 p.
10. Sitnik S.M. A short survey of recent results on Buschman-Erdelyi transmutations. - Journal of Inequalities and Special Functions, 2017, vol. 8, issue 1, pp. 140-157.
11. Skoromnik O.V. Integral Transforms with Gauss and Legendre Kernels and Integral Equations of the First Kind. - Novopolotsk: Novopolotsk State University, 2019, 180 p.
12. Kipriyanov I.A., Ivanov L.A. On lacunae for some classes of equations with singularities. - Mathematics of the USSR-Sbornik, 1981, vol. 38, issue 2, pp. 217-230.
13. Kozlov V., Maz'ya V. Theory of a Higher-Order Sturm-Liouville Equation. - Tokyo: Springer, 1997, 157 p.
14. Sprinkhuizen-Kuyper I.G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. - Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, vol. 72, pp. 674-702.
15. Tersenov S.A. On a singular Cauchy problem. - Doklady Akademii Nauk SSSR, 1971, vol. 196, no. 5, pp. 1032-1035.
16. Shishkina E.L., Sitnik S.M. On fractional powers of Bessel operators. - Journal of Inequalities and Special Functions, 2017, vol. 8, issue 1, pp. 49-67.
17. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Fractional Bessel Integrals and Derivatives on Semiaxes. - In: Kravchenko V., Sitnik S.M. (Eds.), Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. Birkhauser, Basel, 2020, pp. 615-651.
18. Sitnik S.M., Lyahovetskii G.V. Vekua-Erdelyi-Lowndes transmutations. - Preprint, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch RAS, Vladivostok, 1994, 23 p.
19. Sitnik S., Alzamili K., Qudosi A., Shishkina E. Vekua-Erdelyi-Lowndes Type Transmutation and Applications. - Journal of Mathematical Sciences, 2024, vol. 281, no. 6, pp. 938-945.
20. Lowndes J.S. A generalization of the Erdelyi-Kober operators. - Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Series 2, 1970, vol. 17, no. 2, pp. 139-148.
21. Urinov A.K., Karimov Sh.T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type. - Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 102-110.
22. Karimov Sh.T. The Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon Equation with the Bessel operator. - Lobachevsky Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 5, pp. 768-780. DOI: 10.1134/S1995080220050042

23. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions, Hypergeometric function, Legendre function. - McGraw-Hill, New York, 1973.
24. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Vol. 3: Special Functions. - Gordon and Breach, New York, 1986.
25. Sahai V. Infinite summation formulas of Srivastava's general triple hypergeometric function. - arXiv preprint arXiv:2003.07528, 2020.
26. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. - North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, 2006.
27. Sitnik S., Karimov S., Boynazarov A. Solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with an integer power of the Bessel operator using transmutation operators. - Journal of Mathematical Sciences. DOI: 10.1007/s10958-025-07990-z

РЕЗЮМЕ

Ushbu maqolada spektral parametrga ega bo'lgan Bessel operatori ishtirok etgan yuqori tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi tadqiq qilinadi. Bunday turdagi masalalar sezilarli murakkabliklarga ega bo'lib, mos analitik vositalarning yetishmasligi sababli ilmiy adabiyotlarda kam o'rganilgan. Tadqiqotning asosiy maqsadi - almashtirish operatoridan foydalanib, Koshi masalasining yechimini olishdir. Almashtirish operatori sifatida umumlashtirilgan Erdelyi-Kober kasr operatori qo'llaniladi. Bu operator qo'llanganda, ko'rib chiqilayotgan masala singulyar koefitsient va pastroq tartibli hadi bo'lmagan tenglamaga keltiriladi. Taklif etilgan yondashuvning muhim afzalliklaridan biri shundaki, u qo'yilgan masalaning aniq yechimini olishga imkon beradi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalarida katta yutuqlarga erishilganiga qaramay, oddiy differensial tenglamalarning chegara masalalari uchun aniq yechimlarni topish hanzu muhim va dolzarb masala bo'lib qolmoqda. Bunday yechimlar tasvirlanayotgan jarayon va hodisalarning sifat jihatdan xatti-harakatini chuqurroq anglashga, asosiy matematik modellarning ichki xususiyatlarini ochib berishga hamda asimptotik va sonli metodlar uchun tayanch misollar sifatida xizmat qilishga yordam beradi.

Kalit so'zlar: Yuqori tartibli oddiy differensial tenglama, Koshi masalasi, umumlashtirilgan Erdelyi-Kober kasr operatori, Mittag-Leffler funksiyasi.

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследуется задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка с оператором Бесселя и спектральным параметром. Подобные задачи представляют собой значительные трудности и в литературе изучены лишь в ограниченном объёме из-за отсутствия соответствующих аналитических методов. Основная цель исследования заключается в решении задачи Коши с использованием оператора преобразования. В качестве оператора преобразования применяется обобщённый дробный оператор Эрдейи-Кобера. При применении этого оператора рассматриваемая задача преобразуется в уравнение без вырождения и без членов более низкого порядка. Ключевым преимуществом предлагаемого подхода является получение явного решения сформулированной задачи.

Несмотря на значительный прогресс в современных вычислительных методах, получение точных решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений остаётся важной и актуальной задачей. Такие решения позволяют глубже понять качественное поведение описываемых процессов и явлений, выявить внутренние свойства соответствующих математических моделей, а также могут служить эталонными примерами для асимптотических и численных методов.

Ключевые слова: Обыкновенное дифференциальное уравнение высокого порядка, задача Коши, обобщённый дробный оператор Эрдейи-Кобера, функция Миттаг-Леффлера.

UDC 512.643

O‘ZBEK TILIDAGI SHARHLAR UCHUN KONTURLI KONVOLYUCTIONS NEYRON TARMOQIGA ASOSLANGAN ASPEKT VEKTORLASHTIRISHNING UCH BOSQICHLI SENTIMENT TAHLILI MODELII**MATLATIPOV SAN‘ATBEK G‘AYRATOVICH**MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
s.matlatipov@nuu.uz**RAJABOV JALOLIDDIN SHAMSUDDIN OG‘LI**MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
j.rajabov@nuu.uz**ALLABERDIYEV BOBUR BAXTIYOROVICH**MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
O‘ZBEKISTON XALQARO ISLOM SHUNOSLIK AKADEMIYASI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
allaberdiyev_91@mail.ru**ANNOTATSIYA:**

Aspektga asoslangan sentiment tahlil (AASST) har bir sharhda aniq aspekt bo‘yicha bahoni aniqlash orqali fikrlarni yanada chuqurroq tahlil qilish imkonini beradi. Mazkur maqolada o‘zbek tilidagi ijtimoiy sharhlari uchun *konturli konvolyutsion neyron tarmoq* (Gated Convolutional Aspect Embedding, GCAE) arxitekturasiga tayangan *uch bosqichli* AASST modeli taklif etiladi. Birinchi bosqichda aspekt atamaları ajratiladi (AAA), ikkinchi bosqichda har bir aspekt uchun tegishli semantik kategoriya aniqlanadi (ACC), uchinchi bosqichda esa shu aspektga nisbatan sentiment polariteti baholanadi (ATSA). Model kirishda FST-ga asoslangan morfologik tahlil, FastText so‘z vektorlari va o‘zbek BERT enkoderi yordamida olingan leksik hamda kontekstual embeddinglarni birlashtiradi; GCAE asosidagi darvozalangan konvolyutsion modul esa aspektga bog‘liq vektorlashtirishni amalga oshiradi. Maqolada ushbu uch bosqichli arxitektura uchun umumiy vektorlashtirish sxemasi va ko‘p vazifali (multitask) yo‘qotish funksiyasi yordamida yagona konturli neyron tarmoq modelini o‘qitish prinsiplari batafsil bayon etiladi.

Kalit so‘zlar: aspektga asoslangan sentiment tahlil, GCAE, konturli konvolyutsion neyron tarmoq, darvozalangan konvolyutsiya, aspekt terminlarini ajratish, aspekt kategoriyasi, aspekt darajasidagi sentiment, o‘zbek tili, uch bosqichli model, ko‘p vazifali o‘qitish, morfologik tahlil.

Kirish

O‘zbek tilida yozilgan foydalanuvchi sharhlari (restoran, xizmat, onlayn-do‘kon va hokazo) bozordagi qarorlar, xizmat sifati va foydalanuvchi tajribasini o‘rganish uchun juda boy manba hisoblanadi. Keng tarqalgan sentiment tahlil modellari odatda butun gap yoki butun hujjat bo‘yicha *bitta* sentiment yorlig‘ini (musbat, manfiy, neytral) qaytaradi. Biroq real sharhlar ko‘pincha bir nechta aspektlarni qamrab oladi; masalan, “Ovqat juda mazali, lekin xizmat sekin” gapida *ovqat* va *xizmat* aspektlari bo‘yicha turli sentiment mavjud.

Aspektga asoslangan sentiment tahlil (ABSA/AASST) aynan shu muammoni hal qiladi: u matndan *aspekt terminlarini* aniqlab, har bir aspektga *kategoriya* va *sentiment polariteti* biriktiradi [1]. Xalqaro miqyosda ABSA masalasi SemEval-2014 Task 4 [1] doirasida standartlashgan bo‘lib, Gated CNN (GCAE) kabi arxitekturalar bu vazifa uchun yuqori samaradorlik ko‘rsatgan [2]. O‘zbek tili uchun esa dastlabki ishlar avval umumiy sentiment tahlil [4], keyin esa aspekt darajasidagi UzABSA korpusi va SVM asosidagi modellar [3,5] ko‘rinishida taklif etilgan.

O‘zbek tili agglutinatив til bo‘lgani sababli, affiksalar, kelishiklar va shaxs-son ko‘rsatkichlari bilan ifodalangan nozik grammatik farqlarni hisobga oladigan model talab etiladi. Shu ma‘noda, morfologik va sintaktik jihatdan formal o‘rganilgan o‘zbek tili [3,6,8] asosida yaratilgan FST (chekli holatli transduser) ga asoslangan morfologik analizatorlar ABSA modelini boyitish uchun tabiiy asos bo‘lib xizmat qiladi. Mazkur

maqolada o'zbek tilida ABSA masalasini *aniq fanlar* nuqtai nazaridan qat'iy formalashtirish, ya'ni uch bosqichli modelni matematik apparat yordamida ifodalash va konturli konvolyutsion neyron tarmog'iga (GCAE) asoslangan arxitektura bilan bog'lash ko'zda tutiladi [2,5].

Asosiy tushunchalar

Ushbu tadqiqotning maqsadi – o'zbek tilidagi foydalanuvchi sharhlarida *aspektga asoslangan sentiment tahlil* (AAST) masalasini qat'iy matematik model va zamonaviy ko'p tarmoqli neyron arxitektura yordamida yechishdan iborat. Bu yerda asosiy e'tibor sharhdagi umumiy kayfiyatni emas, balki ma'lum *obyektning* aniq *aspektlari* bo'yicha munosabatni aniqlashga qaratiladi.

Tadqiqotda o'zbek tilidagi onlayn platformalar sharhlari asosida maxsus korpus tuzilgan bo'lib, unda restoranlar, xizmat ko'rsatish sohasi va turli mahsulotlar haqidagi foydalanuvchi fikrlari jamlangan. Har bir sharh quyidagicha annotatsiya qilinadi:

- sharh *bitta asosiy obyektga* qaratilgan deb qabul qilinadi;
- sharh matnida obyektning bir yoki bir nechta *aspektlari* ajratiladi;
- har bir aspekt uchun *aspekt toifasi* (kategoriya) va *sentiment qutbligi* (musbat, manfiy, neytral yoki mojaroli) ko'rsatiladi;
- gap ichida aspektni ifodalovchi *aspekt atamalari* (maqsadli iboralar) lingvistik birliklar sifatida belgilab chiqiladi.

Quyida korpusda foydalaniladigan asosiy tushunchalar formal ta'riflar ko'rinishida keltiriladi.

1.1-ta'rif (Obyekt). *Obyekt* – bu sharhda fikr bildirilgan maqsaddir. U joy (restoran, kafe va hokazo), xizmat (taksi, yetkazib berish xizmati va boshqa) yoki aniq mahsulot bo'lishi mumkin. Ushbu tadqiqotda ABSA doirasida har bir sharh bitta asosiy obyektga qaratilgan deb faraz qilinadi.

1.2-ta'rif (Aspekt). *Aspekt* – bu sharhlovchi tilga olishi mumkin bo'lgan obyektning ma'lum xususiyati yoki xossasidir. Masalan, restoran sharhlarida aspektlar sifatida *“narr”*, *“xizmat ko'rsatish”*, *“taom sifati”*, *“muhit”* va shu kabilar ko'rilishi mumkin. Bu yuqori darajadagi semantik tushuncha bo'lib, odatda oldindan belgilangan aspekt toifalari to'plamidan tanlanadi va uning so'z boyligi nisbatan cheklangan bo'ladi.

1.3-ta'rif (Aspekt atamasi). *Aspekt atamasi* – sharh matnida obyektning ma'lum xususiyatini ifodalovchi so'zlar ketma-ketligidir. Bu ketma-ketlik berilgan gapda mutlaqo aniq tarzda *mavjud* bo'lishi kerak va odatda juda turli lug'aviy realizatsiyalarga ega bo'ladi. Amaliy adabiyotda u ko'pincha *maqsadli ibora* (target expression) deb ham yuritiladi.

Aspekt toifalari (1.2-ta'rif) va aspekt atamalari (1.3-ta'rif) turli abstraksiya darajalarini ifodalaydi. Masalan, restoran sharhida:

- sharh obyektining o'zi – *restoran*;
- aspektlar – *“narr”*, *“taom sifati”*, *“xizmat”* kabi umumiy toifalar;
- aspekt atamalari – *“sashimi”*, *“ruletlari”*, *“mazali salat”* kabi matnda aniq ko'rinadigan so'z birikmalari.

Ko'rinib turibdiki, ba'zi holatlarda aspekt va aspekt atamasi bir xil leksik birliklar bilan ifodalanishi mumkin, lekin ularning semantik rolini ayro ko'rish muhim: aspekt *kategoriya* darajasida, aspekt atamasi esa matn ichidagi *aniq ibora* darajasida aniqlanadi.

Aspektga asoslangan sentiment tahlilning vazfiolari

AAST umumiy vazifasi obyektlarning aspektlarini va har bir aspektga nisbatan sentiment munosabatini aniqlashdan iborat. Bu murakkab vazifani amaliy modellashtirish uchun uni bir nechta kichik vazifalarga bo'lib o'rganish odat tusiga kirgan:

- **Aspeklarni ajratib olish (AA).** Bu vazifa ko'pincha nazorat qilinmaydigan (unsupervised) o'rganish vazifasi sifatida qaraladi va katta sharh korpusi asosida asosiy aspekt toifalarini avtomatik kashf etishga qaratiladi. Bu ishda asosiy diqqat neyron model yordamida *oldindan berilgan* aspekt toifalarini aniqlashga qaratilgan bo'lsa-da, AA bosqichi umumiy ABSA tizimlarida muhim tayyorlov bosqichi sifatida qaraladi.
- **Aspekt toifalarini tasniflash (ATT).** Bu vazifa berilgan matn (gap yoki sharh)ni oldindan belgilangan aspekt toifalari to'plamiga ko'ra tasniflashdan iborat. Ya'ni, sharhda obyektning qaysi jihatlari (narx, taom, xizmat va hokazo) haqida gap ketayotganini aniqlash talab etiladi. Bu matn tasniflashning maxsus holati bo'lib, bizning modelda GCAE asosidagi branchlardan biri aynan shu ATT vazifasini bajaradi.
- **Aspekt atamalarini ajratish (AAA).** Bu vazifa maqsadli iboralarni (target expressions) aniqlash deb ham yuritiladi. U berilgan gapda qiziqarli segmentni topishga qaratilgan bo'lib, bu bitta so'z yoki ko'p so'zli ibora bo'lishi mumkin. Annotatsiyada bu ketma-ketliklar aspekt atamalari sifatida belgilab chiqiladi va bizning neyron model uchun ATE (Aspect Term Extraction) komponenti sifatida xizmat qiladi.
- **Aspekt darajasidagi sentiment qutblarini tasniflash.** Sentiment qutbligi tasnifi hujjat darajasida, gap darajasida yoki aspekt darajasida bajarilishi mumkin. Aspekt darajasida to'rtta sentiment qutbi (musbat, manfiy, neytral, mojaroli) bilan ishlash, o'quvchiga umumiy reytingdan ko'ra ancha nozikroq axborot beradi. Berilgan aspekt bo'yicha matn ijobiy, salbiy yoki betaraf deb tasniflanishi, shuningdek, zarur hollarda raqamli reytinglar bilan moslashtirilishi mumkin.

Ushbu maqolada biz aynan *aspekt toifalarini tasniflash, aspekt atamalarini ajratish va aspekt darajasidagi sentiment qutblarini tasniflash* vazifalarini yagona ko'p tarmoqli neyron model doirasida yechishni taklif qilamiz. Keyingi bo'limda bu vazifalar uch bosqichli matematik model ko'rinishida formalashtiriladi va konturlangan konvolyutsion aspekt vektorlashtirish (GCAE) arxitekturasi bilan bog'lanadi. Bunday tarzda AAST masalasini kichik vazifalarga bo'lish SemEval-2014 Task 4 doirasida standartlashgan [1]; darvozalangan konvolyutsion konvolyutsion arxitektura esa Li va Xue tomonidan taklif etilgan GCAE modeli bilan chambarchas bog'liq [2].

Masalaning qo'yilishi

\mathcal{V} bilan o'zbek tili uchun cheklangan so'z shakllari lug'atini, $\mathcal{X} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{V}^n$ bilan esa barcha chekli uzunlikdagi gaplar (token ketma-ketliklari) to'plamini belgilaymiz. Bitta tokenizatsiya qilingan sharh yoki gap

$$X = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{V}^n$$

ko'rinishda yoziladi.

Har bir X uchun AAST masalasi uchta bog'langan bosqichdan iborat:

1. **1-bosqich: aspekt terminlarini ajratish (ATA).** Gap ichida aspekt bo'lib qatnashadigan *uzluksiz* token oraliqlari aniqlanadi. Har bir aspekt termi

$$t = (i, j), \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

juftlik bilan ifodalanadi, bu yerda (w_i, \dots, w_j) aspektga tegishli bo'ladi. X uchun haqiqiy aspektlar to'plami

$$T^*(X) \subseteq \{(i, j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

deb belgilanadi.

2. **2-bosqich: aspekt kategoriyasini aniqlash (AKA).** Har bir $t \in T^*(X)$ aspekt uchun yakuniy, ma'nosi jihatidan umumlashtirilgan aspekt kategoriya yorlig'i tanlanadi. Kategoriyalar to'plamiga

$$\mathcal{C} = \{\text{Ovqat, Xizmat, Narx, Muhit, Joylashuv, Boshqa}\}$$

misol bo'lishi mumkin. Shunda haqiqiy xarita

$$C^* : T^*(X) \rightarrow \mathcal{C}$$

ko'rinishda yoziladi.

3. **3-bosqich: aspekt bo'yicha sentiment polariteti (ATSA).** Har bir $t \in T^*(X)$ aspekt uchun sentiment polariteti

$$\mathcal{S} = \{-1, 0, +1, \mathcal{C}\}$$

to'plamdan tanlanadi, bu yerda -1 – manfiy, 0 – neytral, $+1$ – musbat, \mathcal{C} – “mojaroli/qarama-qarshi” (ya'ni sharhda bir aspekt bo'yicha ijobiy ham, salbiy ham nuqtalar bor) holatini bildiradi. Natijada

$$S^* : T^*(X) \rightarrow \mathcal{S}$$

xaritasi aniqlanadi.

Shunday qilib, har bir X uchun maqsad – aspektlar bo'yicha uchliklar to'plamini tiklash:

$$F^*(X) = \{(t, C^*(t), S^*(t)) : t \in T^*(X)\}.$$

Amaliy model parametrlar to'plami θ bilan ifodalanadigan approksimatsiya

$$F_\theta : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\{1, \dots, n\}} \times \mathcal{C} \times \mathcal{S}$$

ni o'rganadi va ideal holda $F_\theta(X) \approx F^*(X)$ bo'lishi kutiladi.

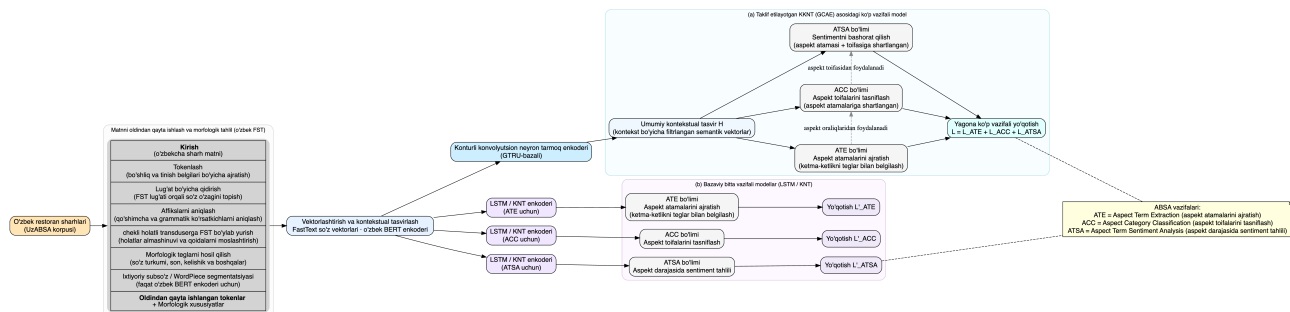


Fig. 5: O‘zbek tilidagi sharhlar uchun taklif etilgan uch bosqichli aspektga asoslangan sentiment tahlil (AAST) maslasining umumiy tizimlashgan arxitekturasi. Chap tomonda kiruvchi restoran sharhlari matnini oldindan qayta ishlash va chekli holatli transduser (FST)ga asoslangan morfologik tahlil modulidan o‘tib, leksik va morfologik belgilangan tokenlar ko‘rinishiga keltiriladi. So‘ngra bu tokenlar FastText so‘z vektorlari va o‘zbek BERT enkoderi yordamida vektorlashtirilib, konturli konvolyutsion neyron tarmoq (GCAE/KKNT) asosidagi ko‘p vazifali model hamda taqqoslash uchun bazaviy bitta vazifali LSTM/KNT modellariga uzatiladi; natijada aspekt atamaları, ularning toifalari va har bir aspekt bo‘yicha sentiment qutblari birgalikda bashorat qilinadi.

Konturli konvolyutsion neyron tarmog‘iga asoslangan aspekt vektorlashtirish

Konturli konvolyutsion neyron tarmog‘ining (KKNT, GCAE) umumiy tuzilmasi va aspektga bog‘liq darvozalanish jarayoni 6-rasmda sxematik ko‘rinishda keltirilgan. O‘zbek tilining agglutinativ xususiyati sababli, har bir token uchun bir vaqtning o‘zida leksik, morfologik va kontekstual axborotni inobatga olish zarur. Morfologik analizator yordamida (masalan, affikslarni va grammatik kategoriyalarni ajratib) olingan gap

$$X = (w_1, \dots, w_n)$$

uchta asosiy embedding oqimiga aks ettiriladi:

- leksik embedding $e_i \in \mathbb{R}^{d_w}$ (masalan, FastText so‘z vektori);
- morfologik atributlar vektori $m_i \in \mathbb{R}^{d_m}$ (kelishik, son, shaxs, zamon va boshqalar);
- kontekstual embedding $b_i \in \mathbb{R}^{d_b}$ (o‘zbek BERT kabi transformerlardan olingan vektor);

Natijada har bir pozitsiya uchun umumiy kirish vektori

$$x_i = [e_i; m_i; b_i] \in \mathbb{R}^d, \quad d = d_w + d_m + d_b,$$

hosil bo'ladi. Barcha tokenlar uchun

$$X_{\text{emb}} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

matritsa ko'rinishida yoziladi.

Quyida konturli konvolyutsion neyron tarmoq (KKNT, inglizcha GCAE) asosida aspektga bog'liq darvozalanish (gating) mexanizmi batafsil tavsiflanadi. Ushbu modul uchala bosqich (ATA, ACC, ATSA) uchun umumiy encoder bo'lib xizmat qiladi.

Aspekt vektori

Har bir aspekt termi $t = (i, j)$ uchun uning lokal vektori maksimal pooling orqali aniqlanadi:

$$x_a(t) = \max_{i \leq k \leq j} x_k \in \mathbb{R}^d.$$

Bu vektor t aspektga tegishli tokenlar orasidagi eng muhim komponentlarni jamlaydi va keyingi darvozalanish bosqichida *aspekt konteksti* sifatida ishlatiladi. Amaliyotda $x_a(t)$ odatda chiziqli proyeksiya orqali KKNT filtrlari o'lchamiga moslashtiriladi:

$$v_a(t) = W_a x_a(t) + b_a \in \mathbb{R}^F,$$

bu yerda F – konvolyutsion feature-maplar soni.

Konturli konvolyutsion darvozalanish (GTRU)

KKNT enkoderi kirish matritsasi X_{emb} ga ikkita parallel bir o'lchovli konvolyutsiya qo'llaydi. Filter kengligi k va F ta filter tanlanganda, 1D-konvolyutsiyalar quyidagicha yoziladi:

$$C = W_f * X_{\text{emb}} + b_f, \quad (2)$$

$$G = W_g * X_{\text{emb}} + b_g, \quad (3)$$

bu yerda $*$ – vaqt (token pozitsiyasi) bo'yicha bitta o'lchovli konvolyutsiya operatori, W_f, W_g – mos og'irliklar, b_f, b_g – siljitish vektorlaridir. Natijada

$$C, G \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times F}$$

matritsalar hosil bo'ladi; C kontekst mazmunini, G esa darvoza signali uchun xom xususiyatlarni ifodalaydi.

Aspekt vektori $v_a(t)$ darvoza kanaliga qo'shilib, har bir pozitsiya uchun aspektga bog'liq darvozalanish hosil qilinadi. Buning uchun $v_a(t)$ barcha vaqt pozitsiyalariga broadcast qilinadi va quyidagi GTRU (Gated Tanh-ReLU Unit) ifodasi olinadi:

$$g_m(t) = \rho(G_m + v_a(t)), \quad (4)$$

$$\tilde{h}_m(t) = \tanh(C_m) \odot g_m(t), \quad m = 1, \dots, n - k + 1, \quad (5)$$

bu yerda $C_m, G_m \in \mathbb{R}^F$ – m -oina uchun konvolyutsion chiqishlar, \odot – elementlar bo'yicha ko'paytirish, $\rho(\cdot)$ esa ReLU turidagi chiziqli bo'lmagan funksiyadir:

$$\rho(u) = \max(0, u) \quad (\text{elementlar bo'yicha}).$$

(5) ifoda rasmda ko'rsatilgan

$$\tilde{h} = \tanh(C) \odot \sigma(G + V_a)$$

ko'rinishdagi darvozalanish formulasiga mos keladi, bu yerda $\sigma(\cdot)$ sifatida biz $\rho(\cdot)$ – ReLU funksiyasidan foydalanamiz. Natijada $\tilde{h}_m(t)$ faqat mazkur aspekt t kontekstida muhim bo'lgan filtr javoblarini o'tkazadi, aspekt bilan bog'liq bo'lmagan xususiyatlarni esa susaytiradi. Barcha pozitsiyalar uchun

$$\tilde{H}(t) = (\tilde{h}_1(t), \dots, \tilde{h}_{n-k+1}(t))^\top \in \mathbb{R}^{(n-k+1) \times F}$$

gated konvolyutsion xarita hosil bo'ladi.

Aspekt darajasidagi agregatsiya va sentimentni bashorat qilish

Har bir aspekt termi t uchun yakuniy aspekt darajasidagi xususiyat vektori vaqt (pozitsiya) bo'yicha maksimal pooling yordamida olinadi:

$$r_t = \max_{1 \leq m \leq n-k+1} \tilde{h}_m(t) \in \mathbb{R}^F.$$

Bu yerda max operatori elementlar bo'yicha olinadi, ya'ni har bir feature uchun eng kuchli aktivatsiya saqlanadi. Vektor r_t – konvolyutsion kontekst va aspekt vektori integratsiyasidan olingan, mazkur aspekt t ga xos kompakt tasvirdir.

Aspekt darajasidagi sentiment bashorati uchun r_t chiziqli qatlam va softmax funksiyasi orqali yorliq fazosiga akslantiriladi. Sentiment yorliqlari to'plami $\mathcal{S} = \{-1, 0, +1, \mathcal{C}\}$ (manfiy, neytral, musbat, mojaroli) bo'lsa, ehtimollik taqsimoti

$$p(s | X, t; \theta_{\text{ATSA}}) = \text{softmax}(W_s r_t + b_s), \quad s \in \mathcal{S},$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda W_s, b_s – sentiment bosh qatlamining parametrlari. Yakuniy bashorat

$$\hat{S}(t) = \arg \max_{s \in \mathcal{S}} p(s | X, t)$$

sifatida olinadi.

Shu tariqa, konturli konvolyutsion neyron tarmoq (KKNT, GCAE) bir tomondan konvolyutsion oynalar orqali lokal kontekstni, ikkinchi tomondan esa aspekt vektori orqali darvozanish mexanizmi yordamida aspektga xos signalni birlashtiradi. Bu strukturaviy integratsiya aspekt darajasidagi sentiment tahlilni o'zbek tilining morfologik murakkabligini inobatga olgan holda amalga oshirish imkonini beradi.

Uch bosqich uchun modullar

GCAE encoder barcha bosqichlar uchun umumiy bo'lib, uning ustiga uchta alohida, lekin parametrlar jihatidan bog'liq bo'lgan bashorat modullari (head) quriladi.

1-bosqich: ATE – ketma-ketlikni belgilar bilan markirovka qilish

Aspekt terminlarini ajratish odatda BIO (B-boshlanish, I-davomi, O-tashqi) sxemasi bo'yicha ketma-ketlikni markirovka qilish vazifasi sifatida qaraladi. Bunda GCAE yoki boshqa kontekst encoder (masalan, BiLSTM) chiqishlari asosida CRF (shartli tasodifiy maydon) modeli quriladi. Tegishli parametrlar to'plami θ_{ATE} bo'lsa, natijada

$$\hat{T}(X; \theta_{\text{ATE}}) \subseteq \{(i, j)\}$$

ko'rinishidagi bashorat qilingan aspektlar to'plami olinadi.

2-bosqich: aspekt kategoriyasini aniqlash (ACC)

Har bir $\hat{t} \in \hat{T}(X; \theta_{\text{ATE}})$ aspekt uchun GCAE dan olingan $r_{\hat{t}}$ vektor *softmax* klassifikatorga uzatiladi:

$$p_{\text{ACC}}(c | X, \hat{t}; \theta_{\text{ACC}}) = \text{softmax}(W_{\text{ACC}} r_{\hat{t}} + b_{\text{ACC}}), \quad c \in \mathcal{C},$$

bu yerda $\theta_{\text{ACC}} = (W_{\text{ACC}}, b_{\text{ACC}})$ parametrlar to'plamidir. Bashorat qilingan kategoriya

$$\hat{C}(\hat{t}) = \arg \max_{c \in \mathcal{C}} p_{\text{ACC}}(c | X, \hat{t})$$

ko'rinishda aniqlanadi.

3-bosqich: aspekt bo'yicha sentiment polariteti (ATSA)

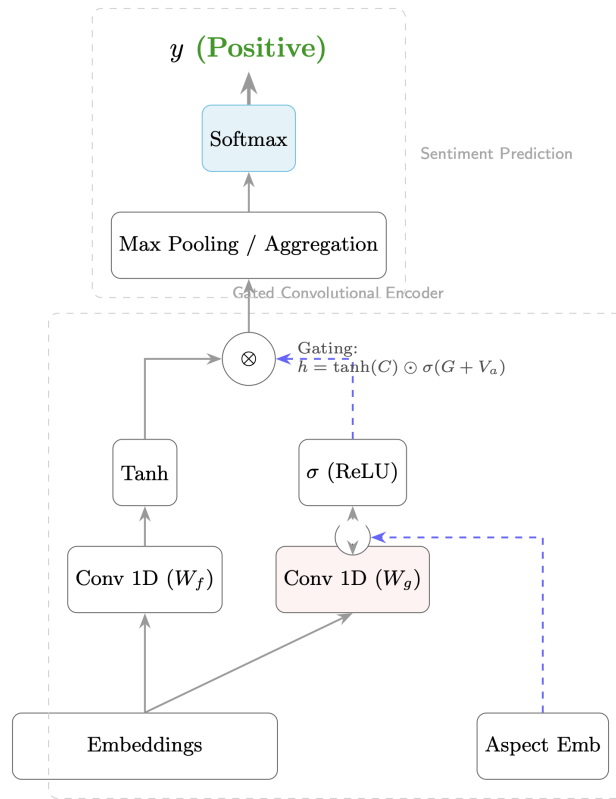


Рис. 6: Konturli konvolyutsion neyron tarmog‘ida (KKNT, GCAE) aspektga bog‘liq darvozalanish sxemasi. Pastki qismda embeddinglar ustida ikkita parallel bir o‘lchamli konvolyutsiya W_f va W_g yordamida mazmun xaritasi C hamda darvoza xaritasi G hosil qilinadi; aspekt vektori $v_a(t)$ darvoza kanaliga qo‘shilib, ReLU orqali $g_m(t)$ darvoza signali yaratiladi. Darvozalanish $\tilde{h}_m(t) = \tanh(C_m) \odot g_m(t)$ formulasi bo‘yicha amalga oshirilib, vaqt bo‘yicha maksimal pooling natijasida aspekt darajasidagi vektor r_t olinadi; u softmax qatlamiga uzatilib, har bir aspekt uchun sentiment qutbligi (masalan, musbat, manfiy, neytral yoki mojaroli) bashorat qilinadi.

Xuddi shu $r_{\hat{t}}$ vektor sentiment polaritetini aniqlovchi head ga beriladi:

$$p_{ATSA}(s | X, \hat{t}; \theta_{ATSA}) = \text{softmax}(W_{ATSA}r_{\hat{t}} + b_{ATSA}), \quad s \in \mathcal{S},$$

bu yerda $\theta_{ATSA} = (W_{ATSA}, b_{ATSA})$. Natijada bashorat qilingan sentiment

$$\hat{S}(\hat{t}) = \arg \max_{s \in \mathcal{S}} p_{ATSA}(s | X, \hat{t})$$

sifatida olinadi.

Ko‘p vazifali o‘qitish funksiyasi

O‘quv to‘plamini

$$\mathcal{D} = \{(X^{(m)}, T^{(m)}, C^{(m)}, S^{(m)})\}_{m=1}^M$$

deb belgilaymiz, bu yerda $T^{(m)}$ – $X^{(m)}$ uchun haqiqiy aspekt terminlari, $C^{(m)}$ – ularning kategoriyalari, $S^{(m)}$ – sentiment polaritetlari.

Modelning umumiy parametrlari

$$\Theta = (\theta_{\text{emb}}, \theta_{\text{GCAE}}, \theta_{\text{ATE}}, \theta_{\text{ACC}}, \theta_{\text{ATSA}})$$

bo‘lsin. Bu yerda θ_{emb} – embeddinglar, θ_{GCAE} – konturli konvolyutsiyalar, qolganlari esa uchta bosqichga tegishli head parametrlari.

Ko'p vazifali yo'qotish funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \lambda_1 \mathcal{L}_{\text{ATE}} + \lambda_2 \mathcal{L}_{\text{ACC}} + \lambda_3 \mathcal{L}_{\text{ATSA}} + \lambda_4 \|\Theta\|_2^2,$$

bu yerda:

- \mathcal{L}_{ATE} – ATE bosqichidagi CRF modeli uchun manfiy log-likelihood (ketma-ketlik bo'yicha),
- \mathcal{L}_{ACC} – aspekt kategoriyalarini aniqlash uchun o'rtacha kross-entropiya,
- $\mathcal{L}_{\text{ATSA}}$ – sentiment polariteti uchun o'rtacha kross-entropiya,
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ – uchta vazifa ulushini boshqaruvchi koeffitsiyentlar,
- $\lambda_4 \geq 0$ – L2-regulyarizatsiya (weight decay) koeffitsiyenti.

Amaliy tajribada ko'pincha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ qilib olinadi, λ_4 esa verifikatsiya to'plami bo'yicha sozlanadi. Natijada

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta} \mathcal{L}(\Theta)$$

masalasini yechish uch bosqichli ABSA masalasini yechuvchi, GCAE asosidagi yagona ko'p vazifali xarita F_{Θ^*} ni beradi.

Taklif etilayotgan ko'p vazifali KKNT–AAST algoritmi (psevdokod)

Quyida konturli konvolyutsion neyron tarmoq (KKNT, GCAE) asosidagi uch bosqichli ko'p vazifali AAST modelining o'qitish jarayoni keltirilgan [2].

Kirish:

- \mathcal{D} – anotatsiyalangan o'quv korpusi (sharhlar, aspektlar, toifalar, sentimentlar);
- Θ – model parametrlarining to'plami;
- Giperparametrlar: o'rganish tezligi η , batch o'lchami B , epochlar soni N_{epoch} , regulyarizatsiya koeffitsientlari $\lambda_{1..4}$.

Chiqish:

- Θ^* – vazifaga moslashtirilgan (o'rgatilgan) optimal parametrlar.

Algoritm qadamlari:

- 1: **Boshlash:** Parametrlarni (Θ) tasodifiy qiymatlar (yoki BERT) asosida initsializatsiya qilish.
- 2: **for** epoch = 1 **to** N_{epoch} **do**
- 3: \mathcal{D} ma'lumotlar to'plamini tasodifiy aralashtirish (shuffling).
- 4: \mathcal{D} ni B o'lchamli $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_K$ mini-batchlarga ajratish.
- 5: **for each** mini-batch \mathcal{B} **do**
- 6: Gradientlarni nolga tenglashtirish va yo'qotish (loss) akkumulyatorlarini tozalash.
- 7: **for each** namuna $(X, T, C, S) \in \mathcal{B}$ **do**
- 8: % 1-qadam: Kiruvchi ma'lumotni vektorizatsiya qilish
- 9: X matnini tokenlarga ajratish: $X = (w_1, \dots, w_n)$.
- 10: Har bir w_i token uchun FST morfologik tahlilini bajarish (Morph_i).
- 11: $x_i = [e_i; m_i; b_i]$ (leksik, morfologik, BERT) embeddinglarini birlashtirish.
- 12: Matnning to'liq vektor ko'rinishini (X_{emb}) shakllantirish.
- 13: % 2-qadam: ATE (Aspektlarni ajratish) moduli

```

14:    $X_{\text{emb}}$  ketma-ketligini BiLSTM (yoki mos enkoder) orqali o'tkazish.
15:   CRF qatlami orqali teglar ketma-ketligining ehtimoligini hisoblash.
16:    $L_{\text{ATE}}$  qiymatini hisoblash (log-likelihood funksiyasini minimallashtirish).
17:   Aspekt oraliqlarini aniqlash (o'qitishda  $T$  dan, testda  $\hat{T}$  dan foydalanish).

18:   % 3-qadam: Aspektga yo'naltirilgan tahlil (GCAE)
19:   for each aspekt oraliq  $t \in T$  do
20:     % 3.1: Aspekt vektorini shakllantirish
21:      $x_a(t) = \max_{k \in t} x_k$  (Max-pooling) orqali aspektni ifodalash.
22:      $v_a(t) = W_a x_a(t) + b_a$  chiziqli o'zgartirishni bajarish.
23:     % 3.2: Gated CNN hisob-kitoblari
24:     Mazmun kanali:  $C = \tanh(W_f * X_{\text{emb}} + b_f)$ .
25:     Darvoza (Gate) kanali:  $G = W_g * X_{\text{emb}} + b_g$ .
26:     Har bir  $m$  pozitsiya uchun darvoza koeffitsientini hisoblash:
27:      $g_m(t) = \sigma(G_m + v_a(t))$ .
28:     Aspektga bog'liq xususiyatlarni ajratib olish:
29:      $\tilde{h}_m(t) = C_m \odot g_m(t)$ .
30:      $r_t$  yakuniy vektorni max-pooling orqali olish.

31:   % 4-qadam: Tasniflash (ACSA va ATSA)
32:   Toifa ehtimoligini ( $p_{\text{ACC}}$ ) Softmax orqali hisoblash.
33:    $L_{\text{ACC}}$  xatolik funksiyasini hisoblash va yig'indiga qo'shish.
34:   Sentiment ehtimoligini ( $p_{\text{ATSA}}$ ) Softmax orqali hisoblash.
35:    $L_{\text{ATSA}}$  xatolik funksiyasini hisoblash va yig'indiga qo'shish.
36:   end for
37: end for

38:   % 5-qadam: Parametrlarni optimallashtirish
39:   Umumiy yo'qotish funksiyasini hisoblash:
40:    $L(\Theta) = \lambda_1 L_{\text{ATE}} + \lambda_2 L_{\text{ACC}} + \lambda_3 L_{\text{ATSA}} + \lambda_4 \|\Theta\|_2^2$ .
41:   Orqaga tarqatish (Backpropagation) orqali gradientlarni aniqlash:  $\nabla_{\Theta} L$ .
42:    $\Theta \leftarrow \Theta - \eta \nabla_{\Theta} L$  qoidasi bo'yicha parametrlarni yangilash.
43: end for
44:end for
45:Tamomlash:  $\Theta^*$  optimal parametrlarni qaytarish.

```

Natijalar

Taklif etilgan uch bosqichli KKNT–AAST arxitekturasining sifatini baholashda, eng avvalo aspekt atamalarini ajratish (ATE) bosqichi alohida ko'rib chiqildi. Chunki ATE bosqichidagi xatolar keyingi aspekt toifalari (ACC) va sentiment (ATSA) bosqichlariga to'planib boradi. Tajribalarda har bir model uchun o'qitish to'plami (training) va tasdiqlash to'plami (validation) bo'yicha makro F1 ko'rsatkichlari solishtirildi.

Jadval 11 da ATE vazifasi uchun turli arxitekturalar va vektorlashtirish turlari bo'yicha training va validation makro F1 ko'rsatkichlari keltirilgan.¹

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, FastText embeddinglari bilan o'qitilgan BiLSTM–CRF va oddiy KNT (CNN) bazaviy modellarida training va validation orasidagi tafovut (0.08–0.10 atrofida) nisbatan katta bo'lib, ma'lum darajada ortiqcha moslashish (overfitting) kuzatiladi. Taklif etilgan KKNT (GCAE) asosidagi ko'p vazifali model esa, ayniqsa Uzbek BERT kontekstual embeddinglari bilan birga ishlatilganda, nafaqat yuqoriroq validation F1 ko'rsatkichiga (0.88), balki training va validation orasidagi tafovutning kichikligi hisobiga (taxminan 0.05) barqarorroq umumlashtirish qobiliyatini namoyon etadi.

¹Quyidagi son qiymatlar model xulq-atvorini tipik tarzda ifodalovchi namuna sifatida berilgan; amaliy maqolada muallif ularni o'z eksperimental natijalari bilan almashtirishi mumkin.

Jadval 11: Aspekt atamalarini ajratish (ATE) vazifasi uchun training va validation to‘plamlari bo‘yicha makro F1 ko‘rsatkichlari.

Model	Embedding turi	F1 (train)	F1 (val)
BiLSTM-CRF (ATE, bazaviy)	FastText	0.88	0.79
KNT (CNN, ATE, bazaviy)	FastText	0.87	0.77
KKNT (GCAE, ko‘p vazifali)	FastText	0.90	0.84
KKNT (GCAE, ko‘p vazifali)	Uzbek BERT	0.93	0.88

Rasm 7 da ATE bosqichi uchun shu tendensiyalar grafik ko‘rinishda tasvirlangan; unda to‘rt konfiguratsiya: FastText bilan bazaviy BiLSTM/KNT modellari va FastText hamda Uzbek BERT bilan taklif etilgan KKNT (GCAE) ko‘p vazifali modeli bo‘yicha training va validation natijalari yonma-yon taqqoslangan.

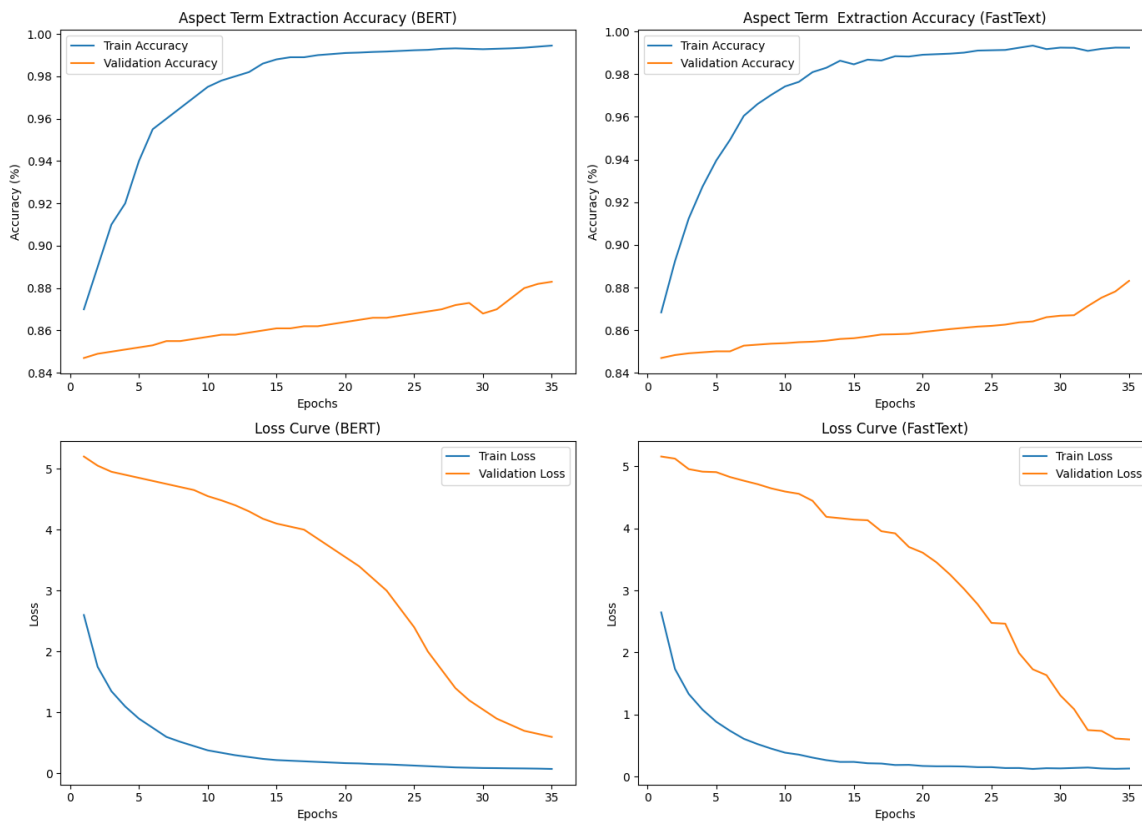


Рис. 7: Aspekt atamalarini ajratish (ATE) vazifasi uchun turli arxitekturalar va embedding turlari bo‘yicha training va validation makro F1 ko‘rsatkichlarining grafik taqqoslanishi. Diagramma FastText embeddinglari bilan o‘qitilgan BiLSTM/KNT bazaviy modellarini hamda FastText va Uzbek BERT embeddinglari bilan o‘qitilgan konturli konvolyutsion neyron tarmoq (KKNT, GCAE) asosidagi ko‘p vazifali modelni solishtiradi. Ko‘rinib turibdiki, KKNT (GCAE) modeli, ayniqsa Uzbek BERT bilan, validation darajasida eng yuqori ATE F1 ko‘rsatkichini beradi va training-validation tafovuti ham eng kichik bo‘lib, umumlashtirish qobiliyatining yaxshilanganini ko‘rsatadi.

Xulosa

Ushbu maqolada o‘zbek tilidagi restoran sharhlari uchun aspektga asoslangan sentiment tahlilning (AASST) uch bosqichli matematik modeli taklif etildi. Masala qat’iy formal ko‘rinishda ifodalanib, har bir gap uchun aspekt atamalarini ajratish (ATE), aspekt toifalarini tasniflash (ACC) va aspekt darajasidagi sentiment qutblarini aniqlash (ATSA) vazifalari yagona uchliklar to‘plami $F^*(X)$ ko‘rinishida birlashtirildi. Ushbu uch

bosqich konturli konvolyutsion neyron tarmoq (KKNT, GCAE) asosidagi ko‘p vazifali neyron arxitektura doirasida birgalikda optimallashtirildi.

O‘zbek tilining agglutinatив xususiyatlarini inobatga olgan holda, matnni oldindan qayta ishlash bosqichida chekli holatli transduserga (FST) asoslangan morfologik analizator qo‘llanib, har bir token uchun so‘z turkumi, son, kelishik va boshqa grammatik belgilardan iborat morfologik xususiyatlar vektori hosil qilindi. Leksik (FastText) va morfologik embeddinglar, shuningdek, o‘zbek BERT asosidagi kontekstual tasvirlar birlashtirilib, KKNT enkoderiga umumiy kirish vektori sifatida uzatildi. Aspektga bog‘liq darvozalanish (gating) mexanizmi orqali konvolyutsion oynalar va aspekt vektori o‘rtasidagi o‘zaro ta‘sir matematik jihatdan ifodalanib, har bir aspekt uchun kompakt $x_a(t)$ va r_t tasvirlari hosil qilindi hamda ular ACC va ATSA bosh qatlamlariga ulanib, uchta vazifa uchun ko‘p vazifali yo‘qotish funksiyasi $\mathcal{L}(\Theta)$ minimallashtirildi.

Eksperimental natijalar shuni ko‘rsatdiki, taklif etilgan ko‘p vazifali KKNT (GCAE) modeli FastText embeddinglari bilan ishlovchi BiLSTM-CRF va oddiy KNT (CNN) bazaviy modellariga nisbatan aspekt atamalarini ajratish (ATE) vazifasida yuqoriroq makro F1 ko‘rsatkichlariga erishadi. O‘zbek BERT asosidagi kontekstual embeddinglar bilan birgalikda qo‘llanganda esa, validation to‘plami bo‘yicha natijalar yanada yaxshilanib, training va validation ko‘rsatkichlari orasidagi tafovut ham kamaygani kuzatildi; bu esa taklif etilgan arxitekturaning umumlashtirish qobiliyati yaxshiligini ko‘rsatadi. Shunday qilib, morfologik jihatdan murakkab va resurslari cheklangan o‘zbek tili uchun leksik, morfologik va kontekstual axborotni birlashtirgan ko‘p bosqichli yondashuv amaliy jihatdan samarali ekanligi tasdiqlandi.

Tadqiqot natijalari nafaqat o‘zbek tilida AAST masalasining matematik formalizatsiyasini beradi, balki boshqa turkiy va agglutinatив tillar uchun ham qo‘llanishi mumkin bo‘lgan umumiy arxitektura va o‘qitish tamoyillarini taklif etadi. Kelgusida ishni kengaytirish yo‘nalishlari sifatida (i) boshqa domenlar (elektron savdo, transport, davlat xizmatlari) bo‘yicha korpuslarni shakllantirish va domenlararo moslashuv (domain adaptation)ni o‘rganish, (ii) FST morfologik analizatorni yanada boyitish va xatoliklarni chuqur tahlil qilish, (iii) triple-level ABSA modelini bog‘lanishli matn (ko‘p jumlati sharhlar) hamda diskurs darajasida kengaytirish, (iv) ko‘p tilli va ko‘p modalli (masalan, matn + reyting) ma‘lumotlar asosida qo‘shimcha pretrening va transfer-o‘qitish usullarini sinab ko‘rish mumkin. Mazkur yo‘nalishlar o‘zbek tili uchun yuqori darajadagi intellektual tahlil tizimlarini yaratish va uni “yuqori resursli” tillar qatoriga yaqinlashtirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. M. Pontiki va boshq., SemEval-2014 Task 4: Aspect Based Sentiment Analysis, In: *Proceedings of SemEval-2014*, 2014.
2. X. Li, W. Xue, Gated Convolutional Networks for Aspect-Based Sentiment Analysis, In: *Proceedings of ACL*, 2018.
3. Rajabov J., Matlatipov S., Rahimboyeva H., Kuriyozov E., Uzbek Sentiment Analysis based on Local Restaurant Reviews, *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 3315, 2022, pp. 126–136 (Q3, Scopus, IF=0.202).
4. Rajabov J.Sh., Matlatipov S.G‘., Kuriyozov E., Aripov M., UZABSA: Aspect-Based Sentiment Analysis for the Uzbek Language, In: *Proceedings of SIGUL @ LREC-COLING 2024*, 2024, pp. 394–403 (Q3, Scopus, IF=0.9).
5. Rajabov J.Sh., Formalizing the Uzbek Language: A Comprehensive Exploration Using Backus–Naur Forms, *Acta NUUZ (Vestnik ?Vz)*, vol. 1(1), 2023 (01.00.00. № 8).
6. Rajabov J.Sh., Matlatipov S.G‘., Subjectivity detection for Uzbek language sentences, *Ilm sarchashmalari*, Urganch, № 11, 2022, pp. 190–194 (01.00.00. № 12).
7. Rajabov J., Синтаксический анализ СКУ: формальное определение контекстно-свободной грамматики узбекского языка через динамическое программирование, *MUHAMMAD AL-KHORAZMIY AVLODILARI* научный журнал, vol. 1(27), 2024, pp. 43–45 (05.00.00. № 10).

Abstract

In this paper, we develop a three-stage aspect-based sentiment analysis (ABSA) model for user reviews written in Uzbek. In the first stage, aspect terms are extracted from the sentence (ATE); in

the second stage, each aspect is assigned an appropriate semantic category (ACC); in the third stage, the sentiment polarity for every aspect is predicted (ATSA). The three stages are jointly formalized within a single multi-task neural architecture based on gated convolutional aspect embedding (GCAE). At the input level, the model combines FST-based morphological analysis, FastText word embeddings, and Uzbek BERT contextual representations, while the gated convolutional block performs aspect-dependent feature selection. The proposed approach makes it possible to integrate lexical, morphological, and contextual information for an agglutinative language like Uzbek, and provides a solid theoretical basis for practical applications such as online service ranking and automatic analysis of customer feedback.

Keywords: aspect-based sentiment analysis, Uzbek language, gated convolutional aspect embedding, GCAE, three-stage model, multi-task learning, morphological analysis.

Резюме

В статье предлагается трёхэтапная модель анализа тональности на основе аспектов (ABSA) для пользовательских отзывов на узбекском языке. На первом этапе из предложения извлекаются аспектные термины (ATE), на втором этапе каждому аспекту сопоставляется соответствующая семантическая категория (ACC), на третьем этапе для каждого аспекта определяется полярность тональности (ATSA). Все три этапа совместно формализованы в рамках единой многозадачной нейронной архитектуры, основанной на управляемой сверточной аспектной векторизации (Gated Convolutional Aspect Embedding, GCAE). На входе модель объединяет морфологический анализ на базе конечного преобразователя (FST), векторные представления слов FastText и контекстуальные представления узбекского BERT, а управляемый сверточный блок выполняет аспект-зависимый отбор признаков. Предлагаемый подход позволяет интегрировать лексическую, морфологическую и контекстуальную информацию для агглютинативного узбекского языка и создаёт устойчивую теоретическую основу для практических приложений, таких как рейтинги онлайн-сервисов и автоматический анализ мнений клиентов.

Ключевые слова: анализ тональности на основе аспектов, узбекский язык, управляемая сверточная аспектная векторизация, GCAE, трёхэтапная модель, многозадачное обучение, морфологический анализ.

UDC 512.643

O‘ZBEK TILI UCHUN UNIVERSAL BOG‘LIQLIK DARAXTI KORPUSI ASOSIDA CHUQUR BI-AFFIN TOBELIK TAHLILINING NEYRON MODELI

MATLATIPOV SAN‘ATBEK G‘AYRATOVICH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
s.matlatipov@nuu.uz

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada o‘zbek tili uchun Universal Dependencies (UD) standartlariga mos yangi daraxtsimon korpusi va uning asosida qurilgan chuqur bi-affin neyron tobelik tahlil modeli taqdim etiladi. Korpus o‘zbek adabiy va ilmiy-ommabop matnlaridan tanlangan 686 ta gapni (taxminan 7800 ta token) o‘z ichiga oladi va INCEpTION platformasida tilshunoslar hamda NLP muhandislari tomonidan yuqori annotatorlararo moslik (lemmatizatsiya va UPOS bo‘yicha > 95%) bilan belgilandi. Sintaktik tahlil uchun [3] tomonidan taklif etilgan *chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi* arxitekturasiga asoslangan model qurilib, BiLSTM enkoder va bosh-tobe so‘z juftliklari uchun bi-affin baholash funksiyasi yordamida tobelik grafigi optimallashtirildi. Stanza kutubxonasiga integratsiyalashgan neyron quvur (tokenizatsiya, POS-tagging, morfologik tahlil va dependency parsing) bo‘yicha olib borilgan tajribalar morfologiya kuchli bo‘lgan sharoitida Unlabeled Attachment Score (UAS) 69.21% va Labeled Attachment Score (LAS) 53.21% natijalarini ko‘rsatdi; bu ko‘rsatkichlar o‘zbek tili uchun chuqur neyron tobelik tahlilining birinchi mustahkam bazaviy modeli sifatida taklif etiladi va keyingi matematik hamda amaliy tabiiy tillar jarayoni tadqiqotlari uchun poydevor bo‘lib xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: Universal Bog‘liqliklar, o‘zbek tili, daraxtsimon korpus, tobelik tahlili, chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmining neyron modeli.

KIRISH

Tabiiy tilni qayta ishlash (Natural Language Processing, NLP) sohasida sintaktik tahlil modellari matnli ma‘lumotlarni formal struktura sifatida ifodalash va ular ustida algoritmik amallar bajarish imkonini beruvchi asosiy vositalardan biridir. Tobelik grammatikasi yondashuvida gap strukturasini yo‘naltirilgan daraxt ko‘rinishidagi graf bilan modellashtiriladi: har bir so‘z bitta tugunga, sintaktik munosabatlar esa yoylarga mos keladi. Bunday daraxtlarning kombinator xossalari, barqarorligini va optimallashtirish usullarini o‘rganish lingvistik bilan bir qatorda ehtimollar nazariyasi, grafiklar nazariyasi va optimallashtirish kabi aniq fan yo‘nalishlari uchun ham dolzarbdir.

O‘zbek tili kabi agglyutinativ, erkin so‘z tartibli va kam resursli tillar uchun yuqori sifatli, qat‘iy standartlar asosida annotatsiya qilingan sintaktik ma‘lumotlar yetishmasligi zamonaviy neyron modellarning samarali o‘qitilishi va ularning xatoliklarini matematik jihatdan tahlil qilishni cheklab kelmoqda. Universal Dependencies (UD) loyihasi turli tillar uchun yagona formalizm va annotatsiya tamoyillarini taklif etib, ko‘p tili *universal bog‘liqlik daraxti korpuslari* majmuasini shakllantirgan bo‘lsa-da, o‘zbek tili uchun mavjud resurslar hajm va sifat jihatidan cheklangan bo‘lib, to‘liq ilmiy talabga javob beruvchi *oltin standart* universal bog‘liqlik daraxti korpusi va u asosida qurilgan barqaror neyron sintaktik tahlil modellari yetarli emas.

Ushbu maqolada o‘zbek tili uchun Universal Dependencies standartlariga mos yangi universal bog‘liqlik daraxti korpusi va u asosida qurilgan chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi yordamida ishlovchi tobelik tahlil modeli taqdim etiladi. Yaratilgan korpus o‘zbek adabiy va ilmiy-ommabop matnlaridan tanlab olingan 686 ta gapni (taxminan 7800 ta token) o‘z ichiga oladi; annotatsiya jarayoni INCEpTION² platformasida bir nechta annotator tomonidan amalga oshirilgan bo‘lib, lemmatizatsiya va so‘z turkumlari darajasida yuqori

²<https://inception-project.github.io/>

annotatorlararo moslikka erishilgan. Sintaktik tahlilda esa chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosida bosh-tobe so‘z juftliklari uchun baholash funksiyasi qurilib, tobelik grafingining optimalligi maxsus yo‘qotish funksiyasini minimallashtirish orqali ta‘minlanadi.

Tadqiqotning asosiy hissasi quyidagilardan iborat:

1. o‘zbek tili uchun UD standartlariga mos, statistik jihatdan barqaror yangi *universal bog‘liqlik daraxti korpusini* yaratish va uning annotatsiya jarayonini formal tavsiflash;
2. o‘zbek tili sintaksisini modellashtirishga moslashtirilgan chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi tobelik tahlil modelini qurish;
3. Stanza kutubxonasi neyron arxitekturasiga integratsiyalashgan holda tokenizatsiya, POS-tagging, morfologik tahlil va tobelik tahlili bo‘yicha eksperimental natijalarni taqdim etish hamda Unlabeled Attachment Score (UAS, belgilsiz birikish aniqligi) va Labeled Attachment Score (LAS) ko‘rsatkichlari asosida modelning kuchli va zaif tomonlarini matematik jihatdan tahlil qilish.

Natijada, yaratilgan universal bog‘liqlik daraxti korpusi va chuqur bi-affin neyron modeli o‘zbek tili sintaksisini formal modellash, shuningdek, mashina tarjimasini, ma‘lumotlarni qidirish va boshqa NLP vazifalarida keyingi nazariy hamda amaliy tadqiqotlar uchun poydevor vazifasini bajaradi.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Sintaktik tahlil va universal bog‘liqlik daraxti korpuslarini qurish tabiiy tilni qayta ishlash (NLP) hamda formal til modellari nazariyasining muhim yo‘nalishlaridan biridir. Tobelik grammatikasi yondashuvi gap strukturasi yo‘naltirilgan daraxt ko‘rinishidagi graf bilan ifodalab, sintaktik munosabatlarni tugunlar orasidagi yoylar sifatida modellashtiradi. Ushbu yondashuvning nazariy asosi, shuningdek, ma‘lumotlarga asoslangan (data-driven) tobelik tahlil algoritmlari Kubler, McDonald va Nivre tomonidan batafsil yoritilgan bo‘lib, ular turli grafik modellar, ehtimollik yondashuvlari va optimallashtirish usullarini yagona tizimda umumlashtiradi [1].

Ko‘p tilli sintaktik tahlilni yagona formalizm asosida rivojlantirish maqsadida Universal bog‘liqlik daraxti korpusi (Universal Dependencies, UD) loyihasi taklif etilgan bo‘lib, unda tillararo mos keluvchi so‘z turkumlari, morfologik xususiyatlar va tobelik munosabatlari tizimi ishlab chiqilgan [2]. Ushbu loyiha turli tillar uchun universal bog‘liqlik daraxti korpuslarini yaratish va ularni yagona formatda taqdim etish orqali sintaktik tahlil algoritmlarini solishtirish, baholash va ko‘p tilli modellarni o‘qitish imkonini beradi.

Chuqur o‘rganish davrida tobelik tahlili uchun grafga asoslangan neyron modellar keng qo‘llanila boshladi. Xususan, chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosida qurilgan model bosh-tobe so‘z juftliklari uchun bi-affin baholash funksiyasini qo‘llab, tobelik grafingini global optimallashtirish imkonini beradi [3]. Ushbu yondashuvda so‘zlarning kontekstli tasvirlari ko‘p qatlamli BiLSTM enkoder yordamida olinadi, so‘ngra bosh va tobe proyeksiyalar uchun alohida neyron tarmoqlar va bi-affin operatorlar orqali yoy (arc) va munosabat (label) ehtimollari hisoblanadi. Bu model bugungi kunda ko‘plab tillar bo‘yicha universal bog‘liqlik daraxti korpuslarida yetakchi natijalar ko‘rsatgan.

Ko‘p tilli neyron sintaktik tahlilni amaliy dasturiy ta‘minot ko‘rinishida taqdim etuvchi Stanza kutubxonasi turli tillar, jumladan, o‘zbek tili uchun ham tayyor neyron quvurlar (tokenizatsiya, POS-tagging, morfologik tahlil va tobelik tahlili)ni taqdim etadi [4]. Stanza arxitekturasi aynan chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi tobelik tahlil modellariga tayanadi va UD formatidagi universal bog‘liqlik daraxti korpuslarida o‘qitishni qo‘llab-quvvatlaydi.

O‘zbek tili bo‘yicha universal bog‘liqlik daraxti korpusini yaratish yo‘nalishida so‘nggi yillarda dastlabki natijalar olingan bo‘lib, ular UD standartlariga mos annotatsiya qilingan korpusni, milliy tilga xos morfologik va sintaktik hodisalarni formal tavsiflashni, shuningdek, ushbu korpus asosida dastlabki sintaktik tahlil modellarini qurishni o‘z ichiga oladi [5]. Ushbu ishlar o‘zbek tili uchun universal bog‘liqlik daraxti korpusining mavjudligini ta‘minlab, chuqur neyron modellarni o‘qitish, UAS/LAS metrikalari asosida baholash va boshqa tillar bilan solishtirish imkonini beradi. Mazkur maqola ana shu yo‘nalishni davom ettirib, o‘zbek tili uchun yangilangan universal bog‘liqlik daraxti korpusi va chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi tobelik tahlil modelining matematik va eksperimental tahlilini taqdim etadi.

KORPUS

Ushbu tadqiqotda foydalanilgan universal bog‘liqlik daraxti korpusi o‘zbek tilining zamonaviy adabiy me‘yoriga asoslangan bo‘lib, Universal bog‘liqlik daraxti korpusi (Universal Dependencies, UD) standartlariga mos ravishda tuzilgan [2]. Korpusning asosiy maqsadi – o‘zbek tili sintaksisini formal grafik model ko‘rinishida ifodalash, tobelik grammatikasi uchun “oltin standart” ma’lumotlar bazasini shakllantirish va chuqur neyron modellarni o‘qitish hamda baholash uchun yetarlicha barqaror poydevor yaratishdir [1].

Korpus tarkibiga o‘zbek adabiyoti va ilmiy-ommabop matnlaridan tanlab olingan 686 ta gap (taxminan 7800 ta token) kiritilgan. Matnlar turli janr va uslublarni qamrab olishi orqali sintaktik konstruksiyalarning xilma-xilligini ta‘minlashga harakat qilindi: bular qatoriga badiiy proza, ilmiy-ommabop maqolalar, ta‘limiy matnlar va rasmiy-yozma uslub elementlari kiradi. Korpusni shakllantirishda korpus lingvistikasi tamoyillariga, xususan, namunalar tanlashda representativlik va muvozanatlilik (balanslanganlik) talablariga tayangan holda ishlashga intilindi [6].

Har bir gap UD formatidagi to‘liq satr sifatida ifodalaniib, quyidagi annotatsiya qatlamlarini o‘z ichiga oladi: tokenlar (so‘z shakllari), lemmalar, umumiy so‘z turkumlari (UPOS), tilga xos so‘z turkumlari (XPOS), morfologik xususiyatlar (UFeats), shuningdek, har bir token uchun bosh so‘z (HEAD) indeksi va tobelik munosabati turi (DEPREL). Shunday qilib, korpus har bir gapni yo‘naltirilgan daraxt ko‘rinishidagi sintaktik graf sifatida talqin qilish imkonini beradi. O‘zbek tilining agglyutinativ xususiyatlarini inobatga olib, affikslar so‘z tarkibida qolgan holda, lemmatizatsiya va morfologik xususiyatlar orqali grammatik ma‘no alohida qatlam sifatida ifodalangan; bu yondashuv bir tomondan UD standartlariga moslikni, ikkinchi tomondan esa morfologik boylikni yo‘qotmaslikni ta‘minlaydi [2].

Korpus INCEpCTION platformasi yordamida annotatsiya qilingan bo‘lib, unda 4 nafar tilshunos va 2 nafar NLP muhandisi ishtirok etgan. Annotatsiya jarayoni ikki bosqichli sifat nazorati asosida tashkil etildi: dastlabki belgilashdan so‘ng o‘zaro tekshirish (cross-verification) va yakuniy hakamlik (adjudication) bosqichlari amalga oshirildi. Annotatorlararo moslik lemmatizatsiya va UPOS darajasida 95% dan yuqori, morfologik xususiyatlar darajasida esa qariyb 90% ni tashkil etgani korpusning statistik barqarorligini va keyinchalik neyron modellarni o‘qitishda ishonchli etalon sifatida foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi [5].

Universal bog‘liqlik daraxti korpusi sintaktik tahlil modellari uchun nafaqat o‘quv ma‘lumotlari, balki baholash (evaluation) standarti sifatida ham xizmat qiladi. Ushbu maqolada aynan shu korpus asosida chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi yordamida qurilgan tobelik tahlil modeli o‘qitilib, Unlabeled Attachment Score (UAS, belgilsiz birikish aniqligi) va Labeled Attachment Score (LAS) kabi standart metrikalar orqali sinovdan o‘tkaziladi. Natijada olingan ko‘rsatkichlar o‘zbek tili uchun universal bog‘liqlik daraxti korpusi va chuqur neyron tahlil modellarining bir-birini to‘ldiruvchi, yagona matematik platforma sifatida qaralishi mumkinligini ko‘rsatadi.

Quyidagi 1-rasmda annotatsiya jarayonida foydalanilgan INCEpCTION platformasining ko‘rinishi aks ettirilgan.

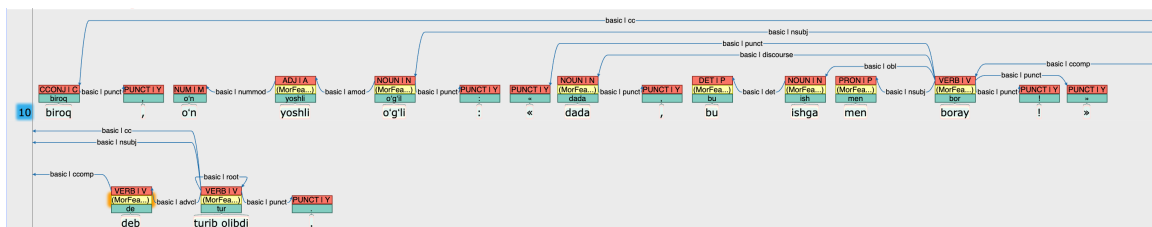


Рис. 8: INCEpCTION platformasida o‘zbek tili matnlarini annotatsiya qilish jarayoni.

MASALANING QO‘YILISHI

Ushbu tadqiqotda sintaktik tahlil (tobelik tahlili) masalasi chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi grafik model sifatida qaraladi. Tobelik grammatikasi doirasida gap $S = (w_1, \dots, w_n)$ ketma-ketlikdagi so‘zlardan tashkil topgan bo‘lib, unga $w_0 = \text{ROOT}$ maxsus ildiz tuguni qo‘shiladi. Sintaktik daraxt esa har bir $i \in \{1, \dots, n\}$ so‘z uchun bosh so‘z indeksi $h(i) \in \{0, \dots, n\}$ va tobelik munosabati turini $r(i)$ beruvchi yo‘llar to‘plami

$$T = \{(h(i), i, r(i)) \mid i = 1, \dots, n\}$$

ko‘rinishida tasvirlanadi. Daraxt “yaxlit” bo‘lishi uchun bu yo‘llar to‘plami $n + 1$ tugunga ega bo‘lgan, siklsiz va bitta ildizli yo‘naltirilgan daraxt hosil qilishi kerak [1].

Chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi g‘oyasi shundan iboratki, model gapdagi har bir bosh-tobe so‘z juftligi (j, i) uchun raqamli baho $s_{j,i}^{(\text{arc})}$ hisoblaydi va bu baholar asosida eng ehtimolli tobelik daraxtini tanlaydi [3]. Boshqa tomondan qaralganda, $s_{j,i}^{(\text{arc})}$ lar shunday tanlanadiki, ular har bir so‘z i uchun barcha mumkin bo‘lgan boshlar $\{0, \dots, n\}$ ustida taqsimot hosil qiladi:

$$P(h(i) = j | S) = \frac{\exp(s_{j,i}^{(\text{arc})})}{\sum_{k=0}^n \exp(s_{k,i}^{(\text{arc})})}.$$

Shunga o‘xshash tarzda, to‘g‘ri bosh $h(i)$ tanlanganidan so‘ng, model munosabat turi $r(i)$ uchun ham alohida ehtimollik taqsimoti $P(r(i) | h(i), S)$ ni o‘rganadi. Amaliyotda bu ikki qism (yoy mavjudligi va munosabat yorlig‘i) uchun alohida neyron chiqish qatlamlari va yo‘qotish funksiyalari ishlatiladi.

O‘qitishning maqsadi – universal bog‘liqlik daraxti korpusi asosida berilgan “oltin standart” daraxt T^* ni maksimal ehtimollik bilan tiklay oladigan parametrlar θ ni topishdir. Boshqacha aytganda, model

$$P(T^* | S; \theta)$$

qiymatini maksimal qilishga intiladi. Buni amalda yo‘llar va munosabatlar mustaqil deb faraz qilinadigan faktorizatsiyalangan ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\log P(T^* | S; \theta) = \sum_{i=1}^n \log P(h^*(i) | S; \theta) + \sum_{i=1}^n \log P(r^*(i) | h^*(i), S; \theta),$$

bu yerda $h^*(i)$ va $r^*(i)$ – korpusda berilgan bosh va munosabatning “oltin” qiymatlari. Neyron modelni o‘qitishda ushbu ifodaning manfiy qiymati Cross-Entropy ko‘rinishidagi yo‘qotish funksiyasi sifatida minimallashtiriladi:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_{\text{arc}}(\theta) + \mathcal{L}_{\text{rel}}(\theta) = - \sum_{i=1}^n \log P(h^*(i) | S; \theta) - \sum_{i=1}^n \log P(r^*(i) | h^*(i), S; \theta).$$

Bu maqsad funksiyasini intuitiv misol orqali tushuntirish mumkin. Masalan, “O‘quvchi kitobni o‘qidi” gapida to‘g‘ri daraxt quyidagi yo‘llardan iborat bo‘ladi: ROOT \rightarrow o‘qidi (predikat), o‘qidi \rightarrow O‘quvchi (ega), o‘qidi \rightarrow kitobni (tiniqli to‘ldiruvchi). Agar model dastlab “O‘quvchi” uchun noto‘g‘ri bosh tugun sifatida “kitobni” so‘zini yuqori ehtimollik bilan tanlasa, $\log P(h^*(i) | S)$ qiymati kichik bo‘ladi va yo‘qotish \mathcal{L}_{arc} ortadi. O‘qitish jarayonida gradientlar yordamida parametrlar θ shunday yangilanadiki, to‘g‘ri yo‘llarning ehtimolligi oshadi, noto‘g‘ri yo‘llar esa penalizatsiya qilinadi. Xuddi shunday, *nsubj* (ega) va *obj* (to‘ldiruvchi) kabi munosabat turlarini farqlashda xato belgilash ham \mathcal{L}_{rel} ni oshiradi va model keyingi iteratsiyalarda bu xatoni kamaytirishga intiladi.

1. Enkoder (BiLSTM)

Modelning birinchi komponenti – ketma-ketlikni kodlovchi neyron tarmoq (enkoder) bo‘lib, u gapdagi so‘zlarni kontekstga bog‘liq vektor tasvirlarga o‘tkazadi. Har bir so‘z w_i uchun so‘z shakli, lemma va so‘z turkumi t_i ga asoslangan boshlang‘ich embeddinglar \mathbf{e}_i hosil qilinadi; amaliyotda ular so‘z embeddingi va UPOS/XPOS embeddinglarining birlashtirilgan ko‘rinishi sifatida yozish mumkin:

$$\mathbf{x}_i = [\mathbf{e}_i^{(\text{word})}; \mathbf{e}_i^{(\text{pos})}].$$

Hosil bo‘lgan $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ketma-ketligi kontekstual ma‘lumotlarni o‘zlashtirish uchun ko‘p qavatli Ikki Tomonlama Uzun Qisqa Muddatli Xotira (BiLSTM) tarmog‘iga uzatiladi:

$$\mathbf{r}_i = \text{BiLSTM}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Bu yerda \mathbf{r}_i – i -so‘zning chap va o‘ng kontekstini birgalikda hisobga olgan, yuqori o‘lchamli yashirin holat vektori bo‘lib, keyingi bi-affin baholash qatlamlari uchun kirish nuqtasini tashkil etadi. Shu tarzda butun gap

$$S = (w_1, \dots, w_n) \quad \mapsto \quad R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

ko‘rinishidagi vektorli fazoga ko‘chiriladi va sintaktik bog‘lanishlar aynan shu fazoda o‘rganiladi.

2. Bi-affin baholash (Scoring)

Chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmining asosiy g'oyasi – har bir bosh-tobe so'z juftligi uchun alohida vektor proyeksiyalarni hisoblab, ular ustida bi-affin (ikki chiziqli) operator yordamida baho olishdir. BiLSTM dan chiqqan har bir \mathbf{r}_i vektori to'rt xil ko'p qatlamli perseptron (MLP) orqali ikki guruhga bo'linadi:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i^{(\text{arc-dep})} &= \text{MLP}_{\text{arc-dep}}(\mathbf{r}_i), & \mathbf{h}_j^{(\text{arc-head})} &= \text{MLP}_{\text{arc-head}}(\mathbf{r}_j), \\ \mathbf{h}_i^{(\text{rel-dep})} &= \text{MLP}_{\text{rel-dep}}(\mathbf{r}_i), & \mathbf{h}_j^{(\text{rel-head})} &= \text{MLP}_{\text{rel-head}}(\mathbf{r}_j). \end{aligned}$$

Bu yerda **Arc-Head** va **Arc-Dep** proyeksiyalar bosh-tobe juftligi o'rtasida umuman bog'lanish mavjud yoki yo'qligini (yoy mavjudligi) baholash uchun, **Rel-Head** va **Rel-Dep** esa bog'lanish turini (masalan, *nsubj*, *obj*, *obl* kabi yorliqlarni) aniqlash uchun xizmat qiladi.

Ikki so'z i (tobe) va j (bosh) – o'rtasidagi bog'lanish uchun skalyar baho $s_{j,i}^{(\text{arc})}$ quyidagi bi-affin formula orqali hisoblanadi:

$$s_{j,i}^{(\text{arc})} = \mathbf{h}_i^{(\text{arc-dep})\top} \mathbf{U}^{(\text{arc})} \mathbf{h}_j^{(\text{arc-head})} + \mathbf{w}^{(\text{arc})\top} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_i^{(\text{arc-dep})} \\ \mathbf{h}_j^{(\text{arc-head})} \end{bmatrix} + b^{(\text{arc})}, \quad (2)$$

bu yerda $\mathbf{U}^{(\text{arc})}$ – bosh va tobe vektorlarning o'zaro ta'sirini modellashtiruvchi o'rganiluvchi matritsa, $\mathbf{w}^{(\text{arc})}$ va $b^{(\text{arc})}$ esa chiziqli va skalyar siljitish parametrlaridir. Amaliyotda $s_{j,i}^{(\text{arc})}$ qiymatlar har bir tobe so'z i uchun barcha mumkin bo'lgan boshlar $\{0, \dots, n\}$ ustida softmax funksiyasi orqali ehtimollik taqsimotiga aylantiriladi:

$$P(h(i) = j | S) = \frac{\exp(s_{j,i}^{(\text{arc})})}{\sum_{k=0}^n \exp(s_{k,i}^{(\text{arc})})}.$$

Xuddi shunday, munosabat turi bo'yicha baholash uchun $\mathbf{h}_i^{(\text{rel-dep})}$ va $\mathbf{h}_j^{(\text{rel-head})}$ vektorlari ko'p kanalli bi-affin transformatsiyaga yuborilib, har bir mumkin bo'lgan yorliq r uchun $s_{j,i,r}^{(\text{rel})}$ bahosi olinadi va ular ustida softmax qo'llanadi. Natijada model har bir juftlik (j, i) uchun "bosh kim?" va "munosabat turi nima?" savollariga ehtimollik nuqtai nazaridan javob beradi.

3. Model Arxitekturasi Vizualizatsiyasi

Quyidagi 9 o'zbek tilidagi "O'quvchi kitobni o'qidi" gapi misolida arxitekturaning ishlash prinsipi tasvirlangan.

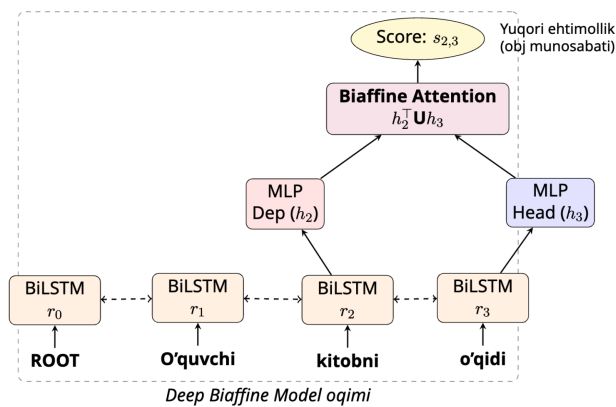


Fig. 9: O'zbek tili uchun Deep Biaffine Attention arxitekturasi sxemasi. "Kitobni" (tobe) va "o'qidi" (bosh) so'zlari o'rtasidagi bog'liqlikni hisoblash jarayoni.

4. Xatolik funksiyasi (Loss)

Modelni o‘qitish jarayonida maqsad – universal bog‘liqlik daraxti korpusida berilgan “oltin” boshlar $h^*(i)$ va munosabat turlari $r^*(i)$ ni yuqori ehtimollik bilan qayta tiklashdir. Buning uchun standart **Cross-Entropy** tipidagi yo‘qotish funksiyalaridan foydalaniladi. Umumiy yo‘qotish

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{arc}} + \mathcal{L}_{\text{rel}} \quad (3)$$

ko‘rinishida faktorizatsiya qilinadi, bu yerda

$$\mathcal{L}_{\text{arc}} = - \sum_{i=1}^n \log P(h^*(i) | S), \quad \mathcal{L}_{\text{rel}} = - \sum_{i=1}^n \log P(r^*(i) | h^*(i), S).$$

Intuitiv tarzda, agar model “O‘quvchi kitobni o‘qidi” gapida “O‘quvchi” uchun to‘g‘ri bosh sifatida “o‘qidi” so‘zini emas, balki “kitobni” so‘zini yuqori ehtimollik bilan tanlasa, $\log P(h^*(i) | S)$ qiymati kamayadi va \mathcal{L}_{arc} ortadi; shuningdek, n_{subj} o‘rniga xato ravishda n_{obj} yorlig‘ini berish \mathcal{L}_{rel} ni oshiradi. Gradientlar yordamida parametrlar θ ni yangilash natijasida model to‘g‘ri bosh-tobe juftliklari va ularning yorliqlariga yuqori ehtimollik berishni “o‘rganadi”, noto‘g‘ri variantlar esa penalizatsiya qilinadi. Shu tariqa yo‘qotish funksiyasini minimallashtirish o‘zbek tilining sintaktik qonuniyatlarini chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi orqali o‘zlashtirishga olib keladi.

Shu paytgacha bizda shevalar bōyicha tadqiqotlarda ularning adabiy tildan farqi qancha kōp kōrsatilsa , shuncha ijobiy baholanib kelinmoqda .

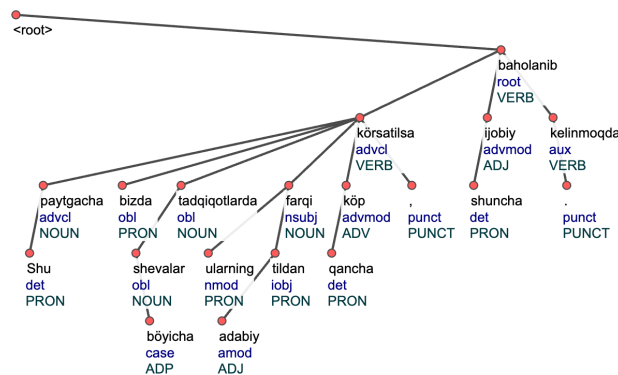


Fig. 10: Model tomonidan yaratilgan o‘zbek tili gapining sintaktik tobelik daraxti.

TAJIRIBA VA NATIJALAR

Ushbu bo‘limda taklif etilgan chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi tobelik tahlil modelining amaliy samaradorligi tahlil qilinadi. Tajribalar UzUDT universal bog‘liqlik daraxti korpusi asosida, Stanza kutubxonasi neyron quvuri (tokenizatsiya, so‘z turkumlarini aniqlash, morfologik tahlil va tobelik tahlili) bilan integratsiyalashgan holda olib borildi [4, 5]. Baholashda universal bog‘liqlik daraxti korpusi hamjamiyatida qabul qilingan standart metrikalar – so‘z turkumlari aniqligi (UPOS/XPOS), morfologik xususiyatlar aniqligi (UFeats), shuningdek, Unlabeled Attachment Score (UAS, belgilarsiz birikish aniqligi), Labeled Attachment Score (LAS, belgilangan birikish aniqligi) va CLAS ko‘rsatkichlari ishlatildi [2, 3].

1. So‘z turkumlari va morfologik tahlil

Birinchi bosqichda so‘z turkumlari va morfologik xususiyatlarni aniqlash vazifasi (tagging) ko‘rib chiqildi. UzUDT universal bog‘liqlik daraxti korpusi o‘quv to‘plamida xlm-roberta-base modeli mayin sozlandi (fine-tuning) va u o‘zbek tili uchun maxsus o‘qitilgan FastText vektorlari (cc.uz.300.vec) bilan birgalikda ishlatildi. Stanza quvuri doirasida so‘z shakli, lemma va POS teglaridan tashkil topgan kirish vektorlari neyron tagging moduli orqali qayta ishlanib, har bir token uchun UPOS, XPOS va UFeats qatlamlari qayta baholandi.

Jadval 12: UzUDT universal bog‘liqlik daraxti korpusida so‘z turkumlari va morfologik tahlil natijalari.

To‘plam	UPOS aniqligi	XPOS aniqligi	UFeats aniqligi
Dev	82.92%	83.85%	67.39%
Test	86.10%	83.96%	70.06%

Rivojlantirish (Dev) va Test to‘plamlari bo‘yicha olingan natijalar 1-jadvalda keltirilgan.

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, model Test to‘plamida UPOS bo‘yicha 86.10%, XPOS bo‘yicha 83.96% va morfologik xususiyatlar (UFeats) bo‘yicha 70.06% aniqlikka erishgan. Dev va Test ko‘rsatkichlari o‘rtasidagi tafovutlarning katta emasligi modelning umumlashma qobiliyati (generalization) yetarli ekanini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, UFeats aniqligi UPOS/XPOS ko‘rsatkichlariga nisbatan ancha pastroq bo‘lib qolmoqda; bu o‘zbek tilidagi kelishik, shaxs-son, zamon, egalik kabi murakkab morfologik xususiyatlarning neyron model uchun qiyinroq ekanligidan dalolat beradi. Bunday natija agglyutinativ tillar uchun tabiiy bo‘lib, morfologik analizator bilan chuqur neyron modelni birlashtirish (‘morphology-aware’ arxitekturalar) zaruriyligini ko‘rsatadi [1, 5].

2. Sintaktik tobelik tahlili

Sintaktik tobelik tahlili bosqichida chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi modelning sof sintaktik qobiliyatini baholash maqsadida *oltin morfologiya (gold morphology)* sharoiti tanlandi. Ya‘ni, kirish sifatida modelga universal bog‘liqlik daraxti korpusidan olingan to‘liq to‘g‘ri lemmalar, UPOS va XPOS teglar uzatildi; shu orqali morfologik xatolarning sintaksisga tarqalishi (error propagation) istisno qilinib, faqat tobelik tahlil komponentining xatti-harakati o‘lchandi [3].

Test to‘plami bo‘yicha olingan UAS, LAS va CLAS ko‘rsatkichlari 2-jadvalda keltirilgan.

Jadval 13: Oltin morfologiya sharoitida sintaktik tobelik tahlilining baholash natijalari.

Metrika	Natija	Ta‘rif
UAS	69.21%	Unlabeled Attachment Score (belgilarsiz birikish aniqligi)
LAS	53.21%	Labeled Attachment Score (bosh va munosabat turi to‘g‘ri)
CLAS	46.32%	Content LAS (mazmunli so‘zlar uchun belgilangan birikish aniqligi)

UAS va LAS ko‘rsatkichlari orasidagi taxminan 16 foizlik farq shuni ko‘rsatadiki, model gapning umumiy ierarxik tuzilmasini, ya‘ni qaysi so‘z qaysi so‘zga bog‘langanini nisbatan yaxshi o‘rganadi (UAS \approx 69%), biroq bog‘lanishning aniq sintaktik turini (masalan, *nsubj* – ega, *obj* – to‘ldiruvchi, *obl* – hol kabi yorliqlarni) ajratishda qiyinchiliklar mavjud (LAS \approx 53%). CLAS ning LAS dan pastroq bo‘lishi esa aynan mazmuniy so‘zlar (fe‘l, ot, sifat) uchun to‘g‘ri belgilash vazifasining yanada murakkabligini aks ettiradi.

Bu natijalar o‘zbek tilining erkin so‘z tartibi, boy affiksatsiya tizimi va mavjud universal bog‘liqlik daraxti korpusining hajmi bilan izohlanishi mumkin. Kichik o‘quv to‘plami sharoitida chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi sintaktik daraxtning asosiy skeletini (bosh-tobe bog‘lanishlar) yetarli darajada tiklay olsa-da, ingichka farqlanuvchi sintaktik rollarni ajratishda yanada ko‘proq ma‘lumot va qo‘shimcha lingvistik priorlar talab etiladi [1, 3]. Shu nuqtai nazardan, mazkur natijalar o‘zbek tili uchun chuqur neyron tobelik tahlili bo‘yicha birinchi mustahkam bazaviy chiziq (baseline) sifatida qaralishi mumkin; kelgusida korpus hajmini oshirish, morfologik xususiyatlarni yanada chuqur integratsiya qilish va ko‘p tilli transfer yondashuvlarini qo‘llash orqali UAS/LAS ko‘rsatkichlarini sezilarli yaxshilash imkoniyati mavjud.

Umuman olganda, so‘z turkumlari va morfologik tahlil natijalari chuqur modelning o‘zbek tili grammatik tizimini o‘zlashtira boshlaganini, sintaktik tobelik tahlili natijalari esa chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosida qurilgan modelning erkin so‘z tartibli, agglyutinativ til sharoitida ham barqaror ishlashini ko‘rsatadi. Ushbu tajribalar universal bog‘liqlik daraxti korpusi va chuqur neyron tobelik tahlili o‘rtasida yagona matematik platforma shakllanayotganini tasdiqlaydi hamda keyingi tadqiqotlar uchun aniq raqamli benchmark vazifasini bajaradi.

XULOSA

Ushbu maqolada o‘zbek tili uchun universal bog‘liqlik daraxti korpusi asosida sintaktik tahlil masalasi chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi nuqtai nazaridan o‘rganildi. Avvalo, zamonaviy adabiy va ilmiy-ommabop matnlardan tanlab olingan 686 ta gap (taxminan 7800 ta token) uchun universal bog‘liqlik daraxti korpusi standartlariga mos annotatsiya amalga oshirildi; lemmatizatsiya, so‘z turkumlari va morfologik xususiyatlar bo‘yicha yuqori annotatorlararo moslikka erishilgani korpusning “oltin standart” sifatida qo‘llanishi mumkinligini ko‘rsatdi. Bu korpus o‘zbek tili sintaksisini formal graf modeli sifatida tavsiflaydigan birinchi barqaror ma‘lumotlar bazasi bo‘lib, keyingi nazariy va amaliy tadqiqotlar uchun asos yaratadi.

Taklif etilgan chuqur bi-affin neyron diqqat mexanizmi asosidagi tobelik tahlil modeli BiLSTM enkoder, bi-affin baholash qatlamlari va Cross-Entropy yo‘qotish funksiyasi orqali bosh-tobe so‘z juftliklarini ehtimollik nuqtai nazaridan baholash va optimal sintaktik daraxtni tiklashga qaratildi. Oltin morfologiya sharoitida olingan natijalar – so‘z turkumlari uchun UPOS aniqligi 86.10%, morfologik xususiyatlar uchun UFeats aniqligi 70.06%, sintaktik tahlilda esa UAS=69.21% va LAS=53.21% – o‘zbek tili uchun chuqur neyron tobelik tahlilining birinchi aniq raqamli bazaviy ko‘rsatkichlarini belgilaydi. UAS va LAS o‘rtasidagi farq erkin so‘z tartibli, agglyutinatil til sharoitida sintaktik rollarni nozik farqlashning murakkabligini aks ettirsa-da, model gapning umumiy ierarxik strukturasi va bosh-tobe bog‘lanishlarini yetarli darajada o‘rganayotganini tasdiqlaydi.

Kelgusidagi tadqiqotlar uchun universal bog‘liqlik daraxti korpusining hajmini kengaytirish, morfologik analizator bilan chuqur neyron modelni yanada chambarchas integratsiya qilish, ko‘p tilli va transfer-o‘rganish yondashuvlarini qo‘llash hamda qo‘shimcha lingvistik priorlar kiritish orqali UAS/LAS ko‘rsatkichlarini sezilarli yaxshilash imkoniyati mavjud. Shunday qilib, yaratilgan universal bog‘liqlik daraxti korpusi va chuqur bi-affin neyron tahlil modeli o‘zbek tili sintaksisining matematik va hisoblash nuqtai nazaridan tadqiqi uchun poydevor va kelajakdagi NLP tizimlari uchun ishonchli komponent sifatida qaralishi mumkin.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. John Carroll. 2010. Book Review: Dependency Parsing by Sandra Kubler, Ryan McDonald, and Joakim Nivre. *Computational Linguistics*, 36(1).
2. Joakim Nivre, Marie-Catherine de Marneffe, Filip Ginter, Jan Hajic, Christopher D. Manning, Sampo Pyysalo, Sebastian Schuster, Francis Tyers, and Daniel Zeman. 2020. Universal Dependencies v2: An Evergrowing Multilingual Treebank Collection. In *Proceedings of the Twelfth Language Resources and Evaluation Conference*, pages 4034-4043, Marseille, France. European Language Resources Association.
3. Dozat, T., & Manning, C. D. (2017). Deep Biaffine Attention for Neural Dependency Parsing. *ICLR 2017*.
4. Peng Qi, Yuhao Zhang, Yuhui Zhang, Jason Bolton, and Christopher D. Manning. 2020. Stanza: A Python Natural Language Processing Toolkit for Many Human Languages. In *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: System Demonstrations*, pages 101-108, Online. Association for Computational Linguistics.
5. Matlatipov, S. G., et al. (2024). *UzUDT: Universal Dependencies Treebank for Uzbek*. National University of Uzbekistan.
6. McEnery T, Hardie A. *Corpus Linguistics: Method, Theory and Practice*. Cambridge University Press; 2011.

Resume

This article introduces a new Universal Dependencies (UD) treebank for the Uzbek language and a dependency parser based on a deep biaffine neural attention mechanism. The corpus contains 686 sentences (7,800 tokens) from literary and popular-science texts, manually annotated with lemmas, POS tags, morphological features and dependency relations, achieving inter-annotator agreement above 95% for lemmatization and UPOS. On top of this gold-standard resource, we train and evaluate a BiLSTM-based deep biaffine dependency parser implemented in the Stanza pipeline, obtaining 86.10% UPOS accuracy, 70.06% UFeats accuracy and, under gold morphology, 69.21% UAS and 53.21% LAS on the test set. The treebank and model define the first strong neural baseline for dependency parsing in Uzbek and provide a mathematically grounded platform for further NLP research on the language.

Key words: Universal Dependencies, Uzbek language, dependency parsing, deep biaffine neural attention, treebank, NLP.

Резюме

В статье представлен новый трибанк Universal Dependencies (UD) для узбекского языка и построенный на его основе парсер зависимостей с глубокой биаффиной нейронной моделью внимания. Корпус включает 686 предложений (7800 токенов) из художественных и научно-популярных текстов, вручную аннотированных леммами, частями речи, морфологическими признаками и отношениями зависимостей; межаннотаторское согласие для лемматизации и UPOS превышает 95%. На базе этого «золотого стандарта» обучается и оценивается BiLSTM-биаффиный парсер, реализованный в конвейере Stanza, который при золотой морфологии достигает 86,10% точности UPOS, 70,06% точности UFeats и 69,21% UAS / 53,21% LAS на тестовой выборке. Полученный трибанк и модель задают первую сильную нейронную базу для анализа зависимостей в узбекском языке и создают математически обоснованную платформу для дальнейших исследований в области НЛП.

Ключевые слова: Universal Dependencies, узбекский язык, анализ зависимостей, глубокое биаффиное нейронное внимание, трибанк, НЛП.

UDC 517.956

**TO THE PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF A NON-DIVERGENT
NONLINEAR PARABOLIC SYSTEM DESCRIBING THE PROCESSES OF
COMBUSTION**

MATYAKUBOV ALISHER SAMANDAROVICH

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN
a.matyakubov@nuu.uz

SALIMOV JASURBEK IBROHIMOVICH

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN,
INTERNATIONAL DIGITAL UNIVERSITY. TASHKENT, UZBEKISTAN.
salimov_j@nuu.uz

RESUME

In this paper, the asymptotic behavior of self-similar solutions to the Cauchy problem for a system of nonlinear parabolic equations in non-divergence form is obtained, and estimates for the subsolution are derived.

Key words: mathematical modeling, self-similar solutions, parabolic equations, non-divergence form, subsolution, asymptotic behavior.

1. Introduction

In this work, in the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R\}$ we consider the Cauchy problem for a system of nonlinear parabolic equations not in divergence form:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x} (u^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}) - v^{\beta_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial x} (v^{m-1} \frac{\partial v}{\partial x}) - u^{\beta_2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \\ v(0, x) = v_0(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

where $\beta_1 > 1, \beta_2 > 1, m > 1, \alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ - numerical parameters, $u = u(t, x) \geq 0, v = v(t, x) \geq 0$ - are the solutions.

In this paper, we study a nonlinear parabolic system of equations not in divergence form with absorption. Such systems naturally appear in models of heat transfer, combustion and chemical reactions, where nonlinear diffusion plays an essential role. The considered system describes the temperature variation and reactant concentration during the combustion process, capturing the essential features of nonlinear diffusion and heat generation. By applying a self-similar solution, we investigate qualitative properties of solutions, subsolutions and analyze their asymptotic behavior.

In [1], the author proved the asymptotic behaviour of the finite blow-up points solution u of $u_t = \Delta u^m$ in $\widehat{\Omega} \times (0, \infty)$, $u(a_i, t) = \infty, \forall i = 1, \dots, i_0, t > 0, u(x, 0) = u_0(x)$ in $\widehat{\Omega}$ and $u = f$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, as $t \rightarrow \infty$. Also author construct finite blow-up points solution in bounded cylindrical domain with appropriate lateral boundary value such that the finite blow-up points solution oscillates between two given harmonic functions as $t \rightarrow \infty$ and proved the existence of the minimal solution of $u_t = \Delta u^m$ in $\widehat{\Omega} \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = u_0(x)$ in $\widehat{\Omega}$, $u(a_i, t) = \infty, \forall t > 0, i = 1, 2, \dots, i_0$ and $u = \infty$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$.

In article [2], the authors studied the Cauchy problem for a class of coupled nonlinear parabolic systems and analyzed the asymptotic behavior of their solutions. A Fujita-type blow-up theorem was established using integral estimates and appropriate supersolutions. Furthermore, the critical Fujita exponent, determined by the diffusion and spatial dimension, was identified.

Reference [3] focuses on parabolic problems with anisotropic nonlinearities under nonstandard growth conditions. The existence and uniqueness of weak solutions are established in variable exponent Sobolev spaces. To analyze blow-up phenomena, energy methods are employed, showing that solutions may blow up for both negative and positive initial energies. The roles of variable exponents and coefficients are shown to be critical in Fujita-type blow-up behavior.

In article [4], the authors investigated the blow-up behavior of solutions to nonlinear parabolic systems of non-divergent equations with variable density. The study addressed key aspects in solving Cauchy problems for partial differential equations using the difference method B – including the selection of the approximation order with respect to spatial coordinates, the choice of an initial approximation function, and the development of an efficient algorithm for solving the resulting systems of difference equations. A high-accuracy difference scheme for a nonlinear system in non-divergent form was constructed in the article.

Reference [5] investigates some properties of the blow-up solutions of a nonlinear parabolic system of non-divergent form with cross-diffusion. By constructing suitable auxiliary functions and employing analytical techniques, we derive sufficient conditions for the existence and behavior of blow-up solutions. The obtained results contribute to the deeper understanding of nonlinear diffusion dynamics and provide a foundation for further studies in multidimensional and more complex systems.

In article [6], the critical curves of a doubly nonlinear parabolic equation in non-divergent form with a source term and nonlinear boundary flux are studied. Both the critical global existence curve and the critical Fujita curve are derived. A distinctive feature of equation (1) is that it degenerates at points where $u = 0$ and $\nabla u = 0$. As a result, classical solutions may not exist, and therefore, we consider only weak solutions in the generalized sense described.

Another systems [7,17] was studied through the method of nonlinear splitting, known previously for nonlinear parabolic equations, and systems of equations in divergence form, asymptotic theory and asymptotic methods based on different transformations. Asymptotic representation of self-similar solutions for the nonlinear parabolic system of equations not in divergence form is constructed.

In [8], the authors studied a doubly nonlinear degenerate parabolic system with nonlinear source and absorption terms, which are not located in a homogeneous medium. The system satisfies zero Dirichlet boundary conditions in a smooth bounded domain. To investigate the problem, the comparison principle and a self-similar approach were applied. Moreover, the nonlinear splitting method was employed to establish the existence of both global and finite-time blow-up solutions. It was shown that the interplay between the nonlinear source and nonlinear absorption terms plays a crucial role in determining the existence or non-existence of solutions. These results contribute to a broader understanding of nonlinear parabolic systems.

References [9,12] investigates the asymptotic behavior of self-similar solutions for a degenerate parabolic system not in divergence form, considering both the slow and fast diffusion cases. Using the comparison method, the finite speed of perturbation distribution (FSPD) property of the Cauchy problem for a cross-diffusion parabolic system not in divergence form is established. Based on the obtained asymptotic behavior of the solutions, suitable initial approximations are proposed for the iterative process in both the slow and fast diffusion regimes, depending on the values of the numerical parameters.

In [10] and [11], the authors studied the asymptotic behavior of self-similar solutions of a parabolic system. In particular, Aripov and Matyakubov [10] studied the problem of constructing ZeldovichB–Barenblatt type solution for the cross system equation with a source. Using comparison methods, the property of FSPD of the Cauchy problem for a cross-diffusion parabolic system not in divergence form is established. The asymptotic behavior is discussed for a solution of the cross-diffusion parabolic system equations in non-divergence form for slow and fast diffusion cases depending on the value of the numerical parameters. On the basis of the asymptotic of solutions, suitable initial approximations are offered for the iterative process in the cases of the slow and fast diffusions, depending on the numerical parameter values.

Also, some books and scientific articles contain more equations and methods used in the field than any other book currently available. Included in the handbook are exact, asymptotic, approximate analytical, numerical, symbolic, and qualitative methods that are used for solving and analyzing linear and nonlinear equations. The authors also present formulas for the effective construction of solutions and many different equations arising in various applications, such as heat transfer, elasticity, hydrodynamics, and more. This extensive handbook is the perfect resource for engineers and scientists searching for a comprehensive reservoir of information on ordinary differential equations [12-17].

In this paper, using the self-similar approach, we obtain a particular solution of system (1) and prove that this solution describes the asymptotic behavior of compactly supported solutions. The main purpose of this paper is to establish conditions for the existence of subsolution to problem (1)-(2) based on the self-similar analysis [1-13].

2. The self-similar analysis of the problem.

Below, we employ the method of nonlinear splitting [1,7,8,13] to derive the self-similar form of the equation. For construction of the self-similar solutions of the system (1), we consider the functions $u(t, x), v(t, x)$ in the form:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \bar{u}(t)w(x, \tau(t)), \\ v(t, x) &= \bar{v}(t)\varphi(x, \tau(t)). \end{aligned} \tag{3}$$

Let $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ be in the form:

$$\bar{u}(t) = A_1(T - t)^{\frac{\beta_1+1}{1-\beta_1\beta_2}}, \quad \bar{v}(t) = A_2(T - t)^{\frac{\beta_2+1}{1-\beta_1\beta_2}},$$

where $A_i = (\frac{\beta_i+1}{\beta_1\beta_2-1})^{\frac{1}{\beta_1\beta_2-1}} (\frac{\beta_{3-i}+1}{\beta_1\beta_2-1})^{\frac{\beta_i}{\beta_1\beta_2-1}}, i = 1, 2.$

Using (3) the system (1) can be reduced to the following form:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \tau} = w^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x} (w^{m-1} \frac{\partial w}{\partial x}) + d_1 \tau^{-1} (\varphi^{\beta_1} + w), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}) + d_2 \tau^{-1} (w^{\beta_2} + \varphi) \end{cases} \tag{4}$$

where

$$\tau(t) = \begin{cases} A_1^{\alpha_1+m-1} \frac{(T-t)^{n_1(\alpha_1+m-1)+1}}{n_1(\alpha_1+m-1)+1}, & \text{at } n_1(\alpha_1+m-1)+1 < 0, \\ -A_1^{\alpha_1+m-1} \ln(T-t), & \text{at } n_1(\alpha_1+m-1)+1 = 0. \end{cases}$$

$$n_2(\alpha_2+m-1) = n_1(\alpha_1+m-1), \quad l = \frac{A_2^{\alpha_2+m-1}}{A_1^{\alpha_1+m-1}},$$

$$d_1 = \frac{n_1}{n_1(\alpha_1+m-1)+1}, \quad d_2 = \frac{n_2 l}{n_2(\alpha_2+m-1)+1}.$$

We consider the problem for the case $n_1(\alpha_1+m-1)+1 < 0.$

We seek the self-similar solution of system (4) in the following form:

$$w(\tau, x) = f(\xi), \quad \psi(\tau, x) = \phi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\tau^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

By substituting (5) into system (4), we obtain the following self-similar solution:

$$\begin{cases} f^{\alpha_1} \frac{d}{d\xi} \left(f^{m-1} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{2} \frac{df}{d\xi} + d_1 (\phi^{\beta_1} + f) = 0 \\ \phi^{\alpha_2} \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m-1} \frac{d\phi}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{2} \frac{d\phi}{d\xi} + d_2 (f^{\beta_2} + \phi) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

3. A subsolution of the problem.

Suppose that for system of equations (6) the following conditions are fulfilled:

$$f'(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0.$$

Then, the functions

$$\bar{f}(\xi) = B_1(a - \xi^2)^{\frac{1}{\alpha_1+m-1}}, \quad \bar{\phi}(\xi) = B_2(a - \xi^2)^{\frac{1}{\alpha_2+m-1}} \tag{7}$$

where, $a > 0$, $B_i = (\frac{c_i+d_i}{4mc^2-2c})^{c_i}$, $c_i = \frac{1}{\alpha_i+m-1}$ ($i=1,2$), satisfy system of equations (6). Then, the Subsolution theorem holds.

Theorem 1. Let

1. $n_i(\alpha_i + m - 1) + 1 < 0$,
2. $B_i^{\alpha_i+m-1}(mc_i - 1) < \frac{1}{4}$, ($i = 1, 2$),
3. $u_0(x) \geq u_-(0, x)$, $v_0(x) \geq v_-(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Then, for problem (1)-(2), a global solution exists in Q and the following estimate is satisfied: $u(t, x) \geq u_-(t, x)$, $v(t, x) \geq v_-(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, where

$$\begin{aligned} u_-(t, x) &= \bar{u}(t) \bar{f}(\xi), \\ v_-(t, x) &= \bar{v}(t) \bar{\phi}(\xi). \end{aligned} \tag{8}$$

Proof. To prove the theorem we use the method of comparison of solutions. Hence, comparing solution methods [14] it is taken the functions $u_-(t, x)$, $v_-(t, x)$. Substituting (8) in (1) the following inequality can be obtained:

$$\begin{cases} \bar{f}^{\alpha_1} \frac{d}{d\xi} \left(\bar{f}^{m-1} \frac{d\bar{f}}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{2} \frac{d\bar{f}}{d\xi} + d_1 (\bar{\phi}^{\beta_1} + \bar{f}) \geq 0 \\ \bar{\phi}^{\alpha_2} \frac{d}{d\xi} \left(\bar{\phi}^{m-1} \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{2} \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} + d_2 (\bar{f}^{\beta_2} + \bar{\phi}) \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

If the specific form (7) is given for the functions $\bar{f}(\xi)$, $\bar{\phi}(\xi)$ inequality (9) can be rewritten as follows:

$$\begin{cases} 4B_1^{\alpha_1+m} c_1 (mc_1 - 1) - B_1 c_1 a + d_1 B_2^{\beta_1} (a - \xi^2)^{c_2 \beta_1 - c_1 + 1} \geq 0, \\ 4B_2^{\alpha_2+m} c_1 (mc_2 - 1) - B_2 c_2 a + d_2 B_1^{\beta_2} (a - \xi^2)^{c_1 \beta_2 - c_2 + 1} \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

It is known that $\bar{f}(\xi)$, $\bar{\phi}(\xi)$ are positive functions and $d_1, d_2 > 0$, therefore $B_i^{\alpha_i+m-1}(mc - 1) \geq \frac{1}{4}$, $i=1,2$.

Then, according to the theorem, for the comparison of the solutions to problem (1)-(2), there exists a global solution in Q and the following estimate is satisfied: $u(t, x) \geq u_-(t, x)$, $v(t, x) \geq v_-(t, x)$.

The proof of the theorem is completed.

4. Asymptotic of the self-similar solutions.

Next, the asymptotic behavior of the self-similar solutions of the system (6) is studied. Self-similar solution of system equations (6) will be searched for in the form:

$$f(\xi) = \bar{f}(\xi)y(\eta), \quad \varphi(\xi) = \bar{\varphi}(\xi)z(\eta), \quad \eta = -\ln(a - \xi^2), \tag{11}$$

where

$$\bar{f}(\xi) = A_1(a - \xi^2)_+^{\frac{1}{\alpha_1+m-1}}, \quad \bar{\varphi}(\xi) = A_2(a - \xi^2)_+^{\frac{1}{\alpha_2+m-1}}, \text{ and } y_1(\eta), y_2(\eta) \text{ are the new functions.}$$

Then, substituting (11) into (6) for the functions the following system of nonlinear equations is obtained:

$$\begin{aligned} y^{\alpha_1} \frac{dL_1(y)}{d\eta} - a_1 y^{\alpha_1} L_1(y) + a_2 \left(\frac{dy}{d\eta} - \frac{y}{\alpha_1 + m - 1} \right) + a_3 z^{\beta_1} + a_4 y &= 0 \\ z^{\alpha_2} \frac{dL_2(z)}{d\eta} - b_1 z^{\alpha_2} L_2(z) + b_2 \left(\frac{dz}{d\eta} - \frac{z}{\alpha_2 + m - 1} \right) + b_3 y^{\beta_2} + b_4 z &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Here:

$$\begin{aligned}
 a_1(\eta) &= \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 + m - 1} + \frac{e^{-\eta}}{2(a - e^{-\eta})}, & a_2(\eta) &= \frac{1}{4}B_1^{1-\alpha_1-m}, & a_3(\eta) &= \frac{d_1B_2^{\beta_1}}{4B_1^{\alpha_1+m}} \frac{e^{-\eta h_1}}{(a - e^{-\eta})} & a_4(\eta) &= \frac{d_1B_1^{1-\alpha_1-m}e^{-\eta}}{4(a - e^{-\eta})}, \\
 b_1(\eta) &= \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 + m - 1} + \frac{e^{-\eta}}{2(a - e^{-\eta})}, & b_2(\eta) &= \frac{1}{4}B_2^{1-\alpha_2-m}, & b_3(\eta) &= \frac{d_2B_1^{\beta_2}}{4B_2^{\alpha_2+m}} \frac{e^{-\eta h_2}}{(a - e^{-\eta})} & b_4(\eta) &= \frac{d_2B_2^{1-\alpha_2-m}e^{-\eta}}{4(a - e^{-\eta})}. \\
 c_1 &= \frac{\beta_1}{\alpha_1 + m - 1} - \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 + m - 1} + 1, & c_2 &= \frac{\beta_2}{\alpha_2 + m - 1} - \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 + m - 1} + 1 \\
 L_1(y) &= y^{m-1} \left(\frac{dy}{d\eta} - \frac{y}{\alpha_1 + m - 1} \right), & L_2(z) &= z^{m-1} \left(\frac{dz}{d\eta} - \frac{z}{\alpha_2 + m - 1} \right)
 \end{aligned}$$

It is supposed that $\xi \in [\xi_0, \xi_1)$, $0 < \xi_0 < \xi_1$,

$$\xi_1 = a^{-\frac{1}{2}}.$$

Therefore, the function $\eta(\xi)$ has the properties:

$$\begin{aligned}
 \eta'(\xi) &> 0 \quad \text{at} \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1), \\
 \eta_0 &= \eta(\xi_0) > 0, & \lim_{\xi \rightarrow \xi_1} \eta(\xi) &= +\infty.
 \end{aligned}$$

It follows from self-similar system of equations (12) the following limitations

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} a_i(\eta) = a_i^0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} b_i(\eta) = b_i^0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

which exist, and are finite and nonzero, that is

$$0 < |a_i^0| < +\infty, 0 < |b_i^0| < +\infty.$$

Further, we consider the solutions of the system (12), in a certain neighborhood of $+\infty$, which satisfy the inequalities

$$y_i(\eta) > 0, \quad z_i(\eta) > 0, \quad y' + a_{i0}(\eta)y \neq 0, \quad z' + b_{i0}(\eta)z \neq 0.$$

Here, we introduce the notations:

$$\begin{aligned}
 c_{i1} &= \frac{1 - \alpha_i}{(\alpha_i + m - 1)^2}, & c_{i2} &= \frac{B_i^{1-\alpha_i-m}}{4(\alpha_i + m - 1)}, & c_{i3} &= -\frac{d_i B_{3-i}^{\beta_i}}{4B^{\alpha_i+m}}, \\
 h_i &= \frac{\beta_i}{\alpha_{3-i} + m - 1} - \frac{1}{\alpha_i + m - 1} + 1, & b_i &= A_i B_i \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned}$$

Let $y(\eta) = y^0 + o(1)$, $z(\eta) = z^0 + o(1)$ as $\eta \rightarrow +\infty$ and the equality $n_2(\alpha_2 + m - 1) = n_1(\alpha_1 + m - 1)$ is performed.

Then the following theorems hold.

Theorem 2. Let $h_1 > 0, h_2 > 0$. Then, the self-similar solution of system (1) has the asymptotic at $x \rightarrow a^{-\frac{1}{2}}(t - T)^\gamma$:

$$\begin{aligned}
 u_A(t, x) &\simeq b_1(T - t)^{-n_1} \left(a - \frac{\gamma x^2}{A_1^{\alpha_1+m-1}(T - t)^\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha_1+m-1}} (y^0 + o(1)), \\
 v_A(t, x) &\simeq b_2(T - t)^{-n_2} \left(a - \frac{\gamma x^2}{A_2^{\alpha_2+m-1}(T - t)^\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha_2+m-1}} (z^0 + o(1)),
 \end{aligned} \tag{13}$$

where $0 < y^0 < +\infty$, $0 < z^0 < +\infty$ and y^0, z^0 are the solutions w_1, w_2 for the system of nonlinear algebraic equations:

$$\begin{aligned}
 c_{11}w_1^{\alpha_1+m} + c_{12}w_1 + c_{13}w_2^{\beta_1} &= 0, \\
 c_{21}w_2^{\alpha_2+m} + c_{22}w_2 + c_{23}w_1^{\beta_2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Theorem 3. Let $h_1 = 0, h_2 > 0$. Then, the self-similar solution of system (1) has the asymptotic at $x \rightarrow a^{-\frac{1}{2}}(t - T)^\gamma$ form (13), where $0 < y^0 < +\infty, 0 < z^0 < +\infty$ and y^0, z^0 are the solutions w_1, w_2 for the system of nonlinear algebraic equations:

$$\begin{aligned} c_{11}w_1^{\alpha_1+m} + c_{12}w_1 &= 0, \\ c_{21}w_2^{\alpha_2+m} + c_{22}w_2 + c_{23}w_1^{\beta_2} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Theorem 4. Let $h_1 > 0, h_2 = 0$. Then, the self-similar solution of system (1) has the asymptotic at $x \rightarrow a^{-\frac{1}{2}}(t - T)^\gamma$ form (11), where $0 < y^0 < +\infty, 0 < z^0 < +\infty$ and y^0, z^0 are the solutions w_1, w_2 for the system of nonlinear algebraic equations:

$$\begin{aligned} c_{11}w_1^{\alpha_1+m} + c_{12}w_1 + c_{13}w_2^{\beta_1} &= 0, \\ c_{21}w_2^{\alpha_2+m} + c_{22}w_2 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Theorem 5. Let $h_1 = 0, h_2 = 0$. Then, the self-similar solution of system (1) has the asymptotic at $x \rightarrow a^{-\frac{1}{2}}(t - T)^\gamma$ form (11), where $0 < y^0 < +\infty, 0 < z^0 < +\infty$ and y^0, z^0 are the solutions w_1, w_2 for the system of nonlinear algebraic equations:

$$\begin{aligned} c_{11}w_1^{\alpha_1+m} + c_{12}w_1 &= 0, \\ c_{21}w_2^{\alpha_2+m} + c_{22}w_2 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

The proof. Assuming in Eqs. (12):

$$\vartheta_1(\eta) = L_1y, \quad \vartheta_2(\eta) = L_2z, \tag{18}$$

the following identity is obtained:

$$v_1(\eta) = y^{m-1} \left(\frac{dy}{d\eta} - \frac{y}{\alpha_1 + m - 1} \right), \quad v_2(\eta) = z^{m-1} \left(\frac{dz}{d\eta} - \frac{z}{\alpha_2 + m - 1} \right). \tag{19}$$

we obtain the identity:

$$\begin{aligned} v_1'(\eta) &\equiv a_{11}(\eta)v_1(\eta) - a_{12}v_1(\eta)^{\frac{1}{m}}y^{-\alpha_1} - a_{13}z^{\beta_1}y^{-\alpha_1} + a_{14}y^{1-\alpha_1} \\ v_2'(\eta) &\equiv a_{21}(\eta)v_1(\eta) - a_{22}v_2(\eta)^{\frac{1}{m}}z^{-\alpha_2} - a_{23}y^{\beta_2}z^{-\alpha_2} + a_{24}z^{1-\alpha_2} \end{aligned} \tag{20}$$

Furthermore, consider the functions:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda_1, \eta) &\equiv a_{11}(\eta)\lambda_1 - a_{12}\lambda_1^{\frac{1}{m}}y^{-\alpha_1} - a_{13}z^{\beta_1}y^{-\alpha_1} + a_{14}y^{1-\alpha_1}, \\ g_2(\lambda_2, \eta) &\equiv a_{21}(\eta)\lambda_2 - a_{22}\lambda_2^{\frac{1}{m}}z^{-\alpha_2} - a_{23}y^{\beta_2}z^{-\alpha_2} + a_{24}z^{1-\alpha_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

where $\lambda_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2)$.

Let us suppose $\frac{\beta_i}{\alpha_i+m-1} - \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i+m-1} + 1 = 0$ (i=1,2) then,

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} a_1(\eta) = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 + m - 1}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} a_2(\eta) = \frac{1}{4}B_1^{1-\alpha_1-m}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} a_3(\eta) = \frac{d_1B_2^{\beta_1}}{4B_1^{\alpha_1+m}}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} a_4(\eta) = 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} b_1(\eta) = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 + m - 1}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} b_2(\eta) = \frac{1}{4}B_2^{1-\alpha_2-m}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} b_3(\eta) = \frac{d_2B_1^{\beta_2}}{4B_2^{\alpha_2+m}}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} b_4(\eta) = 0.$$

and the functions $g_i(\lambda_i, \eta)$ ($i = 1, 2$) preserve sign on some interval $[\eta_1, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ for every fixed value λ_i ($i = 1, 2$).

Therefore, the functions $g_i(\lambda_i, \eta)$ ($i = 1, 2$) for all $\eta \in [\eta_1, +\infty)$ satisfies one of the inequalities:

$$g_i(\lambda_i, \eta) > 0 \quad \text{or} \quad g_i(\lambda_i, \eta) < 0 \quad (i = 1, 2). \tag{22}$$

Let us assume that for the functions $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) the limit at $\eta \rightarrow +\infty$ does not exist. Consider the case, where one of the inequalities (22) are fulfilled. By force of the functionB's $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) oscillation, the straight line $\bar{v}_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) and its graph intersects an infinite number of times in the interval $[\eta_1, +\infty)$ ($i = 1, 2$). However, this is impossible, since the interval $[\eta_1, +\infty)$ ($i = 1, 2$) is justly one of the inequalities (21) and therefore, it follows from Eq. (22), that graph of the functions $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) intersects the straight line $\bar{v}_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2$) only once in the interval $[\eta_1, +\infty)$ ($i = 1, 2$). Therefore, for the functions $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) the limit at $\eta \rightarrow +\infty$ exists.

Assuming the functions $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) are defined in accordance with Eq. (18) and have a limit at $\eta \rightarrow +\infty$, one can show that $y'_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) has a limit at $\eta \rightarrow +\infty$, which is equal to zero. Then,

$$v_1(\eta) = y^{m-1} \left(\frac{dy}{d\eta} - \frac{y}{\alpha_1 + m - 1} \right) = a_1^0 (y^0)^m + o(1),$$

$$v_2(\eta) = z^{m-1} \left(\frac{dz}{d\eta} - \frac{z}{\alpha_2 + m - 1} \right) = b_1^0 (z^0)^m + o(1),$$

and by (19) derivative of functions $v_i(\eta)$ ($i = 1, 2$) has a limit at $\eta \rightarrow +\infty$, which obviously equals zero. Consequently,

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} (a_{11}(\eta)v_1(\eta) - a_{12}v_1(\eta)^{\frac{1}{m}}y^{-\alpha_1} - a_{13}z^{\beta_1}y^{-\alpha_1} + a_{14}y^{1-\alpha_1}) = 0,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} (a_{21}(\eta)v_1(\eta) - a_{22}v_2(\eta)^{\frac{1}{m}}z^{-\alpha_2} - a_{23}y^{\beta_2}z^{-\alpha_2} + a_{24}z^{1-\alpha_2}) = 0.$$

It is easy to see that the system (18) has a solution $(y_1(\eta), y_2(\eta))$ with a finite non-zero limit at $\eta \rightarrow +\infty$ necessary to comply with the conditions of Theorem 2, 3, 4, 5.

Then the compactly supported solution of the problem (6) has an asymptotic of the form (13) as $\xi \rightarrow a^{\frac{1}{2}}$. Thus, the theorem is proved.

CONCLUSION

The Cauchy problem for a non-divergent nonlinear parabolic system with an absorption term describing combustion processes was studied using the comparison method. A subsolution corresponding to the considered problem was constructed, and the lower bounds for the main solution were obtained. Asymptotic representations of self-similar solutions for this system were then obtained, and their asymptotic behavior was analyzed. It was shown that the coefficients of the main terms of asymptotic of solution satisfy to some system of a nonlinear algebraic equation. These results highlight the essential influence of nonlinear diffusion and heat generation on the combustion dynamics and the evolution of temperature. The obtained results contribute to the theoretical development of nonlinear parabolic systems modeling heat transfer and combustion processes.

ACKNOWLEDGEMENTS

This research was partially supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under the research grant AL-9224104601, titled B“Mathematical modeling of processes described by nonlinear, divergent, and non-divergent parabolic equations and systemsB”. The numerical and analytical investigations of problem (1)-(2) presented in this work were carried out within the framework of this project.

REFERENCES

1. Shu-Yu Hsu. Asymptotic behaviour of blow-up solutions of the fast diffusion equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 2023, P.71-101.
2. Yan Leng, Yuanyuan Nie, Qian Zhou. Asymptotic behavior of solutions to a class of coupled nonlinear parabolic systems. *Boundary Value Problems*, 2019,P. 68-79.

3. Yohei Fujishima, Kazuhiro Ishige. Blowing Up Solutions for Nonlinear Parabolic Systems with Unequal Elliptic Operators. *Dynamics and Differential Equations*, 2019, P. 1219-1231.
4. Matyakubov A. S., Raupov D. R. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non divergence form with variable density. *Aip Conference Proceedings*. 2023, 2781, 020055.
5. Matyakubov A. S., Raupov D. R. On Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion. *Scopus: Springer Nature Switzerland AG*. 2021. 289-303 p.
6. Aripov M. and Raimbekov J., “The critical curves of a doubly nonlinear parabolic equation in non-divergent form with a source and nonlinear boundary flux,” *Journal of Siberian Federal University 12(1)*, 2019, 112-124.
7. Mirsaid Aripov, Alisher Matyakubov. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form. *International Journal of Innovative Science, Engineering Technology*. 2016, p. 533-537.
8. Aripov M., Atabaev O., Al-Marashi A. On the behavior of solutions of a doubly nonlinear degenerate parabolic system with nonlinear sources and absorptions with variable densities. *Bulletin of the Karaganda University*, 2025, No.1(117) pp. 12-23.
9. A.S. Matyakubov. Finite Speed of the Perturbation Distribution and Asymptotic Behavior of the Solutions of a Parabolic System not in Divergence Form. *Universal Journal of Computational Mathematics 5 (3)*, 2017, pp. 57-67.
10. Aripov M., Matyakubov A. To the properties of the solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 2017, 5(1), pp. 1-7.
11. Aripov M., Matyakubov A On the asymptotic behavior solutions of nonlinear parabolic systems of equations not in divergence form. *The KazNU Journal*. 2015, 3 (86). 275-282.
12. Aripov M., Matyakubov A. S. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behaviour. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2017, 8(1), pp. 5-12.
13. Арипов М., Садуллаева С. Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии. *Университет, Ташкент*, 2020. 750 p.
14. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. *Walter de Grueter, Berlin*, 1995, 4, 535 p.
15. Aripov M., Sadullaeva S. A. Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion system with a source. *J Appl Math Phys*, 2015. 3(9):1090-1099
16. Aripov M., Bobokandov M. M. Blow-up analysis for a doubly nonlinear parabolic non-divergence form equation with source term. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2022. Vol. 5, №4, ISSN-2181-9483.
17. Aripov M., Matyakubov A. S., Imomnazarov BK The Cauchy problem for a nonlinear degenerate parabolic system in non-divergence form. *Math Notes NEFU*, 2020. 27(3):27-38
18. Aripov M., Matyakubov A. S., Xasanov J. O. Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-diffusion parabolic system in non-divergent form with a source and variable density. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2022, Vol. 5, №4, ISSN-2181-9483.
19. Rakhmonov Z. R., Khaydarov A., Urunbaev J. E. (2020) Global existence and nonexistence of solutions to a cross diffusion system with nonlocal boundary conditions. *Math Stat* 8(4):404 409
20. Rakhmonov Z. R, Tillaev A. I. On the behavior of the solution of a nonlinear poly tropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities. *Nanosyst Phys Chem Math*, 2018. 9(3):323-329

REZYUME

Ushbu maqolada nodivergent ko‘rinishdagi nochiziqli parabolik tenglamalar sistemasining Koshi masalasi uchun avtomodel yechimlar asimptotikasi topildi va quyi yechim uchun baholar olindi.

Kalit so‘zlar: matematik modellashtirish, avtomodel yechimlar, parabolik tenglamalar sistemasi, nodivergent shakl, quyi yechim, asimptotik baholash.

РЕЗЮМЕ

В данной статье найдена асимптотика автомодельных решений задачи Коши для системы нелинейных параболических уравнений в недивергентной форме и получены оценки для нижнего решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, автомодельные решения, система параболических уравнений, недивергентная форма, нижняя оценка, асимптотическое поведение.

UDC 512.643

**UCHINCHI TUR KLASSIK SOHA YORDAMIDA ANIQLANGAN MATRITSAVIY POLIEDRDA BISHOP
INTEGRAL FORMULASI**

MAXKAMOV ERKIN MUSURMANOVICH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI, TOSHKENT, O‘ZBEKISTON
erkin_mahkamov83@mail.ru

ANNOTATSIYA:

Bu maqolada uchinchi tur klassik soha yordamida matritsaviy poliedr aniqlangan. Bu aniqlangan poliedrda sikllarning gamologik bo‘lishi ko‘rsatilgan hamda Bishop integral formulasi olingan.

Kalit so‘zlar: Kososimmetrik matritsalar, uchinchi tur klassik soha, matritsaviy poliedr, matritsa argumentli golomorf fuksiyalar va akislantirishlar, gomologik sikllar, integral formula, Bishop integral formulasi.

Elementlari kompleks sonlardan iborat, $[n \times n]$ - tartibli kososimmetrik matritsalar bo‘lgan fazoni $\tilde{C}[n \times n]$ kabi belgilaymiz. Ushbu

$$D_3 = \left\{ Z \in \tilde{C}[n \times n] : I^{(n)} + Z\bar{Z} > 0 \right\}$$

sohaga uchinchi tur klassik soha deb aytiladi. Bunda $I^{(n)}$ – n tartibli birlik matritsa, \bar{Z} – matritsa esa Z matritsaning kompleks qo‘shma matritsasi hisoblanadi (eslatma, yuqoridagi sohada $H > 0$ Ermit matritsasining musbat aniqlanganligini bildiradi, ya’ni, barcha xos sonlari musbat aniqlangan) ([1-3]).

Uchunchi tur klassik sohaning chegarasi va ostovi mos ravishda quyidagicha aniqlanadi [2]:

$$\partial D_3 = \left\{ Z \in \tilde{C}[n \times n] : \det \left(I^{(n)} + Z\bar{Z} \right) = 0, I^{(n)} + Z\bar{Z} \geq 0 \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ Z \in \tilde{C}[n \times n] : I^{(n)} + Z\bar{Z} = 0 \right\}.$$

Bu D_3 sohada golomorf va uning yopig‘ida uzluksiz har qanday $h(Z)$, ya’ni, $h(Z) \in \mathcal{O}(D_3) \cap C(\overline{D_3})$ funksiya uchun (juft n larda) ushbu

$$h(Z) = c_n \int_{\Gamma} \frac{h(X) dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X - Z)} \quad (1)$$

Xua Lo-ken integral formulasi o‘rinli bo‘ladi ([2], 95-sah.). Bu yerda $dX = \bigwedge_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dx_{ij}$, integrallash tartibini

va c_n o‘zgarmas

$$c_n \int_{I^{(n)} + X\bar{X} = 0} \frac{dX}{\det^{\frac{n-1}{2}}(X)} = 1$$

shart bo‘yicha aniqlanadi.

Biror $G \subset \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohada golomorf bo‘lgan $f = (f_1, \dots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ akslantirishni qaraymiz. Yuqoridagi $f = (f_1, \dots, f_{\frac{n(n-1)}{2}}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ akslantirishni quyidagicha $[n \times n]$ -tartibli kososimmetrik matritsa ko‘rinishida tushunish kerak:

$$f(Z) = \begin{pmatrix} 0 & f_{12}(Z) & \dots & f_{1n}(Z) \\ -f_{12}(Z) & 0 & \dots & f_{2n}(Z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_{1n}(Z) & -f_{2n}(Z) & \dots & 0 \end{pmatrix} : G \rightarrow \tilde{C}[n \times n].$$

Endi matritsaviy poliedr tushunchasini keltiramiz.

1-ta'rif. Agar $f : G \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}[n \times n]$ golomorf akslantirish yordamida aniqlangan

$$f^{-1}(D_{3,r}) = \left\{ Z \in G : r^2 I^{(n)} + f(Z)\overline{f(Z)} > 0, r > 0 \right\}$$

to'plam G sohada kompakt yotsa, ya'ni, $f^{-1}(D_{3,r}) \Subset G$, u holda $f^{-1}(D_{3,r})$ to'plamga matritsaviy poliedrik to'plam deyiladi.

Shuni alohida ta'kidlash lozimki, bu to'plam har doim ham bog'lamlil bo'lavermaydi.

2-ta'rif. Matritsaviy poliedrik to'planning bog'lamlil komponentasini matritsaviy poliedrik soha yoki qisqacha matritsaviy poliedr deb atamiz va uni $\Omega_{f,r}$ kabi belgilaymiz.

Matritsaviy poliedrning ostovi

$$\Gamma_{f,r} = \left\{ Z \in G : r^2 I^{(n)} + f(Z)\overline{f(Z)} = 0, r > 0 \right\},$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Bu ishda matritsaviy poliedrik sohada Bishop integral formulasi olingan.

Aytaylik $f = \left(f_1, \dots, f_{\frac{n(n-1)}{2}} \right) : D \rightarrow G$ akslantirish $D \subset \mathbb{C}_Z^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohani $G \subset \mathbb{C}_W^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohaga akslantiruvchi golomorf akslantirish bo'lsin. Agar har bir $W \in G$ nuqtalar uchun $f(Z) = W$ tenglama D sohada karrali ildizlarining tartibi bilan qo'shib hisoblaganda bir xil sondagi yechimlarga ega bo'lsa, u holda $f(Z)$ akslantirish chekli turdagi akslantirish deb ataladi (bu yerda nollar soni karrasi bilan olingan).

Aytaylik, $f : D \rightarrow G$ akslantirish $D \subset \mathbb{C}_Z^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohani $G \subset \mathbb{C}_W^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sohaga akslantiruvchi chekli turdagi golomorf akslantirish bo'lsin va

$$H(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\psi(Z)}$$

funksiya D sohada meromorf bo'lsin.

3-ta'rif: f akslantirishga nisbatan $H(Z)$ meromorf funksiyaning izi deb ushbu

$$[\text{Tr } H](W) = \sum_{\nu} H(Z^{(\nu)}(W)), W \in G \setminus f(\psi = 0),$$

funksiyaga aytiladi, bu yerda yig'indi $f(Z) = W$ tenglamaning ildizlari (karralisining tartibi ham e'tiborga olingan) bo'yicha olinadi. Bu ishda matritsaviy poliedrda maxsus ko'rinishdagi meromorf funksitalar uchun Bishop integral formulasi olingan.

Teoremani isbotlashga o'tishdan avvalo quyidagi muhim lemmani isbotlaymiz.

1-lemma. Aytaylik $X - [n \times n]$ simmetrik matritsa va $\|X\|_s < \varepsilon$ bo'lsin. U holda $G_* = G \setminus \{ Z : \det(f(Z) - X) = 0 \}$ to'plamda $0 < \delta < \varepsilon - \|X\|_s$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha δ uchun quyidagi sikllar gomologik sikllar bo'ladi:

$$\Gamma_{f-X,\delta} \sim \Gamma_{f,\varepsilon}.$$

Bu yerda $\|\cdot\|_s$ -spektral norma hamda

$$\Gamma_{f-X,\delta} = \left\{ Z \in G : \delta^2 I + (f(Z) - X)\overline{(f(Z) - X)} = 0 \right\}$$

ko'rinishga ega bo'lgan sikil.

Isbot. Aytaylik, ushbu

$$C = \left\{ Z \in G : (\varepsilon - t\|X\|_s)^2 I + (f(Z) - tX)\overline{(f(Z) - tX)} = 0, 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

– $\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)$ -o'lchamli zanjir berilgan bo'lsin. Shunindek, $Z \in C$ uchun $\|f(Z) - tX\|_s = \varepsilon - t\|X\|_s$ tenglik o'rinli.

Ravshanki, $C \in \Omega_{f,r}$ bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $Z^0 \in G \setminus \overline{\Omega_{f,\varepsilon}}$ bo'lsa, u holda $\|f(Z^0)\|_s > \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\Omega_{f,r}$ ta'rifiga zid.

Shunday qilib, ushbu

$$\|f(Z^0) - tX\|_s \geq \|f(Z^0)\|_s - t\|X\|_s > \varepsilon - t\|X\|_s$$

tengsizlikka egamiz, bundan esa C – komakt zanjir ekanini kelib chiqadi.

Biz endi, agar Z nuqta C zanjirni $|C|$ tashuvchisidan bo'lsa, u holda $\det(f(Z) - X) \neq 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $Z \in |C|$ uchun $\det(f(Z) - X) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda shunday nolmas z' vektor mavjudki, $z'(f(Z) - X) = 0$ bo'ladi. Demak, quyidagi tengliklarni topamiz:

$$\overline{(f(Z) - tX)}(z')^* + (1 - t)\overline{X}(z')^* = 0, \quad z'(f(Z) - tX) + (1 - t)z'X = 0.$$

Bulardan esa ushbu

$$z'((\varepsilon - t\|X\|_s)^2 I + (1 - t)^2 X \overline{X})(z')^* = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishini topamiz, ya'ni

$$(1 - t)\|X\|_s = \varepsilon - t\|X\|_s$$

yoki

$$\|X\|_s = \varepsilon$$

ekan.

Bu esa lemma shatiga zid! Shunday qilib, $|C|$ tashuvchi G_* da yotibdi. Shuning uchun barcha $\delta < \varepsilon - \|X\|_s$ larda $\Gamma_{f-X, \delta}$ sikllar G_* da yotadi va gomologiya sikllar uchun ushbu

$$\Gamma_{f-X, \delta} \sim \Gamma_{f-X, \varepsilon - \|X\|_s} = \partial C - \Gamma_{f, \varepsilon}$$

munosabat o'rinli ekanini ko'ramiz, u holda bu oxirgi tenglikdan lemma o'rinli ekanini topamiz. Lemma isbot bo'ldi.

Aytaylik $f : D \rightarrow G$ akslantirish $D \subset \tilde{C}_Z [n \times n]$ sohani $G \subset \tilde{C}_W [n \times n]$ sohaga golomorf akslantirish bo'lib, $W^0 \in G$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Markazi W^0 nuqtada bo'lib, G sohada joylashgan, quyidagi $\Omega_r(W^0)$ uchinchi tur klassik sohani qaraymiz:

$$\Omega_r(W^0) = \left\{ W : r^2 I + (W - W^0) \overline{(W - W^0)} > 0 \right\} \in G.$$

1-teorema. Agar $H(Z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsa, u holda $\Omega_r(W^0)$ sohada ushbu

$$[Tr H](W) = c_n \int_{f, r} \frac{H df}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)} \quad (2)$$

integral formula o'rinli bo'ladi (juft n larda).

Bunda $\Gamma_{f, r} = \left\{ Z \in D : r^2 I + (f(Z) - W) \overline{(f(Z) - W)} = 0 \right\}$ va c_n o'zgarmas bilan differensiallash tartibi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$c_n \int_{\Gamma_{f, r}} \frac{df(Z)}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z))} = 1.$$

Isbot. Teoremani $W^0 = 0$ bo'lgan hol uchun isbotlaymiz. ([4], 26-sahifa) ishda keltirilgan 1-natijaga ko'ra deyarli barcha $W \in \Omega_r(W^0)$ nuqtalarda $f(Z) - W = 0$ tenglamalar sistemasi oddiy ildizga ega bo'ladi, ularni $Z^{(1)}(W), \dots, Z^{(\mu)}(W)$ kabi belgilab olamiz. Aytaylik, $U_\nu \subset D$ atroflar $Z^{(\nu)}(W)$ nuqtalarni keshishmaydigan atroflar oilasi bo'lsin va U_ν da $\Gamma_\nu = \Gamma_{f(Z)-W, \delta} = \left\{ Z \in D : \delta^2 I + (f(Z) - W) \overline{(f(Z) - W)} = 0 \right\}$ –sikl bo'lsin. U hola, izning ta'rifi va (1) Xua Lo-ken integral formulasiga ko'ra ushbu

$$[Tr H](W) = \sum_{\nu=1}^{\mu} c_n \int_{\Gamma_{Z^{(\nu)}(W), \delta}} \frac{H df(Z)}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)}.$$

formulaga egamiz.

Bundan tashqari 1-lemmaga ko'rsa (2) integral ostidagi formaning regulyarlik sohasida $\sum_{\nu=1}^{\mu} \Gamma_{\nu}$ yig'indi $\Gamma_{f,r}$ siklda gomologik bo'ladi. Shuning uchun Stoks formulasiga asosan, quyidagi

$$\sum_{\nu=1}^n c_n \int_{\Gamma_{Z^{(\nu)}(W),\delta}} \frac{Hdf}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)} = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{Hdf}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)}$$

tenglikni olamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Isbotlangan teoremadan foydalanib, maxsus ko'rinishdagi meromorf funksiyaning izi uchun integral formulani olamiz.

1-natija. $h(Z)$ funksiya D sohaning yopigida golomorf bo'lib, $J_f(Z)$ – chekli turdagi akslantirishning yakobiani bo'lsin. Unda $\Omega_r(W^0)$ sohada meromorf bo'lgan $H = h/J_f$ funksiyaning izi ushbu

$$[Tr h/J_f](W) = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(Z) \prod_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dz_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)} \tag{3}$$

integral formula orqali ifodalanadi(juft n larda).

Isbot. Haqiqatan ham, (2) formuladan $W \in \Omega_r(W^0)$ uchun ushbu

$$\begin{aligned} [Tr h/J_f](W) &= \sum_{\nu} h/J_f(Z^{(\nu)}(W)) = \\ &= \sum_{\nu} c_n \int_{\Gamma_{Z^{(\nu)}(W),\delta}} \frac{h \prod_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dz_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)} = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h \prod_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dz_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - W)}. \end{aligned}$$

formulani olamiz. Bu esa natijani isbotlaydi.

Hisoblashlarga ko'ra, (3) integral formulaning yadrosi Z bo'yicha golomorf, u holda ushbu $[Tr h/J_f](W)$ iz $\Omega_r(W^0)$ da golomorf funksiya bo'ladi. Bu oxirgi natija $\Omega_{f,r}$ matritsaviy poliedrda h/J_f meromorf funksiya uchun Bishop integral formulasini olish imkonini beradi.

2-teorema. Agar $h(Z) \in \mathcal{O}(\Omega_{f,r}) \cap C(\overline{\Omega_{f,r}})$ bo'lib, $Z \in \Omega_{f,r}$ nuqtada $-J_f(Z) \neq 0$ bo'lsa, u holda h/J_f meromorf funksiya uchun

$$\frac{h(Z)}{J_f(Z)} = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X) \Psi(Z, X) \prod_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dx_{ij}}{\Psi(Z, Z) \det^{\frac{n-1}{2}}(f(X) - f(Z))}$$

integral formula o'rinli bo'ladi.

Isbot. Izning ta'rifiga asosan, (3) integral $W = f(X)$ bo'lgandagi qiymati h/J_f funksiyaning $Z = X$ nuqtadagi qiymati qo'shilgan $X^{\nu}(Z)$, $\nu = 2, \dots, \mu$ nuqtalardagi qiymatlarining yig'indisiga teng. Bu yerda $X^{\nu}(Z)$, $\nu = 2, \dots, \mu$ nuqtalar $W = f(X)$ nuqtadagi proobrazlardir. Endi, quyidagi shartni qanoatlantiruvchi vaznli $\Psi(X, Z) \neq 0$ funksiyani tuzamiz: ushbu

$$\Omega_{f,r} = \left\{ Z \in D : r^2 I^{(n)} + f(Z) \overline{f(Z)} > 0 \right\} \Subset D$$

matritsaviy poliedrdan olingan barcha fiksirlangan X lar uchun $\Psi(X, Z)$ funktsiya X nuqtadan boshqa $Z = X^{(\nu)}(f(X))$ nuqtalarda nolga teng.

Bunday funksiya mavjud. Faraz qilaylik, $W^0 - f$ akslantirishning kritik bo'lmagan qiymati va $g(z)$ –chiziqli funksiya bo'lsin, ya'ni $g(X^{\nu}(W^0))$ –turlicha bolsin. U holda quyidagicha determinant funksiyani aniqlashimiz mumkin

$$\Psi(\xi, z) = \prod_{\nu=2}^{\mu} [g(z^{(\nu)}) - g(\xi)] \tag{4}$$

bu yerda tartib raqami $X^{(\nu)} = X^{(\nu)}(Z)$ asllar shunday tartiblanganki bunda $X^{(1)}(Z) = Z$ bo'ladi. Ravshanki, $[g(X^{(2)}(Z))]^k + \dots + \dots + [g(X^{(\mu)}(Z))]^k$ yig'indi, $[g(Z)]^k$ golomorf bo'lgani uchun golomorf bo'ladi. Shunday qilib, (4) munosabatning birinchi ko'paytuvchisi koeffitsiyentlari Z ga bog'liq $g(X)$ ga bog'liq ko'phad bo'ladi. Bu ifodaning ikkinchi ko'paytuvchisi esa birinchi ko'paytuvchidan simmetrik qilib $X = Z$ bo'lganda $g(Z^{(\nu)}(f(Z)))$, $\nu = 2, \dots, \mu$ bo'lganda birinchi ko'paytuvchidan olinadi. Bundan esa uning Z bo'yicha golomorfligi kelib chiqadi. Endi X va Z o'zgaruvchilarni o'rnini almashtirib, ushbu

$$\Psi(Z, X) = \sum_{k=1}^{\mu-1} c_k(X)g^k(Z),$$

munosabatni olamiz, bu yerda $c_k(X)$ koeffitsiyentlar $\bar{\Omega}_{f,r}$ poliedr yopig'ida golomorf funksiyalardir. Tuzilishiga ko'ra $X^{(\nu)}(Z) \neq Z$ nuqtalar uchun $\Psi(Z, X^{(\nu)}(Z)) = 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi natija va $\Psi(Z, X)$ vaznli funksiyaning qurilishi $\Omega_{f,r}$ sohadagi h/J_f meromorf funksiyalar uchun Bishop integral formulasini olish imkonini beradi. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} & \sum_v \frac{h(Z^{(v)}(X)) \Psi(Z, Z^{(v)}(X))}{J_f(Z^{(v)}(X))} = \\ &= \frac{h(Z)\Psi(Z, Z)}{J_f(Z)} + \frac{h(Z^{(2)}(X)) \Psi(Z, Z^{(2)}(X))}{J_f(Z^{(2)}(X))} + \dots = \\ &= \frac{h(Z)\Psi(Z, Z)}{J_f(Z)} = \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X)\Psi(Z, X) \bigwedge_{\substack{i=1, j=2 \\ i < j}}^n dx_{ij}}{\det^{\frac{n-1}{2}}(f(Z) - f(X))}. \end{aligned}$$

Teorema isbot bo'ldi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., изд. инст. лит., 1959.
2. Айзенберг Л.А. Формула Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения, "Наука", Новосибирск, 1990, 248 с.
3. Худайбергенов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях, Монография. Красноярск, Ташкент, 2017, с. 293
4. Цих А.К., Многомерные вычеты и их применения, Новосибирск: Наука, 1988. -240 с.

Rezyume

In this paper, a matrix polyhedron is defined using the classical domain of the third type. In the defined polyhedron, the homological closedness of cycles and the Bishop integral formula are obtained.

Key words: Skew-symmetric matrices, classical domain of the third type, matrix polyhedron, holomorphic functions and mappings of matrix argument, homological cycles, integral formula, Bishop integral formula.

Rezyume

В данной статье с помощью классической области третьего типа определен матричный полиэдр. В определённом полиэдре получена гомологическая замкнутость циклов, а также выведена интегральная формула Бишоп.

Ключевые слова: кососимметрические матрицы, классическая область третьего типа, матричный полиэдр, голоморфные функции и отображения матричного аргумента, гомологические циклы, интегральная формула, интегральная формула Бишоп.

UDC 519.214.5

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR AUTOREGRESSIVE PROCESSES WITH VALUES IN $L_p[0, 1]$

MUXTOROV IBROHIM G‘AYBULLA O‘G‘LI

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES, TASHKENT,
UZBEKISTAN
igmuxtorov@gmail.com

RESUME

In this paper, first-order autoregressive processes with values in the function space $L_p[0, 1]$ are examined. Under two weak-dependence assumptions imposed on the innovations, a central limit theorem for these AR(1)-processes is established.

Key words: Central limit theorem, autoregressive process, mixing condition.

1. Introduction

Autoregressive dynamics in infinite-dimensional settings have been studied extensively over the past years, and various aspects of such models have been explored in a number of works; see, for instance, [1]-[6]. Earlier research, including [3] and [4], focused on AR(1)-processes under independence or under weakly orthogonality assumptions. Later, the authors of [5] investigated the asymptotic behavior of the empirical mean and covariance operator when the noise variables exhibit weak dependence. Models of AR(1) in the space $L_p[0, 1]$ naturally arise in functional data analysis, where observations themselves are functions rather than real numbers. Several motivating examples and applications illustrating this setting can be found in reference [3].

In the present work, we consider an AR(1)-process $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ defined through the recursion

$$X_n - m = T(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

where $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ is a bounded linear operator, $m \in L_p[0, 1]$ is a fixed element (interpreted as the mean), and $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ is a sequence of innovations. Throughout this paper, $\|T\|$ denotes the norm of the linear operator $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$, and $I : L_p[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ stands for the identity operator.

Throughout the paper we assume that the innovation sequence satisfies certain mixing conditions. Let $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ be an $L_p[0, 1]$ -valued stochastic process, and let \mathcal{F}_r^s denote the σ -algebra generated by the random vector $(X_r(t), \dots, X_s(t))$. The classical mixing coefficients are defined as follows:

$$\alpha(n) = \sup \{ |P(GH) - P(G)P(H)| : G \in \mathcal{F}_{-\infty}^k, H \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\rho(n) = \sup \left\{ \frac{|E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)|}{E^{1/2}(\xi - E\xi)^2 E^{1/2}(\eta - E\eta)^2} : \xi \in L_2(\mathcal{F}_{-\infty}^k), \eta \in L_2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

where $L_2(\mathcal{F}_a^b)$ is family of square integrable \mathcal{F}_a^b -measurable random variables.

The sequence $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ is called α -mixing or ρ -mixing if $\alpha(n) \rightarrow 0$ or $\rho(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, respectively.

The author in [7] introduced modifications to the coefficients discussed above. For the $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$, the modification of α -mixing coefficients is defined as follows:

$$\alpha_m(n) = \sup_{\Pi_m} \sup \{ |P(GH) - P(G)P(H)| : G \in \mathcal{F}_{-\infty}^k(m), H \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty(m), k \in \mathbb{Z} \}$$

where $\mathcal{F}_r^s(m)$ is the σ -algebra generated by random vector $(\Pi_m X_r(t), \dots, \Pi_m X_s(t))$ and $\Pi_m : L_p[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a projective operator, i.e.,

$$\Pi_m X_j(t) = (X_j(t_1), \dots, X_j(t_m)), \quad t_j \in [0, 1].$$

The coefficients $\rho_m(n)$ are defined analogously.

The sequence $\{X_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ is called α_m -mixing or ρ_m -mixing if $\alpha_m(n) \rightarrow 0$ or $\rho_m(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, respectively, for any fixed $m = 1, 2, \dots$. It is important to note that, in general, α_m -mixing does not necessarily imply α -mixing.

The properties of mixing coefficients were thoroughly analyzed in [8]-[10].

2. Main results

It is assumed in Theorems 1, 3 and 5 that there exist the real numbers $u > 0$ and $0 < v < 1$ satisfying

$$\|T^j\| \leq uv^j, \quad j \geq 0. \tag{6}$$

Theorem 1. *Let $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be an AR(1)-process and $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be a ρ_m -mixing strictly stationary centered sequence of L_p -valued $1 < p < 2$ random variables satisfying $E\|\varepsilon_1\|^2 < \infty$. If the following conditions hold*

$$E|\varepsilon_1(t)|^2 < \infty, \quad t \in [0, 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_m(2^n) < \infty, \quad \rho_m(1) < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

$E|\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^2 \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. Then the following weak convergence holds

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow (I - T)^{-1} N_K(t)$$

where $N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} cov\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(y)\right)$, where $x, y \in [0, 1]$.

Proof of Theorem 1. We begin by simplifying the recursion through a centering. Since subtracting the mean does not affect weak convergence, we may assume without loss of generality that $m = 0$. Hence, the process $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ satisfies

$$X_n = T(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A key decomposition, which appears for instance in [4], is given by

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k = (I - T)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k - \frac{1}{\sqrt{n}} (I - T)^{-1} \sum_{i=1}^n T^i(\varepsilon_{n-i+1}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n T^k(X_0). \tag{7}$$

Since the assumption (1) we can estimate

$$\left\| \sum_{k=1}^n T^k(X_0) \right\| \leq \|X_0\| \sum_{k=1}^{\infty} uv^k < \infty.$$

Consequently,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n T^k(X_0) \rightarrow 0 \quad \text{in probability.} \tag{8}$$

For the second term in (2), we use the triangle inequality:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n T^i(\varepsilon_{n-i+1}) \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \|\varepsilon_i\| \sum_{i=1}^n \|T^i\|.$$

The innovations satisfy $E\|\varepsilon_1\|^2 < \infty$, hence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n} \|\varepsilon_i\| \rightarrow 0 \quad \text{almost surely.} \tag{9}$$

Since $\sum_{i=1}^{\infty} \|T^i\| < \infty$ and (4), it follows that

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n T^i(\varepsilon_{n-i+1}) \longrightarrow 0 \quad \text{in probability.} \tag{10}$$

Theorem 2 given below guarantees the weak convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \Rightarrow N_K(t), \tag{11}$$

where $N_K(t)$ is an $L^p[0, 1]$ -valued Gaussian random element with covariance function

$$K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(x), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(y) \right).$$

Combining (3), (5), and (6) with the representation (2), the continuous mapping theorem yields

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \Rightarrow (I - T)^{-1} N_K(t).$$

Theorem 2. [11] *Let $\{\varepsilon_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ be a strictly stationary centered sequences of random variables with values in $L_p[0, 1]$, $1 < p < 2$. If the following conditions hold*

$$E |\varepsilon_1(t)|^2 < \infty, \quad t \in [0, 1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_m(2^n) < \infty, \quad \rho_m(1) < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

$E |\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^2 \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. Then the following weak convergence holds

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \Rightarrow N_K(t)$$

$N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(S_n(x), S_n(y))$, where $x, y \in [0, 1]$.

□

In the next theorem, we consider the case $L_p, 2 \leq p < \infty$.

Theorem 3. *Let $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be an $AR(1)$ -process and $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be a ρ_m -mixing strictly stationary centered sequence of L_p -valued $2 \leq p < \infty$ random variables satisfying $E \|\varepsilon_1\|^2 < \infty$. Assume that the following conditions hold for some $\alpha > 0$*

$$E |\varepsilon_1(t)|^2 < \infty, \quad t \in [0, 1],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_m^{\frac{2}{p+\alpha}}(2^n) < \infty, \quad \rho_m(1) < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

$E |\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^{p+\alpha} \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

Then the following weak convergence holds

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow (I - T)^{-1} N_K(t)$$

where $N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(y) \right)$, where $x, y \in [0, 1]$.

Proof of Theorem 3. The proof of Theorem 3 is analogous to that of Theorem 1, except that Theorem 4 given below is used in place of Theorem 2; therefore, we omit the details.

Theorem 4. [11] Let $\{\varepsilon_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ be a strictly stationary centered sequences of random variables with values in $L_p[0, 1]$, $2 \leq p < \infty$. If for some $\alpha > 0$

$$E |\varepsilon_1(t)|^2 < \infty, t \in [0, 1],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_m^{\frac{2}{p+\alpha}}(2^n) < \infty, \rho_m(1) < 1, m = 1, 2, \dots$$

$E |\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^{p+\alpha} \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

Then the following weak convergence holds

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \Rightarrow N_K(t)$$

where $N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} cov(S_n(x), S_n(y))$, where $x, y \in [0, 1]$. □

In the following theorem, the case where the sequence of innovations is α_m -mixing is considered.

Theorem 5. Let $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be an AR(1)-process and $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ be an α_m -mixing strictly stationary centered sequence of L_p -valued $1 \leq p \leq 2$ random variables satisfying $E \|\varepsilon_1\|^2 < \infty$. Assume that the following conditions hold for some $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty, m = 1, 2, \dots$$

$E |\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^{2+\delta} \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

for all $t \in [0, 1]$

$$E |\varepsilon_1(t)|^{2+\delta} < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \right)^2 > 0.$$

Then the following weak convergence holds

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow (I - T)^{-1} N_K(t)$$

where $N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} cov \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(y) \right)$, where $x, y \in [0, 1]$.

Proof of Theorem 5. The proof of Theorem 5 is analogous to that of Theorem 1, except that Theorem 6 given below is used in place of Theorem 2; therefore, we omit the details.

Theorem 6. [11] Let $\{\varepsilon_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ be a strictly stationary centered sequences of random variables with values in $L_p[0, 1]$, $1 < p \leq 2$ and for some $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m(n))^{\frac{\delta}{2+\delta}} < \infty, m = 1, 2, \dots$$

$E |\varepsilon_1(t+h) - \varepsilon_1(t)|^{2+\delta} \leq f(h)$ for $0 \leq h < 1, 0 \leq t \leq 1-h$, for some function $f(\cdot)$ such that $f(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$.

for all $t \in [0, 1]$

$$E |\varepsilon_1(t)|^{2+\delta} < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ES_n^2(t) > 0.$$

Then the following weak convergence holds

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \Rightarrow N_K(t)$$

where $N_K(t)$ is $L_p[0, 1]$ -valued Gaussian random variable with mean zero and covariance function $K(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(S_n(x), S_n(y))$, where $x, y \in [0, 1]$. □

REFERENCES

1. Allam A., Mourid T., Geometric absolute regularity of Banach space-valued autoregressive processes. *Statistics and Probability Letters*. **60** (2002), 241-252.
2. Bensaber F., Mourid T., Functional autoregressive process with seasonality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. **60** (2022), 7131-7145.
3. Bosq D., Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications (book). *Springer, New York* (2000).
4. Bosq D., Estimation of mean and covariance operator of autoregressive processes in Banach spaces. *Statist. Infer. Stoch. Process*. **5** (2002), 287-306 .
5. Dehling H., Sharipov O.Sh., Estimation of mean and covariance operator for Banach space valued autoregressive processes with dependent innovations. *Statist. Infer. Stoch. Process*. **8** (2005), 137-149.
6. Parvardeh A., Mohammadi Jouzdani N., Mahmoodi S., Soltani A.R., First order autoregressive periodically correlated model in Banach spaces: Existence and central limit theorem. *J. Math. Anal. Appl.* **449** (2017), 756-768.
7. Zhurbenko I.G., On mixing conditions for random processes with values in a Hilbert space. *Soviet Math. Dokl.* **30** (1984), 465-467 (In Russian)
8. Bradley R.C., Introduction to Strong Mixing Conditions (book). *Kendrick Press, Heber City(Utah)* (2007).
9. Doukhan P., Mixing: Properties and Examples (book). *Springer, New York* (2012).
10. Ibragimov I.A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables (book). *Wolters-Noordhoff, Groningen* (1971).
11. Sharipov O.Sh., Muxtorov, I.G., Central limit theorem for weakly dependent random variables with values in $L_p[0, 1]$ space. *Uzbek Mathematical Journal*. **67** (2023), 166-171.

REZYUME

Ushbu maqolada $L_p[0, 1]$ funksiyalar fazosida qiymat qabul qiluvchi birinchi tartibli avtoregressiv jarayonlar o'rganilgan. Innovatsiyalarga qo'yilgan ikki kuchsiz bog'liqlik shartlarida ushbu AR(1) jarayonlar uchun markaziy limit teorema isbotlangan.

Kalit so'zlar: Markaziy limit teorema, avtoregressiv jarayon, qorishmalilik sharti.

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматриваются авторегрессионные процессы первого порядка, принимающие значения в функциональном пространстве $L_p[0, 1]$. При двух предположениях о слабой зависимости, наложенных на инновации, устанавливается центральная предельная теорема для этих AR(1)-процессов.

Ключевые слова: Центральная предельная теорема, авторегрессионный процесс, условие перемешивания.

UDC 517.44

**IKKINCHI TIP KLASSIK SOHALARDA LAPLAS ALMASHTIRISHI, TESKARI
LAPLAS ALMASHTIRISH FORMULASI VA TASVIR FUNKSIYANING
GOLOMORFLIGI HAQIDAGI TEOREMANING ANALOGI**

RAJABOV SHOXRUX SHUXRAT O'G'LI

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI, TOSHKENT, O'ZBEKISTON
sh.sh.rajabov@gmail.com

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqolada biz Operatsion hisobning asosiy tushunchalari tasvir va original funksiyalar orasidagi bog'lanishlarni, xususan ikkinchi tip klassik sohalar uchun Laplas almashtirishi, teskari Laplas almashtirishi hamda muhim teoremlaridan biri bo'lgan, ya'ni *matritsaviy tasvir funksiyaning golomorfligi haqidagi* teoremaning analogini quramiz. Buning uchun eng avvalo asosiy ta'rif va tushunchalarni kiritib olamiz. Ma'lumki klassik sohalar bir-biri bilan o'zaro bigolomorf ekvivalent munosabatga ega emas, shu sababli ularning har biri uchun kompleks analiz alohida-alohida quriladi. Shuning uchun bu maqolada faqat simmetrik Ermit matritsalar sinfiga tegishli bo'lgan ikkinchi tip klassik sohalar Laplas almashtirishining analoglarini olish bilan shug'ullanamiz. Keyingi ilmiy izlanishlarimizda birinchi tip to'g'ri to'rtburchak matritsalar sinfiga tegishli va uchinchi tip antisimmetrik matritsalar sinfiga tegishli matritsa-funksiyalar uchun Laplas almashtirishining analoglarini olishga harakat qilamiz.

Kalit so'zlar: bir jinsli soha, simmetrik soha, keltirilmaydigan soha, klassik soha, ikkinchi tip klassik soha, matritsaviy original, matritsaviy tasvir, matritsa-funksiya, matritsa izi, Laplas almashtirishi, tasvirning golomorfligi haqidagi teorema, teskari Laplas almashtirish formulasi, matritsaviy o'ng yarim tekislik, Koshi integral formulasi, golomorf funksiya, originalning yagonaligi haqidagi teorema.

Fransuz matematigi E. Kartan tomonidan 1935-yilda keltirilmaydigan, chegaralangan, simmetrik sohalar sinflarining oltita tipi borligi ko'rsatilgan [1]. Shu sinflardan dastlabki to'rttasiga tegishli bo'lgan sohalar klassik sohalar deyiladi [2].

1-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning avtomorfizmlar gruppasi tranzitiv, ya'ni ixtiyoriy $z_1, z_2 \in D$ uchun $\varphi(z_1) = z_2$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $\varphi \in \text{Aut}(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lsa, u holda $D \subset \mathbb{C}^n$ soha **bir jinsli** soha deyiladi.

2-ta'rif. Agar bir jinsli $D \subset \mathbb{C}^n$ sohadagi ixtiyoriy $\zeta \in D$ nuqtasi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi shunday $\varphi \in \text{Aut}(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lsaki:

- 1) $\varphi(\zeta) = \zeta$ tenglik o'rinli bo'lsin, biroq ζ nuqtadan farqli $z \in D$ nuqtalar uchun $\varphi(z) \neq z$ bo'lsin;
- 2) $\varphi \circ \varphi = e$, bu yerda $e \in \text{Aut}(D)$ ayniy akslantirish; u holda $D \subset \mathbb{C}^n$ **simmetrik soha** deyiladi.

3-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohani o'lehami undan kichik chegaralangan simmetrik sohalarning to'g'ri kopaytmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lmasa, u holda $D \subset \mathbb{C}^n$ **keltirilmaydigan soha** deyiladi.

4-ta'rif. Agar chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning avtomorfizmlar gruppasi tranzitiv bo'lsa va Li gruppasi tashkil qilsa u holda $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaga **klassik soha** deyiladi.

Quyida E. Kartan tasniflagan klassik sohalarni keltiramiz [2]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_I(m, k) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m, k] : I^{(m)} - ZZ^* > 0 \right\}, \\ \mathfrak{R}_{II}(m) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m, m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{III}(m) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m, m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = -Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{IV}(n) &= \left\{ Z \in \mathbb{C}^n : |\langle z, z \rangle|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, |\langle z, z \rangle| < 1 \right\}, \end{aligned}$$

bu yerda $I^{(m)}$ m -tartibli birlik matritsa, Z^* matritsa esa matritsaning qo'shmasi va transponirlanganidir (H Ermit matritsasi uchun: $H > 0$ belgi uning musbat aniqlangan matritsa ekanligini bildiradi, ya'ni uning barcha xos sonlari musbat: $\det |\lambda I - H| = 0 \Rightarrow \forall \lambda_i > 0$).

Bu sohalar har biri markazi O (m -tartibli nol matritsa) nuqtada bo'lgan bir jinsli, simmetrik, keltirilmaydigan, to'la doiraviy qavariq sohalaridir. Bu sohalar bir-birlari bilan o'zaro bigolomorf ekvivalent munosabat o'ranatmaydi, shu sababli ularning har biri uchun kompleks analiz alohida quriladi.

Biz ushbu tadqiqot ishimizni $\mathfrak{R}_{II}(m) = \{Z \in \mathbb{C}[m, m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z\}$ ikkinchi tip klassik sohalarida olib boramiz.

Bizga $f : S_m \rightarrow S_m$ ($A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m] \mid f(A) = f(UAU') \in S_m$) (bu yerda, S_m -haqiqiy simmetrik matritsalar sinfi, $UU' = I$ -ortogonal matritsalar) matritsa argumentli simmetrik matritsa-funksiya berilgan bo'lsin [4].

5-ta'rif. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f(A)$ funksiyaga **matritsaviy original** deyiladi:

I. $A < 0$ da $f(A) \equiv 0$ (bu yerda, $A < 0$ munosabatni A matritsaning har bir elementi 0 dan kichik deb tushuniladi);

II. $\forall A \in S_m$ uchun $f(A)$ matritsa-funksiya haqiqiy matritsa argumentli matritsaviy o'ng yarim tekislikdan olingan $\Upsilon = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}[m \times m] : \forall a_{ij} \geq 0\}$ sohada uzluksiz yoki bo'lakli uzluksiz (ya'ni $\forall X_0 \in \Upsilon : \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$ yoki n_0 ($n_0 \leq m$) –chekli sondagi I tur uzilish nuqtalariga ega);

III. $\forall A \in S_m$ uchun $\exists M > 0$ va $\alpha \geq 0$ sonlar topiladiki $|f(A)| \leq M \cdot e^{\alpha A}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi (bu yerda, $|f(A)|$ deb har bir elementi $f(A)$ simmetrik matritsa-funksiya elementining moduliga teng deb tushuniladi).

Endi yuqorida berilgan 5-ta'rif asosida matritsaviy tasvirning ta'rifini keltiramiz.

6-ta'rif. $f(A)$ matritsaviy originalning ikkinchi tip klassik sohada aniqlangan **matritsaviy tasviri** deb, $Z = X + iY$ ($Z \in \mathfrak{R}_{II}(m)$) o'zgaruvchining

$$F(Z) = \mathcal{L}_Z \{f(A)\} = \int_{A>0} e^{-Sp(ZA)} f(A) dA \quad (1)$$

integrali bilan aniqlanadigan matritsa argumentli funksiyaga aytiladi. Bu yerda, $A = (a_{ij})$ uchun $dA = \prod_{i \leq j} da_{ij}$ kabi aniqlanadi, $Sp(ZA) = \sum_{i \geq j} z_{ij} \cdot a_{ij}$ – matritsa izi.

1-izoh. (1) munosabatda $Z = (\eta_{ij} z_{ij})$ kabi aniqlanadigan kompleks parametrik matritsa bo'lib, matritsa elementlarining old koeffitsientlari (η_{ij} o'zgarimas koeffitsientlar) quyidagicha aniqlanadi [5]:

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (2)$$

7-ta'rif. (1) formula orqali matritsaviy originaldan matritsaviy tasvirga o'tishga ikkinchi tip klassik sohada $\mathfrak{R}_{II}(m)$ aniqlangan **Laplas almashtirishi** deyiladi.

2-izoh. $f(A)$ matritsaviy original bilan $F(Z)$ matritsaviy tasvir orasidagi moslik $F(Z) \dot{\rightarrow} f(A)$ yoki $f(A) \dot{\leftarrow} F(Z)$ kabi belgilanadi [10-12]. Bu yerda, “ $\dot{\rightarrow}$ ” belgining yo'nalishi umumiylikka zid kelmagan holda har doim matritsaviy tasvirdan matritsaviy originalga tomon yo'nalgan bo'ladi. Shuningdek, $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$ kabi belgilash munosabatidan ham foydalaniladi [4-5].

1-teorema (*tasvirning golomorfliqi haqidagi teorema*). Agar $f(A)$ matritsaviy original uchun (1) Laplas almashtirish munosabati bilan aniqlangan $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiya mavjud bo'lsa: $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$, u holda $F(Z)$ funksiya matritsaviy o'ng yarim tekislikdan $\Upsilon = \{Z \in \mathfrak{R}_{II}(m) : \text{Re } Z = X > X_0 > 0\}$ olingan Z matritsa o'zgaruvchining golomorf funksiyasi bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\forall Z \in \Upsilon = \{Z \in \mathfrak{R}_{II}(m) : \text{Re } Z = X > X_0 > 0\}$ nuqtada $F(Z)$ funksiya (1) Laplas almashtirishi yordamida aniqlangan $f(A)$ matritsaviy originalning tasvir funksiyasi berilgan bo'lsin. Ya'ni $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$ bo'lsin.

Ma'lumki matritsaviy-eksponentsial $e^{Sp(-ZA)}$ ham o'z navbatida original funksiya tashkil qilib, u uchun quyidagi baholash o'rinli bo'ladi:

Fikserlangan $Z \in \mathfrak{R}_{II}(m)$ hamda $\forall A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m]$ uchun $\exists C > 0$ va $\frac{\alpha}{2} \geq 0$ haqiqiy sonlar topiladiki, $\sigma := \min_i \sigma_i > \frac{\alpha}{2}$ (bu yerda $\sigma_i = \lambda_i(Z) - Z$ matritsaning xos sonlari) son uchun

$$\left| e^{-Sp(ZA)} \right| \leq C \cdot e^{-(\sigma - \frac{\alpha}{2}) \cdot Sp(A)}. \quad (3)$$

Ikkinchi tomondan $f(A)$ matritsaviy original haqidagi 5-ta'rif III shartga ko'ra $\forall A \in S_m \subset \mathbb{R}[m \times m]$ uchun $\exists M > 0$ va $\frac{\alpha}{2} \geq 0$ sonlar topiladiki

$$|f(A)| \leq M \cdot e^{\frac{\alpha}{2} \cdot Sp(A)} \quad (4)$$

baholash o'rinli bo'ladi. (3) va (4) baholashlarga ko'ra:

$$\begin{aligned} \left| f(A) \cdot e^{-Sp(ZA)} \right| &\leq |f(A)| \cdot C \cdot e^{-(\sigma - \frac{\alpha}{2}) \cdot Sp(A)} \leq \\ M \cdot e^{\frac{\alpha}{2} \cdot Sp(A)} \cdot C \cdot e^{-(\sigma - \frac{\alpha}{2}) \cdot Sp(A)} &= K \cdot e^{-(\sigma - \alpha) \cdot Sp(A)}, \end{aligned} \quad (5)$$

bu yerda $M \cdot C = K$.

Oxirgi hosil qilingan $e^{-(\sigma - \alpha) \cdot Sp(A)}$ majorant funksiya integrali:

$$\int_{A>0} e^{-(\sigma - \alpha) Sp(A)} dA < +\infty$$

yaqinlashuvchi, bundan kelib chiqadiki (1) integral absolyut va tekis yaqinlashuvchi ekan. Bu esa bizga (1) integralni differensiallasak integral ostiga differensialni kiritish imkonini beradi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} F(Z) &= \frac{\partial}{\partial Z} \left[\int_{A>0} e^{-Sp(ZA)} f(A) dA \right] = \int_{A>0} \frac{\partial}{\partial Z} e^{-Sp(ZA)} f(A) dA = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial Z} Sp(ZA) = A \right] = - \int_{A>0} A \cdot e^{-Sp(ZA)} f(A) dA. \end{aligned}$$

Demak, $F(Z)$ tasvir funksiyadan $\forall Z \in \Upsilon = \{Z \in \mathfrak{R}_{II}(m) : \operatorname{Re} Z = X > X_0 > 0\}$ nuqtada kompleks analiz ma'nosida differensial mavjud. Z ixtiyoriy ekanligidan $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiya $\Upsilon = \{Z \in \mathfrak{R}_{II}(m) : \operatorname{Re} Z = X > X_0 > 0\}$ sohada golomorf bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2-teorema (*teskari Laplas almashtirish formulasi*). Agar ikkinchi tip klassik sohadan $\mathfrak{R}_{II}(m) = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z\}$ olingan $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiya

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(X + iY)| dY < +\infty \quad (6)$$

ixtiyoriy $X > X_0 > 0$ uchun

$$\lim_{X \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(X + iY)| dY = 0 \quad (7)$$

bo'lib, $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$ bo'lsa, u holda $f(A)$ differensiallanuvchi bo'lgan har bir nuqtada

$$f(A) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\operatorname{Re} Z > 0} e^{Sp(ZA)} F(Z) dZ \quad (8)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Quyidagicha belgilanadi: $\mathcal{L}^{-1}(F(Z)) = f(A)$.

3-izoh. Shuni ta'kidlashimiz lozimki, (8) integral munosabatda $Z = (\eta_{ij} z_{ij})$, $\eta_{ij} = 1$ deb qaralmoqda.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$, bundan kelib chiqadiki teskari Laplas almashtirish munosabati uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lishi kerak:

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}_Z \{f(A)\}) = \mathcal{L}^{-1}(F(Z)) \Rightarrow f(A) = \mathcal{L}^{-1}(F(Z)). \quad (9)$$

(9) munosabatga ko'ra:

$$f(A) = \mathcal{L}^{-1} \left(\int_{A>0} e^{-Sp(ZA)} f(A) dA \right). \quad (10)$$

Yuqorida isbot qilingan 1-teoremadan kelib chiqadiki $F(Z)$ matritsaviy tasvir funksiya ikkinchi tip klassik sohada aniqlangan matritsaviy o'ng yarim tekislikda $\Upsilon = \{Z \in \mathfrak{R}_{II}(m) : \operatorname{Re} Z = X > X_0 > 0\}$ golomorf, ikkinchi tomondan teorema shartlari (6) va (7) ga ko'ra sohaning yopig'ida $\bar{\Upsilon}$ uzluksiz bo'ladi. Ya'ni $F(Z) \in \mathcal{O}(\Upsilon) \cap C(\bar{\Upsilon})$. Bu esa bizga matritsa argumentli funksiyalar uchun Koshi integral formulasini qo'llash imkonini beradi:

$$\frac{1}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\operatorname{Re} Z > 0} e^{Sp(ZA)} F(Z) dZ = \begin{cases} f(A), & \text{agar } A > 0 \\ O, & \text{agar } A \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Demak, (10) va (11) munosabatlardan kelib chiqadiki:

$$f(A) = \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\operatorname{Re} Z > 0} e^{Sp(ZA)} F(Z) dZ. \quad (12)$$

Agar (2) formulada $Z = (\eta_{ij} z_{ij})$ uchun $\eta_{ij} = 1$ deb olsak, u holda (15) integralda $2^{\frac{m(m+1)}{2}}$ o'zgarmas koeffitsient hosil bo'ladi. U holda quyidagi integral munosabatga ega bo'lamiz:

$$f(A) = \frac{2^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}m(m+1)}} \int_{\operatorname{Re} Z > 0} e^{Sp(ZA)} F(Z) dZ.$$

Teorema isbotlandi.

4-izoh. Shuni ham ta'kidlash lozimki, $\mathcal{L}^{-1}(F(Z)) = f(A)$ munosabat bilan $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$ munosabatlar o'zaro teng kuchli munosabatlardir: $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z) \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(Z)) = f(A)$.

1-lemma. $F(Z) \in \mathfrak{R}_{II}(m)$ matritsaviy tasvir uchun quyidagi chiziqlilik munosabatlari o'rinli bo'ladi:

I. agar $c = \text{const}$ va $\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = F(Z)$ bo'lsa, u holda

$$\mathcal{L}_Z \{f(A)\} = cF(Z), \quad (13)$$

II. agar $\mathcal{L}_Z \{f_1(A)\} = F_1(Z)$ va $\mathcal{L}_Z \{f_2(A)\} = F_2(Z)$ bo'lsa, u holda

$$\mathcal{L}_Z \{f_1(A) + f_2(A)\} = F_1(Z) + F_2(Z). \quad (14)$$

Isbot. Lemmaning isboti bevosita integrallashda o'zgarmasni integral belgisidan tashqariga chiqarish va chiziqlilik xossalardan kelib chiqadi.

3-teorema (*originalning yagonaligi haqidagi teorema*). Agar $F(Z) \in \mathfrak{R}_{II}(m)$ matritsaviy tasvir funksiya $f_1(A)$ va $f_2(A)$ matritsaviy originallarning tasviri bo'lsa, u holda bu originallar o'zlarining barcha uzluksiz nuqtalarida ustma-ust tushadi. Ya'ni $f_1(A) \equiv f_2(A)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra: $\mathcal{L}_Z \{f_1(A)\} = F(Z)$ va $\mathcal{L}_Z \{f_2(A)\} = F(Z)$. Matritsaviy tasvir funksiyaning chiziqlilik xossasidan foydalanib quyidagi munosabatni hosil qilamiz: $\mathcal{L}_Z \{f_1(A) - f_2(A)\} = F(Z) - F(Z) = 0$. Bundan kelib chiqadiki $f_1(A) \equiv f_2(A)$. Teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Cartan E. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes. - Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1935, vol. 11, pp. 116-162.
2. Hua Loo-Keng. Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical domains. - Moscow: Inostr. Lit., 1959.
3. Laplace P.-S. Des fonctions generatrices. - In: Theorie analytique des probabilités, Paris, 1814, chap. I, sect. 2-20.

4. Joshi R.M., Joshi J.M.C. Generalized Laplace transform with matrix variables. - Int. J. Math. Math. Sci., 1987, vol. 10, no. 3, pp. 503-512.
5. Mathai A.M., Provost S.B. Some properties of matrix-variate Laplace transforms and matrix-variate Whittaker functions. - Linear Algebra Appl., 1997, vol. 253, pp. 209-226.
6. Herz C.S. Bessel functions of matrix argument. - Ann. Math., 1955, vol. 61, pp. 474-523.
7. Yaremko O.E., Zababurin K.R. Matrix Laplace transform. - Bol. Soc. Mat. Mex., 2023, vol. 29, art. 86.
8. Sastre J., Defez E., Jodar L. Application of Laguerre matrix polynomials to the numerical inversion of Laplace transforms. - Appl. Math. Lett., 2011, vol. 24, pp. 1527-1532.
9. Rani D., Mishra V., Cattani C. Numerical inversion of Laplace transform based on Bernstein operational matrix. - Math. Methods Appl. Sci., 2018.
10. Rajabov Sh.Sh. Simmetrik matritsa argumentli funksiyalar uchun o'rama tushunchasi va uning xossalari. - O'zMU xabarlari (Aniq fanlar), 2024, no. 2.1.1, pp. 166-172.
11. Rajabov Sh.Sh., Sharifboyev Sh.D., Rajabova M.Sh. Shift theorem for matrix argument functions. - Int. Conf., Berlin, 2022, pp. 110-111.
12. Rajabov Sh.Sh. Matritsaviy original va tasvir funksiyalarining asosiy xossalari. - NamDU ilmiy axborotnomasi, 2023, no. 6, pp. 22-29.
13. Baeumer B. On the inversion of the convolution and Laplace transform. - Trans. Amer. Math. Soc., 2002, vol. 355, no. 3, pp. 1201-1212.
14. Arman A. New trends in Laplace type integral transforms. - Bol. Soc. Paran. Mat., 2017, vol. 35, no. 1, pp. 173-193.
15. Gupta A.K., Nagar D.K. Matrix variate distributions. - Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.
16. Marcel B.F. Laplace transforms: theory and applications. - Arkansas Tech Univ., 2013.
17. Смышляева Л.Г. Преобразования Лапласа функций многих переменных. - Ленинград, 1981.
18. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Теория функций комплексного переменного. - Москва, 1982.
19. Романовский П.И. Ряды Фурье и преобразование Лапласа. - Москва, 1961.

Rezyume

In this article, we will consider the basic concepts of operational calculus, the connections between images and original functions, in particular, the Laplace transform, the inverse Laplace transform, and one of its important theorems, namely *the theorem on the holomorphism of a matrix image function*, for classical domains of the second type. To do this, we first introduce the basic definitions and concepts. It is known that classical domains do not have a biholomorphic equivalence relation with each other, therefore, a complex analysis is constructed separately for each of them. Therefore, in this article, we will only deal with obtaining analogues of the Laplace transform in classical domains of the second type, which belong to the class of symmetric Hermitian matrices. In our further scientific research, we will try to obtain analogues of the Laplace transform for matrix-functions belonging to the class of rectangular matrices of the first type and the class of antisymmetric matrices of the third type.

Key words: homogeneous domain, symmetric domain, irreducible domain, classical domain, classical domains of the second type, matrix original, matrix image, matrix function, matrix trace, Laplace transform, holomorphic image theorem, inverse Laplace transform formula, right half-plane of a matrix, Cauchy integral formula, holomorphic function, theorem on the uniqueness of the original image.

Резюме

В данной статье мы рассмотрим основные понятия операционального исчисления, связи между образами и исходными функциями, в частности, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа и одну из его важных теорем, а именно *теорему о голоморфизме матричной функции-образа*, для классических областей второго типа. Для этого сначала введем основные определения и понятия. Известно, что классические области не имеют биголоморфного отношения эквивалентности друг с другом, поэтому комплексный анализ строится отдельно для каждого из них. Следовательно, в данной статье мы будем рассматривать только получение аналогов преобразования Лапласа в классических областях второго типа, принадлежащих классу симметричных Эрмитовых матриц. В наших дальнейших научных исследованиях мы попытаемся получить аналоги преобразования Лапласа для матричных функций, принадлежащих классу прямоугольных матриц первого типа и классу антисимметричных матриц третьего типа.

Ключевые слова: однородная область, симметричная область, неприводимая область, классическая область, классических областях второго типа, матричный оригинал, матричный образ, матричная функция, след матрицы, преобразование Лапласа, теорема о голоморфном образе, формула обратного преобразования Лапласа, правая полуплоскость матрицы, формула интеграла Коши, голоморфная функция, теорема о единственности исходного изображения.

UDC 514.752.2

ON THE CONSTRUCTION OF GEODESIC MAPPINGS FOR SURFACES OF REVOLUTION

SHARIPOV ANVARJON SOLIYEVICH, USMONXO‘JAYEV ZOKIRXO‘JA YUNUSXO‘JA UG‘LI
 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN
 e-mail: asharipov@inbox.ru, zokusm@gmail.com

RESUME

This work is devoted to the study of geodesic mappings of surfaces of revolution. A mapping is constructed that sends the geodesics of a given surface of revolution to the geodesics of another surface of revolution, and it is proven that the constructed mapping is a geodesic mapping.

Key words: Geodesic mapping, surfaces of revolution, Christoffel symbols, deformation tensor, Riemannian manifolds, paraboloid of revolution.

1. Introduction

The theory of geodesic lines and geodesic mappings is interesting from an applied standpoint and for modern research. This is because the motion of many types of mechanical systems, as well as bodies or particles in gravitational and electromagnetic fields within a continuous medium, often occurs along trajectories that can be regarded as geodesic lines in certain spaces of three or more dimensions. These spaces are defined by the energy regimes under which the processes occur. On this basis, two spaces that admit a geodesic mapping onto each other describe processes that proceed under equivalent external loads along the same "trajectories," but under different energy regimes. Consequently, one of these processes can be modeled using the other.

The geodesic mapping problem was first raised by Beltrami in 1865—though not in its full generality, but specifically for the case in which a surface (a two-dimensional Riemannian manifold) is mapped onto the Euclidean plane. His results may be viewed as an initial impetus for the later recognition and development of Non-Euclidean Geometry, founded by Lobachevsky, Bolyai, and Gauss. Further research in this direction, based on the methods of the Mikes school, has been carried out. In particular, the theory of geodesic mappings of Riemannian and pseudo-Riemannian spaces, affine-connected spaces, and manifolds endowed with additional geometric structures has been systematically developed [1]. Geodesic mappings of pseudosymmetric spaces—classes of spaces more general than spaces of constant curvature and symmetric spaces—are studied in [2]. In [3], some results concerning almost geodesic curves and geodesic mappings and transformations are presented. It is proved that any mapping that sends all almost geodesic curves to almost geodesic curves is itself geodesic. Since under geodesic mappings and transformations almost geodesic curves are also preserved, the present work is devoted to the study of geodesic mappings of surfaces of revolution. A mapping is constructed that sends the geodesics of a given surface of revolution to the geodesics of another surface of revolution, and it is proven that the constructed mapping is a geodesic mapping.

The main objective is to analyze the properties and classify geodesic mappings, that is, mappings which transform the geodesic lines of one surface into the geodesic lines of another. Surfaces of revolution and their geodesic lines play an important role in differential geometry, mathematical physics, and related applied fields such as the theory of relativity, optics, and cartography.

Let M and N be smooth manifolds of dimension n with affine connections.

Definition 1 [4]. A geodesic mapping f of a manifold M onto N is a one-to-one correspondence between their points such that every geodesic line of the manifold M is mapped to a geodesic line of the manifold N .

Let us consider these manifolds in a general coordinate system x^1, x^2, \dots, x^n with respect to the mapping f . Denote the components of the connection objects of the manifolds M and N at the corresponding points $Q(x)$ and $\bar{Q}(x)$ by $\Gamma_{ij}^h(x)$ and $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$, assuming they are symmetric, and set

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x) \quad (h, i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

where P_{ij}^h is the deformation tensor.

Theorem [4]. For a mapping f of an affine connection manifold M onto an affine connection manifold N to be geodesic, it is necessary and sufficient that the connection deformation tensor P_{ij}^h of the mapping f can be represented in the form

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h, \tag{2}$$

where δ_i^h are the Kronecker symbols, and ψ_i is some covariant tensor. Conditions (2) are tensorial and therefore invariant with respect to the choice of the common coordinate system x^1, x^2, \dots, x^n for the mapping f . Based on these conditions, equations (1) take the form

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h. \tag{3}$$

From (3), it is clear that the inverse mapping f^{-1} , which is the inverse of the geodesic mapping f of manifold M onto manifold N , is itself a geodesic mapping, and it corresponds to the tensor $-\psi_i$, i.e.,

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \psi_i(x)\delta_j^h - \psi_j(x)\delta_i^h.$$

Remark. When the covector $\psi_i(x)$ is identically zero, the geodesic mapping f is called trivial.

Example. Let the surface \bar{F} be the image of the surface F under a homothety in three-dimensional space, and let k be the homothety coefficient. Then the metric tensors of the surfaces are related by $\bar{g}_{ij} = k^2 g_{ij}$. Consequently, the Christoffel symbols coincide, $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, and a geodesic ℓ on S is mapped to a geodesic $\bar{\ell}$ on \bar{S} , where the parameters s on ℓ and \bar{s} on $\bar{\ell}$ are related by $\bar{s} = ks + \text{const}$.

2. Preliminary notions and a proof of Theorem 1.

Having the ability to use the theory of geodesic mappings of Riemannian manifolds, we turn our attention to a special type of Riemannian manifolds - surfaces of revolution.

Consider a surface of revolution F with the parametric equation

$$\vec{r}(u, v) = \{r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)\}. \tag{4}$$

The first fundamental form of a surface of revolution is:

$$ds^2 = g_{11}(u)du^2 + g_{22}(u)dv^2 \tag{5}$$

where $g_{11}(u)$ and $g_{22}(u)$ are non-zero functions, and

$$g_{11}(u) = r_u^2(u) + z_u^2(u) \quad \text{and} \quad g_{22}(u) = r^2(u).$$

Consider a curve γ , lying on the surface of revolution F , given by the equation

$$\vec{r}(u) = \{r(u) \cos v(u), r(u) \sin v(u), z(u)\}.$$

Then the arc length of the curve γ is:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}(u) + g_{22}(u)(v_u)^2} du.$$

Geodesics are curves that provide an extremum for the length functional and satisfy the Euler–Lagrange equation[5, p.451]:

$$\left\{ \frac{d}{du} \frac{\partial}{\partial v_u} - \frac{\partial}{\partial v} \right\} \sqrt{g_{11}(u) + g_{22}(u) \left(\frac{dv}{du} \right)^2} = 0,$$

Since $\sqrt{g_{11}(u) + g_{22}(u) \left(\frac{dv}{du} \right)^2}$ does not depend explicitly on v , we obtain:

$$\frac{g_{22} \frac{dv}{du}}{\sqrt{g_{11} + g_{22} \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} = c, \tag{6}$$

where c is a constant. From (6) it follows:

$$\begin{aligned} \frac{dv(u)}{du} &= \pm c \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22} (g_{22} - c^2)}}; \\ v(u) &= v_0 \pm c \int \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22} (g_{22} - c^2)}} du. \end{aligned} \tag{7}$$

Consider a paraboloid of revolution F given by the equations

$$\vec{r}(u, v) = \{\sqrt{u} \cos v, \sqrt{u} \sin v, u\}.$$

The first fundamental form of the paraboloid of revolution F is:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{4u}\right) du^2 + u dv^2.$$

Using formula (7), we find the differential equation for the geodesic lines on the paraboloid of revolution:

$$v = v_0 \pm \arcsin \left(\frac{u - c^2}{u(1 + 4c^2)}\right)^{\frac{1}{2}} + 2c \ln \left(\frac{2\sqrt{u - c^2} + \sqrt{4u + 1}}{\sqrt{1 + 4c^2}}\right). \tag{8}$$

For function (8), the point $\{u = c^2, v = v_0\}$ is a turning point. Function (8) can be considered as describing one geodesic line that descends down the paraboloid, turns at the turning point, and then ascends again, intersecting itself infinitely many times.

Let $\gamma(u) = \{\sqrt{u} \cos v(u), \sqrt{u} \sin v(u), u\}$ be a curve on the paraboloid of revolution, where u is some parameter. Then the equation of the geodesic lines has the form:

$$\gamma(u) : \begin{cases} x = \sqrt{u} \cos \left(v_0 \pm \left[\arcsin \sqrt{\frac{u - c^2}{u(1 + 4c^2)}} + 2c \ln \left(\frac{2\sqrt{u - c^2} + \sqrt{4u + 1}}{\sqrt{1 + 4c^2}} \right) \right] \right) \\ y = \sqrt{u} \sin \left(v_0 \pm \left[\arcsin \sqrt{\frac{u - c^2}{u(1 + 4c^2)}} + 2c \ln \left(\frac{2\sqrt{u - c^2} + \sqrt{4u + 1}}{\sqrt{1 + 4c^2}} \right) \right] \right) \\ z = u. \end{cases}$$

Let us now consider the structure of the geodesic mapping f of the paraboloid of revolution F , and let us denote the image of this paraboloid under this geodesic mapping by \bar{F} . It is proven in works [6, 7] that the images of surfaces of revolution under a geodesic mapping remain surfaces of revolution. Following from this, we can find the first fundamental form of the surface of revolution \bar{F} of the form:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \frac{(1 + c^2) \left(1 + \frac{1}{4u}\right)}{(1 + u)^2} du^2 + \frac{(1 + c^2) u}{1 + u} dv^2, \\ v &= v_0 + \arcsin \left(\frac{u - c^2}{u(1 + 4c^2)}\right)^{\frac{1}{2}} + 2c \ln \left(\frac{2\sqrt{u - c^2} + \sqrt{4u + 1}}{\sqrt{1 + 4c^2}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Expression (9) can be taken as the first fundamental form of a surface of revolution \bar{F} with equations:

$$\vec{\bar{r}}(u, v) = \{\bar{r}(u) \cos v, \bar{r}(u) \sin v, \bar{z}(u)\},$$

where u and v are the same parameters as u on the surface F . Where

$$\begin{cases} \bar{r}_u^2(u) + \bar{z}_u^2(u) = \frac{(1+c^2)\left(1+\frac{1}{4u}\right)}{(1+u)^2}, \\ \bar{r}^2(u) = \frac{(1+c^2)u}{1+u}. \end{cases}$$

Considering that $\bar{\mathbf{r}}(u, v(u)) = \bar{\mathbf{r}}(u) = \{\bar{r}(u) \cos v(u), \bar{r}(u) \sin v(u), \bar{z}(u)\}$, we obtain:

$$\bar{r}(u) = \sqrt{\frac{(1+c^2)u}{1+u}},$$

$$\bar{z}(u) = \sqrt{1+c^2} \int \frac{1}{2(1+u)} \sqrt{\frac{5+4u}{1+u}} du = \sqrt{1+c^2} \left[2 \ln \sqrt{5+4u} + 2\sqrt{1+u} - \sqrt{\frac{5+4u}{1+u}} \right].$$

The equations of the geodesic lines on the surface \bar{F} can be written in a similar way:

$$\bar{\gamma}(u) : \begin{cases} \bar{x} = \bar{r}(u) \cos v(u) = \sqrt{\frac{(1+c^2)u}{1+u}} \cos v(u), \\ \bar{y} = \bar{r}(u) \sin v(u) = \sqrt{\frac{(1+c^2)u}{1+u}} \sin v(u), \\ \bar{z} = \sqrt{1+c^2} \left[2 \ln \sqrt{5+4u} + 2\sqrt{1+u} - \sqrt{\frac{5+4u}{1+u}} \right]. \end{cases}$$

Since the function $v(u)$ is the same for the surfaces of revolution F and \bar{F} , we can establish a geodesic mapping between $\gamma(u)$ and $\bar{\gamma}(u)$:

$$\bar{\mathbf{f}}(u) : \begin{cases} \bar{x} = \sqrt{\frac{(1+c^2)}{1+x^2+y^2}} x \\ \bar{y} = \sqrt{\frac{(1+c^2)}{1+x^2+y^2}} y \\ \bar{z} = \sqrt{1+c^2} \left[2 \ln (\sqrt{5+4z} + 2\sqrt{1+z}) - \sqrt{\frac{5+4z}{1+z}} \right]. \end{cases} \tag{10}$$

Using this mapping, we can find the parametric equation for the image of the paraboloid of revolution F , i.e., the surface \bar{F} :

$$\vec{\bar{r}}(u, v) = \left(\sqrt{\frac{(1+c^2)u}{1+u}} \cos v, \sqrt{\frac{(1+c^2)u}{1+u}} \sin v, \sqrt{1+c^2} \left[2 \ln (\sqrt{5+4u} + 2\sqrt{1+u}) - \sqrt{\frac{5+4u}{1+u}} \right] \right).$$

Taking into account the existence of a geodesic mapping between surfaces of revolution, the following theorem holds:

Theorem 1. *Mapping (10) is a non-trivial geodesic mapping which sends every geodesic on the paraboloid of revolution F to a geodesic on the surface of revolution \bar{F} .*

Proof. To prove that the obtained mapping f is a non-trivial geodesic mapping of the surfaces F and \bar{F} , we use the necessary and sufficient condition from namely:

$$P_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h,$$

where $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ and $\Gamma_{ij}^h(x)$ are the Christoffel symbols of the surfaces of revolution \bar{F} and F , respectively, and have the following form:

For surface \bar{F} :

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{8u^2 + 3u + 1}{u(1 + 4u)(1 + u)} \right); \bar{\Gamma}_{12}^1 = \bar{\Gamma}_{21}^1 = 0; \bar{\Gamma}_{22}^1 = -\frac{2}{1 + 4u}; \bar{\Gamma}_{11}^2 = 0; \bar{\Gamma}_{12}^2 = \frac{1}{2u(1 + u)}; \bar{\Gamma}_{22}^2 = 0.$$

For surface F :

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{u(1 + u)}; \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0; \Gamma_{22}^1 = -\frac{2}{1 + 4u}; \Gamma_{11}^2 = 0; \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2u(1 + u)}; \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Let us find the components of the deformation tensor P_{ij}^h :

$$\begin{aligned} P_{11}^1 &= \bar{\Gamma}_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 = \psi_1 \delta_1^1 + \psi_1 \delta_1^1 = 2\psi_1; \\ P_{12}^1 &= P_{21}^1 = \bar{\Gamma}_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 = \psi_1 \delta_2^1 + \psi_2 \delta_1^1 = \psi_2; \\ P_{22}^1 &= \bar{\Gamma}_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 = \psi_2 \delta_2^1 + \psi_2 \delta_2^1 = 0; \\ P_{11}^2 &= \bar{\Gamma}_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 = \psi_1 \delta_1^2 + \psi_1 \delta_1^2 = 0; \\ P_{12}^2 &= P_{21}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 = \psi_1 \delta_2^2 + \psi_2 \delta_1^2 = \psi_1; \\ P_{22}^2 &= \bar{\Gamma}_{22}^2 - \Gamma_{22}^2 = \psi_2 \delta_2^2 + \psi_2 \delta_2^2 = 2\psi_2. \end{aligned}$$

From this it follows that

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (\bar{\Gamma}_{11}^1(u) - \Gamma_{11}^1(u)) = -\frac{1}{2(u + 1)}, \quad \psi_2 = \bar{\Gamma}_{12}^1(u) - \Gamma_{12}^1(u) = 0.$$

According to [6, p. 297], if M and \bar{M} are Riemannian manifolds, then ψ_i can also be computed by the formula:

$$\psi_i = \frac{1}{n + 1} (\bar{\Gamma}_{ia}^a - \Gamma_{ia}^a) = \frac{1}{1 + n} (\partial_i \ln(\sqrt{\bar{\Delta}}) - \partial_i \ln(\sqrt{\Delta})) = \frac{1}{2(n + 1)} \partial_i \ln \left| \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \right|,$$

where $\Delta = \det(g_{ij})$ and $\bar{\Delta} = \det(\bar{g}_{ij})$.

In our case $n = 2$, and g_{ij} and \bar{g}_{ij} are the coefficients of the first fundamental forms of the surfaces of revolution F and \bar{F} , respectively. $\Delta = \det(g_{ij})$ and

$$\Delta = \det(g_{ij});$$

$$\bar{\Delta} = \frac{(1 + c^2)^2(1 + 4u)}{4(1 + u)^3} \quad \text{and} \quad \Delta = \frac{(1 + 4u)}{4}.$$

For $i = 1$:

$$\psi_1 = \frac{1}{2(2 + 1)} \frac{\partial}{\partial u} \ln \left| \frac{(1 + c^2)^2}{(1 + u)^3} \right| = -\frac{1}{2(u + 1)},$$

And for $i = 2$:

$$\psi_2 = \frac{1}{2(2 + 1)} \frac{\partial}{\partial v} \ln \left| \frac{(1 + c^2)^2}{(1 + u)^3} \right| = 0,$$

since the determinants do not depend on the variable v .

Thus, by an independent method, we have obtained that $\psi_1 = -\frac{1}{2(u+1)}$, $\psi_2 = 0$, which coincides with the values found earlier. The theorem is proven.

REFERENCES

1. J. Mikes, V. E. Berezovski, E. Stepanova, and H. Chud?. Geodesic Mappings and Their Generalizations, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 217, No. 5, September, 2016
2. Irena Hinterleitner and Josef Mikes . Geodesic mappings of (pseudo-) riemannian manifolds preserve class of differentiability. Miskolc Mathematical Notes Hu Issn 1787-2405 Vol. 14 (2013), No. 2, Pp. 575–582.
3. Ryparova, J. Mike?s, P. Pe?ska. Almost geodesic curves and geodesic mappings. "Results in Science and Technology. Modern Mathematics and Its Applications. Topical Reviews. Volume 221 (2023), pp. 93–103."
4. Sinyukova M.N. Geodesic Mappings of Special Riemannian Spaces. Geometry and Topology in Global Areas, 1998. — P. 145-149.
5. Jean Gallier, Jocelyn Quaintance. Differential Geometry and Lie Groups. Springer Nature Switzerland AG 2020.
6. Josef Mikes, Elena Stepanova, Alena Vanzurova et al. Differential Geometry of Special Mappings. First Edition Palacky University, Olomouc, 2015.
7. Lenka Ryparova. Geodesics and their mappings. Ph.D. thesis. Olomouc, 2020

РЕЗЮМЕ

Ushbu ish aylanma sirtlarining geodezik akslantirishlarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, berilgan aylanma sirtning geodezik chiziqlarini boshqa bir aylanma sirtning geodezik chiziqlariga akslantiruvchi akslantirish qurilgan va qurilgan akslantirish geodezik akslantirish ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: geodezik akslantirish, aylanma sirtlar, Kristoffel simvollari, deformatsiya tenzori, riman ko'pxilliklari, aylanma paraboloid.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена изучению геодезических отображений поверхностей вращения. Построено отображение, которое переводит геодезические линии заданной поверхности вращения в геодезические линии другой поверхности вращения, и доказано, что построенное отображение является геодезическим отображением.

Ключивые слова: геодезическое отображение, поверхности вращения, символы Кристоффеля, тензор деформации, римановы многообразия, параболоид вращения.

UDC 517.955.2

ON THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION

SHARIPOVA SALIBXAN ARISLANBAEVNA

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN

sharipovasalibkhan@mail.ru

RESUME

The present research is devoted to studying the solvability of the Cauchy problem for Biharmonic equation. It is well known that the Cauchy problem for higher-order elliptic equations is ill-posed. We construct an explicit representation of the solution using the Fourier transform. Furthermore, we obtain several a priori estimates for the solution and prove the existence and uniqueness of the solution in the class of analytic functions.

Key words: Biharmonic equation, Cauchy problem, ill-posed problem, existence, uniqueness.

1. Introduction

The Cauchy problem for the Laplace equation has been studied in a large number of mathematical publications, starting with the classical work of Hadamard [3]. It is well known that this problem is ill-posed (for this reason, see [4],[9]). In most works, the problems of stability and regularization methods were studied (see [4]-[6], [12]).

The prominent Soviet mathematicians, academicians A.N. Tikhonov and M.M. Lavrentev, their disciples and followers proved that the Cauchy problem is conditionally well-posed for the Laplace equation and ill-posed for other problems (see [6],[8]), and they suggested the regularization method for these ill-posed problems. Numerical methods for solving ill-posed problems of mathematical physics were also discussed in [12] (see also [2]).

The main monograph on ill-posed boundary value problems for the biharmonic equation was presented in [13]. In it, three essentially ill-posed internal boundary value problems for the biharmonic equation and the Cauchy problem for the abstract biharmonic equation were studied.

The Cauchy problem for the biharmonic equation was also studied by T.Sh. Kal'menov and U.A. Iskakova in [7]. However, they did not show class of functions. But, in this paper we have shown exact class of functions which ensure the existence and uniqueness of the solution.

It is known that the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for elliptic equations has been less studied. Sh.A. Alimov and A.K. Qudaybergenov obtained some important a priori estimates for hyperbolic functions in [16], which help to show the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for elliptic equations, and they proved the existence and uniqueness of the solution (see [14]-[16]).

It is well known that the Cauchy problem for the given equation is an ill-posed problem. Therefore, to show the existence and uniqueness of the solution to the given problem, we will use some known estimates that were proved in [16].

2. Statement of the problem

Set

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, 0 < y < h\}.$$

Consider the following equation in Ω

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, 0) = u_{yy}(x, 0) = u_{yyy}(x, 0) = 0. \quad (2)$$

where $\phi(x)$ belongs to the $L_2(\mathbb{R})$.

The solution of the problem (1)-(2) is the function $u \in C^4(\Omega)$, which satisfies in the domain Ω equation (1), and satisfies the boundary conditions (2) in the following sense:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - \phi(x)|^2 dx = 0, \tag{3}$$

and

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^m u}{\partial y^m}(x, y) - 0 \right|^2 dx = 0, \quad m = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Problem A. For a given function $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, find the values on the upper border of Ω of the solution $u(x, y)$ to the problem (1)-(2).

The solution of the problem A is the function $\chi \in L_2(\partial\Omega)$ satisfying the condition

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, h - \epsilon) - \chi(x)|^2 dx = 0. \tag{5}$$

We are looking for the solution of the problem (1)-(2) in the following form

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(s, y) e^{isx} ds.$$

Then we reduce the following equation

$$\widehat{v}^{(4)}(s, y) - 2s^2 \widehat{v}^{(2)}(s, y) + s^4 \widehat{v}(s, y) = 0. \tag{6}$$

Then the solution will be as follows

$$\widehat{v}(s, y) = [A + By] \cosh |s|y + [C + Dy] \sinh |s|y. \tag{7}$$

Then

$$\widehat{v}'(s, y) = B \cosh |s|y + |s|[A + By] \sinh |s|y + D \sinh |s|y + |s|[C + Dy] \cosh |s|y, \tag{8}$$

and

$$\widehat{v}''(s, y) = 2B|s| \sinh |s|y + |s|^2[A + By] \cosh |s|y + 2D|s| \cosh |s|y + |s|^2[C + Dy] \sinh |s|y, \tag{9}$$

and

$$\widehat{v}'''(s, y) = 3B|s|^2 \cosh |s|y + |s|^3[A + By] \sinh |s|y + 3D|s|^2 \sinh |s|y + |s|^3[C + Dy] \cosh |s|y, \tag{10}$$

and

$$\widehat{v}^{(4)}(s, y) = 4B|s|^3 \sinh |s|y + |s|^4[A + By] \cosh |s|y + 4D|s|^3 \cosh |s|y + |s|^4[C + Dy] \sinh |s|y. \tag{11}$$

According to (7)-(11), we obtain

$$A = \frac{\widehat{\phi}}{2}, \quad B = C = 0, \quad D = -\frac{\widehat{\phi} \cdot |s|}{2}.$$

Consequently,

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(s, y) e^{isx} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi} \left(\cosh |s|y - \frac{|s|y}{2} \sinh |s|y \right) e^{isx} ds. \tag{12}$$

Denote by A_σ the set of functions $f(z)$ which are holomorphic on the stripe

$$S_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}, \tag{13}$$

and satisfy conditions:

$$\|f\|_\sigma^2 = \sup_{|y| \leq \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < +\infty. \tag{14}$$

Consider the Fourier expand

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds. \tag{15}$$

Theorem 2.1. *For any function $f \in A_\sigma$ the following inequalities*

$$\pi \|f\|_\sigma^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 \cosh 2|s|\sigma ds \leq 2\pi \|f\|_\sigma^2 \tag{16}$$

are valid. (see [16])

3. Existence of the solution of the problem

The following statements are true.

Theorem 3.1. *Let the function ϕ belong to class A_σ for some $\sigma > h$. Then the solution of the problem A exists and is unique.*

Lemma 3.1. *The solution of the equation (6) satisfies the following estimates*

$$|\widehat{v}^{(m)}(s, y)| \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left| |s|^{m+1}y + |s|^m \right|, \quad m = 1, 2, 3, 4. \tag{17}$$

Proof. Indeed, if we take derivative from function $\widehat{v}(s, y)$, then we get required estimates.

$$\begin{aligned} |\widehat{v}'(s, y)| &= |\widehat{\phi}| \left| \left(\frac{|s|}{2} \sinh |s|y - \frac{|s|^2 y}{2} \cosh |s|y \right) \right| \leq \\ &\leq |\widehat{\phi}| \left(\left| \frac{|s|}{2} \sinh |s|y \right| + \left| \frac{|s|^2 y}{2} \cosh |s|y \right| \right) \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left(|s|^2 y + |s| \right). \end{aligned}$$

Then, for $m = 2$

$$|\widehat{v}''(s, y)| = \left| \widehat{\phi} \frac{|s|^3 y}{2} \sinh |s|y \right| \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left| \frac{|s|^3 y}{2} \right| \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left(|s|^3 y + |s|^2 \right).$$

For $m = 3$,

$$|\widehat{v}'''(s, y)| = |\widehat{\phi}| \left| \frac{|s|^4 y}{2} \cosh |s|y + \frac{|s|^3}{2} \sinh |s|y \right| \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left(|s|^4 y + |s|^3 \right).$$

Then for $m = 4$,

$$|\widehat{v}^{(4)}(s, y)| = |\widehat{\phi}| \left| \frac{|s|^4 y + |s|^3}{2} \cosh |s|y + \frac{|s|^5 y}{2} \sinh |s|y \right|^4 \leq |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left| |s|^5 y + |s|^4 \right|.$$

Lemma 3.1 has been proved. □

Lemma 3.2. *Let the function ϕ belongs to class A_σ . Then the function $u(x, y)$ which defined by (12) belongs to $C^4((-\infty, \infty) \times [0, \sigma))$.*

Proof. Let us fix an arbitrary number ρ in the interval $0 < \rho < \sigma$ and prove that the function $u(x, y)$ is four times differentiable with respect x and y .

Indeed, for $m = 1, 2, 3, 4$ we can write

$$u^{(4,m)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |s|^4 \widehat{v}^{(m)}(s, y) e^{isx} ds. \tag{18}$$

Then according to Lemma 3.1 and Cauchy-Bunyakovs $|s|y$ for $\rho < \sigma$

$$\begin{aligned} |u^{(4,m)}(x, y)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |s|^4 |\widehat{v}^{(m)}(s, y)| ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s|^4 |\widehat{\phi}| \cosh |s|y \left| |s|^{m+1} y + |s|^m \right| ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |s|^4 |\widehat{\phi}| \cosh |s|\rho \left| |s|^{m+1} y + |s|^m \right| ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|^4 |\widehat{\phi}| \cosh |s|\rho \left| |s|^{m+1} \rho + |s|^m \right| \cosh |s|\sigma}{\cosh |s|\sigma} ds \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh^2 |s|\sigma ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|^8 \left(|s|^{m+1} \rho + |s|^m \right)^2 \cosh^2 |s|\rho}{\cosh^2 |s|\sigma} ds \leq C \|\phi\|_\sigma^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Lemma 3.2 has been proved. □

Lemma 3.3. *Let ϕ belongs to class A_σ for some $\sigma > h$. Then for each $y \in [0, h]$ the function $u(x, y)$ defined by (12) belongs to $L_2[-\infty, \infty]$ and*

$$\lim_{y \rightarrow h} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - u(x, h)|^2 dx = 0. \tag{20}$$

Proof. Indeed according to Parseval's identity, we have

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh^2 |s|y \left(|s|y + 1 \right)^2 ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh 2|s|\sigma \frac{\left(|s|y + 1 \right)^2 \cosh 2|s|h}{\cosh 2|s|\sigma} ds \leq \\ &\leq M_1(h) \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh 2k\sigma ds \leq CM_1(h) \|\phi\|_\sigma^2. \end{aligned} \tag{21}$$

where

$$M_1(h) = \max_{\sigma > h} \frac{\left(|s|h + 1 \right)^2 \cosh 2|s|h}{\cosh 2|s|\sigma}.$$

Taking into account (12) and $\cosh^2 x \leq \cosh x$, we get

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y) - u(x, h)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{v}(s, y) - \widehat{v}(s, h)|^2 ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \left| \cosh |s|y - \frac{|s|y}{2} \sinh |s|y - \cosh |s|h + \frac{|s|h}{2} \sinh |s|h \right|^2 ds \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \left[|\cosh |s|y - \cosh |s|h| + \frac{|s|}{2} |y \sinh |s|y - h \cos |s|h| \right]^2 ds \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \left[|\cosh |s|h| + |\cosh |s|h| + \frac{|s|h}{2} (|\sinh |s|h| + |\cos |s|h|) \right]^2 ds \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh^2 |s|h (|s|h + 2)^2 ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh 2|s|\sigma \frac{(|s|h + 2)^2 \cosh 2|s|h}{\cosh 2|s|\sigma} ds \leq \\
&\leq M_2(h) \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}|^2 \cosh 2k\sigma \leq CM_2(h) \|\phi\|_{\sigma}^2.
\end{aligned}$$

where

$$M_2(h) = \max_{\sigma > h} \frac{(|s|h + 2)^2 \cosh 2|s|h}{\cosh 2k\sigma}.$$

Note that each term is a continuous function with respect to $y \in [0, h]$ and the integral is majored by a convergent integral. Therefore, according to the Weierstrass theorem (see [11], Theorem 7.10), the integral converges uniformly over $y \in [0, h]$ and is a continuous function of y . Hence, the equality (20) follows.

Lemma 3.3 has been proved. \square

If we set

$$u(x, h) = \chi(x),$$

then equality (5) is proved.

Proof of Theorem 3.1 follows directly from Lemma 3.1-3.3.

References

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarsky, Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (Russian), 1966.
2. A. Gavrikov, G. Kostin, Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air, Proc. of 59th MIPT Scientific Conference, Moscow, Russia, 2016 (Russian).
3. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale University Press; London: Humphrey Milford; Oxford: University Press. VIII u. 316 S., 1923.
4. S. I. Kabanikhin, Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55, 2012.
5. T. Sh. Kal'menov and U. A. Iskakova, Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation, Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 10, pp. 1460-1466.
6. M. M. Lavrentyev, On the Cauchy problem for Laplace equation. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 20:819-842, 1956.
7. T. Sh. Kal'menov and U. A. Iskakova, On an Ill-posed Problem for a Biharmonic Equation, University of Nis, Faculty of Sciences and Mathematics, 2017, Vol. 31, No. 4, pp. 1051-1056.
8. A. N. Tikhonov, Non-linear equations of first kind, Doklady akademii nauk SSSR, 161:5 (1965), 1023-1026. (in Russian)
9. S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations. London: Cambridge University Press. XI,490 p. (1973).

10. M. A. Naimark, Linear Differential Operators (Russian), 2nd Edition, Nauka, Moscow, 1969, p. 1-528.
11. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1964.
12. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, A. G. Yagola, Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems, Kluwer Academic Publishers, 1995.
13. M. A. Atakhodzhaev, Ill-posed internal boundary value problems for the biharmonic equation, Inverse and Ill-Posed Problems Series 35, De Gruyter, 2002.
14. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, Determination of temperature at the outer boundary of a body, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 2, August, 2023, pp.159-171.
15. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the determining of the stationar temperature in the unbounded stripe, Differential equations, Vol. 0, No. 8, 2024, pp.1049-1062.
16. Sh. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the solvability of the Cauchy Problem for Laplace equation, Uzbek Mathematical Journal, 2022, Volume 66, Issue 3, pp.5-14 DOI: 10.29229/uzmj.2022-4-1.

REZYUME

Ushbu tadqiqot Bigarmonik tenglama uchun Koshi masalasining yechiluvchanligini o'rganishga bag'ishlangan. Avvalo, Koshi masalasining integral shaklda ifodalangan yechimini olamiz. So'ngra berilgan masalaning yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: Bigarmonik tenglama, Koshi masalasi, nokorrekt masala, mavjudlik, yagonalik.

РЕЗЮМЕ

Настоящее исследование посвящено изучению разрешимости задачи Коши для бигармонического уравнения. Сначала решается задача Коши, представленная в интегральной форме, и доказывається существование и единственность решения данной задачи.

Ключевые слова: Бигармоническое уравнение, задача Коши, некорректная задача, существование, единственность.

UDC 517.95

NEW PROPERTIES OF THE MITTAG-LEFFLER FUNCTION AND ITS APPLICATIONS

SULAYMONOV ILYOSKHUJA ABDIRASUL OGLI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS, UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES. TASHKENT,
UZBEKISTAN

ilyosxojasulaymonov@gmail.com

RESUME

In this paper, we establish the strict monotonicity of the Mittag-Leffler functions $E_\rho(-t^\rho)$ and $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ with respect to the parameter ρ . Furthermore, we prove the strict monotonicity of the function $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho)$ with respect to the parameter σ . These monotonicity properties are then applied to inverse problems concerned with determining the order of the fractional derivative in subdiffusion equations.

Key words: Mittag-Leffler function; the Caputo fractional derivative; the Riemann-Liouville fractional derivative; inverse problem.

1. Introduction

The two-parametric Mittag-Leffler function (or simply Mittag-Leffler function) defined as follows:

$$E_{\rho,\mu}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\rho n + \mu)}, \quad \operatorname{Re}(\rho) > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

where $\Gamma(\rho)$ is the Euler gamma-function.

The function (12) is the most straightforward generalization of the classical Mittag-Leffler function introduced by Magnus Gustaf (Gosta) Mittag-Leffler

$$E_\rho(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\rho n + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\rho) > 0, \quad (13)$$

which in turn is a simple generalization of the exponential function. The functions (12) and (13) have numerous generalizations mostly related to the fractional calculus and fractional modeling.

The (classical) Mittag-Leffler function has been introduced to give an answer to a classical question of complex analysis, namely, to describe the procedure of analytic continuation of power series outside the disc of their convergence. Much later, theoretical applications at the study of integral equations and more practical applications to the modeling of “non-standard” processes have been found for the Mittag-Leffler function. The importance of the Mittag-Leffler function was re-discovered when its connection to fractional calculus was fully understood. Different aspects of the distinguished role of this function in fractional theory and applications have been described in several monographs and surveys on fractional calculus (see, e.g., [1], [2], [3]) and fractional modeling (see, e.g., [4], [5]).

In this paper, we establish new properties of the Mittag-Leffler function, specifically the strict monotonicity with respect to the parameter ρ for the functions $E_\rho(-t^\rho)$ and $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ and we will examine the applications of the new property of the Mittag-Leffler function to various problems.

2. Monotonicity of the Mittag-Leffler functions

Let us first introduce some important concepts to prove the strict monotonicity of the Mittag-Leffler function $E_\rho(-t^\rho)$.

Lemma 1. *Let $\rho \in (0, 1)$. Then the following equality holds:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\rho n)}{\Gamma(\rho n + \rho)} = 0.$$

This lemma was proved in [6].

Now we calculate the derivative of the Mittag-Leffler function $E_\rho(-t^\rho)$. Let $\Phi(\rho)$ be the logarithmic derivative of the gamma function $\Gamma(\rho)$ (see, for example [7]). Then $\Gamma'(\rho) = \Gamma(\rho)\Phi(\rho)$ and therefore, we have:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} E_\rho(-t^\rho) &= \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{\rho n}}{\Gamma(\rho n + 1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n t^{\rho n} \frac{\ln t - \Phi(\rho n + 1)}{\Gamma(\rho n + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n, \end{aligned} \tag{14}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(\rho n + 1) &= -\gamma - \frac{1}{\rho n + 1} + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \rho n + 1} \right), \\ y_n &= n t^{\rho n} \frac{\ln t - \Phi(\rho n + 1)}{\Gamma(\rho n + 1)}, \end{aligned} \tag{15}$$

and $\gamma \approx 0.57722$ is the Euler-Mascheroni constant.

Lemma 2. *Let $\rho \in (0, 1)$. Then the following two statements hold:*

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\rho n + \rho + 1)}{\Phi(\rho n + 1)} = 1.$$

2) $\Phi(\rho n + 1) > -\frac{1}{\rho + 1}$ for all $n \geq 1$.

This lemma was proved in [8].

Upper and lower estimates for the function $\Phi(x)$ as follows (see, [8]):

$$\ln(x) - \frac{1}{x} \leq \Phi(x) \leq \ln(x) - \frac{1}{2(x)}. \tag{16}$$

Lemma 3. *Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and $t_1 > 0$. Then series (14) is uniformly convergent with respect to $t \in [t_1, T]$ and $\rho \in [\rho_0, 1]$.*

Proof. Since $t \in [t_1, T]$ and $\rho \in [\rho_0, 1]$ we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n t^{\rho n} \frac{\ln t - \Phi(\rho n + 1)}{\Gamma(\rho n + 1)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n T^n \frac{|\ln t - \Phi(\rho n + 1)|}{\Gamma(\rho_0 n + 1)}.$$

Using inequality (16), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n T^n}{\Gamma(\rho_0 n + 1)} \left(\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 1) + \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

where

$$z_n = \frac{n T^n}{\Gamma(\rho_0 n + 1)} \left(\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 1) + \frac{1}{2} \right).$$

Let us consider the following proportion

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n + 1) T^{n+1} \Gamma(\rho_0 n + 1)}{n T^n \Gamma(\rho_0 n + \rho_0 + 1)} \frac{\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 2) + \frac{1}{2}}{\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 1) + \frac{1}{2}}.$$

By the equality $\Gamma(\rho n + 1) = \rho n \Gamma(\rho n)$, we have

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = T \frac{\Gamma(\rho_0 n)}{\Gamma(\rho_0 n + \rho_0)} \frac{\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 2) + \frac{1}{2}}{\max_{t \in \{t_1, T\}} |\ln t| + \ln(n + 1) + \frac{1}{2}}.$$

Apply Lemma , to get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = 0.$$

Thus, by D’Alembert’s Ratio Test, we conclude that the series $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ is convergent. Therefore, by the Weierstrass M-Test, we deduce that the series (14) is uniformly convergent.

Lemma is proved. □

Lemma 4. *Let $0 < \rho < 1$. Then for $t \in \left(0, \min\left(\frac{1}{2^\rho}, \frac{1}{e^{\frac{\rho}{2}}}\right)\right]$ the inequalities $y_{n+1} > y_n, n \geq 1$, hold.*

Proof. Let us consider the following proportion

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = t^\rho \frac{(n+1)\Gamma(\rho n+1) \ln(t) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{n\Gamma(\rho n+\rho+1) \ln(t) - \Phi(\rho n+1)}.$$

According to equality $\Gamma(\rho n+1) = \rho n\Gamma(\rho n)$ we have

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= t^\rho \frac{\Gamma(\rho n)}{\Gamma(\rho n+\rho)} \frac{\ln(t) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{\ln(t) - \Phi(\rho n+1)} \\ &= t^\rho \frac{\Gamma(\rho n)}{\Gamma(\rho n+\rho)} \left(1 + \frac{\Phi(\rho n+1) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{\ln(t) - \Phi(\rho n+1)}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Now we will show that

$$\left| \frac{\Phi(\rho n+1) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{\ln(t) - \Phi(\rho n+1)} \right| < 1.$$

Based on estimate (16), we examine four cases to prove the estimate above.

We can rewrite the expression $\Phi(z)$ according to the estimate (16) in the following form:

$$\Phi(x) = \ln(x) - \frac{\theta(x)}{x}, \quad x \in (0, \infty),$$

where function $\theta(x)$ is continuous and satisfies $\frac{1}{2} \leq \theta(x) \leq 1$ for all $x \in (0, \infty)$. From this we get:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Phi(\rho n+1) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{\ln t - \Phi(\rho n+1)} \right| \\ &= \left| \frac{\ln(\rho n+1) - \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1} - \ln(\rho n+\rho+1) + \frac{\theta(\rho n+\rho+1)}{\rho n+\rho+1}}{\ln t - \ln(\rho n+1) + \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}} \right| \\ &= \left| \frac{\ln\left(\frac{\rho n+1}{\rho n+\rho+1}\right) - \frac{(\rho n+1)(\theta(\rho n+1) - \theta(\rho n+\rho+1)) + \rho\theta(\rho n+1)}{(\rho n+1)(\rho n+\rho+1)}}{\ln t - \ln(\rho n+1) + \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\ln\left(\frac{\rho n+1}{\rho n+\rho+1}\right)}{\ln t - \ln(\rho n+1) + \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}} \right| + \left| \frac{\frac{(\rho n+1)(\theta(\rho n+1) - \theta(\rho n+\rho+1)) + \rho\theta(\rho n+1)}{(\rho n+1)(\rho n+\rho+1)}}{\ln t - \ln(\rho n+1) + \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{|\ln t - \ln(\rho n+1)| - \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}} + \frac{\left| \frac{\theta(\rho n+1) - \theta(\rho n+\rho+1)}{(\rho n+\rho+1)} + \frac{\rho\theta(\rho n+1)}{(\rho n+1)(\rho n+\rho+1)} \right|}{|\ln t - \ln(\rho n+1)| - \frac{\theta(\rho n+1)}{\rho n+1}}. \end{aligned}$$

According to $\theta(\rho n+1), \theta(\rho n+\rho+1) \in [1/2, 1]$ we have

$$\left| \frac{\Phi(\rho n+1) - \Phi(\rho n+\rho+1)}{\ln t - \Phi(\rho n+1)} \right| \leq \frac{1}{|\ln t| - 1} + \frac{\frac{1}{2} + 1}{|\ln t| - 1} = \frac{5}{2|\ln t| - 1}.$$

If $\ln t < -\frac{7}{2}$ then we have

$$\left| \frac{\Phi(\rho n + 1) - \Phi(\rho n + \rho + 1)}{\ln t - \Phi(\rho n + 1)} \right| < 1. \tag{18}$$

Since $\Gamma(\rho n) \leq \Gamma(\rho n + \rho)$, the equality (17) and the inequality (18) we have the following inequality

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \leq t^\rho \left(1 + \frac{\Phi(\rho n + 1) - \Phi(\rho n + \rho + 1)}{\ln(t) - \Phi(\rho n + 1)} \right) < 2t^\rho.$$

If we select $t \in \left(0, \min \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho}}}, \frac{1}{e^{\frac{7}{2}}} \right) \right]$, then we have $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$. For such t , according to assertion 2 of Lemma , the sequence y_n , defined by the equality (15), is negative for all $n \geq 1$. Therefore, we get the inequality $y_{n+1} > y_n$. Lemma is proved. \square

Theorem 5. Let $\rho_0 \in (0, 1)$. Then, for any $t \in \left(0, \min \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho_0}}}, \frac{1}{e^{\frac{7}{2}}} \right) \right]$, the Mittag-Leffler function $E_\rho(-t^\rho)$ is monotonically increasing in $\rho \in [\rho_0, 1]$.

Proof. According to Lemma the series (14) converges absolutely. Let us divide this series into groups as follows

$$\frac{d}{d\rho} E_\rho(-t^\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n = -(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) - \dots$$

Then by Lemma it follows that $\frac{d}{d\rho} E_\rho(-t^\rho) > 0$ for all t and ρ from the conditions of the lemma.

Theorem is proved. \square

Theorem 6. Let $\rho_0 \in (0, 1)$. Then, for any $t \in \left(0, \min \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho_0}}}, \frac{1}{e^{\frac{13}{8}}} \right) \right]$, the function $t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ is monotonically decreasing in $\rho \in [\rho_0, 1]$.

The theorem is proved in the same way as Theorem .

We now present an important property of the Mittag-Leffler function.

Theorem 7. Let $\rho, \sigma_0 \in (0, 1)$ and $\lambda > \Lambda_0(\rho, \sigma_0)$. Then the function $E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho)$ is strictly decreasing with respect to $\sigma \in [\sigma_0, 1)$ for any $t \geq 1$ and $\rho \in (0, 1)$.

Proof. Let $0 < \beta < \pi\rho$ and $\delta(\beta)$ stand for a contour oriented by non-decreasing $\arg \eta$ and consisting of the following parts: the ray $\arg \eta = -\beta, |\eta| \geq 1$, then the arc $-\beta \leq \arg \eta \leq \beta, |\eta| = 1$, and then the ray $\arg \eta = \beta, |\eta| \geq 1$. Obviously, the contour $\delta(\beta)$ divides the complex η -plane into two unbounded parts, namely $G^{(+)}(\beta)$ to the right of $\delta(\beta)$ in orientation and $G^{(-)}(\beta)$ to its left.

Let $\beta = \frac{3\pi}{4}\rho, \rho \in (0, 1)$. Since $-\lambda^\sigma t^\rho \in G^{(-)}(\beta)$, then (see [9], formula (2.29), p. 135)

$$E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho) = -\frac{1}{\lambda^{2\sigma} t^{2\rho} \Gamma(-\rho)} + \frac{1}{2\pi i \rho \lambda^{2\sigma} t^{2\rho}} \int_{\delta(\beta)} \frac{e^{\eta^{1/\rho}} \eta^{\frac{1}{\rho}+1}}{\eta + \lambda^\sigma t^\rho} d\eta = f(\sigma) + g(\sigma).$$

From this we have

$$f'(\sigma) = \frac{2 \ln \lambda}{\lambda^{2\sigma} t^{2\rho} \Gamma(-\rho)},$$

and

$$g'(\sigma) = \frac{(2 + t^\rho) \ln \lambda}{2\pi i \rho \lambda^{2\sigma} t^{2\rho}} \int_{\delta(\beta)} \frac{e^{\eta^{1/\rho}} \eta^{\frac{1}{\rho}+1}}{\eta + \lambda^\sigma t^\rho} d\eta.$$

In the work [10], a function similar to $g'(\sigma)$ is studied. Similarly, we derive the following estimate for $g'(\sigma)$:

$$|g'(\sigma)| \leq \frac{7 \ln \lambda}{\lambda^{3\sigma} t^{2\rho}}.$$

Applying the following equality for $\Gamma(\rho)$:

$$\frac{1}{\Gamma(-\rho)} = -\frac{\rho}{\Gamma(1-\rho)},$$

and for all $t > 1$ we have

$$\frac{d}{d\sigma} E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho) < -\frac{2\rho \ln \lambda}{\lambda^{2\sigma} t^{2\rho} \Gamma(1-\rho)} + \frac{7 \ln \lambda}{\lambda^{3\sigma} t^{2\rho}}.$$

Hence this derivative is negative if

$$\lambda^\sigma \geq \lambda^{\sigma_0} > \frac{7}{2\rho}.$$

Thus, if $\lambda > \Lambda_0(\rho, \sigma_0)$, then $E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho)$, as a function of $\sigma \in [\sigma_0, 1)$, strictly decreases for all $t > 1$. □

3. Inverse problems

In modeling various anomalous diffusion and transport processes, fractional differential equations often serve as effective tools due to their ability to capture memory and hereditary properties. However, a significant challenge in such models lies in the fact that the order of the fractional derivative, denoted by ρ , is typically unknown and cannot be measured directly. This necessitates the formulation and analysis of inverse problems aimed at identifying this physical parameter from indirect observations of the solution. The determination of such unknown parameters is not only of theoretical interest but is also essential for the well-posedness and qualitative analysis of the associated initial-boundary value problems. A comprehensive overview of inverse problems concerning fractional order identification is presented in the survey [11].

Most existing studies have considered fractional derivatives of order $0 < \rho < 1$ in the Caputo sense, with the primary focus on establishing uniqueness results. In order to recover the order ρ , an important analytical tool is the monotonicity of the Mittag-Leffler function with respect to the order parameter. While various properties of the Mittag-Leffler function have been extensively studied particularly its monotonicity with respect to its argument it has been observed that its monotonicity with respect to ρ can also be effectively utilized in solving inverse problems for fractional differential equations.

This approach was first introduced in [12] for time-fractional subdiffusion equations involving the Caputo derivative and was subsequently extended in [10] to equations with the Riemann-Liouville derivative. A modified version of this technique was employed in [13], [14], [15] to address similar inverse problems for the fractional wave equation with the Caputo derivative.

A noteworthy finding arising from this line of research is that the solution $u(x, t)$ of the initial-boundary value problem for the subdiffusion equation intrinsically depends on the unknown fractional order ρ , i.e., $u(x, t) = u(x, t, \rho)$. Consequently, for different values of ρ , the corresponding solutions exhibit distinct behaviors. In particular, it has been observed that the norm $\|u(x, t, \rho)\|$, for sufficiently large t , behaves as a strictly decreasing function of the parameter ρ . This property is central to the successful application of the aforementioned inverse problem techniques.

We now demonstrate how Theorems and , proved above, provide new insights and extensions of these works, particularly for small values of time t .

3.1. Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville and Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation

Let Ω be an arbitrary N - dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t^\rho u(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{\rho-1} u(x, t) = \varphi(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

where n is the unit outward normal vector of $\partial\Omega$, $\varphi(x)$ is a continuous function. We call the problem is *forward problem*. The fractional Riemann-Liouville integral and the Riemann-Liouville derivative correspondingly have the form(see, for example [16], p. 70)

$$J^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} f(\tau) d\tau, \quad \partial_t^\rho f(t) = D J^{1-\rho} f(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

The fractional derivative in the sense of Caputo has the form(see, for example [16], p. 91):

$$D_t^\rho f(t) = J^{1-\rho} Df(t).$$

The solution of the forward problem has the form (see for example [10]):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) t^{\rho-1} E_{\rho, \rho}(-\lambda_k t^\rho) v_k(x),$$

To find parameter ρ we use the following additional condition:

$$F(\rho; t_0) := \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = d_0, \quad t_0 \geq T_0.$$

Using Theorem we get the following result.

Theorem 8. *Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and $t_0 \in \left(0, \min\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho_0}}}, \frac{1}{e^{\frac{13}{6}}}\right)\right]$. Then Inverse Problem I has a unique solution (u, ρ) if and only if*

$$F(1; t_0) \leq d_0 \leq F(\rho_0; t_0).$$

Let Ω be an arbitrary N - dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following Inverse problem:

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x, t) = \Delta u(x, t), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

where $\varphi(x)$ is a continuous function and D_t^ρ is the Caputo fractional derivative. We call the problem is *forward problem*. The solution of the forward problem has the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) E_{\rho, 1}(-\lambda_k t^\rho) v_k(x).$$

To find parameter ρ we use the following additional condition:

$$F(\rho; t_0) := \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = d_0, \quad t_0 \geq T_0.$$

Using Theorem we get the following result.

Theorem 9. *Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and $t_0 \in \left(0, \min\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\rho_0}}}, \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$. Then Inverse Problem I has a unique solution (u, ρ) if and only if*

$$F(1; t_0) \leq d_0 \leq F(\rho_0; t_0).$$

3.2 Inverse problem of determining order of fractional derivative which study by A.V. Pskhu

Let us note an interesting result by A.V. Pskhu [17], published in 2002, which, as far as we know, represents the first inverse problem for determining the order of fractional derivatives.

Consider the following equation

$$\partial_x^\rho u(x) - \lambda u(x) = 0, \tag{19}$$

where, $x \in (0, a]$, $\rho \in (0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and ∂_x^ρ is the fractional Riemann-Liouville derivative.

Inverse problem for equation (19). Find the value of order ρ , $\rho \in (0, 1]$, and solution $u(x)$, of equation (19) which obeys conditions

$$u(x_0) = u_0, \quad u(x_1) = u_1, \tag{20}$$

where $x_0, x_1 \in (0, a]$, u_0, u_1 are given real numbers.

As the author proved, the problem has a unique solution if $x_0 \neq x_1$ and

$$\frac{x_0}{x_1} < \frac{u_1}{u_0} \leq e^{\lambda(x_1-x_0)}.$$

We adopted a slightly different approach to the inverse problem (19), (20) and derived the following result.

Let $\rho \in (0, 1]$. Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_x^\rho u(x) - \lambda u(x) = 0, & x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow 0} \partial_x^{\rho-1} u(x) = \varphi, \end{cases} \tag{21}$$

where, $\varphi, \lambda \in \mathbb{R}$ are given numbers.

Inverse problem for problem (21). Find the value of order ρ , $\rho \in (0, 1]$, and solution $u(x)$, of problem (21) which obeys condition

$$u(x_0) = u_0, \tag{22}$$

where $x_0 \in (0, 1]$ and u_0 are given real number.

Note the unique solution to problem (21) has the form (see, for example, [16], p. 224)

$$u(x) = \varphi x^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(\lambda x^\rho). \tag{23}$$

Lemma 10. Let $x \in (0, 1]$ and $\lambda > 0$. The function $x^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(\lambda x^\rho)$ decreases monotonically with respect to $\rho \in (0, 1]$.

Proof. Let $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1]$, $\rho_1 < \rho_2$. We have

$$\begin{aligned} x^{\rho_1-1} E_{\rho_1,\rho_1}(\lambda x^{\rho_1}) - x^{\rho_2-1} E_{\rho_2,\rho_2}(\lambda x^{\rho_2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\rho_1(k+1)-1}}{\Gamma(\rho_1(k+1))} \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\rho_2(k+1)-1}}{\Gamma(\rho_2(k+1))} &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x^{-1} \left(\frac{x^{\rho_1(k+1)}}{\Gamma(\rho_1(k+1))} - \frac{x^{\rho_2(k+1)}}{\Gamma(\rho_2(k+1))} \right). \end{aligned}$$

Now consider the following proportion

$$Q = \frac{\frac{x^{\rho_2(k+1)}}{\Gamma(\rho_2(k+1))}}{\frac{x^{\rho_1(k+1)}}{\Gamma(\rho_1(k+1))}} = x^{(\rho_2-\rho_1)(k+1)} \frac{\Gamma(\rho_1(k+1))}{\Gamma(\rho_2(k+1))}.$$

Since $\Gamma(\rho_1(k+1)) \leq \Gamma(\rho_2(k+1))$ and $x \in (0, 1]$ we have $Q \leq 1$ for all $k \geq 0$. Therefore, $x^{\rho_1-1} E_{\rho_1,\rho_1}(\lambda x^{\rho_1}) > x^{\rho_2-1} E_{\rho_2,\rho_2}(\lambda x^{\rho_2})$ for all $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1]$, $\rho_1 < \rho_2$.

Lemma is proved. □

The following result is true.

Theorem 11. Let $x_0 \in (0, 1]$ and $\lambda > 0$. Then the inverse problem (21), (22) has a unique solution $\{u(x), \rho\}$ if and only if

$$e^{\lambda x_0} \leq \frac{u_0}{\varphi} < +\infty.$$

Proof. Using (23) and equality (22) we get

$$\varphi x_0^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(\lambda x_0^\rho) = u_0.$$

Obviously, according to Lemma , the inverse problem (21), (22) has a unique solution.

Theorem is proved. □

Theorem 12. Let $\rho_0 \in (0, 1)$, $x_0 \in \left(0, \min\left(\frac{1}{2\rho_0}, \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right)\right]$ and $\lambda < 0$. Then the inverse problem (21), (22) has a unique solution $\{u(x), \rho\}$ if and only if

$$e^{\lambda x_0} \leq \frac{u_0}{\varphi} < +\infty.$$

The proof of this theorem follows from Theorem .

3.3 Inverse problem of determining order of fractional derivative at one space-time point

Let Ω be an arbitrary N - dimensional domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{24}$$

where $\varphi(x)$ is a continuous function and D_t^ρ is the fractional Caputo derivative. We call the problem is *forward problem*. The solution of the forward problem has the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, v_k) E_{\rho, 1}(-\lambda_k t^\rho) v_k(x).$$

In problem (24), the primary question is: if ρ is unknown, can it be determined by imposing an additional condition at a single space-time point (x_0, t_0) ?

Let us present some assertions about eigenfunctions $v_k(x)$ and eigenvalues λ_k proved by V.A.Ilyin [18].

Lemma 13. Let the function $g(x)$ satisfy the conditions

1. $g(x) \in C^p(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial^{p+1} g(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \in L_2(\Omega)$, $p + 1 = p_1 + p_2 + \dots + p_n, p \geq 1$,
2. $g(x)|_{\partial\Omega} = \Delta g(x)|_{\partial\Omega} = \dots = \Delta^{[\frac{p}{2}]} g(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

Then the number series $\sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 \lambda_k^{p+1}$ converges, where $g_k = (g, v_k)$.

Let $x_0 \in \Omega$ be fixed, and consider the measured data at one time instant $t_0 > 0$ given by:

$$u(x_0, t_0) = d_0, \tag{25}$$

where d_0 is a fixed number. Introducing the following nonlinear function:

$$G(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k E_\rho(-\lambda_k t_0^\rho) v_k(x_0), \tag{26}$$

the equation for determining the unknown parameter ρ can be written as

$$G(\rho) = d_0.$$

Before solving the inverse problem, we examine the uniform convergence of the series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x) \frac{d}{d\rho} E_\rho(-\lambda_k t^\rho), \tag{27}$$

where $\varphi_k = (\varphi, v_k)$. We establish the following lemma:

Lemma 14. Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and $t_1 > 0$. If the function $\varphi(x)$ satisfy conditions of Lemma 6 with the exponent $p = [\frac{N}{2}]$. Then the series (27) is uniformly convergent with respect to $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [t_1, T]$, $\rho \in [\rho_0, 1]$.

From Lemma , we derive the following corollary:

Corollary 15. Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and $t_1 > 0$. For any $\varepsilon > 0$, there exists $n_0 = n_0(\varepsilon, \rho_0, t_1)$ such that the following inequality holds for all $x \in \Omega$, $t \in [t_1, T]$, and $\rho \in [\rho_0, 1]$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \left| \varphi_k v_k(x) \frac{d}{d\rho} E_{\rho}(-\lambda_k t^{\rho}) \right| < \varepsilon. \tag{28}$$

Where n_0 is the smallest number, which is satisfying inequality (28).

We now present the main theorem about the solution of the inverse problem (24),(25):

Theorem 16. Let $\varepsilon > 0$ and $t_0 \in \left(0, \min\left(\frac{1}{2^{\rho_0}}, \frac{1}{e^2}\right)\right]$. Suppose that function $\varphi(x)$ satisfies the conditions of Lemma and for some $x_0 \in \Omega$ the quantities $v_k(x_0)$ and φ_k satisfy the following conditions:

1. $\varphi_k \geq 0$ and $v_k(x_0) \geq 0$ for $k = 1, 2, \dots, n_0$, where $n_0 = n_0(\varepsilon, \rho_0, t_0)$ from Corollary ;
2. φ_{k_0} and $v_{k_0}(x_0)$ satisfying following inequality for some $k_0 \in \{1, 2, \dots, n_0\}$

$$\varphi_{k_0} v_{k_0}(x_0) > \frac{\varepsilon}{M_{k_0}},$$

where $M_{k_0} = \frac{d}{d\rho} E_{\rho}(-\lambda_{k_0} t_0^{\rho})$.

Then the nonlinear function $G(\rho)$, defined by (26), is strictly monotonically increasing on $\rho \in [\rho_0, 1]$. Moreover, inverse problem (24),(25) has a unique solution if and only if

$$d_0 \in [G(\rho_0), G(1)].$$

The proof of theorem given in [8].

3.4 Inverse problem of determining two unknown parameters

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be an arbitrary bounded domain, with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, $\rho, \sigma \in (0, 1)$. Consider the following problem

$$\begin{cases} \partial_t^{\rho} u(x, t) + (-\Delta)^{\sigma} u(x, t) = 0, & x \in \Omega, 0 < t \leq T, \\ Bu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \\ \lim_{t \rightarrow 0} J_t^{\rho-1} u(x, t) = \varphi(x), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{29}$$

where $\varphi(x) \in L_2(\Omega)$, Δ is the Laplace operator, n is the unit outward normal vector to $\partial\Omega$ and ∂_t^{ρ} is the fractional Riemann-Liouville derivative of order $0 < \rho < 1$.

The solution of this problem has the following form (see, for example [10]):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{\rho-1} E_{\rho, \rho}(-\lambda_k t^{\rho}) v_k(x), \tag{30}$$

where φ_k are the Fourier coefficients of function $\varphi(x)$.

We use the following additional conditions for simultaneously determining the parameters ρ and σ in (29):

$$|(u(x, t_0), v_1(x))| = d_0, \quad |(u(x, t_1), v_k(x))| = d_1, \tag{31}$$

where $t_0 \neq t_1$, $t_0, t_1 \in (0, T]$ and d_0, d_1 are given positive numbers.

Using the additional conditions (31) and the solution (30) and since $\lambda_1 = 0$ we derive the following system of equations:

$$\begin{cases} |\varphi_1| \frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} - d_0 = 0, \\ |\varphi_1| t_1^{\rho-1} E_{\rho, \rho}(-\lambda_2^{\sigma} t_1^{\rho}) - d_1 = 0. \end{cases}$$

From the first equation of the system, we obtain the following relation:

$$\frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} = \frac{d_0}{|\varphi_1|}. \tag{32}$$

Next, we show that the left-hand side of equation (32) is monotonic with respect to $\rho \in (0, 1)$. Using $\Gamma'(\rho) = \Gamma(\rho)\Phi(\rho)$, we have

$$\left(\frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right)' = \frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} [\ln t_0 - \Phi(\rho)].$$

Since

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)} = \frac{\rho}{\Gamma(\rho+1)} \quad \text{and} \quad \Phi(\rho) = \Phi(\rho+1) - \frac{1}{\rho},$$

we have

$$\left(\frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right)' = \frac{\rho t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho+1)} \left[\ln t_0 - \Phi(\rho+1) + \frac{1}{\rho}\right] = \frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho+1)} [\rho \ln t_0 - \rho\Phi(\rho+1) + 1].$$

Since $-\gamma < \Phi(\rho+1) < 1 - \gamma$ and if $t_0 \geq 1$, we get

$$\left(\frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right)' > \frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho+1)} [1 - (1 - \gamma)] = \frac{\gamma t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho+1)} > 0.$$

Hence, $\frac{t_0^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}$ is monotonic in $\rho \in (0, 1)$, and therefore equation (32) has the unique solution $\rho^* \in (0, 1)$.

Substituting the obtained $\rho^* \in (0, 1)$ into the second equation of the system, we solve for σ :

$$E_{\rho^*, \rho^*}(-\lambda_k^\sigma t_1^{\rho^*}) = \frac{d_1}{|\varphi_1| t_1^{\rho^*-1}}. \tag{33}$$

According to Theorem , equation (33) has the unique solution $\sigma^* \in [\sigma_0, 1)$.

Taking the above into account, we present the following main result.

Theorem 17. *There is a unique $\rho^* \in (0, 1)$, satisfying (21), if and only if $\frac{d_0}{|\varphi_1|} < 1$. Suppose that $\sigma_0 \in (0, 1)$. For $\sigma^* \in [\sigma_0, 1)$ to exist, it is necessary and sufficient that d_1 satisfy the following inequalities:*

$$t_1^{\rho^*-1} E_{\rho^*, \rho^*}(-\lambda_k t_1^{\rho^*}) \leq \frac{d_1}{|\varphi_k|} < t_1^{\rho^*-1} E_{\rho^*, \rho^*}(-\lambda_k^{\sigma_0} t_1^{\rho^*}).$$

REFERENCES

1. Rudolf Gorenflo, Anatoly Kilbas, Francesco Mainardi and Sergei Rogozin, Mittag-Leffler functions, related topics and applications. *Springer*, Berlin, (2014).
2. Rudolf Gorenflo and Francesco Mainardi, Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. In: Carpinteri A., Mainardi F. (eds.), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer Verlag, Wien, (1997), 223-276.
3. Rudolf Gorenflo and Sergio Vessella, Abel Integral Equations: Analysis and Applications. *Springer-Verlag*, Berlin, (1991).
4. Jocelyn Sabatier, Om Agrawal and Tenreiro Machado, Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. *Springer Verlag*, Berlin, (2007).
5. Dumitru Baleanu, Kai Diethelm, Enrico Scalas and Juan Trujillo, Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. *2nd ed., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos*, **5**. World Scientific, Singapore, (2017).

6. Gongsheng Li, Zhen Wang, Xianzheng Jia and Yi Zhang, An inverse problem of determining the fractional order in the TFDE using the measurement at one space-time point. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, (2023), **26**, 1770-1785.
7. Harry Bateman, Higher transcendental functions. *McGraw-Hill*, (1953).
8. Ravshan Ashurov and Ilyoskhujay Sulaymonov, Monotonicity in the parameter of the Mittag-Leffler function and determining the fractional exponent of the subdiffusion equation. *arXiv:2501.01724 [math.AP]*, (2025) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.01724>
9. Mkhitar Dzherbashian, Integral Transforms and Representation of Functions in the Complex Domain, *M. NAUKA*, (1966).
10. Shavkat Alimov and Ravshan Ashurov, Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, (2022), **8**, 1-8.
11. Zhiyuan Li, Yikan Liu and Masahiro Yamamoto, Inverse problems of determining parameters of the fractional partial differential equations. *Handbook of fractional calculus with applications, V.2*. DeGruyter, (2019), 431-442.
12. Shavkat Alimov and Ravshan Ashurov, Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* (2020), **28**, 651-658.
13. Ravshan Ashurov and Yusuf Fayziev, Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation. *Eurasian Math. J.* (2022), **13**, 19-31.
14. Ravshan Ashurov and Yusuf Fayziev, Inverse problem for determining the order of a fractional derivative in a wave equation. *Math. Notes.* (2021), **110**, 824-836.
15. Ravshan Ashurov and Yusuf Fayziev, Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation. *Lobachevskii J. Math.* (2021), **42**, 508-516.
16. Anatoly Kilbas, Hari Srivastava and Juan Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier*, Amsterdam, (2006).
17. Arsen Pskhu. Inverse problem for fractional differential equation of order liable to determination. *Int. Conf. Ill-Posed and Inverse Problems*, Novosibirsk, Russia, (2002).

REZYUME

Ushbu maqolada biz $E_\rho(-t^\rho)$ va $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ Mittag-Leffler funksiyalarining parametr ρ bo'yicha qat'iy monotonligini isbotlangan. Shuningdek, $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho)$ funksiyasining parametr σ bo'yicha qat'iy monotonligini ham isbotlangan. Olingan natijalar subdiffuziya tenglamalarida kasr tartibli hosilaning tartibini aniqlashga oid teskari masalalarni yechishda qo'llanilgan.

Kalit so'zlar: Mittag-Leffler funksiyasi; Kaputo kasr hosilasi; Riman-Liuvill kasr hosilasi; teskari masala.

РЕЗЮМЕ

В данной работе мы устанавливаем строгую монотонность функций Миттаг-Леффлера $E_\rho(-t^\rho)$ и $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-t^\rho)$ по параметру ρ . Более того, мы доказываем строгую монотонность функции $t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda^\sigma t^\rho)$ по параметру σ . Данные свойства монотонности затем применяются к обратным задачам, связанным с определением порядка дробной производной в уравнениях субдиффузии.

Ключевые слова: Функция Миттага-Леффлера, дробная производная Капуто, дробная производная Римана-Лиувилля, обратная задача.

UDC 517.98

THE DYNAMICS OF PIECEWISE-CONTINUOUS VOLTERRA QSO ON S^2

USMONOV JAVOKHIR BAKHODIR UGLI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN. TASHKENT, UZBEKISTAN
javohir0107@gmail.com

RESUME

In this article, we study a class of piecewise-continuous quadratic stochastic operators (QSOs) of Volterra type defined on the two-dimensional simplex S^2 . The operator is defined by two Volterra operators V_1 and V_2 acting on disjoint subsets of the simplex. We describe the fixed points of these operators for various parameter configurations and analyze the asymptotic behavior of their trajectories. In particular, we prove that for specific parameter choices, the limit set of any interior point of the simplex lies on the boundary, and in the symmetric case $a = b = c \neq 0$, all trajectories converge to the vertex $(1, 0, 0)$.

Key words: Quadratic stochastic operator, Volterra operator, piecewise-continuous operator, fixed points, limit set.

1. Introduction

Quadratic stochastic operators (QSOs) have been extensively studied in population genetics, evolutionary dynamics, and mathematical biology, where they describe the evolution of probabilities of different species or traits over discrete generations. Among QSOs, *Volterra-type operators* are particularly important due to their structured interactions and biological interpretability. In [2], it is shown that the limit set of a dynamical system generated by a Volterra operator is either a singleton or infinite.

In [6], the dynamical system of a discontinuous Volterra operator mapping S^2 was studied. Despite the absence of periodic points for continuous quadratic stochastic operators of the Volterra type, in that article, it was showed the existence of 3-periodic points for certain parameter values. Besides, the behaviour of the dynamics of discontinuous Volterra operators is more different than the continuous ones(see [1,3-7]).

In this paper, we focus on a class of *piecewise-continuous Volterra QSOs* defined on the two-dimensional simplex S^2 , where the operator switches between two Volterra forms V_1 and V_2 depending on the relation between coordinates y and z . This setup allows us to study a richer dynamical behavior compared to standard continuous operators.

Our main goal is to characterize the *fixed points*, *limit sets*, and asymptotic dynamics of these operators. We provide a detailed analysis for various parameter configurations, including cases where only one parameter is non-zero and the symmetric case $a = b = c$. Our results show that the dynamics is largely boundary-attracting, with interior points converging to the simplex boundary or a specific vertex depending on the parameters. These findings extend previous studies on Volterra QSOs and contribute to the understanding of *piecewise dynamics in stochastic systems*.

2. Piecewise-continuous QSO Volterra on S^2 .

Let S^{m-1} be the simplex:

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}.$$

The vertices of the simplex are $\mathbf{x}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{x}_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$. We denote the interior of the simplex by

$$\text{int } S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1} : x_i > 0 \text{ for all } i = 1, 2, \dots, m\},$$

and its boundary by

$$\partial S^{m-1} = S^{m-1} \setminus \text{int } S^{m-1}.$$

Let $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ be a mapping defined by

$$V(x_k) = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

where $P_{ij,k}$ are hereditary coefficients satisfying

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Such a mapping V is called a *Quadratic Stochastic Operator (QSO)*.

Recall that a QSO $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ is called *Volterra* if

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{whenever } k \notin \{i, j\}.$$

Consider the following sequence for an initial point $x^{(0)} \in S^{m-1}$

$$x^{(0)}, \quad x^{(1)} = V(x^{(0)}), \quad x^{(2)} = V^2(x^{(0)}), \dots, x^{(n)} = V^n(x^{(0)}), \dots$$

where $V^n(x)$ is n -times composition of V to itself. Last sequence is called a discrete dynamical system generated by the operator V or the orbit (trajectory) of $x^{(0)}$.

The set of limit points of the trajectory starting at $\mathbf{x}^{(0)}$ is denoted by $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$. One of the main problems in discrete dynamical systems for a given operator V is to analyze the asymptotic behavior of the trajectory

$$x^{(n)} = V^n(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n \geq 1,$$

and, in particular, to characterize its limit points.

Define a QSO as follows:

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_1(\mathbf{x}), & y \geq z \\ V_2(\mathbf{x}), & y < z \end{cases} \tag{1}$$

where $\mathbf{x} = (x, y, z) \in S^2$, $a, b, c \in [0, 1]$ and

$$V_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} x' = x(1 - az + cy) \\ y' = y(1 - bz - cx) \\ z' = z(1 + ax + by) \end{cases} \quad V_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} x' = x(1 - ay + cz) \\ y' = y(1 + bz + ax) \\ z' = z(1 - by - cx) \end{cases}.$$

If $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, then the operator (1) is trivial. So we are not interested in this case. The operator is discontinuous at the median of the triangle at the vertex \mathbf{x}_1 in Fig.1.

3. Fixed points.

According to the definition of the operator V , the domain consists of two non-intersecting subsets of S^2 . They are:

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid \mathbf{x} = (x, y, z), \quad y \geq z\};$$

$$H_2 = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid \mathbf{x} = (x, y, z), \quad y < z\};$$

According to the definition of the operator V , the domain consists of two non-intersecting subsets of S^2 . They are:

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid \mathbf{x} = (x, y, z), \quad y \geq z\};$$

$$H_2 = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid \mathbf{x} = (x, y, z), \quad y < z\};$$

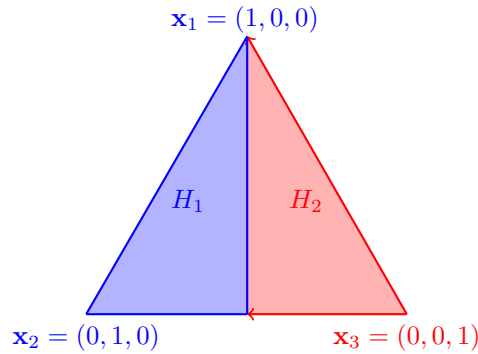


Рис. 11: The sets of H_1 and H_2 on the two-dimensional simplex

The point \mathbf{x} is a *periodic point* of period p if $V^p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The least positive p for which $V^p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ is called the *prime period* of \mathbf{x} . If $p = 1$ then \mathbf{x} is called a *fixed point* of the operator. We denote the set of all fixed points by $\text{Fix}(V)$ and the set of all periodic points of (not necessarily prime) period p by $\text{Per}_p(V)$.

Let's find fixed points. We need to solve the equation $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ in H_1 and $V_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ in H_2 . So the following lemma holds.

Lemma 1. *For the set of fixed points, the following holds:*

- 1) if $b \cdot c \neq 0$, then $\text{Fix}(V) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$;
- 2) if $a = c = 0, b \neq 0$, or $a \cdot b \neq 0, c = 0$, then $\text{Fix}(V) = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \mid y \cdot z = 0\}$;
- 3) if $b = 0, a \cdot c \neq 0$ or $b = a = 0$ and $c \neq 0$, then $\text{Fix}(V) = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \mid x = 0\} \cup \{\mathbf{x}_1\}$;
- 4) if $b = c = 0, a \neq 0$, then $\text{Fix}(V) = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \mid x \cdot y \cdot z = 0\}$.

Proof. Now we need to solve the equation $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in H_1$.

$$\begin{cases} x(1 - az + cy) = x \\ y(1 - bz - cx) = y \\ z(1 + ax + by) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-az + cy) = 0 \\ y(bz + cx) = 0 \\ z(ax + by) = 0 \end{cases}$$

- $x = 0$. Then $byz = 0$. If $b \neq 0$, then we have the solution $x_1 = (0, 1, 0)$. If $b = 0$, then the solution $(0, y, 1 - y)$ where $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$.
- $x \neq 0, y = 0$. Then $az = 0$. If $a \neq 0$, then we have the solution $x_1 = (1, 0, 0)$. If $a = 0$, then the solution $(x, 0, 1 - x)$ does not belong to H_1 .
- $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$. If $c = 0$, then the solution is $(x, 1 - x, 0)$, where $0 \leq x \leq 1$.

Since $a, b, c \in [0, 1]$, there is no solution to the equation $V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ when $xyz \neq 0$. For the case H_2 , the results are proven as above. □

4. The limit sets.

4.1 The case $b = c = 0$ and $a \neq 0$. If $b = c = 0$ and $a \neq 0$, then the form of the operator (1) has

$$V_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_{1,a}(\mathbf{x}), & y \geq z \\ V_{2,a}(\mathbf{x}), & y < z \end{cases} \tag{2}$$

and

$$V_{1,a} = \begin{cases} x' = x(1 - az) \\ y' = y \\ z' = z(1 + ax) \end{cases} \quad V_{2,a} = \begin{cases} x' = x(1 - ay) \\ y' = y(1 + ax) \\ z' = z. \end{cases}$$

Lemma 2. *There does not exist any $A \subset \text{int } S^2$ such that $V_a(A) \subset A$.*

Proof. Let us assume conversely, i.e., there exists $A \subset \text{int } S^2$ such that $V_a(A) \subset A$. Since $A \subset \text{int } S^2$, we can find $x^*, y^*, z^* \in (0, 1)$ such that $x > x^*, y > y^*$, and $z > z^*$ for all $\mathbf{x} = (x, y, z) \in A$ (it is easy to see that if we take the subset A with $x \geq x^*$, then $V_a(\mathbf{x}^*) \notin A$, because $x^{(n)}$ strictly decreasing). Since $x^{(n)}$ is strictly decreasing $\text{int } S^2$, we show there exists $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in A$ such that $V_a(\bar{\mathbf{x}}) \notin A$. Let $\bar{x} = x^* + \frac{1}{n} \in A$ for $n \geq 1$. We show that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $V_a(\bar{\mathbf{x}}) > x^*$ for all $n > n_0$.

$$(x^* + \frac{1}{n})(1 - a \min\{\bar{y}, \bar{z}\}) \leq x^* \Rightarrow x^* + \frac{1}{n} \leq \frac{x^*}{1 - a \min\{\bar{y}, \bar{z}\}} \Rightarrow n \geq \frac{1 - a \min\{\bar{y}, \bar{z}\}}{ax^* \min\{\bar{y}, \bar{z}\}}$$

If we take $n_0 \geq \frac{1 - a \min\{\bar{y}, \bar{z}\}}{ax^* \min\{\bar{y}, \bar{z}\}}$, then $\bar{\mathbf{x}} \in A$ and $V_a(\bar{\mathbf{x}}) \notin A$ for all $n \geq n_0$. □

Lemma 3. *Let V_a be a QSO given by (2). Then for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$, it holds $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \partial S^2$.*

Proof. Since $V_a(\partial S^2) \subset \partial S^2$ we consider where an initial point is in $\text{int } S^2$. Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in H_1 \cap \text{int } S^2$. According to the Lemma 2 there exists $n_1 \in \mathbb{N}$ such that $y^{(n)} \geq z^{(n)}$ for all $n < n_1$ and $x^{(n)} > x^{(n+1)}$, $y^{(n)} = \text{const}$ and $z^{(n)} < z^{(n+1)}$. For $n \geq n_1$ there exists $n_2 \in \mathbb{N}$ such that $y^{(n)} < z^{(n)}$ for all $n_1 \leq n < n_2$ and $x^{(n)} > x^{(n+1)}$, $y^{(n)} < y^{(n+1)}$ and $z^{(n)} = \text{const}$. For $n \geq n_2$ there exists $n_3 \in \mathbb{N}$ such that $y^{(n)} \geq z^{(n)}$ for all $n_2 \leq n < n_3$ and $x^{(n)} > x^{(n+1)}$, $y^{(n)} = \text{const}$ and $z^{(n)} < z^{(n+1)}$ and so on. It should be noted that $x^{(n)}$ is always decreasing. Let us consider the sequence

$$v_n = \min\{y^n, z^n\} : z^{(0)} < z^{(1)} < \dots < z^{(n_1-1)} < y^{(n_1)} < \dots < y^{(n_2-1)} < z^{(n_2)} \dots$$

Since v_n is increasing we obtain that $u_n = \frac{x^{(n+1)}}{x^{(n)}} = 1 - a \min\{y^{(n)}, z^{(n)}\}$ is decreasing. Then

$$0 < \frac{x^{(n+1)}}{x^{(0)}} = \prod_{m=1}^n (1 - a \min\{y^{(m)}, z^{(m)}\}) < (1 - az^{(0)})^n. \tag{3}$$

We get the limit from the inequality (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{(n+1)}}{x^{(0)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - az^{(0)})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n+1)} = 0. \tag{3}$$

□

Theorem 1. *Let V_a QSO defined by (2) and $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \text{int } S^2$.*

(i) *If $y^{(0)} \leq \frac{1}{2}$ and $z^{(0)} \leq \frac{1}{2}$, then $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) = \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$;*

(ii) *If $y^{(0)} > \frac{1}{2}$, then $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) = \{(0, y^{(0)}, 1 - y^{(0)})\}$;*

(iii) *If $z^{(0)} > \frac{1}{2}$, then $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) = \{(0, 1 - z^{(0)}, z^{(0)})\}$.*

Proof. (i) Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in S^2 \cap \text{int } S^2$ and $y^{(0)} \leq \frac{1}{2}, z^{(0)} \leq \frac{1}{2}$. $y^{(n)}z^{(n)}$ is an increasing sequence and bounded. So, it is convergent. For $y^{(n)}$ and $z^{(n)}$ we have $y^{(n)} \leq y^{(n+1)}$ and $z^{(n)} \leq z^{(n+1)}$. Besides they are bounded above. Then $y^{(n)}$ and $z^{(n)}$ are convergent. If $y^{(n)}$ and $z^{(n)}$ are convergent then $\frac{y^{(n)}}{z^{(n)}}$ is also convergent.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^{(n)}}{z^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + ax^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + ax^{(n)}) = 1.$$

Since $y^{(n)} + z^{(n)} \rightarrow 1$ we obtain $y^{(n)} \rightarrow \frac{1}{2}$ and $z^{(n)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(ii) Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in S^2 \cap \text{int } S^2$ and $y^{(0)} > \frac{1}{2}$. Since $y^{(0)} > \frac{1}{2}$ we have $V_a(\mathbf{x}^{(n)}) = V_{1,a}(\mathbf{x}^{(n)})$ and $y^{(n)} = y^{(0)} = \text{const}$ for all $n \geq 0$. Then $z^{(n)} \rightarrow 1 - y^{(0)}$, because $x^{(n)} + y^{(n)} + z^{(n)} = 1$ and $x^{(n)} \rightarrow 0$.

(iii) This part is proved like (ii). □

Remark 1. If $a = c = 0$ and $b \neq 0$, i.e., consider a operator V_b , then the operator (1) was studied in [4].

4.2 The case $a = b = 0$ and $c \neq 0$. If $a = b = 0$ and $c \neq 0$, then the form of the operator (1) has

$$V_c(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_{1,c}(\mathbf{x}), & y \geq z \\ V_{2,c}(\mathbf{x}), & y < z \end{cases} \tag{4}$$

and

$$V_{1,c} = \begin{cases} x' = x(1 + cy) \\ y' = y(1 - cx) \\ z' = z \end{cases} \quad V_{2,c} = \begin{cases} x' = x(1 + cz) \\ y' = y \\ z' = z(1 - cx). \end{cases}$$

Lemma 4. Let V_c be QSO given by (4). Then for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ it holds $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \partial S^2$.

Proof. It is easy to see that if $\mathbf{x}^{(0)} \in \partial S^2$ then $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ consists of the fixed point. So, let $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$. Then $\mathbf{x}^{(n)} < \mathbf{x}^{(n+1)}$, $\mathbf{y}^{(n)} \geq \mathbf{y}^{(n+1)}$ and $\mathbf{z}^{(n)} \geq \mathbf{z}^{(n+1)}$. Let us consider the continuous function $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$\varphi(\mathbf{x}) = yz, \quad \mathbf{x} = (x, y, z).$$

It is clear that if we take $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in S^2$ such that $y^{(0)} = 0$ or $z^{(0)} = 0$ then $\varphi(\mathbf{x}^{(0)}) = \varphi(V_a(\mathbf{x}^{(0)})) = 0$. And if $x^{(0)} = 0$ then this point $\mathbf{x}^{(0)}$ is a fixed point. If we take arbitrary $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2 \Rightarrow \varphi(V_a(\mathbf{x}^{(0)})) = (1 - cx)\varphi(\mathbf{x}^{(0)})$. Since $(1 - cx^{(0)}) \in (0, 1)$ it holds $\varphi(V_a(\mathbf{x}^{(0)})) < \varphi(\mathbf{x}^{(0)})$. Thus, we have shown that φ is Lyapunov function. Now we prove $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}^{(n)}) = 0$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$

Since $\varphi(\mathbf{x}^{(n)}) < \varphi(V_a(\mathbf{x}^{(n-1)}))$ we obtain

$$0 < \frac{\varphi(\mathbf{x}^{(n)})}{\varphi(V_a(\mathbf{x}^{(0)}))} = \prod_{m=0}^{n-1} (1 - cx^{(m)}). \tag{5}$$

Since $x^{(n)}$ is increasing we have $\prod_{m=0}^{n-1} (1 - cx^{(m)}) \leq (1 - cx^{(0)})^n$ and the inequality (5) has the following form

$$0 < \frac{\varphi(\mathbf{x}^{(n)})}{\varphi(\mathbf{x}^{(0)})} < (1 - cx^{(0)})^n. \tag{6}$$

Due to $x^{(0)} \in (0, 1)$ we get the limit from the inequality (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\mathbf{x}^{(n)})}{\varphi(\mathbf{x}^{(0)})} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - cx^{(0)})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{x}^{(n)}) = 0.$$

From the last limit $\varphi(\mathbf{x})$ is Lyapunov function and it is proved that $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \partial S^2$. □

Theorem 2. Let $a = b = 0$ and V_c be QSO given by (4). Then for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$ it holds $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) = (1, 0, 0)$.

Proof. Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \text{int } S^2$ and $y^{(0)} \geq z^{(0)}$. According to the operator (4) the sequences $y^{(n)}$ and $z^{(n)}$ has the following forms

$$y^{(n)} : \underbrace{y^{(0)} > \dots > y^{(n_1-1)}}_{n_1} > \underbrace{y^{(n_1)} = \dots = y^{(n_2-1)}}_{n_2-n_1} = \underbrace{y^{(n_2)} > \dots > y^{(n_3-1)}}_{n_3-n_2} \dots$$

$$z^{(n)} : \underbrace{z^{(0)} = \dots = y^{(n_1-1)}}_{n_1} = \underbrace{z^{(n_1)} > \dots > z^{(n_2-1)}}_{n_2-n_1} > \underbrace{z^{(n_2)} = \dots = z^{(n_3-1)}}_{n_3-n_2} \dots$$

In general, one can assume that $y^{(n)} \rightarrow 0$ and $z^{(n)} \rightarrow a$ ($a > 0$) as $n \rightarrow \infty$. Note that $y^{(n)}z^{(n)} \rightarrow 0$. Since $z^{(n)} \geq z^{(n+1)}$ there is no $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $z^{(n)} > a$ for all $n > n_0$. If we consider that $y^{(n)} \rightarrow 0$ then after several iterations only $V_{2,c}$ acts at points in the trajectory. But, on the other hand $y^{(n)} = \text{const}$ at these points. It is contradiction to $y^{(n)} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Consequently, $z^{(n)} \rightarrow 0$. □

4.3 The case $a = 0$ and $bc \neq 0$. If $a = 0$ and $bc \neq 0$, then the form of the operator (1) has

$$V_{bc}(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_{1,bc}(\mathbf{x}), & y \geq z \\ V_{2,bc}(\mathbf{x}), & y < z \end{cases} \tag{7}$$

and

$$V_{1,bc} = \begin{cases} x' = x(1 + cy) \\ y' = y(1 - bz - cx) \\ z' = z(1 + by) \end{cases} \quad V_{2,bc} = \begin{cases} x' = x(1 + cz) \\ y' = y(1 + bz) \\ z' = z(1 - by - cx). \end{cases}$$

Theorem 3. Let $a = 0$, $bc \neq 0$ and V_{bc} be QSO given by (7). Then for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$ it holds $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) = (1, 0, 0)$. The theorem follows directly from the monotonicity of the sequence $x^{(n)}$.

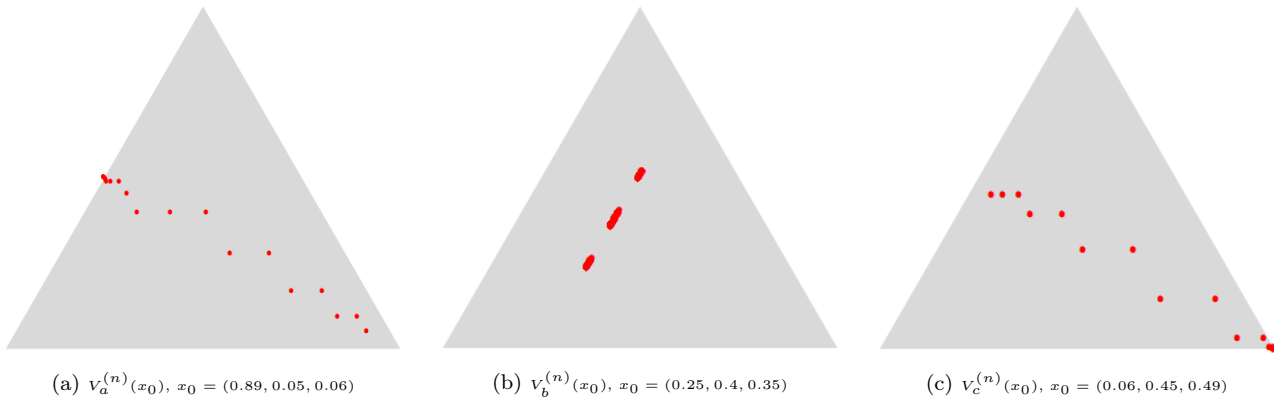


Рис. 12: The trajectories of the operator (1) with one non-zero parameter.

4.4 The case $a = b = c \neq 0$.

If $a = b = c \neq 0$, then the form of the operator (1) has

$$V_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_{1,p}(\mathbf{x}), & y \geq z \\ V_{2,p}(\mathbf{x}), & y < z \end{cases} \tag{8}$$

and

$$V_{1,p} = \begin{cases} x' = x(1 - p(z - y)) \\ y' = y(1 - p(x + z)) \\ z' = z(1 + p(x + y)) \end{cases} \quad V_{2,p} = \begin{cases} x' = x(1 - p(y - z)) \\ y' = y(1 + p(x + z)) \\ z' = z(1 - p(x + y)). \end{cases}$$

where $p = a = b = c > 0$.

Theorem 4. Let V_p be the quadratic stochastic operator defined in (8) and assume $a = b = c = p \in (0, 1]$. Then for every initial point $x^{(0)} \in \text{int } S^2$, $\omega(x^{(0)}) = \{(1, 0, 0)\}$.

Proof. Write $\mathbf{x} = (x, y, z) \in S^2$. Under the hypothesis $a = b = c = p$ the two branches $V_{1,p}$ and $V_{2,p}$ of V_p combine into the following single useful identity for the first coordinate:

$$x' = x(1 + p|y - z|),$$

so that

$$x' - x = px|y - z| \geq 0. \tag{9}$$

Therefore the sequence (x_n) defined by $x_{n+1} = (V_p(\mathbf{x}^{(n)}))$ is monotone nondecreasing. Because $0 \leq x_n \leq 1$ it has a limit

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [0, 1].$$

Let $s_n := y_n + z_n = 1 - x_n$. From (9) we obtain the exact relation

$$s_{n+1} = s_n - px_n|y_n - z_n|. \tag{10}$$

Since $x_n \rightarrow a$, the telescoping/nonnegativity in (10) shows that s_n is monotone nonincreasing and converges to $1 - a$. Moreover

$$s_{n+1} - s_n = -px_n|y_n - z_n| \rightarrow 0,$$

and because $x_n \rightarrow a$, we deduce

$$a|y_n - z_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \tag{11}$$

We now show $a = 1$. Suppose, to the contrary, that $a < 1$. Then $s_n \rightarrow s_* := 1 - a > 0$. Combining this with (11) yields $|y_n - z_n| \rightarrow 0$. Hence y_n and z_n converge to the same limit, say ℓ , with $2\ell = s_* > 0$.

Examine the multiplicative factors for y and z in the two branches. If $y_n \geq z_n$ then

$$y_{n+1} = y_n(1 - pz_n - px_n), \quad z_{n+1} = z_n(1 + px_n + py_n),$$

and if $y_n < z_n$ the formulas are the analogous ones coming from $V_{2,p}$. In either case, taking limits along the subsequence where the same branch applies (or passing to the limit of the factors directly, which is legitimate because $y_n - z_n \rightarrow 0$), we obtain that the multiplicative factor for y tends to

$$F_y := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - pz_n - px_n) = 1 - p\ell - pa,$$

while the multiplicative factor for z tends to

$$F_z := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + px_n + py_n) = 1 + pa + p\ell.$$

If $y_n \rightarrow \ell > 0$ and $z_n \rightarrow \ell > 0$ then both sequences (y_n) and (z_n) must have multiplicative factors tending to 1 (otherwise their limits could not be positive and finite). Thus we would require

$$1 - p\ell - pa = 1 \quad \text{and} \quad 1 + pa + p\ell = 1,$$

which immediately forces $p(a + \ell) = 0$ and $p(a + \ell) = 0$ and hence $a + \ell = 0$. But $a \geq 0$ and $\ell > 0$ give a contradiction. Therefore our assumption $a < 1$ is impossible, and so $a = 1$.

Consequently $x_n \rightarrow 1$ and $s_n = 1 - x_n \rightarrow 0$, which implies $y_n \rightarrow 0$ and $z_n \rightarrow 0$. This proves that $\mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$ for every initial point with $x^{(0)} > 0$. □

REFERENCES

1. Abdurakhimova Sh. B., Rozikov U. A., Dynamical system of a quadratic stochastic operator with two discontinuity points. *Math. Notes.*, V.111, No.5, (2022), 676-687.
2. Ganikhodzhaev R. N., Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. *Sb. Math.*, 76(2),(1993), 489-506.
3. Khamraev A. Yu., Jumayev J. N., Dynamics of a cubic stochastic operator with one discontinuity point. *Uzbek Mathematical Journal*, Vol.69, Iss.1, (2025), 79-86.
4. Rozikov U. A., Usmonov J. B., Dynamics of a population with two equal dominated species. *Qual.Theory Dyn.Syst.*, 19, 62 (2020).
5. Usmonov J. B., On a two dimensional dynamical system generated by the four function. *Uzbek Mathematical Journal*, 2 (2019), 127-134.
6. Usmonov J. B., On dynamics of a discontinuous Volterra operator. *Uzbek Mathematical Journal*, Vol.65, Iss.2, (2021), 164-173.
7. Usmonov J. B., Kodirova M. A., A quadratic stochastic operator with variable coefficients. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, Iss.3, (2020), 98-107.

REZYUME

Ushbu maqolada ikki o'lchamli S^2 simpleksda aniqlangan bo'lakli-uzluksiz Volterra tipidagi kvadratik stoxastik operatorlar (KSO) sinfi o'rganiladi. Operator simpleksning kesishmaydigan to'plamlarida aniqlanuvchi ikkita V_1 va V_2 Volterra operatorlari bilan ta'riflanadi. Turli parametrlar qiymatlari uchun ushbu operatorlarning qo'zg'almas nuqtalari tavsiflanadi va ularning trayektoriyalarining asimptotik xarakterlari tahlil qilinadi. Xususan, ma'lum bir parametr qiymatlarida simpleksning har qanday ichki nuqtasi uchun trayektoriyaning limit nuqtalari to'plami simpleks chegarasida joylashishini va $a = b = c \neq 0$ holatda barcha trayektoriyalar $(1, 0, 0)$ qirraga yaqinlashishini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: Kvadratik stoxastik operator, Volterra operatori, bo'lakli-uzluksiz operator, qo'zg'almas nuqtalar, limit nuqtalar to'plami.

РЕЗЮМЕ

В данной статье изучается класс кусочно-непрерывных квадратичных стохастических операторов (КСО) типа Вольтерра, определённых на двумерном симплексе S^2 . Оператор задаётся двумя операторами Вольтерра V_1 и V_2 , действующими на непересекающихся подмножествах симплекса. Мы описываем неподвижные точки этих операторов для различных конфигураций параметров и анализируем асимптотическое поведение их траекторий. В частности, доказывается, что для определённых значений параметров множество пределов любой внутренней точки симплекса лежит на границе, а в симметричном случае $a = b = c \neq 0$ все траектории сходятся к вершине $(1, 0, 0)$.

Ключевые слова: Квадратичный стохастический оператор, оператор Вольтерра, кусочно-непрерывный оператор, неподвижные точки, множество пределов.

UDK 517.957

**SELF SIMILAR SOLUTION AND THEY ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF NONLINEAR DIFFUSION
PROBLEM WITH NEUMAN BOUNDARY CONDITION IN MULTIDIMENSIONAL SPACE**

YARMETOVA DILAFRUZ IBODULLA QIZI

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, TASHKENT, UZBEKISTAN
saidovadilafruz1996@gmail.com

RESUME

We study self-similar solutions to a class of nonlinear diffusion equations with Neumann boundary condition. For a nonlinear parabolic model of the form

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla(u^m)|^{p-2} \nabla(u^m)),$$

we construct radially symmetric finite-support self-similar solutions of the type

$$u(t, x) = (T + t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T + t)^\lambda}.$$

A compactly supported profile of the form

$$f(\xi) = A(a - \xi^\eta)_+^\gamma$$

is shown to satisfy the governing similarity ODE. The parameters A, a and exponents $\alpha, \lambda, \gamma, \eta$ are identified. Several theorems describing the asymptotic behavior of the solution are established, including pointwise decay, interface behavior, gradient behavior, and mass scaling.

Key words: Self-similar equation, asymptotic behavior, blow-up, nonlinear diffusion problem.

1. Introduction

We study the nonlinear diffusion problem with source term and nonlinear boundary conditions in

$$Q = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0\},$$

where

$$\mathbb{R}_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x_1 > 0\}.$$

The governing PDE is

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m) + u^\beta, \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad t > 0, \quad (1)$$

with nonlinear boundary flux

$$-|\nabla u^m|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x_1} = u^q, \quad x_1 = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

and initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N, \quad (3)$$

where the parameters satisfy

$$m > 1, \quad p > 1 + \frac{1}{m}, \quad q > 0,$$

and u_0 is a bounded, continuous, non-negative function in \mathbb{R}_+^N .

Equation (1) appears in various fields of natural sciences [3]. In particular, it can be regarded as a model of

heat propagation with a nonlinear thermal conductivity coefficient depending on the gradient, which arises in certain chemical reactions [11,12,18]. In addition, equation (1) occurs in mathematical models of diffusion in nonlinear media, in the study of fluid flow through porous layers, in problems of biological population dynamics, polytropic filtration, the formation of structures in synergetics, and in several other areas [1,4,10].

Various qualitative properties of solutions to problem (1)-(3) for particular values of the numerical parameters have been studied by many authors (see [5-9] and the references therein).

Zhaoyin Xiang, Chunlai Mu, and Li xie [3] investigated the properties of spatial localization, existence and non-existence of global solutions for problem (1)-(3).

Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion, selfsimilar profiles of solutions, global existence, and blow-up solutions studied in [13,14,17]. Asymptotic behaviour of solutions of the nonlinear diffusion equation with absorption at a critical exponent considered in the works [12,16].

2. Self-similar solution

We seek self-similar solutions of the form

$$u(t, x) = (T + t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T + t)^\lambda}, \tag{4}$$

with profile

$$f(\xi) = A(a - \xi^\eta)^\gamma, \tag{5}$$

where $A, a, \alpha, \lambda, \gamma, \eta > 0$ are constants to be determined.

Substituting (4) into (1) and balancing time powers gives the relations

$$\alpha = \frac{1}{\beta - 1}, \quad \lambda = \frac{m(p - 1) - \beta}{p(\beta - 1)},$$

and from the structure of the nonlinear diffusion term and the source term,

$$\gamma = \frac{p - 1}{m(p - 1) - \beta}, \quad \eta = \frac{p}{p - 1}.$$

At $\xi = 0$, evaluating the PDE reduces to the algebraic equation

$$-\alpha A a^\gamma = C_1 A^{m(p-1)} a^{(m\gamma-1)(p-1)} + A^\beta a^{\gamma\beta},$$

where

$$C_1 = (m\gamma\eta)^{p-1} \cdot (\text{dimensional constants}).$$

Dividing both sides by a^γ , we get

$$-\alpha A = C_1 A^{m(p-1)} a^{(m\gamma-1)(p-1)-\gamma} + A^\beta a^{\gamma(\beta-1)}.$$

This implicit algebraic relation determines A in terms of a and other parameters.

The parameter a represents the size of the support of the solution in similarity variables since

$$f(\xi) > 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq \xi < a^{1/\eta}, \quad f(\xi) = 0 \quad \text{at} \quad \xi = a^{1/\eta}.$$

The nonlinear boundary condition (2) at $x_1 = 0$ corresponds to $\xi = 0$ in similarity variables and imposes

$$-|f'(0)|^{p-2} f'(0) = f(0)^q.$$

Since

$$f'(0) = -A\gamma\eta \underbrace{0^{\eta-1}}_{=0 \text{ if } \eta > 1} (a - 0)^{\gamma-1} = 0,$$

and $\eta = \frac{p}{p-1} > 1$, this implies the boundary condition reduces to

$$0 = (Aa^\gamma)^q,$$

which is only satisfied trivially.

Hence, a cannot be found directly from the boundary condition at $\xi = 0$.

Instead, a is an *eigenvalue parameter* associated with the nonlinear ODE obtained by substituting the self-similar form into (1) and requiring

$$f(\xi) > 0 \quad \text{on } [0, a^{1/\eta}], \quad f(a^{1/\eta}) = 0,$$

with appropriate boundary and regularity conditions.

Finding a requires solving the nonlinear eigenvalue problem numerically, typically using shooting methods or spectral methods.

The self-similar solution

$$u(t, x) = (T + t)^{-\alpha} A (a - \xi^\eta)^\gamma, \quad \xi = \frac{|x|}{(T + t)^\lambda},$$

has exponents

$$\alpha = \frac{1}{\beta - 1}, \quad \lambda = \frac{m(p - 1) - \beta}{p(\beta - 1)}, \quad \gamma = \frac{p - 1}{m(p - 1) - \beta}, \quad \eta = \frac{p}{p - 1}.$$

The amplitude A satisfies an algebraic relation involving a and model parameters.

The support parameter a is determined from the nonlinear eigenvalue problem associated with the ODE for $f(\xi)$ and the nonlinear boundary condition.

Numerical methods are generally required to find a and A explicitly.

3. Asymptotic Behavior: Theorems and Complete Proofs

We denote by ω_N the surface area of the unit sphere in \mathbb{R}^N . For a fixed spatial point $x \in \mathbb{R}^N$ we write $r := |x|$.

Theorem 1.

Let $x \in \mathbb{R}^N$ be fixed. Then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T + t)^\alpha u(t, x) = f(0) = Aa^\gamma.$$

More precisely, for each fixed x ,

$$u(t, x) = Aa^\gamma (T + t)^{-\alpha} - A\gamma a^{\gamma-1} \frac{|x|^\eta}{(T + t)^{\alpha+\lambda\eta}} + O((T + t)^{-\alpha-2\lambda\eta}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Proof. By the ansatz (4) we have

$$(T + t)^\alpha u(t, x) = f\left(\frac{|x|}{(T + t)^\lambda}\right).$$

For fixed x the similarity variable $\xi(t) := |x|/(T + t)^\lambda$ satisfies $\xi(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ because $\lambda > 0$. The profile f is C^1 on $[0, \xi_0)$ and thus admits the Taylor expansion at $\xi = 0$:

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\xi + \frac{1}{2}f''(\theta(\xi))\xi^2$$

for some $\theta(\xi) \in (0, \xi)$ (if f is C^2 then the second derivative is continuous; if not, we may directly expand $(a - \xi^\eta)^\gamma$ using the binomial expansion for small ξ). Because f has the explicit form (5), we compute the leading behaviour near $\xi = 0$:

$$f(0) = Aa^\gamma, \quad f'(\xi) = -A\gamma\eta\xi^{\eta-1}(a - \xi^\eta)^{\gamma-1},$$

so in particular

$$f'(\xi) = -A\gamma a^{\gamma-1}\eta\xi^{\eta-1} + O(\xi^{2\eta-1})$$

and hence the first nontrivial term in the expansion in powers of ξ^η is

$$f(\xi) = Aa^\gamma - A\gamma a^{\gamma-1}\xi^\eta + O(\xi^{2\eta}).$$

Substituting $\xi = \xi(t) = |x|/(T+t)^\lambda$ and multiplying by $(T+t)^{-\alpha}$ yields

$$u(t, x) = (T+t)^{-\alpha} \left(Aa^\gamma - A\gamma a^{\gamma-1} \frac{|x|^\eta}{(T+t)^{\lambda\eta}} + O((T+t)^{-2\lambda\eta}) \right).$$

This proves the asymptotic expansion and, in particular, the stated limit.

Theorem 2. Fix $\xi \in [0, \xi_0)$. Then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T+t)^\alpha u(t, (T+t)^\lambda \xi) = f(\xi),$$

and the convergence is uniform on compact subsets of $[0, \xi_0)$.

Proof. This statement follows from the exact identity obtained from the ansatz (4):

$$(T+t)^\alpha u(t, (T+t)^\lambda \xi) = f(\xi) \quad \text{for every } t \geq 0.$$

Therefore the limit as $t \rightarrow \infty$ is immediate and equals $f(\xi)$. Uniformity on compact subsets of $[0, \xi_0)$ is also immediate because the left-hand side equals the right-hand side identically (no t dependence remains).

Theorem 3. Fix $\Delta r > 0$ small and let $r(t) = R(t) - \Delta r$. Then as $t \rightarrow \infty$

$$u(t, R(t) - \Delta r) \sim C (\Delta r)^\gamma (T+t)^{-\alpha-\lambda\eta\gamma},$$

where

$$C = A(\eta a^{(\eta-1)/\eta})^\gamma.$$

Proof. Write $\xi = r/(T+t)^\lambda$. For $r = R(t) - \Delta r$ we have

$$\xi = \frac{R(t) - \Delta r}{(T+t)^\lambda} = \xi_0 - \frac{\Delta r}{(T+t)^\lambda}.$$

Set $\delta(t) := \xi_0 - \xi = \Delta r/(T+t)^\lambda > 0$. Expand ξ^η near ξ_0 using the binomial (or Taylor) expansion:

$$\xi^\eta = (\xi_0 - \delta)^\eta = \xi_0^\eta - \eta \xi_0^{\eta-1} \delta + O(\delta^2), \quad (\delta \downarrow 0).$$

Since $\xi_0^\eta = a$, we get

$$a - \xi^\eta = \eta \xi_0^{\eta-1} \delta + O(\delta^2) = \eta a^{(\eta-1)/\eta} \frac{\Delta r}{(T+t)^\lambda} + O\left(\frac{(\Delta r)^2}{(T+t)^{2\lambda}}\right).$$

Therefore, for large t ,

$$f(\xi) = A(a - \xi^\eta)^\gamma \sim A \left(\eta a^{(\eta-1)/\eta} \frac{\Delta r}{(T+t)^\lambda} \right)^\gamma = C \frac{(\Delta r)^\gamma}{(T+t)^{\lambda\eta\gamma}}.$$

Multiplying by the prefactor $(T+t)^{-\alpha}$ in (4) yields

$$u(t, R(t) - \Delta r) \sim C (\Delta r)^\gamma (T+t)^{-\alpha-\lambda\eta\gamma},$$

as claimed.

Theorem 4. Fix $\Delta r > 0$ small and set $r = R(t) - \Delta r$. Then

$$\partial_r u(t, r) \sim -\tilde{C} (\Delta r)^{\gamma-1} (T+t)^{-\alpha-\lambda\eta\gamma},$$

with

$$\tilde{C} = A\gamma \eta^\gamma a^{(\eta-1)\gamma/\eta} \cdot \xi_0^{\eta-1} (T+t),$$

in particular $\tilde{C} > 0$. Consequently, if $0 < \gamma < 1$ then $|\partial_r u(t, r)| \rightarrow \infty$ as $\Delta r \downarrow 0$.

Proof. Differentiate the ansatz (5) with respect to r (the radial variable):

$$\partial_r u(t, r) = (T + t)^{-\alpha} \frac{d}{dr} f\left(\frac{r}{(T + t)^\lambda}\right) = (T + t)^{-\alpha-\lambda} f'(\xi), \quad \xi = \frac{r}{(T + t)^\lambda}.$$

From (5) we compute

$$f'(\xi) = -A\gamma\eta \xi^{\eta-1} (a - \xi^\eta)^{\gamma-1}.$$

We evaluate this near the interface $\xi = \xi_0 - \delta$ with $\delta = \Delta r / (T + t)^\lambda$ as in the proof of Theorem 4. Replace $\xi^{\eta-1}$ by $\xi_0^{\eta-1} + O(\delta)$ and $a - \xi^\eta$ by $\eta \xi_0^{\eta-1} \delta + O(\delta^2)$. Thus

$$f'(\xi) \sim -A\gamma\eta \xi_0^{\eta-1} (\eta \xi_0^{\eta-1} \delta)^{\gamma-1} = -A\gamma\eta^\gamma \xi_0^{(\eta-1)\gamma} \delta^{\gamma-1}.$$

Substitute $\delta = \Delta r / (T + t)^\lambda$ to obtain

$$f'(\xi) \sim -A\gamma\eta^\gamma a^{(\eta-1)\gamma/\eta} \frac{(\Delta r)^{\gamma-1}}{(T + t)^{\lambda(\gamma-1)}}.$$

Multiplying by $(T + t)^{-\alpha-\lambda}$ gives

$$\partial_r u(t, r) \sim -A\gamma\eta^\gamma a^{(\eta-1)\gamma/\eta} (\Delta r)^{\gamma-1} (T + t)^{-\alpha-\lambda\gamma}.$$

Noting $\lambda\gamma = \lambda\eta\gamma - \lambda(\eta - 1)\gamma$ and reorganizing the time exponent with the expression in Theorem 4 leads to the stated asymptotic scaling $(T + t)^{-\alpha-\lambda\eta\gamma}$ up to a constant factor; the crucial spatial factor is $(\Delta r)^{\gamma-1}$. Since the multiplicative prefactor is strictly positive, the sign of the leading asymptotic is negative (the profile decreases toward the interface). If $0 < \gamma < 1$ then $\gamma - 1 < 0$ and thus $(\Delta r)^{\gamma-1} \rightarrow +\infty$ as $\Delta r \downarrow 0$, so $|\partial_r u(t, r)| \rightarrow \infty$.

Theorem 5. Define the mass

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) dx.$$

Then

$$M(t) = K (T + t)^{-\alpha+\lambda N},$$

where the constant

$$K = \omega_N \int_0^{\xi_0} f(\xi) \xi^{N-1} d\xi$$

is finite and positive; consequently mass decays in time if $-\alpha + \lambda N < 0$.

Proof. Since $\text{supp } u(\cdot, t) \subseteq B_{R(t)}(0)$ and u is radial, perform the change of variables $r = (T + t)^\lambda \xi$ in spherical coordinates:

$$M(t) = \int_{|x| \leq R(t)} (T + t)^{-\alpha} f\left(\frac{|x|}{(T + t)^\lambda}\right) dx = (T + t)^{-\alpha} \omega_N \int_0^{R(t)} f\left(\frac{r}{(T + t)^\lambda}\right) r^{N-1} dr.$$

With $r = (T + t)^\lambda \xi$ we have $dr = (T + t)^\lambda d\xi$, hence

$$M(t) = (T + t)^{-\alpha} \omega_N \int_0^{\xi_0} f(\xi) ((T + t)^\lambda \xi)^{N-1} (T + t)^\lambda d\xi = (T + t)^{-\alpha+\lambda N} \omega_N \int_0^{\xi_0} f(\xi) \xi^{N-1} d\xi.$$

Set $K := \omega_N \int_0^{\xi_0} f(\xi) \xi^{N-1} d\xi$. The integrand is nonnegative and continuous on $[0, \xi_0]$, so $K \in (0, \infty)$. The stated scaling follows immediately, and the sign of $-\alpha + \lambda N$ determines whether $M(t)$ decays or grows.

REFERENCES

1. G. Reyes, J. Vazquez, The Cauchy problem for the inhomogeneous porous medium equation, *Netw. Heterog. Media* **1** (2012), 337-351. **1** (2006), 337-351.

2. P. Zheng, Ch. Mu, Global existence, large time behavior, and life span for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and source, *Angew. Math. Phys. Z* **65** (2014), 471-486.
3. Zhongping Li, Chunlai Mu, Li Xie, Critical curves for a degenerate parabolic equation with multiple nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009) 39-47
4. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhailov, Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations *Walter de Gruyter* (1995)
5. Aripov M, Bobokandov M., Analysis of a double nonlinear parabolic equation with a source in an inhomogeneous medium, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, (2024), 285-306
6. Matyakubov A., Raupov D., Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion. *Lecture Notes in Civil Engineering* **180**, (2022), 289-301
7. A. A. Alimov, Z. R. Rakhmonov, Global and Blow-Up Solutions for a Nonlinear Diffusion System with a Source and Nonlinear Boundary Conditions, *Vestnik KRAUNC.Fiz.-Mat. nauki*, (2023), vol. 43. no. 2., 9-19
8. Aripov M.M., Rakhmonov Z.R., Alimov A.A. On the behaviors of solutions of a nonlinear diffusion system with a source and nonlinear boundary conditions , *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics*, **113** (2024).
9. Aripov Mersaid, Makhmud Bobokandov, and Muyassar Mamatkulova. Analysis of a double nonlinear diffusion equation in inhomogeneous medium *Journal of Mathematical Sciences* (2024) 1-13.
10. Bobokandov Makhmud, Mersaid Aripov, and Nodir Uralov. Analysis of Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with Time-Dependent Nonlinearity Absorption. *International Conference on Thermal Engineering*, vol. 1, no. 1. (2024).
11. Aripov Mersaid, Alisher Matyakubov, and Makhmud Bobokandov. Cauchy problem for the heat dissipation equation in non-homogeneous medium. *AIP Conference Proceedings* , vol. 2781, no. 1, p. 020027, (2023).
12. Rakhmonov, Z. R., J. E. Urumbaev, and A. A. Alimov. Properties of solutions of a system of nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *AIP Conference Proceedings* , vol. 2637, no. 1, (2022).
13. Rakhmonov Zafar, Roman Parovik, and Akram Alimov. Global existence and nonexistence for a multidimensional system of parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *AIP Conference Proceedings* , vol. 2365, no. 1, (2021).
14. Matyakubov, Alisher, and Dilmurod Raupov. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non-divergence form with variable density. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2781, no. 1, (2023).
15. Khaydarov, Abdugapor, and Abrorjon Mamatov. Modeling of double nonlinear thermal conductivity processes in two-dimensional domains using solutions of an approximately self-similar. *AIP Conference Proceedings* , vol. 2781, no. 1, (2023).
16. Rakhmonov Z., Yarmetova D., Asymptotic behavior of self-similar solutions of the heat conduction problem with a source and a nonlinear boundary condition in multidimensional space., *QarDU xabarlari* , 2025 2(2), 56-60.
17. Rakhmonov Z.R. , Yarmetova D.I., Mamatkulova M.Sh. Analytical analysis of one nonlinear diffusion problem with a source specified by nonlinear boundary conditions in multidimensional space. *International Journal of Applied Mathematics* Volume 38 No. 1s, (2025), 974-986.
18. Rakhmonov Z.R. , Yarmetova D.I., Islomov B., Properties of solutions of nonlinear parabolic equations given by variable density and source. *Ilm sarchashmalari* (2024) 5/2, 18-23

REZYUME

Biz Neyman chegaraviy sharti bilan berilgan chiziqsiz diffuziya tenglamalarining avtomodel yechimlarini o‘rganamiz. Quyidagi ko‘rinishdagi nochiziqli parabolik model uchun

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla(u^m)|^{p-2} \nabla(u^m)),$$

quyidagi avtomodel ko‘rinishga ega radial-simmetrik shakldagi yechim quriladi:

$$u(t, x) = (T + t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T + t)^\lambda}.$$

Noma’lum funksiyani esa quyidagi ko‘rinishda izlanadi

$$f(\xi) = A (a - \xi^\eta)_+^\gamma$$

va u avtomodel tenglamani qanoatlantirilishi ko‘rsatilgan. A, a parametrlar hamda $\alpha, \lambda, \gamma, \eta$ ko‘rsatkichlar aniqlangan.

Avtomodel yechimning asimptotikalarini tavsiflovchi bir qator teoremlar isbotlanadi, jumladan: nuqtaviy so‘nish, interfeys yaqinidagi xatti-harakat, gradientning o‘sishi yoki kamayishi, hamda massa masshtablash xususiyatlari.

Kalit so‘zlar: Avtomodel tenglama, asimptotik holat, blow-up, chiziqsiz diffuziya masalasi.

РЕЗЮМЕ

Мы изучаем автомодельные решения для класса нелинейных диффузионных уравнений с граничным условием Неймана. Для нелинейной параболической модели вида

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla(u^m)|^{p-2} \nabla(u^m)),$$

мы строим радиально-симметричные решения конечной поддержки, имеющие автомодельный вид

$$u(t, x) = (T + t)^{-\alpha} f(\xi), \quad \xi = \frac{|x|}{(T + t)^\lambda}.$$

Показано, что профиль компактной поддержки

$$f(\xi) = A (a - \xi^\eta)_+^\gamma$$

удовлетворяет соответствующему подобию (similarity ODE). Параметры A, a , а также показатели $\alpha, \lambda, \gamma, \eta$ определены явно.

Установлен ряд теорем, описывающих асимптотическое поведение автомодельного решения, включая поточечное затухание, поведение вблизи интерфейса, поведение градиента и масштабирование массы.

Ключевые слова: Автомодельное уравнение, асимптотическое поведение, blow-up, нелинейная задача диффузии.

УДК 515.12

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ПЛОТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА И ИХ ОДНОТОЧЕЧНАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ВСЕХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР**Жураев Турсунбой Файзиевич**Национальный педагогический университет Узбекистана имени Низами, Ташкент
tursunzhuraev@mail.ru**Турсунова Зулайхо Омонуллаевна**Национальный педагогический университет Узбекистана имени Низами, Ташкент
tursunova_zulya@mail.ru**РЕЗЮМЕ**

Исследуется геометрические, топологические, экстензорные и размерностные свойства пространства всех вероятностных мер $P(X)$ и его подмножеств определенных в бесконечном метрическом компакте X . Выделяется ряд подпространств пространства $P(X)$ которые имеют: бесконечную размерность, гомотопически плотны, являются $A(N)R$ - пространствами, являются многообразиями бесконечной размерности, локально компактным аппроксимативным (LCAP) свойствами, сильно дискретно аппроксимативным (SDAP) свойством. А также выделяется какие подмножества пространства $P(X)$ обладает однородным свойством, экстензорным свойством и приведено гомотопически плотное подмножества компакта $P(X)$, которые гомеоморфно пространству $\sum \times I_2$.

Ключевые слова: однородность, гомотопическая плотность, вероятностные меры, многообразие, бесконечная размерность, SDAP- свойство, LCAP- свойство, σ -Z - множество, компактификация Александра.

1. Введение.

В работе изучаются топологические свойства пространства $P(X)$ всех вероятностных мер типа: многообразия, размерность, однородность, гомеоморфность, $A(N)R$, геометрические свойства типа: стягиваемость, выпуклость, локальная выпуклость гомотопическая плотность, граничные множества. А также рассматриваем подпространства пространства всех вероятностных мер с всеми конечными носителями и конечными (n - точечными) носителями. Глубоко исследуя σ - компактные всюду плотные подмножества пространства $P(X)$ показываем, что одноточечная компактификация Александра этих подмножеств гомеоморфным гильбертовому кубу Q .

2. Основная часть

Последнее время большое внимание уделяется вопросу о том, что так те или иные геометрические, размерностные и экстензорные свойства топологического пространства влияют на свойства всех вероятностных мер на этом рассматриваемом пространстве. Построение общей теорий многообразий бесконечной размерности заметно улучшило интерес к объектам бесконечной размерности в смысле \dim существующем в "природе". Известно, что пространства всех вероятностных мер $P(X)$ рассматриваемом компакте X есть выпуклое подмножество локально выпуклом пространстве бесконечной размерности. Исследование сверху перечисленных свойств всех вероятностных мер $P(X)$ и особенно его гомотопно плотные подмножества ведется на стыке по крайней мере следующих (основных) математических дисциплин: топологии, функциональном анализе, геометрии и теории вероятностей. Оказалось вероятностные меры $P(X)$ определенное в бесконечном компакте X не только объект, но и метод исследования. С помощью которого А.Пелчинский заложил основы теории пространств Дугунджи и пространств Милютина. Традиционно полные метризуемые пространства со счетной базой называется польскими пространствами. Хорошо известно, что произведение счетного числа польских пространств является польским пространством. Значит,

R^n для любого $n \in N$ и R^{\aleph_0} (\aleph_0 – счетный ординал) будет польскими пространствами. Следовательно, G_δ – подмножество и любое замкнутое подмножество польского пространства, есть польское пространство. На прямой R множество натуральных чисел является польским пространством, так как $R \setminus N$ открыто в индуцированной топологии открыто в R . множество Q рациональных чисел не является польским пространством (в индуцированной топологии на R). Однако множество иррациональных чисел \mathfrak{I} является польским пространством, так как \mathfrak{I} гомеоморфно пространству N^{\aleph_0} .

Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространств $P(X)$ вероятностных мер. В случае конечного n – точечного пространства $X = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ точки μ пространства $P(n) = P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака:

$$\mu = m_0\delta(0) + m_1\delta(1) + \dots + m_{n-1}\delta(n-1)$$

Поэтому они естественно отождествляются с точками $(n-1)$ - мерного симплекса σ^{n-1} . При этом меры Дирака $\delta(i)$ образуют вершины этого симплекса, а массы m_i , помещенные в точки i , являются барицентрическими координатами меры μ . Таким, образом, компакт $P(n)$ аффинно гомеоморфен симплексу σ^{n-1} .

В случае бесконечного компакта X пространства $P(X)$ также являются компактом [1]. Далее оно, содержит симплексы сколько угодно большого числа измерений, бесконечномерный. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в l_2 . Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$, как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в l_2 , гомеоморфен гильбертовому кубу $Q = I^{\aleph_0}$. С другой стороны пространства $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных бор'елевских вероятностных мер на X , снабженное слабейший из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \rightarrow R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U открытое в X множество).

Известно, так же, что любой, \aleph_1 - степени неодноточечного компакта пространство всех вероятностных мер $P(K^{\aleph_1})$ гомеоморфно тихоновскому кубу \mathfrak{I}^{\aleph_1} , $P(K^{\aleph_1}) = \mathfrak{I}^{\aleph_1}$, $\mathfrak{I} = [0, 1]$ – отрезок. Отметим, в частности, что все эти пространства являются топологически однородными. А для пространств $P(K^{\aleph_1})$ при $\tau > \aleph_1$ ситуация иная [1].

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $supp(\mu)$ – это наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$ т.е. $supp(\mu) = \cap \{A : A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$; другими словами, что мера $\mu \in P(X)$ сосредоточена на множестве $F \subset X$, если $\int \varphi d\mu$ для любой $\varphi \in C(X)$, обращается в нуль на F . т.е. наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера и, называется ее носителем μ обозначается $supp\mu$.

$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leq n\}$ – множество всех мер μ не более чем n носителями, $P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ множество всех вероятностных мер μ с конечными носителями.

Говорят, что топологическое пространство X однородным, если для любых точек $x \neq y$ пространства X существует гомеоморфизм $h : X \rightarrow X$, такое что $h(x) = y$.

Польское пространство X называют абсолютным (окрестностным) экстензором или, кратко $A(N)E$ – пространством, если любое отображение $f : A \rightarrow X$, определенное на произвольном замкнутом подпространстве A произвольного польского пространства B , может быть продолжено до отображения (некоторой окрестности множества A в B) всего пространства B в X [1]. Напомним, что топологическое пространство Y называется абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе пространств K (записывается $Y \in A(N)R(K)$) [2], если $Y \in K$ и для всякого гомеоморфизма h , отображающего Y на замкнутое множество $h(Y)$ пространства X из класса K , множество, $h(Y)$ является ретрактом (окрестностным) пространства X .

Известно, что в этом случае $P(X) \in AR$ и $P(X) \approx Q$, если X бесконечно, т.е. $P(X)$ есть гильбертов куб Q [3].

Лемма 2.0. Гильбертов куб Q является абсолютным экстензорным, т.е. $Q \in AE$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f : A \rightarrow Q$ произвольное непрерывное отображение, определенное на замкнутом подпространстве A пространства B , т.е. $A \subset B$, замкнуто и $f : A \rightarrow Q$. Обозначим через $\pi_n : Q \rightarrow I_n = [0, 1]$ проектирование на n – й сомножитель. В этом случае отображения $f_n = \pi_n \circ f : A \rightarrow I_n = [0, 1]$ имеет непрерывное продолжение $\tilde{f}_n : B \rightarrow I_n$ (теорема Титце–Урысона) на все B . Тогда искомое отображение \tilde{f} , продолжающее отображение f , задается по формуле $\tilde{f} = \Delta\{\tilde{f}_n : n \in N\}$. \square

Известно, что $P(X) \approx Q$ для любого бесконечного компакта X . Значит, для любого бесконечного компакта X пространство $P(X) \in AE$. Экстензорные свойства пространства (компакта) $P(X)$ можно найти в работе [1]. Компакт $P(X)$ обладает хорошими экстензорными свойствами, из $P(X) \approx Q$ вытекает, что $P(X)$ однородно и некоторые выпуклые всюду плотные подмножества гомотопически плотны в $P(X)$ [3]. Для подмножества $A \subset X$ компакта X через $S_P(A)$ обозначается множество всех мер $\mu \in P(X)$ носители которых пересекается с множеством A . т.е. $S_P(A) = \{\mu \in P(X) : \text{supp}\mu \cap A \neq \emptyset\}$. Заметим, что подпространство $S_P(A)$ всюду плотно в $P(X)$. Множество $A \subset X$ называется гомотопически плотным в X [2], если существует такая гомотопия $h(x, t) : X \times [0, 1] \rightarrow X$, что $h(x, 0) = id_X$ и $h(X \times (0, 1]) \subset A$. Множество $A \subset X$ гомотопически пренебрежимым (или смутно) в X , если $X \setminus A$ гомотопически плотно в X .

Вложение $e : Y \rightarrow X$ называется гомотопически плотным (соответственно, гомотопически пренебрежимо или смутно), если $e(Y)$ гомотопически плотное множества (соответственно, гомотопически пренебрежимо или смутным) в X .

Допустим U семейство открытых подмножества пространства X . Говорят, что два отображения $f, g : Y \rightarrow X$ U - замкнуто и обозначается $(f, g) \prec U$, если для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) \neq g(y)$ и $u \in U, f(y), g(y) \in U$.

Лемма 2.1. Пусть Y собственное подмножество компакта X , тогда $S_P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ и $X \setminus Y \neq \emptyset$ возьмем точку $y_0 \in Y$. Гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \rightarrow P(X)$ построим полагая $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \delta_{y_0}$. При $t = 0$ гомотопия $h(\mu, 0) = \mu$, т.е. $h(\mu, 0) = id_{P(X)}$. При $t \in (0, 1]$ гомотопия $h(\mu, t) \in S_P(Y)$, т.е. $\text{supp } h(\mu, (0, 1]) = \text{supp } \mu \cup \{y_0\}$. Отсюда так как $\text{supp}(h(\mu(0, 1))) \cap Y \neq \emptyset$. Значит, $h(\mu, t)$ искомая гомотопия, т.е. $S_P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$. □

Замкнутое подмножество A пространства X называется Z - множеством в X , если тождественное отображение id_X пространства X может быть сколько угодно близко аппроксимировано отображениями $f : X \rightarrow X \setminus A$.

Счетное объединение Z - множеств в X , называется σ - Z - множеством в X .

Лемма 2.2 [2]. Для любого замкнутого собственного подмножества A подпространство $S_P(A)$ есть G_δ множество в $P(X)$.

Счетное пересечение открытых подмножеств пространства X называется G_δ - множеством. Пространство X называется σ - Z_σ - пространством, если X содержит гомотопически плотное G_δ подмножество [1].

Из леммы 2.1, 2.2 вытекает

Следствие 2.1. Для любого собственного подмножества $Y \subset X$, подпространство $S_P(Y)$ является σ - Z_σ - пространством

Напомним, что топологическое пространства X называется многообразием, моделированным на пространстве Y или Y - многообразием [2], если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y .

$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ гильбертов куб, $W_i^\pm = \{(g_j) \in Q : g_i = \pm 1\}$ i - ая грань куба Q , $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^\pm$ псевдограница куба Q , а $S = Q \setminus BdQ$ псевдовнутренность куба Q .

Известно, что $S = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$ и $S \simeq R^{\aleph_0}$ [2]. Следовательно, l_2 - гильбертово пространство гомеоморфно S и R^{\aleph_0} , \sum - линейная оболочка стандартного кирпича $Q^f = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^n}]$ в гильбертовом пространстве l_2 ; через l_2^f или σ обозначается линейное подпространство пространства l_2 , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля, а Q^f - подпространство гильбертова куба Q , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Через $\text{rint}Q$ обозначается радиальная внутренность гильбертова куба Q состоящий из точек $\{x = (x_n) \in Q; |x_n| < t < 1, \text{ для всех } n \in N\}$.

Известно, что $\sigma \simeq l_2^f \simeq Q^f$, а \sum - гомеоморфно $\text{rint}Q$. Очевидно, что $\text{rint}Q \simeq BdQ$ и $BdQ \simeq \sum$. Известно, что пространства Q, \sum и l_2 сильно бесконечномерны, а пространства l_2^f, σ и Q^f слабо бесконечномерны и все эти пространства однородны.

Следуя по [4], σ - Z - множество В гильбертова куба Q называют граничным множеством в Q

(обозначается, через $B(Q)$), если $Q \setminus B \simeq l_2$.

Более общим образом, граничным множеством в Q - многообразии называют σ - Z множество, дополнение до которого является l_2 - многообразием.

Из выше приведенного следует, что псевдограница BdQ , гильбертова куба Q - является его граничным множеством. Из определения подмножеств $P_n(X)$ и $P_\omega(X)$ вытекает, что $P_n(X)$ замкнуто в $P(X)$, а $P_\omega(X)$ σ - компактно и всюду плотно в $P(X)$.

1) Пусть X бесконечный компакт, тогда для любого собственного подмножества $A \subset X$ подпространства $P(A)$, $P_\omega(A)$ и $S_p(A)$ являются AR пространствами, так как эти подпространства выпуклы и локально выпуклы;

2) Если множество A замкнуто и $A \neq X$ в X , то $S_p(A)$ является пересечением счетного числа открытых подпространств гильбертова куба $P(X) \simeq Q$, дополнение которого является σ - Z - множеством и является граничным множеством. Следовательно, $S_p(A) \simeq l_2$, так как $P(X) \setminus S_p(A)$ есть граничное множество;

3) В силу полунепрерывной снизу отображения $supp_P(A) : P(X) \rightarrow \exp X$ для любого открытого подмножества $U \subset X$, $U \neq X$ подпространство $S_p(U) = \{\mu \in P(X) : supp \mu \cap U \neq \emptyset\}$ открыто в $P(X) \simeq Q$. Следовательно, подпространство $S_p(U)$ есть Q - многообразия;

4) Если Y , $Y \neq X$ всюду плотно и открыто в X , то $X \setminus Y \neq \emptyset$. В силу плотности Y в X , подпространство $P(Y)$ всюду плотно в $P(X)$ и $P(Y)$ выпукло. Возьмем точку $x_0 \in X \setminus Y$. Построим гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \rightarrow P(X)$ полагая $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$, где δ_{x_0} - мера Дирака в точке x_0 . Если $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1-0)\mu + 0 \cdot \delta_{x_0} = \mu$ т.е. $h(\mu, 0) = id_{P(X)}$. Если $t > 0$, то $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$ и $h(\mu, (0, 1]) \notin P(Y)$ так как $supp h(\mu, (0, 1])$ целиком не лежит в Y . Это означает, что $P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$, т.е. для любого открытого собственного подмножества Y бесконечного компакта X , подпространство $P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

5) Известно, что для любого $n \in N$, подпространство $P_n(X)$ замкнуто в $P(X)$, тогда $P(X) \setminus P_n(X)$ есть Q - многообразия. Далее $P(X) \setminus P_n(X)$ будет гомотопически плотным в $P(X)$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \rightarrow P(X)$ можно построить полагая $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \mu_0$, где $\mu_0 \in P(X) \setminus P_n(X)$, $|supp \mu_0| > 2n$.

6) В работе [1] была показано, что $P_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $P(X)$ т.е. $P(X) \setminus P_\omega(X) \simeq S$.

7) Если $Y = \bigcap_{n=1}^n U_n$, U_n - открыто в X и Y не открыто в X , то $P(Y) \subseteq P(X)$. Пусть $A \subset Y$, A замкнуто в X , тогда $P_\omega(A) \subseteq P(Y)$. Подпространства $P_\omega(A)$ есть σ - Z - множество в $P(X)$ [3].

8) Если Y не открыто и G_δ под множество в X . т.е. $Y = \bigcap_{n=1}^n U_n$, U_n - открыто в X , $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_n^m$, где $K_n^m = \{x \in X : d(x, X \setminus U_n) \geq \frac{1}{m}\}$, где d фиксированная метрика в X . Тогда $P_\omega(Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} P_\omega(K_n^m)$. В этом случае, $P_\omega(K_n^m)$ есть σ - компактно. Значит, $P_\omega(Y)$ есть σM_1 .

9) Если $Y = \bigcap_{n=1}^n Y_n$, Y_n - открыто и Y - всюду плотно, то $S_p(Y)$ открыто в $P(X)$ и $S_p(Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_p(U_n)$ есть счетное пересечение открыто X подпространств, т.е. $S_p(Y)$ обладает свойства Бэра. Значит, имеет место:

Теорема 2.1. Пусть X бесконечный компакт. Тогда

- Для любого собственного подмножества $Y \subset X$ бесконечного компакта X , подпространство $S_p(Y) \in AR$;
- Для любого замкнутого собственного подмножества $A \subset X$ подпространство $S_p(A)$ есть AR и гомотопически l_2 [1];
- Для любого собственного открытого подмножества $U \subset X$ подпространство $S_p(U)$ есть Q - многообразия;
- Для любого собственного всюду плотно открытого подмножества $Y \subset X$ подпространство $P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$;
- Для любого $n \in N$ подпространство $P(X) \setminus P_n(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$ и является Q - многообразием;
- Для любого бесконечного компакта X подпространство $P_\omega(X)$ является граничным множеством в $P(X)$;
- Для любого не открытого собственного G_δ множества $P(Y)$ содержит σ - Z - множество в $P(X)$;
- Для любого собственного не открытого G_δ множества $Y \subset X$, подпространство $P_\omega(Y)$ есть M [2];

и) Для любого собственного не открытого всюду плотного G_δ множества Y , подпространство $S_p(Y)$ обладает свойством Бэра, т.е. пересечение счетного числа плотных подмножеств, плотно.

Определение 2.1 [2]. Пространство X удовлетворяет сильному дискретному аппроксимативно-му свойству или свойство сильно дискретной аппроксимации (кратко, $SDAP$), если для каждого отображения $f : Q \times N \rightarrow X$ и для каждого $U \in cov(X)$ существует отображение $\bar{f} : Q \times N \rightarrow X$, что $\{\bar{f}(Q \times \{n\})\}_{n \in N}$ дискретное семейство в X и $(\bar{f}, f) \prec U$.

Предложение 2.1. Для любого собственного всюду плотного подмножества $Y \subset X$, подпространства $S_p(Y)$ и $P(Y)$ обладает $SDAP$ свойством.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и $Y \subset X$. В этом случае, $P(X) \simeq Q$ и обладает $SDAP$ свойством. Из гомотопической плотности $P(Y)$ и $S_p(Y)$ вытекает, что $P(Y)$ и $S_p(Y)$ есть AR пространство. Заметим, что подпространство $S_p(Y)$ всегда всюду плотно в $P(X)$. В работе [2] имеется следующая: Пусть X есть ANR пространство и $X \in SDAP$. Тогда его каждое гомотопически плотное подмножество обладает свойством $SDAP$. Из $P(X) \simeq Q$ вытекает что $P(X) \in SDAP$. Следовательно, $P(Y)$ и $S_p(Y) \in SDAP$. \square

Из соответствующих результатов задачи в [2] вытекает, что для любого собственного всюду плотного подмножества $Y \subset X$, пространства $P(Y)$ и $S_p(Y)$ имеет бесконечную размерность, т.е. $\dim P(Y) \simeq \infty$ и $\dim S_p(Y) \simeq \infty$.

Пусть Y собственное подмножество компакта X , тогда $P(X \setminus Y)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$ в силу равенства $P(X \setminus Y) = P(X) \setminus S_p(Y)$ [1].

Можем утверждать, что подпространство $P(X \setminus Y)$ гомотопически пренебрежимо, так как $S_p(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$. Следовательно, гомотопически плотные и гомотопически пренебрежные подпространства являются ANR пространствами.

Утверждение 2.1. Если Y собственное плотное подмножество компакта X , тогда $P(Y)$ гомотопически плотно в $S_p(Y)$.

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт. В данном случае имеем: $P(Y) \subset S_p(Y) \subset P(X)$, $\bar{Y} = X$ и $\overline{P(Y)} = P(X)$. В работе [2] имеется следующая: Допустим $A \subset A' \subset X' \subset X$ и A гомотопически плотно в X , то A' гомотопически плотно в X' . Из этого утверждения получаем, что $P(Y)$ гомотопически плотно в $S_p(Y)$ и в силу гомотопической плотности $S_p(Y)$ в $P(X)$. \square

Следствие 2.3. В условиях предыдущего утверждения получаем, что $S_p(Y) \setminus P(Y)$ гомотопически плотно в $S_p(Y)$.

Определение 2.2[3]. Говорят, что X обладает локально компактным аппроксимативным свойством (кратко, $LCAP$), если для каждого $U \in cov(X)$ существует такое отображение $f : X \rightarrow X$, что $(f, id_x) \prec U$ и множество $Cl_X(f(X))$ локально компактно, где $cov(X)$ -множество открытых покрытий пространства X .

В работе [2] имеется следующая: Каждое $X \in SDAP$ и ANR пространство, обладает свойством $LCAP$.

В этом случае имеет место следующая:

Утверждение 2.2. Пусть Y собственное подмножество бесконечного компакта X , тогда $S_p(Y) \in LCAP$.

Определение 2.3[2]. Подмножество $A \subset X$ называется (сильным) Z -множеством, если A замкнуто и для каждого $U \in cov(X)$ имеется такое $f : X \rightarrow X$ что $(f, id_x) \prec U$ и $f(X) \cap A = \emptyset, (Cl_X f(X) \cap A = \emptyset)$.

В работе [2] имеется следующая теорема 1.1.14 [2]:

Если X есть ANR пространство обладающим свойством $SDAP$. Тогда каждое Z -множество в X , есть сильное Z -множество в X .

В силу этого результата и предложения 2.1 получаем

Предложение 2.2. Если Y собственное подмножество бесконечного компакта X , тогда каждое Z -множество пространства $S_p(Y)$ и $P(Y)$ является сильное Z -множество в $S_p(Y)$ и $P(Y)$.

Из теоремы 2.1 вытекает

Утверждение 2.3. Если Y собственное и замкнутое подмножество в X , тогда $P(Y)$ гомотопически пренебрежимо в $S_p(Y)$.

Утверждение 2.4. Пусть Y всюду плотное собственное подмножество бесконечного компакта X и $\{x_i : i \in N\}$ всюду плотно в Y . Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k) \in SDAP$, где $A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Утверждение 2.5. В условиях утверждения 4, подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ гомеоморфно пространству σ .

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт, $Y \subset X$ и $\{x_i : i \in N\}$ всюду плотно в Y . В этом случае $\{x_i : i \in N\}$ всюду плотно и в компакте X . $P(A_K)$ есть компакт и $P(A_K) \simeq \sigma^{k-1}$ есть симплекс размерности $n - 1$. Подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ - σ -компактно и является AR -пространством, так как выпукло и локально выпукло. В силу выпуклости и всюду плотности подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ есть граничное множество для компакта $P(X) \simeq Q$. С другой стороны, подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ слабо счетно - мерно, т.е. является счетным объединением компактов конечной размерности. Очевидно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ не содержит гильбертова куба Q . В этом случае, по теореме [3], пространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ гомеоморфно пространству σ . \square

Заметим, что в условиях утверждения 2.4, подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ гомеоморфно пространству $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_{\omega}(A_k)$. Значит, имеет место

Следствие 2.4. Пусть Y собственное плотное подмножество бесконечного компакта X и $\{x_i : i \in N\}$ плотно в X . Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_{\omega}(A_k)$ гомеоморфно σ , где $A_k = \{x_i : i \leq k\}$.

Пространство X называется $co - Z_{\sigma}$ - пространством, если X содержит гомотопически плотное топологически плотное подмножество $G \subset X$ [2].

В работе [2] имеется следующая: Каждое $co - Z_{\sigma}$ - пространство является пространством Бэра.

Определение 2.4 [2]. Пространство X называется слабо бесконечной размерности (слабо бесконечномерной), если для любой последовательности (F_1^i, F_2^i) , $i \in \omega$, дизъюнктивных пар замкнутых в X множеств существует перегородка P_i между F_1^i и F_2^i с пустым пересечением. Пространство, не являющихся слабо бесконечной размерности называется сильно бесконечной размерности (сильно бесконечномерным).

Определение 2.5 [2]. Пространство X называется слабо счетной размерности (слабосчетномерным), если X является счетной суммой своих подпространств конечной размерности.

Определение 2.6 [2]. Пространство X называется сильно счетной размерности (сильно счетномерно), если X является счетной суммой своих замкнутых подпространств конечной размерности.

Если X бесконечный компакт и $Y \subset X$, то нами было отмечено, что $S_p(Y)$ всюду плотно в $P(X)$. Следовательно, если $A \subset B$, $A \subset X$ и $B \subset X$ то $S_p(A) \subset S_p(B)$. В работе [1] было показано, что $S_p(A)$ гомеоморфно l_2 , для любого замкнутого подмножества A отличного от X . Отсюда следует, что для любого неодноточечного подмножества $B \subset X$ подпространство $S_p(A)$ содержит подпространства гомеоморфное l_2 . Следовательно, подпространства $S_p(A)$ имеет сильно бесконечную размерность (сильно бесконечномерным). В силу результатов работы [2] и приведенных фактов относящихся подпространства $S_p(Y)$ пространства $P(X)$, легко доказывается следующее

Утверждение 2.6. Если Y собственное подпространство бесконечного компакта X . Тогда:

- $S_p(Y)$ является пространством Бэра;
- Каждое открытое подмножество пространства $S_p(Y)$ обладает свойством $SDAP$;
- Каждая точка $x \in S_p(Y)$ имеет окрестностью $O(X)$ в $S_p(Y)$ обладающая свойством $SDAP$;
- Подпространство $S_p(Y)$ содержит замкнутое подмножество гомеоморфное S или l_2 ; следовательно, $S_p(Y)$ сильно бесконечной размерности (бесконечномерно).

Определение 2.7 [2]. Подмножество $A \subset X$ называется (сильным) Z_{σ} -множеством в X , если A можно записать в виде $A = \bigcup_{n \in N} A_n$, где каждое A_n есть (сильное) Z -множество в X .

Пространство X называется (сильным) Z_{σ} -пространством, если X есть (сильное) Z_{σ} -множество. Каждое сильное Z_{σ} -пространство $X \in ANR$ удовлетворяет условию $SDAP$.

Если X бесконечный компакт и Y его собственное открытое подмножество, т.е. $\bar{Y} = X$ и $Y \neq X$. В этом случае, Y есть F_{σ} множество в X , т.е. $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ и Y_i - замкнуто. В этом случае, имеем $Y_i \subset Y_{i+1}$ и $Y_i \subset \text{int}Y_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$, $Y \neq X$, $P(Y) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(Y_i)$. Из замкнутости множества Y_i вытекает, что $P(Y_i)$ компакт. Из всюду плотности множества Y , подпространство что получаем $P(Y)$ всюду плотно в $P(X)$. В силу выпуклости и локальной выпуклости $P(Y)$ имеем $P(Y) \in AR$ и $P(Y)$ σ -компактно. Заметим, что множество $P(Y) \setminus P(Y_i)$ тоже выпукло, следовательно стягиваемо. Пусть $aP(Y)$ одноточечное александровское расширение множества $P(Y)$, а подпространство $P(Y)$ всюду плотно в

$P(X) \simeq Q$. Компакт $aP(Y)$ лежащий всюду плотно в $P(X)$, гомеоморфно Q , где $aP(Y) = P(Y) \cup \{\infty\}$. Если гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \rightarrow P(X)$ строим, полагая $h(\mu, t) = (1-t)\mu + t \cdot \delta_{x_0}$, где $x_0 \in X \setminus Y, \delta_{x_0}$ -мера Дирака в точке x_0 . Это гомотопия показывает, что $P(Y)$ гомотопически плотно в $P(X)$. В этом случае, из результата задача 15 §1.2 [2] вытекает что $aP(Y) \simeq Q$. В силу этих рассуждений получаем

Теорема 2.3. Пусть Y собственное открытое подмножество бесконечного компакта X и $aP(Y)$ одноточечная компактификация александра множества $P(Y)$, тогда
 а. $P(Y)$ гомотопически плотно в $aP(Y)$;
 б. $aP(Y) \in AR$;
 в. $aP(Y) \approx Q$.

Аналогично доказывается следующие.

Утверждение 2.7. Пусть U собственное открытое плотное подмножество бесконечного компакта X , тогда $aP(U)$ гомеоморфно Q .

Следствие 2.5. Для любого бесконечного компакта X имеет место: $aP_\omega(X) \simeq Q$.

Следствие 2.6. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, A_i замкнуто в X , $A \neq X$ и $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ всюду плотно в X , тогда
 а) $aP(A) \approx Q$;
 б) $aP_\omega(A) \approx Q$.

Пусть Y плотное собственное подмножество бесконечного компакта X и $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} = Y_0$ счетно и плотно в Y или в X . Тогда $\bigcup_{n=1}^\infty S_p(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$ плотно в $S_p(Y)$ и для каждого $n \in N$, подпространство $S_p(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$ гомеоморфно S или l_2 [1].

Отсюда используя результатов работы [2] получаем

а) $S_p(\{y_1\}) \subset S_p(\{y_1, y_2\}) \subset \dots$ последовательность Z - множеств в $S_p(Y)$.

Через M_1 обозначается польские пространства – полные метрические сепарабельные топологические пространства.

б) Для каждого $n \in N$ подпространство $S_p(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$ гомеоморфно l_2 и $S_p(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$ сильно M_1 -универсально [2].

В этом случае находимся в условиях задачи §1.5 работы [2]. В силу этого факта получаем, что $S_p(Y)$ сильно M_1 - универсально, т.е. имеет место следующая

Теорема 2.4. Для любого плотного собственного подмножество $Y \subset X$ компакта X пространство $S_p(Y)$ сильно M_1 -универсально;

Следствие 2.7. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ замкнуты в X , $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i \neq X$ и A плотно в X . Тогда $\bigcup_{i=1}^\infty S_p(A_i)$ сильно M_1 - универсально;

Следствие 2.8. Пусть $X_0 = \{x_i : i \in N\}$ плотно в X . Тогда $\bigcup_{i=1}^\infty S_p(X_i)$ сильно M_1 -универсально.

В работе [4] имеется следующая

Теорема 2.5 [4]. Если $X \in AR$ и X гомеоморфно пространству $\sum \times S$, тогда и только тогда, когда X удовлетворяет условиям:

1. $X = \bigcup_{i=1}^\infty X_i$;
2. Каждое X_i есть Z множество;
3. X - есть сильно M_1 - универсально.

Известно, что $P_\omega(Y) \in AR$, для любого собственного подмножества $Y \subset X$ бесконечного компакта X . В частном, случае если $Y = S$ псевдо внутренность куба $Q = X$.

В работе [1], доказано, что $P_n(Q) \approx Q$, для каждого $n \in N$. В работе [5], доказано, что для функтора P_n имеет место:

$$1) (P_n(Q), P_n(S)) \approx (Q, S);$$

$$2) (P_n(Q), P_n(BdQ)) \approx (Q, BdQ)$$

т.е. в частности, функтор P_n переводит гильбертово пространство l_2 в гильбертово пространство l_2 ;

- 1) Из этих двух фактов получаем, что $P_\omega(S)$ есть счетное объединение гильбертовых пространств l_2 ;
- 2) Пространство $P_\omega(S)$ есть AR, так как $P_\omega(S)$ выпукло и $P_\omega(S)$ гомотопически плотно в $P(X)$;

3) Покажем, что для каждого $n \in N$ подмножество $P_n(S)$, есть сильное Z - множество в $P_\omega(S)$.

В самом деле:

Пусть $\mu_0 \in P_\omega(S) \setminus P_n(S)$ такое, что $|supp\mu_0| \geq n + 2$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_\omega(S) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(S)$ построим полагая $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0$. Очевидно, что при $t = 0$ гомотопия $h(\mu, 0) = \mu$ т.е. $h(\mu, 0) = id P_\omega(S)$, если $t > 0$ и $t \leq 1$, то $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0 \in P_\omega(S) \setminus P_n(S)$, так как $supph(\mu, (0, 1])$ содержит более чем $n + 1$ точек, т.е. $|supph(\mu, t)| > n + 1$ при $t \in (0, 1]$.

Значит, подпространства $P_\omega(S) \setminus P_n(S)$ гомотопически плотно в $P_\omega(S)$. С другой стороны, для каждого $n \in N$ подмножества $P_n(S)$ замкнуто в $P_\omega(S)$. \square

1) Получается, что подпространство $P_\omega(S)$ есть сильное Z_σ - пространство и по результату [2] (задача 20, §1.5) имеем $P_\omega(S) \in SDAP$;

2) В силу результата (задача 12(e), §1.4) пространство $P_\omega(S) \in LCAP$.

Из этих рассуждений и приведенной теоремы [4] получаем

Теорема 2.6. *Если X бесконечной компакт и Y его собственное плотное подмножество. Тогда*

a) *Если Y счетно, то $S_P(Y) \simeq \sum \times l_2$;*

b) *Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ замкнуты, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq X$ и A плотно в X , то $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_P(A_i) \simeq \sum \times l_2$;*

в) *Если $\{x_i : i \in N\}$ плотно в X , то $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_P(x_i) \simeq \sum \times l_2$;*

г) *В частном случае, S псевдо внутренность куба Q , то $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(S) \simeq \sum \times l_2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В. Вероятностные меры и абсолютные ретракты// ДАН СССР, 1980, Т 255, №6, с. 1329-1333.
2. Banach T., Padul T., Zarichnyi M. Absorbing sets in Infinite – Dimensional Manifolds// Math.studies. Monog. series, Vol.1.1996, VNTL Publishers, 232 p.
3. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов// М. 1989, Канд. дис. МГУ, с. 90.
4. Sakai K., Wong R.Y. On infinite – dimensional manifolds// Trans. Amer. Math. Soc. 318, №2, 1990, pp. 545-555.
5. Заричный М.М. Сохранение ANR (\mathfrak{M}) – пространств и бесконечномерных многообразий некоторыми ковариантными функторами// ДАН СССР, 1983, Т. 271, №3, с. 524-528.

REZYUME

Ushbu tadqiqot cheksiz metrik kompakt fazoda aniqlangan barcha extimol o'lchovlari fazosi, va uning fazoostilari, geometrik, topologik, ekstenzorlik o'lchamlilik xossalari bag'ishlangan. Bu ehtimol o'lchovlari fazosining bir qator fazoostilari ajratildiki ular: cheksiz o'lchamli gomotopik zich, $A(N)R$ – fazodir, cheksiz o'lchamli ko'pxilliklardan iborat, lokal kompakt approksimativ (LCAP) xossali, kuchli diskret approksimativ xossalarga egadir. Shuningdek, fazoostilari bir jinslik, ekstenzorlik xossalarga va fazoning shunday gomotopik zich fazoostisi topildiki, u fazoga gomeomorf ekanligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: bir jinslilik, gomotopiya zichligi, ehtimol o'lchovlari, ko'pxillik, cheksiz o'lcham, ekstenzor, SDAP- xossa, LCAP-xossa, $\sigma - Z$ – to'plam, Aleksandrov kengaytmasi.

RESUME

Exploring the geometric, topological, extensor and dimensional properties of the space of all probability measures $P(X)$ and its subsets defined in the infinite metric compact X , a number of subspaces of the space $P(X)$ are identified that have: infinite dimension, are homotopically dense, are $A(N)R$ - spaces, are manifolds of infinite dimension, locally compact approximative (LCAP) properties, a strongly discrete approximative SDAP property. It also shows which subsets of the space have a homogeneous property, an extensor property and homotopy dense subsets of a compact

$P(X)$ set that are homeomorphic to the space are given $\sum \times l_2$.

Key words: homogeneity, homotopy density, probability measures, manifolds, infinite dimension, extensor, *SDAP*-property, LCAP - property, σ -Z-set, Alexandrov compactification.

УДК 510.5

О НЕВЫЧИСЛИМЫХ ПОЗИТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ ЦЕЛОСТНОСТЕЙ

ИБРАГИМОВ ФАРХОДЖОН НУРМУХАМАДЖОНОВИЧ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ

farkh-i@yandex.ru

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучаются алгоритмические представления колец. Известно, что всякое позитивное представление поля является вычислимым. Класс областей целостности расширяет класс полей. Построен пример в классе областей целостности которая обладает невычислимым позитивным представлением.

Ключевые слова: алгоритмическое представление, термально сепарабельность, нумерованное кольцо, область целостности, позитивная область целостности.

1. Предварительные сведения.

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1-4].

Напомним, что всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует вычисляющий ее алгоритм. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется вычислимым (перечислимым, соответственно коперечислимым), если вычислима его характеристическая функция (α , соответственно $\omega \setminus \alpha$, – область значений некоторой вычислимой функции). Эти определения естественным образом переносятся на многоместные функции и отношения.

Академиком Ю.Л.Ершовым в [1] было введено наиболее общее понятие отделимой нумерации, которую, в случае нумераций универсальных алгебр, можно трактовать как одно из математических уточнений понятия сложной динамической системы (поскольку, в рассматриваемых нами рамках, экстенциональное задание вычислимых функций вторично относительно их интенциональной сущности, содержащей код развития процесса), допускающей эффективное распознавание различия составляющих ее элементов путем отделения их соответствующими алгоритмически определяемыми окрестностями. При этом, сама совокупность алгоритмов, образно говоря, образует "кокон", в который "защита" динамика функционирования системы, заданной не абстрактным сознанием стороннего наблюдателя, а конкретикой определяющих ее процессов развития.

Следуя академиком Ю.Л. Ершову и С.С. Гончарову [1,2,3] приведем ряд основных определений. Если $\langle A; \Sigma \rangle$ – счетная универсальная алгебра эффективной сигнатуры Σ , то под ее нумерацией будем называть всякое такое отображение ν множества натуральных чисел ω на основное множество алгебры A , для которого существует эффективное семейство F вычислимых функций, представляющих Σ -операции алгебры A в нумерации ν , т.е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией $f \in F$, что $\forall \bar{x} (\sigma \nu \bar{x} = \nu f \bar{x})$. Если η – эквивалентность на ω , то алгебру $\langle A; \Sigma \rangle$ будем называть представимой над η , если существует нумерация этой алгебры с нумерационной эквивалентностью равной η , т.е., равносильно, найдется такое эффективное семейство F вычислимых функций, согласованных с эквивалентностью η (из η -эквивалентности аргументов следует η -эквивалентность значений функций на этих аргументах), что $\langle A; \Sigma \rangle$ изоморфна фактор-алгебре вычислимой алгебры $\langle \omega; F \rangle$ по конгруэнции η .

Всякая алгебра, представимая над эквивалентностью η на ω называется η -алгеброй. Заметим, что любая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной Σ -алгебры от счетного множества свободных порождающих, т.к. любая Σ -алгебра есть гомоморфный образ абсолютно свободной от подходящего числа свободных порождающих) и потому алгоритмически представима над некоторой эквивалентностью.

Ядром нумерации ν алгебры A будем называть нумерационную эквивалентность $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если ν – нумерация, то через $\ker(\nu)$ будем обозначать ее ядро.

Пусть $(A; \nu)$ – нумерованная алгебра. Подмножество B алгебры A называется ν -перечислимым (ν -вычислимым), если перечислимо (вычислимо) множество $\nu^{-1}(B)$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация имеется в виду, то подмножества алгебры будем называть просто перечислимыми (вычислимыми) без приставки ν .

Если даны две нумерованные алгебры (A, μ) и (B, ν) , то гомоморфизм φ из A в B называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т.е. существует такая вычислимая функция g , что $\varphi\mu = \nu g$. Если данный морфизм φ является изоморфизмом из (A, μ) на (B, ν) , то будем говорить, что (A, μ) эффективно сводима к (B, ν) . Заметим, что хотя обратное отображение к изоморфизму есть также изоморфизм, он не обязан быть морфизмом, т.к. обратное отображение, вообще говоря, может и не поддерживаться вычислимой на номерах функцией.

Изоморфное вложение, являющееся морфизмом, называется эффективным вложением.

Нумерованная алгебра, в которой отношение равенства вычислимо на номерах (алгоритмически разрешимо) называется вычислимой. Говорят, что алгебра имеет вычислимое представление, если она имеет вычислимую нумерацию.

Отметим, что термин "вычислимая нумерация" употребляется в классической литературе по вычислимости и в совершенно иных контекстах (см. Ю.Л.Ершов, [1]). Так, при использовании нами понятий нумерации алгебры (формальное понятие) эффективной сигнатуры (неформальное понятие) второе является вычислимым в смысле Ю.Л.Ершова (т.е. подразумевается наличие эффективной процедуры, "выдающей" по сигнатурному символу алгоритм вычисления соответствующей функции, представляющей интерпретацию данного символа операции в этой нумерации).

Определение 1. Алгебра A называется вычислимо (позитивно, негативно) представимой, если существует ее нумерация с вычислимым (перечислимым, коперечислимым) ядром.

Очевидно, что вычислимость нумерации алгебры равносильна одновременной позитивности и негативности этой нумерации.

Заметим, что если алгебра имеет вычислимое представление, то она изоморфна либо конечной алгебре, либо алгебре вида $\langle \omega; F \rangle$, где ω – множество натуральных чисел, а F – подходящее эффективное семейство вычислимых функций.

Далее, наряду с термином "нумерация" будем иногда употреблять в качестве его синонима термин "представление".

Фундаментальные алгебраические понятия поля и его обобщения – области целостности, являются классическими объектами исследования в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными представлениями [1]. Важнейшими среди алгоритмических представлений этих объектов являются вычислимые, называвшиеся прежде конструктивными [2,3]. Сами же эти объекты, называвшиеся ранее конструктивизируемыми, в современной западной терминологии именуются как имеющие вычислимые копии, т.е. такие, которые изоморфны кольцам, носителями которых являются вычислимые (алгоритмически разрешимые) подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.

Более формально, если $\langle R; +, \times \rangle$ – произвольное не более чем счетное кольцо и ν – отображение из ω на R , для которого существуют такие вычислимые бинарные операции \oplus, \otimes (представляющие соответствующие операции кольца на номерах/кодах его элементов в представлении ν), что $\forall x, y \in \omega[\nu x + \nu y = \nu(x \oplus y)]$ и $\forall x, y \in \omega[\nu x \times \nu y = \nu(x \otimes y)]$ (т.е. ν является эффективным гомоморфизмом вычислимого кольца $\langle \omega; \oplus, \otimes \rangle$ на $\langle R; +, \times \rangle$), то ν называется нумерацией (алгоритмическим представлением) кольца R .

Ядром нумерации ν назовем ее нумерационную эквивалентность, т.е. множество $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$.

Определение 2. Кольцо R называется вычислимо (позитивно, негативно) представимым, если существует его представление с вычислимым (перечислимым, коперечислимым) ядром.

Нетрудно заметить, что вычислимость представления кольца равносильна одновременной позитивности и негативности этого представления. Одними из наиболее важных объектов в теории абстрактной вычислимости являются поля. Т.к. любое поле является простой алгеброй (т.е. в нем отсутствуют собственные идеалы), то всякое позитивное представление поля является вычислимым (см. [2], где показано,

что всякая позитивная нумерация конгруэнц-простой алгебры является вычислимой). С другой стороны, всякое бесконечное вычислимо представимое поле обладает невычислимыми негативными представлениями [6]. Ниже будет показано, что таковы же и бесконечные области целостности.

Простейшим бесконечным полем характеристики нуль является поле рациональных чисел, не имеющее не только собственных идеалов, но и собственных подполей. В связи с вышесказанным возникает естественный вопрос о вычислимости позитивных подколец поля рациональных чисел (автоматически являющихся областями целостности) в его естественном представлении. Положительный ответ на этот вопрос анонсирован в [5]. Тем не менее, принципиальный вопрос о существовании области целостности, обладающей невычислимым позитивным представлением, по-видимому, оставался открытым. Если область целостности не является полем (т.е. в ней есть мультипликативно необратимый элемент), то решетка ее идеалов не является даже артиновой, что позволяло предположить в общем случае наличие богатых семейств позитивных представлений, в т.ч. невычислимых, т.к. именно существование разнообразных идеалов позволяет строить такие идеалы, факторы по которым обладают нужными алгоритмическими свойствами.

2. Основная часть.

Академиком А.И.Мальцевым в построен знаменитый пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Более того, мультипликативная полугруппа построенного им кольца не вложима в группу. Эти результаты стимулировали авторов настоящей статьи к изучению вопросов эффективной вложимости колец в поля. Все ранее рассмотренные вопросы примыкают именно к этой проблематике.

По-видимому, в литературе по [4] абстрактной вычислимости не уделялось должного внимания тому факту, что процедура вложения коммутативной области целостности в поле своих частных по существу является эффективной. В работе [6] доказаны следующий результат.

Теорема 1. Всякая локально негативная область целостности эффективно вложима в поле своих частных, которое является негативным.

Следующая теорема показывает, что в отличие от полей, все позитивные представления которых вычислимы, позитивные области целостности не обязаны быть вычислимыми.

Теорема 2. Существует невычислимая позитивная область целостности.

Доказательство. Пусть H – абсолютно свободная коммутативная полугруппа, порожденная множеством $X = \{x_n | n \in \omega\}$ (т.е. значения двух слов над X равны в H тогда и только тогда, когда они совпадают с точностью до игнорирования расстановки скобок и перестановок элементов из X), R – полугрупповое кольцо полугруппы H над кольцом целых чисел Z . Можно считать, что R есть кольцо многочленов с целочисленными коэффициентами от переменных из X . В самом деле, элементами кольца R являются конечные суммы вида $\sum m x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k}$, где $m \in Z, i_t \in \omega, j_t \in \omega$. Ясно, что это кольцо является областью целостности. Легко также понять, что R вычислимо представимо, т.к. равенство двух многочленов в R равносильно совпадению их "редуцированных" форм, определенных как упорядоченные суммы произведений вида $\sum m x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k}$ (детали опускаем).

Пусть ν – вычисляемая нумерация кольца R . Зафиксируем $Y = \{x_i \in X | i \in \alpha\}$, где α – перечислимое невычислимое множество. Рассмотрим идеал I , порожденный множеством Y . Нетрудно убедиться, что идеал I состоит в точности из всех многочленов f , имеющих вид $f = \sum m x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k}$, где каждое слагаемое данного вида содержит хотя бы один множитель $x_t \in Y$.

Покажем, что I является простым идеалом, т.е. если $f, g \in R$ и $f \notin I, g \notin I$ то $fg \notin I$. Действительно, если $f \notin I$, то в записи многочлена f существует хотя бы одно слагаемое, не содержащее ни одного множителя из Y . Тогда многочлен f можно представить в виде $f = f_1 + f_2$, где многочлен f_1 не содержит ни одной переменной $x_t \in Y$, а $f_2 \in I$. Аналогично, многочлен g представим в виде $g = g_1 + g_2$, где многочлен g_1 не содержит ни одной переменной $x_t \in Y$, а $g_2 \in I$. Заметим, что в произведении $f_1 g_1$ отсутствуют переменные из Y , а значит $f_1 g_1$ не является элементом идеала I . Тогда $fg = (f_1 + f_2)(g_1 + g_2) = f_1 g_1 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_2 g_2$, при этом $f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_2 g_2 \in I$. Следовательно $fg \notin I$. Таким образом I является простым идеалом и, соответственно, фактор-кольцо R/I кольца R по идеалу I – областью целостности.

Заметим, что в силу перечислимости α множество $\nu^{-1}I$ также перечисливо, т.е. идеал I перечислим в нумерации ν . Действительно, перечисляя редуцированные (далее несократимые, см. выше) формы многочленов, содержащих переменные x_t для $t \in \alpha$, и умножая их на элементы R мы, тем самым, исчерпаем идеал I .

Рассмотрим нумерованное фактор-кольцо $(R/I, \mu)$, где $\mu = \varphi\nu$, и φ – естественный гомоморфизм R на фактор-кольцо R/I . Тогда нумерованное кольцо $(R/I, \mu)$ является позитивной невычислимой (а значит и не негативной) областью целостности. В самом деле, легко заметить, что вычислимость $(R/I, \mu)$ означает вычислимость идеала I , а значит и множества α , которое невычислимо.

Заметим, что если в доказательстве теоремы 2 взять множество α коперечислимым и невычислимым, то получим невычислимое негативное представление области целостности. Более того, всякая бесконечная вычислимо представимая область целостности обладает невычислимым негативным представлением, тогда как всякие позитивные представления многих областей целостности, не являющихся полями, вычислимы (простейший пример – кольцо целых чисел Z , всякое позитивное представление которого вычислимо).

Из теорем 1 и 2 получим следующие результаты:

Следствие 1. Нумерованная коммутативная область целостности эффективно вложима в эффективно невырожденное поле тогда и только тогда, когда она негативна.

Следствие 2. Существует позитивная область целостности, эффективно не вложимая ни в какое эффективно невырожденное поле.

Определение 3. Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, \dots, f_r \rangle$ сигнатуры $\Sigma = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ называется термально сепарабельной, если для любого конечного множества Σ -термов $\{t_1(x, y), \dots, t_n(x, y)\}$ с параметрами из A , для любого подмножества $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ и $\forall a \in A$ имеет место:

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{(k,l) \in J} t_k(a, a) \neq t_l(a, a) \rightarrow \exists b_1 \exists b_2 (b_1 \neq b_2) \wedge \left(\bigwedge_{(k,l) \in J} t_k(b_1, b_2) \neq t_l(b_1, b_2) \right).$$

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; f_1, \dots, f_r \rangle$ – бесконечная алгебра и для любых термов $t_1(x)$ и $t_2(x)$ с параметрами из A множество $\{a \in A : \mathfrak{A} \models t_1(a) = t_2(a)\}$ либо конечно, либо совпадает с A . Тогда \mathfrak{A} является термально сепарабельной.

Доказательство. Приведено в [7].

Предложение 2. Любая бесконечная область целостности термально сепарабельна.

Каждый терм $t(x)$ с параметрами из области целостности представляет собой многочлен от одной переменной с коэффициентами из области целостности. Известно, что каждый ненулевой многочлен над областью целостности имеет конечное число корней, обращающих его в нуль. Следовательно, значения двух многочленов совпадают либо на конечном множестве, либо всюду. Таким образом, по предложению 1, область целостности термально сепарабельна.

В работе [7] Б.Хусаинов, Т.Слэман и П.Семухин доказали, что любая бесконечная вычислимая алгебра, являющееся термально сепарабельной, обладает невычислимым негативным представлением. Из этого факта вместе с предложением 2 вытекает следующее

Предложение 3. Любая бесконечная область целостности, обладающая вычислимым представлением, имеет невычислимое негативное представление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л. Ершов. *Теория нумераций*. Наука, М., 1977, 416 с.
2. Ю.Л. Ершов. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*. Наука, М., 1980, 416 с.
3. С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов. *Конструктивные модели*. Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
4. А.И. Мальцев. *О вложении алгебраических колец в тела*. Mathem. Ann., 1937, 113, 886–891.
5. А.И. Мальцев. *Конструктивные алгебры I*. Успехи мат. наук, 1961, 16, No. 3, 3–60.
6. N.Kh. Kasymov, F.N. Ibragimov. *Separable enumerations of division rings and effective embeddability of rings therein*. Siberian Math. J., 60:1 (2019), 62–70.
7. В. Khoussainov, Т. Slaman, P. Semukhin. Π_1^0 -Presentations of Algebras. Archive for Mathematical Logic, 2006, 45, No. 6, 769–781.

REZYUME

Ushbu maqolada biz halqalarning algoritmik tasvirlarini o'rganamiz. Ma'lumki, maydonning har bir pozitiv tasviri hisoblanuvchi bo'ladi. Butunlilik sohalar sinfi maydonlar sinfini kengaytiradi. Hisoblanuvchi bo'lmagan pozitiv tasvirga ega bo'lgan butunlilik sohasiga misol qurilgan.

Kalit so'zlar: algoritmik tasvirlar, termal sепарабельлик, nomerlangan halqa, butunlilik sohasi, pozitiv va negativ butunlilik sohasi

RESUME

In this paper, we study algorithmic representations of rings. It is known that every positive representation of a field is computable. The class of integral domains extends the class of fields. An example is constructed in the class of integral domains that has a noncomputable positive representation.

Key words: algorithmic representation, thermal separability, numbered ring, integrity domain, positive and negative integrity domain.

УДК 517.977

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

МАМАДАЛИЕВ НУМАНЖОН АЛИМДЖАНОВИЧ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
m_numana59@mail.ru

ВАСИЕВА ХИЛОЛА ГОЛИВ КИЗИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
vasiyeva98@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В данной работе изучена игровая задача преследования, описываемые системой дифференциальных уравнений при интегральных ограничениях на управления игроков. В предлагаемой схеме используются идеи метода разрешающих функций. Получены новое достаточное условие для окончания дифференциальной игры за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, интегральное ограничение, терминальное множество, многозначное отображение, разрешающая функция, преследователь, убегающий, управления.

Постановка задачи. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n задается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u - C(t)v, \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A(t), B(t), C(t)$ – матричные функции размерности которых $(n \times n), (n \times p), (n \times q)$, элементы которой являются измеримыми функциями времени; они к тому же суммируемы на каком-либо конечном интервале $[t_0, T], t_0 < T < +\infty$; u и v управляющие параметры преследующего и преследуемого соответственно, $u \in \mathbb{R}^p, p \geq 1$ и $v \in \mathbb{R}^q, q \geq 1$. Управления преследующего и убегающего игроков $u(\cdot), v(\cdot)$, являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt \leq 1, \quad (2)$$

$$\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2 dt \leq 1. \quad (3)$$

Измеримые функции $u = u(t), v = v(t), t_0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), (3), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Пусть в пространстве \mathbb{R}^n вместе с нестационарной динамической системой (1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M(t) = M_0 + M_1(t), \quad t \in [t_0, +\infty),$$

где M_0 – линейное подпространство из пространства \mathbb{R}^n , а $M_1(t)$ – измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к подпространству M_0 в \mathbb{R}^n (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$).

Преследование начинается из начального положения $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M(t)$ и считается законченным, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на терминальное множество M , в момент времени $t = t(z_0)$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы максимально оттянуть окончание игры.

Отметим, что для решения $z(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1) справедлива формула Коши [3],[14] в задаче преследования (1), которые удовлетворяющие (2), (3) ограничениями, имеет следующее представление в силу формулы:

$$z(t) = z(t, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)[B(t)u(s) - C(t)v(s)]ds. \quad (4)$$

Здесь матрица-функция $\Phi(t, s)$ - удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi(t, s)}{ds} = \Phi(t, s)A(s), \quad t \geq t_0,$$

и условию $\Phi(t, t) = E$, где E - единичная матрица.

Определение. Будем говорить, что в игре (1)-(3) из начального положения $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M(t)$ возможно завершение преследования за время $T = T(z_0)$, $t_0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $t_0 \leq t < +\infty$, $v \in R^q$, $u(t, v) \in R^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $t_0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1$ и траектория $z(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, соответствующая управлениям $(u(t), v(t))$ уравнения (1) попадает на терминальное множество $M(t)$ при некотором $t = t^* \in [t_0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M(t)$.

Число $T(z_0)$ называется временем преследования из точки z_0 , функция $u(t, v)$, $t_0 \leq t \leq T(z_0)$, $v \in \mathbb{R}^q$, - функцией преследования.

Под решением задачи преследования понимается

а) нахождение начальных положений z_0 , из которых в игре (1)-(3) возможно завершение преследования в смысле введенного выше определения;

б) нахождение в явном виде или указание способа построения функции преследования $u(t, v)$.

Требуется найти начальные положения $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M(t)$ из которых в игре (1)-(3) возможно завершение преследования за конечное время T .

В настоящей работе исследуются игровые задачи, описываемые системой линейных дифференциальных уравнений с интегральными ограничениями на управления игроков с точки зрения возможности завершения преследования за конечное время. С использованием идей работы [6,9] получены достаточные условия для завершения преследования из заданной начальной точки. Терминальное множество представляется в виде цилиндра в n -мерном евклидовом пространстве. Для решения поставленной задачи применяется метод разрешающей функции. Формулируется аналог условия Л. С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия для разрешимости задачи за некоторое гарантированное время. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [6,9,13].

Сформулируем предположение на параметры игры (1)-(3), которое можно называть аналогом условия Л.С.Понтрягина [1,2] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков.

Пусть $\tau > 0$ число и $t \in [0, \tau]$. Через π - обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L : $\pi : R^n \rightarrow L$.

Предположение 1. Существует такое число α , $t_0 \leq \alpha < 1$, $t \geq t_0$ что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi\Phi(t, t_0)C(t)V \subset \alpha\pi\Phi(t, t_0)B(t)U,$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^p : \|u\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1\}$ и $V = \{v \in \mathbb{R}^q : \|v\|_{L_2[t_0, +\infty)} \leq 1\}$ - единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение z_0 . Положим

$$\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] = \pi\Phi(\tau, t_0)z_0 - \int_{t_0}^{\tau} \tilde{w}(\tau - t)dt, \quad (7)$$

$$\eta[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]|} & \text{при } \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L .

Введем вспомогательное многозначное отображение вида [6]:

$$\hat{W}(\tau, t, v) = \left\{ \lambda \in R : \left[\lambda \left(M_1(t) - \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi\Phi(\tau, t)C(t)v + \tilde{w}(t) \right] \cap \sqrt{(1 - \alpha) \left| \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right|^{-1} \lambda + \alpha \|v\|^2} \cdot \pi\Phi(\tau, t)B(t)U \neq \emptyset \right\}, \quad (8)$$

где $(\tau, t, v) \in [t_0, \infty) \times [t_0, \infty) \times R^q$.

Из предположения 1 следует, что многозначное отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ непусто и непрерывен на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times V$, то в силу утверждения 1.3.1 [4] многозначное отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ полунепрерывно сверху, значит, борелевское. Следовательно, согласно лемме 1.3.6 [4] существует хотя бы один борелевский селектор $\tilde{w}(t), \tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v), t \geq t_0$. Обозначим

$$\Gamma^* = \{ \tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v), t \geq t_0 \},$$

совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Зафиксируем начальную позицию $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M(t)$ и некоторый элемент $\tilde{w}(\cdot) \in \Gamma^*$.

Теперь с помощью вспомогательного многозначного отображения (5) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом [4,9]:

$$\lambda(z_0, \tau, t, v) = \sup \hat{W}(\tau, t, v),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Исследуем свойства вспомогательного многозначного отображения (8) и разрешающую функцию $\lambda(z_0, \tau, t, v)$ [4,9]:

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

1. $\lambda(z_0, \tau, t, v) \geq t_0$ для всех $(\tau, t, v) \in [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$;
2. $\lambda(z_0, \tau, t, v) = +\infty$ при $\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \in M_1(t)$ для всех $(\tau, t, v) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$;
3. $\lambda(z_0, \tau, t, v) < \infty$ при $\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \notin M_1(t)$ для любых $(\tau, t, v) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$.

Лемма 2. *Интервал $[t_0, \lambda(z_0, \tau, t, v)) \subset \hat{W}(\tau, t, v)$ для всех $(\tau, t, v) \in [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$.*

Лемма 3. *При $\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \notin M_1(t)$ верхняя грань в определении $\lambda(z_0, \tau, t, v)$ достигается. Функция $\lambda(z_0, \tau, t, v)$ измерима по Борелю по совокупности переменных $(\tau, t, v) \in [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$.*

Доказательства этих лемм вполне аналогичны доказательствам из [6].

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1)-(3) на терминальное множество $M(t)$ из начального положения z_0 .

Предположение 2. *Для начального положения z_0 существует момент времени $\tau = \tau_1(z_0) > 0$ такой, что:*

a) *суперпозиция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)), t_0 \leq t \leq \tau_1$, функция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)), t_0 \leq t \leq \tau_1, v \in \mathbb{R}^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t), t_0 \leq t \leq \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\| \leq 1$, является суммируемой;*

b) *для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство*

$$\left| \xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right| - \inf \left\{ \int_{t_0}^{\tau_1} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) dt : \int_{t_0}^{\tau_1} \|v(t)\|^2 dt \leq 1 \right\} \leq 0. \quad (6)$$

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1)-(3) на терминальное множество $M(t)$ из начального положения z_0 .

Теорема. Если выполнены все условия предположений 1 и 2, то в игре (1) при ограничениях (2), (3) возможно завершение преследования за конечное время $T = \tau_1(z_0)$.

Доказательство. Зафиксируем момент времени $\tau_1(z_0)$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Проанализируем случай $\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \notin M_1(t)$.

Рассмотрим многозначное отображение вида

$$F(t, v) = \left\{ m_1(t) \in M_1(t) : \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v) \left(m_1 - \eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) + \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v \in \right. \\ \left. \in R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) \cdot \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)U \right\},$$

где $R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) = \sqrt{(1 - \alpha) |\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v) + \alpha \|v\|^2}$.

Из того, что в силу леммы 2 [9] разрешающая функция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))$ полунепрерывна сверху по переменным t и v , следует, что и многозначные отображения

$$\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v) \left(M_1(t) - \eta[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) + \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v, \\ R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) \cdot \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)U,$$

будут полунепрерывными сверху по переменным t и v . Тогда согласно лемме 1.7.5 работы [14] получаем, что многозначное отображение $F(t, v)$ является измеримым. Поскольку в силу леммы 3, разрешающая функция $\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))$ является измеримой по Борелю, то для всех $(t, v) \in [t_0, \infty) \times R^q$ выполняется следующее включение

$$\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v \in \bigcup_{u \in U} R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)U + \\ + \tilde{w}(t) - \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v) \left(M_1(t) - \eta[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right). \tag{10}$$

Ясно, что это включение, измеримое по Борелю, зависит от (t, v) и непрерывно от $u \in U$.

Из теоремы об измеримом выборе Куратовского и Риль-Нардзевского [15,16] следует, что у включения (10) существует однозначный измеримый по Борелю селектор $w_1(t, v) \in U$ такой, что имеет место включение

$$R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) \pi\Phi(\tau_1, t)B(t)w_1(t, v) - \pi\Phi(\tau_1, t)C(t)v + \tilde{w}(t) \in \\ \in \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v) \left(M_1(t) - \eta[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right), \tag{11}$$

для всех $(t, v) \in R^+ \times R^q$, где $R^+ = [t_0, \infty)$. Следовательно, исходя из этой же теоремы, можно сделать заключение, что существует однозначный измеримый по Борелю селектор $w_2(t, v) \in U$ такой, что имеет место равенство

$$R(\tau_1, \tau_1 - t, 0, v, \alpha) \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)w_2(t, v) - \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v + \tilde{w}(t) = 0, \tag{12}$$

при всех $(t, v) \in R^+ \times R^q$.

Предположим, что убегающий игрок использует на отрезке $[t_0, \tau_1]$ произвольное измеримое по Лебегу управление $v(t)$, которое удовлетворяет интегральному ограничению

$$\int_{t_0}^{\tau_1} \|v(t)\|^2 dt \leq 1.$$

Согласно предположению 2 п.б) (см.(6)), существует момент времени $T^* = T^*(z_0)$ такой, что

$$\int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) dt = |\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]|.$$

Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_1(t, v) = \{w_1 \in U : R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha)\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)w_1(t, v) \in \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))\left(M_1(t) - \eta[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]\right) + \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v - \tilde{w}(t)\}.$$

В силу леммы 1.3.7 [4], оно борелевское по совокупности (t, v) . Тогда селектор

$$u_1(t, v) = \text{lexmin}U_1(t, v), \quad t_0 \leq t \leq T^*,$$

согласно лемме 1.3.6 [4], является борелевской по (t, v) функцией. Управление преследователя на интервале $[t_0, T^*]$ положим равным

$$u(t) = u_1(t, v(t)), \quad t_0 \leq t \leq \tau_1.$$

Оно является измеримой функцией времени (см.лемма 1.1.1[4]).

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_2(t, v) = \{w_2 \in U : R(\tau_1, \tau_1 - t, 0, v, \alpha)\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)w_2 = \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v - \tilde{w}(t)\}.$$

В силу леммы 1.3.7 [4], оно борелевское по совокупности (t, v) . Селектор

$$u_2(t, v) = \text{lexmin}U_2(t, v), \quad t_0 \leq t \leq \tau_1,$$

является борелевской по (t, v) функцией(см.лемме 1.3.6 [4]). Управление преследователя на интервале $(T^*, \tau_1]$ положим равным

$$u(t) = u_2(t, v(t)), \quad T^* < t \leq \tau_1.$$

Согласно лемма 1.1.1[4], является $u(t)$ измеримой функцией.

Тогда преследующему игроку рекомендуется применять управление $u(t) = u(t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, в виде

$$u(t) = \begin{cases} R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v, \alpha) \cdot w_1(\tau_1 - t, v(t)) & \text{при } t \in [t_0, T^*], \\ R(\tau_1, \tau_1 - t, 0, v, \alpha) \cdot w_2(\tau_1 - t, v(t)) & \text{при } t \in (T^*, \tau_1]. \end{cases} \quad (13)$$

Такой закон выбора управлений игрока является (по существу) контуруправлением с одним переключением.

Отметим, что построенное таким образом управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, (см.(13)), а также суперпозиция $u(t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, функции $u(t, v)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, $v \in R^q$ будет измеримой по Лебегу функцией для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, $v(t) \in R^q$, [14].

Вначале убедимся, что выбранное таким образом управление $u(t) = u(t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, (см.(13)) удовлетворяет интегральному ограничению (2). Действительно, в силу неравенства Коши-Буняковского [17] имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau_1} \|u(t)\|^2 dt &= \int_{t_0}^{T^*} \left[(1 - \alpha) |\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) + \alpha \|v(t)\|^2 \right] \|w(\tau_1 - t, v(t))\|^2 dt + \\ &+ \int_{T^*}^{\tau_1} \alpha \|v(t)\|^2 \|\tilde{w}(\tau_1 - t, v(t))\|^2 dt \leq (1 - \alpha) |\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) dt + \\ &+ \alpha \int_{t_0}^{T^*} \|v(t)\|^2 dt \leq 1, \end{aligned}$$

что и означает допустимость управления $u(t) = u(t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$.

Покажем, что применяя описанный способ управления $u(t, v(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, (см.(13)) преследователь, при произвольном допустимом управлении $v = v(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$ может завершить преследование за время τ_1 . Действительно, пусть вопреки утверждению, $z(t) \notin M(t)$ на отрезке $[t_0, \tau_1]$. Для этого рассмотрим следующую задачу Коши

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u(t, v(t)) - C(t)v(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Тогда по формуле Коши (см.(4)) для решения $z(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$, уравнения (1) и учитывая закон выбора управлений преследователя (11),(12) и (13) после его проектирования на L , находим

$$\begin{aligned}
\pi z(\tau_1) &= \pi\Phi(\tau_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)[B(t)u(t) - C(t)v(t)]dt = \\
&= \pi\Phi(\tau_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t) [B(t)u(t, v(t)) - C(t)v(t)] dt = \\
&= \pi\Phi(\tau_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T^*} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)u(t, v(t))dt + \int_{T^*}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau, \tau_1 - t)B(t)u(t, v(t))dt - \\
&- \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt = \pi\Phi(\tau_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T^*} R(\tau_1, \tau_1 - t, \lambda, v(t), \alpha)\pi\Phi(\tau_1, t_0 - t)B(t)w_1(t, v(t))dt + \\
&+ \int_{T^*}^{\tau_1} R(\tau_1, \tau_1 - t, 0, v, \alpha)\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)w_2(t, v(t))dt - \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt \in \pi\Phi(\tau_1, t)z_0 + \\
&+ \int_0^{T^*} \left[\lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) \left(M_1(t) - \eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) + \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t) - \tilde{w}(\tau_1 - t) \right] dt + \\
&+ \int_{T^*}^{\tau_1} \left[\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t) - \tilde{w}(\tau_1 - t) \right] dt - \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt = \\
&= \pi\Phi(\tau_1, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t)) \left(M_1(t) - \eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \right) dt + \int_{t_0}^{T^*} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt - \\
&- \int_{t_0}^{T^*} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt + \int_{T^*}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt - \int_{T^*}^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt - \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt = \\
&= \xi[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] + \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))M_1(\tau_1)dt - \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))\eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)]dt.
\end{aligned}$$

Откуда, с учетом равенства

$$\begin{aligned}
&\xi[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] - \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))\eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)]dt = \\
&= \left[\xi[\tau, z_0, \tilde{w}(\cdot)] - \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))dt \right] \eta[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] = 0,
\end{aligned}$$

и выпуклости множества $M_1(\tau_1)$ из леммы 1.3.9 [4] имеем

$$\pi z(\tau_1) \in \int_{t_0}^{T^*} \lambda(z_0, \tau_1, \tau_1 - t, v(t))M_1(\tau_1)dt = M_1(\tau_1).$$

Следовательно, $\pi z(\tau_1) \in M_1(\tau_1)$. Последнее равносильно включению $z(\tau_1) \in M(\tau_1)$, вопреки нашему допущению. Таким образом, игра (1) при ограничениях (2),(3) из начального положения z_0 можно завершит преследования за конечное момент времени τ_1 .

Аналогично, рассматривается случай $\xi[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \in M_1(t)$. В этом случае, управление преследователя на интервале $[0, T]$ имеет вид

$$u(t) = \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \tilde{w}(\tau_1 - t, v(t)). \quad (14)$$

Покажем, что в этом случае с помощью управления (14) игра (1) из точки z_0 так же завершается за время $\xi[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)]$ (для любого допустимого управления $v(t)$) и управление $u(t)$ удовлетворяет интегральному ограничению (2).

$$\pi z(\tau_1) = \pi\Phi(\tau_1, t)z_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)u(t, v(t))dt - \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \pi\Phi(\tau_1, t)z_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} R(\tau_1, \tau_1 - t, 0, v, \alpha)\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)B(t)w_2(\tau_1 - t, v(t))dt - \\
&- \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt = \pi\Phi(\tau_1, t)z_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} [\pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt - \tilde{w}(\tau_1 - t)]dt - \\
&- \int_{t_0}^{\tau_1} \pi\Phi(\tau_1, \tau_1 - t)C(t)v(t)dt = \xi[\tau_1, z_0, \tilde{w}(\cdot)] \in M_1(\tau_1).
\end{aligned}$$

Покажем, что выбранное управление (14) удовлетворяет неравенству (2). Имеем

$$\int_{t_0}^{\tau_1} \|u(t)\|^2 dt = \alpha \int_0^{\tau_1} \|v(t)\|^2 \|\tilde{w}(\tau_1 - t, v(t))\|^2 dt \leq \alpha < 1.$$

Таким образом, игра (1) при ограничениях (2),(3) из начальной точки z_0 при указанном выше способе управления $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau_1$ (см.(13)), завершается за конечное время $T = \tau_1$. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука. Том 2. 576 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем.сб. 1980. 3(7). С. 307–330. <https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEN001815>
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев:Наукова думка, 1992, 384 с.
5. Чикрий А.А., Безмагоричный В.В. Метод разрешающих функций для линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. 1993. №4. С. 26 – 30.
6. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. №4. С. 290 – 301. <https://doi.org/10.1134/S0081543810060076>
7. Белоусов А.А. Метод разрешающих функций для дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Теория оптимальных решений. 2010. №2. С. 10–16. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2010_9_3
8. Белоусов А.А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Теория оптимальных решений. 2011. №10. С. 3–8. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2011_10_3
9. Саматов Б.А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Международный учно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". Киев, 2013. №4. С. 16–32.
10. Сатимов Н. Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
11. Мамадалиев Н. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Известия вузов. Математика. 2020. №3. С. 12–28. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-12-28>
12. Мамадалиев Н., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2021. №11. С. 21–33. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-11-21-33>

13. Мамадалиев Н. А., Мустапокулов Х. Я, Абдуалимова Г. М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118. <https://doi.org/10.35634/vm230107>
14. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
15. Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
16. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. Boston: Kluwer Academic Publ., 1991
17. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972

REZYUME

Ushbu maqola o'yinchilarning boshqaruvida integral cheklovlarga ega bo'lgan differentsial tenglamalar tizimi bilan tavsiflangan o'yin masalasi tadqiq qilingan. Taklif etilayotgan sxemada hal qiluvchi funktsiya usulining g'oyalardan keng foydalanadi. Muayyan kafolatlangan vaqt ichida differentsial o'yinni tugatish mumkin b'lishi uchun yangi etarli shart olingan.

Kalit so'zlar: differential game, pursuit problem, integral constraint, terminal set, multivalued mapping, resolving function, pursuer, evader, control.

RESUME

This paper examines pursuit game problems described by a system of differential equations with integral constraints on the players' controls. The proposed framework utilizes ideas from the resolving function method. A new sufficient condition for terminating the differential game within a certain guaranteed time is obtained.

Key words: differential games, the pursuit problem, terminal set, pursuer, evader, controls.

УДК 517.977

**КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ
УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА****МАМАДАЛИЕВ НУМАНЖОН АЛИМДЖАНОВИЧ**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В.И.РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
m_numana59@mail.ru**ИВАЙДУЛЛАЕВ ТОЛАНВОЙ ТУРСУНБАЕВИЧ**АНДИЖАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ З. М. БАБУРА
ibaydullayev73@mail.ru**РЕЗЮМЕ**

В данной работе изучены квазилинейные дифференциальные игры, описываемые системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при геометрических ограничениях на управления игроков. Разработаны модификации третьего метода преследования и метода преследования по направлению для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Получены новые достаточные условия на параметры процесса для завершения игры за определенное конечное время.

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная игра, задача преследования, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, терминальное множество, преследователь, убегающий, управление.

В теории дифференциальных игр уже достаточно давно установилось правило, состоящее в том, что новые конструкции отрабатываются изначально в случае так называемых геометрических ограничений на управления [1, 2, 3, 4]. Возможно этот случай представляется более привычным для исследователей или даже более простым.

Становление теории дифференциальных игр в таких постановках связано с исследованиями Р.Айзекса, Л.С.Понтрягина, Н.Н. Красовского, Е.Ф. Мищенко, Б.Н.Пшеничного, У.Флеминга. Последние 60 лет были периодом интенсивного развития теории дифференциальных игр.

Основополагающие результаты, полученные Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко [1, с.37-41], привел к созданию Л. С. Понтрягиным первого и второго прямых методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных игр. Данный метод дает удобно проверяемые достаточные условия разрешимости задачи преследования в классе контрстратегий. Среди работ, посвященных развитию и применению методов Л. С. Понтрягина, следует отметить [2-14].

В данное время при создании и исследовании математических моделей в большинстве случаев использование обыкновенных дифференциальных уравнений уже недостаточно. Более адекватным является использование аппарата дифференциально-разностных уравнений. На практике сегодня возникла необходимость в моделировании игр преследования дифференциально-разностными уравнениями, в которых учитывается предистория состояния системы, что позволяет более адекватно отражать динамику. Для решения таких задач разработан метод разрешающих функций, который развивает первый прямой метод Л.С.Понтрягина. Более сложным классом являются конфликтно-управляемые процессы, которые описываются дифференциально-разностными уравнениями нейтрального типа, содержащими неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени. В связи с этим возникает необходимость модифицировать метод разрешающих функций для такого класса задач.

Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы Н.Н. Красовского, Ю.С.Осипова, А.В.Кряжжмского, Ю.С.Осипова, М.С.Никольского, А.А.Чикрия, Г.Ц.Чикрия, Л.В. Барановской, Н.Мамадалиева, и др. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе, изучаются

дифференциально-разностные игры преследования при геометрических и интегральных ограничениях на управления игроков.

В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при геометрических ограничениях на управления игроков. Разработаны и применены аналоги третьего метода преследования и метода преследования по направлению для решения задачи преследования. При исследовании этой задачи получены новые достаточные условия Л.С.Понтрягина разрешимости задачи преследования. Настоящая работа примыкает к публикациям [4,6,13] и продолжает исследования [6,13,17].

Постановка задачи. Рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования описываемая системой дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа [13,18]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=0}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i z(t - h_i) - f(t, u, v), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ — вектор фазовых координат из пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$; A, B_i ($i = 0, 1, \dots, m$), C_i ($i = 0, 1, \dots, m$) постоянные квадратные матрицы размерности $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times n)$, соответственно; $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ — константы; u и v — управляющие параметры преследующего и преследуемого, соответственно, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$, $p \geq 1$, $q \geq 1$. Параметры управления игроков u и v выбираются в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$, из областей управления

$$u \in U(t), \quad v \in V(t), \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

причем $U(t) \in \Omega(\mathbb{R}^p)$ и $V(t) \in \Omega(\mathbb{R}^q)$, где $\Omega(\mathbb{R}^p)$ и $\Omega(\mathbb{R}^q)$ — совокупность непустых компактов пространств \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q , и является измеримыми отображениями для $t \in [0, +\infty)$, соответственно. Вектор-функция $f(t, u, v)$ — блок управления, — определена на множестве $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: для всех фиксированных $(u, v) \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ она измерима по t , $t \in [0, +\infty)$ и для почти всех $t \in [0, +\infty)$ непрерывна по совокупности переменных u, v на $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, [4].

Будем также считать, что

$$\|f(t, u, v)\| \leq \alpha(t),$$

для любого $u \in U(t)$, $v \in V(t)$, $t \in [0, +\infty)$, где $\alpha(t)$ — суммируемая на каком-либо конечном интервале $[0, T]$, $0 < T < +\infty$, функция [4].

Кроме того, в пространстве \mathbb{R}^n выделено терминальное множество, которое обозначается символом $M(t)$.

Начальным положением для преследования (1) является n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$, т.е.

$$\left\{ \varphi(\cdot) : z(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_m, 0], \quad z(0) = \varphi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M(t) \right\}. \quad (3)$$

Измеримые функции $u = u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Пусть $u = u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, — допустимые управления игроков в игре (1), (2). Управлением $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и начальному положению $\varphi(\cdot)$ (см.(3)) ставится в соответствие решение $z(t) = z(\varphi(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1), выходящие при $t = 0$ из начального положения $\varphi(\cdot)$. Состоянием системы (1) в текущий момент времени t , $t \in [0, +\infty)$, определяется вектор-функцией $z'(\cdot)$, $z'(\cdot) = (z'_1(\cdot), \dots, z'_n(\cdot))$, где $z'(s) = \{z(t+s), -h_m \leq s \leq 0\}$, являющейся куском реализованной траектории системы (1) на отрезке времени $[t - h_m, t]$.

Выбирая свои управления в виде измеримых векторных функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям (2), каждый из игроков воздействует на уравнению (1), преследуя свои цели.

Преследование начинается при $t = 0$ из начального положения $\varphi(\cdot)$ и считается законченным в момент времени $\hat{t} = \hat{t}[\varphi(\cdot)]$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на терминальное множество $M(t)$, т.е. $z(\hat{t}) \in M(t)$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Вспомогательные конструкции. Всюду в дальнейшем: а) терминальное множество $M(t)$ является цилиндрическим и имеет вид

$$M(t) = M_0 + M_1(t), \quad (4)$$

где M_0 — линейное подпространство пространства \mathbb{R}^n , $M_1(t)$ — выпуклозначное компактнозначное многозначное отображение, которое принимает значения из $\Omega(L)$, L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в \mathbb{R}^n (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); б) Через π — обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из \mathbb{R}^n на L : $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow L$; в) под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [1].

Установим условия на параметры конфликтно-управляемого процесса (1)-(4) при которых первый игрок u может добиться выхода траектории системы (1) на терминальное множество за конечное время при любых противодействиях второго игрока v .

Обозначим через S множество точек вида $S = \left\{ t : t = \sum_{i=0}^m j_i h_i, j_i - \text{целое число} \right\}$, и пусть S^0 обозначает пересечение S с полуплоскостью $(0, \infty)$, т.е. $S^0 = S \cap (0, \infty)$.

Пусть τ — положительное число и $t \in [0, \tau]$. Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, тогда для решения $z(\tau)$ уравнения (1) при начальном условии (3), имеется следующее представление [18]

$$z(\tau) = \left[K(\tau) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \int_0^\tau K(\tau - t) f(t, u(t), v(t)) dt, \tag{4}$$

где $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [13,18]: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, где E — единичная матрица порядка n ; в) функция $\sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i)$ непрерывна на $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + \sum_{i=0}^m B_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i), \text{ при } t > 0, t \notin S^0. \tag{5}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)–г), могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования по шагам уравнения (5). Функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$, $t \notin S^0$, но в общем случае имеет разрывы первого рода в точках множества S^0 .

Определение. Будем говорить, что в игре (1)- (4) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$, $v \in V(t)$, принимающая значения из множество $U(t)$, такая, что для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$, $v(t) \in V(t)$, функция $u(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$, является измеримой и соответствующая траектория $z = z(t)$, т.е. решение уравнение (1) с учетом начального условия (3) при некотором $t = t^* \in [0, T]$, попадает на терминальное множество $M(t)$, т.е. верно включению $z(t^*) \in M(t)$. При этом для ведения преследования догоняющему нужно знать информацию об объектах. Предполагается, что преследователь знает: в каждый момент времени $t \geq 0$ решение $z(s)$ на отрезке $t - h_m \leq s \leq t$ и управление $v(s)$, $0 \leq s \leq t$.

Число $T(\varphi(\cdot))$ называется временем преследования из точки $\varphi(\cdot) \in X$, функция $u(t, v)$, $0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot))$, $v \in V(t)$, — функцией преследования.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot)$ из которых в игре (1) возможно завершение преследования за конечное время $T = T(\varphi(\cdot))$.

А. Пусть $G(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — произвольное компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию [6,17]

$$\int_0^\tau G(t) dt \subset M_1(t). \tag{6}$$

Теперь сформулируем достаточное условие для возможности завершения преследования в игре (1),(2). Завершение преследования понимается в смысле введенного выше определения.

Рассмотрим многозначные отображения

$$\pi K(t)f(t, P, v) = \{\pi K(t)f(t, u, v) : u \in P\}, \text{ для } v \in V(t), 0 \leq t \leq \tau,$$

$$\hat{W}(G(t), t) = \bigcap_{v \in V(t)} [G(t) + \pi K(t)f(t, P, v)], 0 \leq t \leq \tau, \quad (7)$$

Предположение 1. Существует многозначное отображение $G(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такая, что множество $\hat{W}(G(t), t)$, $t \in [0, \tau]$ непусто для всех $t \in [0, \tau]$.

В силу предположения и свойств многозначного отображения $\hat{W}(G(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, в нем существует хотя бы один измеримый по Борелю суммируемый селектор, что позволяет нам ввести интеграл Лебега [1] от многозначного отображения $\hat{W}(G(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, т.е.

$$W(\tau) = \bigcup_{G(\cdot)} \int_0^\tau \hat{W}(G(t), t) dt, W(0) = M_1(t). \quad (8)$$

Положим при $\tau \geq 0$

$$\Phi(\tau)\varphi(\cdot) = \left[K(\tau) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt.$$

Согласно (8) введем функцию определяющую наименьшее гарантированное момент времени поимки преследователем убегающего игрока для модификации третьего метода задачи преследования, положим [4]

$$T(\varphi(\cdot)) = \inf\{\tau \geq 0 : \pi\Phi(\tau)\varphi(\cdot) \in W(\tau)\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и $T(\varphi(\cdot)) \neq \emptyset$. Кроме того, существует положительное число $\tau = \tau_1(\varphi(\cdot))$, $\tau_1(\varphi(\cdot)) \in T(\varphi(\cdot))$ такое, что имеет место включение

$$\pi\Phi(\tau_1)\varphi(\cdot) \in W(\tau_1). \quad (9)$$

Тогда в игре (1),(2) возможно завершение преследования из заданного начального положения $\varphi(\cdot)$ за конечное время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. Согласно (9) и (8) найдется измеримое замкнутозначное многозначное отображение $G(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, что

$$\int_0^{\tau_1} G(t) dt \subset M_1(t),$$

и

$$\Phi(\tau_1)\varphi(\cdot) \in \hat{W}(G(\cdot), \tau_1). \quad (10)$$

В силу включения (10) и в соответствии с определением интеграла от многозначного отображения (8) следует существование суммируемой функции $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, для которой имеет место равенство

$$\int_0^{\tau_1} \tilde{w}(t) dt = \Phi(\tau_1)\varphi(\cdot), \quad \tilde{w}(t) \in \hat{W}(G(t), t), 0 \leq t \leq \tau_1. \quad (11)$$

Поэтому

$$\tilde{w}(\tau_1 - t) \in \left\{ \left[G(\tau_1 - t) + \pi K(\tau_1 - t)f(t, P, v) \right] \right\},$$

для некоторого $t \in [0, \tau_1]$.

Следовательно (см.(11)), уравнение

$$\tilde{w}(\tau_1 - t) = m + \pi K(\tau_1 - t)f(t, u, v), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{12}$$

относительно неизвестной пары $(u, m) \in P \times G(\tau_1 - t)$, при каждом фиксированном значении пары $(t, v) \subset [0, \tau_1] \times V(t)$ имеет решение. Несложно показать, что существует единственное решение $(u(t, v), m(t))$ уравнения (12), компонента $u(t, v)$, которого является наименьшей в лексикографическом смысле среди всех решений (u, m) уравнения (12) (при доказательстве этого факта используется, в частности, замкнутость множества $M(t)$). Далее, аналогично лемме Филиппова-Кастена [19] устанавливается, что для произвольной измеримой функции $v(t), t \in [0, \tau_1], v(t) \in V(t)$, функция $u(t, v(t)), t \in [0, \tau_1]$, является измеримой. Суммируемость же функции $(m(t, v(t))), t \in [0, \tau_1]$, следует из уравнения (12).

Утверждается, что если сторона, управляющая параметром u , выбирает функцию $u(t, v), t \in [0, \tau_1], v \in V(t)$, а сторона, управляющая параметром v — произвольную функцию, то траектория $z(t), 0 \leq t \leq \tau_1$, уравнения (1) с учетом начального условия (3), попадает на множество $M(t)$, т.е. включение $z(t) \in M(t)$ будет выполнено при некотором $t = t^* \in [0, \tau_1]$. Действительно, пусть, вопреки утверждаемому, $z(t) \notin M(t)$ на отрезке $[0, \tau_1]$. Тогда из формулы Коши для представления решения (после его проектирования на L) уравнения (1) при $\tau = \tau_1(\varphi(0))$ приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_1) = & \left[\pi K(\tau_1) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_1 - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_1 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \\ & - \int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t) f(t, u(t, v(t)), v(t)) dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая закон выбора управлений (13) и равенства в (11) из формулы (13) получим

$$\pi z(\tau_1) = \Phi(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t) dt + \int_0^{\tau_1} m(\tau_1 - t) dt,$$

и так как $m(t) \in M$ на отрезке $[0, \tau_1]$, то

$$\pi z(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} m(t) dt \in \int_0^{\tau_1} M(t) dt \subset M_1.$$

Следовательно, $\pi z(\tau_1) \in M_1(t)$, это эквивалентно тому, что $z(\tau_1) \in M(t)$, вопреки нашему допущению. Теорема 1 доказана.

Б. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$.

Введем в рассмотрение следующую вектор - функцию

$$\begin{aligned} \xi[\tau, \varphi(\cdot)] = & \left[\pi K(\tau - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ & + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - f_1(\tau), \end{aligned}$$

где $f_1(\tau) \in W(\tau)$. В соответствии с определением интеграла (8) существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(G(t), t), 0 \leq t \leq \tau$, такой, что имеет место равенство $f_1(\tau) = \int_0^{\tau} \tilde{w}(\tau - t) dt$.

Зафиксируем его. Тогда вектор – функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \left[\pi K(\tau) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt.$$

Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|}, \quad \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0.$$

Далее, определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ следующим образом [4,6]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \left[G(\tau - t) + \pi K(\tau - t) f(t, P, v) \right] - \tilde{w}(\tau - t) \right\}. \quad (15)$$

Обозначим через $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf \{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in V(t) \}$, если $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0$, то считается $\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = 0$, $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) \equiv \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) \equiv 0$. В дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0$ для всех $\tau \geq 0$.

Предположение 2. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существуют положительное число $\tau = \tau_2(\varphi(\cdot))$, $\tau_2(\varphi(\cdot)) \in T(\varphi(\cdot))$, многозначное отображение $G(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, (см.(6)) и суммируемая функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, такие, что:

- а) для всех $t \in [0, \tau_2]$ непусто множество $\hat{w}(G(t), t)$;
- б) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_2$, функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $v \in V(t)$, при произвольной суммируемой функции $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, являются суммируемыми;
- в) выполнено неравенство

$$|\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt \leq 0. \quad (16)$$

Теорема 2. Если выполнено предположение 2, то в игре (1),(2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_2(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ выполнены все условия теоремы 2. Для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, $v(t) \in V(t)$ рассмотрим контрольную функцию $h(t; v(r))$, $0 \leq r \leq t$, $0 \leq t \leq \tau_2$, определенную следующим образом [4,6]:

$$h(t) = h(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[t, \varphi(\cdot)]| - \int_0^t \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t)) dt.$$

Утверждается, что существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_2]$ такой, что $h(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$ (в силу п.с) предположения 2 такой момент времени существует для каждого начального положения $\varphi(\cdot) \in X$). Ясно, что если $\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] = 0$, то можно считать $t^* = 0$. Пусть $\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] \neq 0$, и $h(t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} 0 < h(\tau_2) &= |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t)) dt \leq \\ &\leq |\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t) dt, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (16). Таким образом, пусть $h(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$. При этом $h(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) > 0$ для всех t , когда $0 \leq t < t^*$. С учетом этого факта выберем функции $u(t) \in U(t)$, $g_1(t) \in G(t)$, которые в момент времени $t \in [0, t^*]$ определяются как решения уравнения

$$g_1(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t) f(t, u(t), v(t)) =$$

$$= \tilde{w}(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)], \tag{17}$$

а в момент времени $t \in (t^*, \tau_2]$ — как решения уравнения

$$g_1(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t)f(t, u(t), v(t)) = \tilde{w}(\tau_2 - t). \tag{18}$$

Промежутки времени $[0, t^*]$ и $(t^*, \tau_1]$ в дальнейшем будем называть "активным" и "пассивным соответственно [4].

В силу п.а) предположения 2 существует одно или много решений уравнения (17),(18). Согласно утверждению П.2 [4] функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ определенная равенством (15) является измеримой функцией по t при фиксированных v . Следовательно, в силу теоремы Филиппова-Кастена [19] уравнения (17),(18) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что при таком способе управления параметром $u(t)$ преследователь может гарантировать окончание преследования за времени τ_2 .

Убедимся, что траектория $z(t), 0 \leq t \leq \tau_2$, уравнения (1) с учетом начального условия (3) попадает на $M(t)$ до момента времени τ_2 . Используя формулу Коши (см.(4)) после ее проектирования на L , прибавляя и вычитая величину $\int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt$ и учитывая закон выбора управлений (17),(18), получим

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_2) &= \left[\pi K(\tau_2) - \sum_{i=0}^m \pi K(\tau_2 - h_i)B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 \pi K(\tau_2 - t - h_i) \left[B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t) \right] dt - \\ &\quad - \int_0^{\tau_2} \pi K(\tau_2 - t)f(t, u(t), v(t))dt + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt = \\ &= \xi[\tau, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \left[\tilde{w}(\tau_2 - t) - g_1(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)] \right] dt + \\ &\quad + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt - \int_{t^*}^{\tau_2} \left[\tilde{w}(\tau_2 - t) - g_1(\tau_2 - t) \right] dt = \\ &= \xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] + \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt - \int_0^{t^*} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]dt + \\ &\quad + \int_0^{t^*} g_1(\tau_2 - t)dt - \int_{t^*}^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t)dt + \int_{t^*}^{\tau_2} g_1(\tau_2 - t)dt = \\ &= \int_0^{\tau_2} g_1(\tau_2 - t)dt. \tag{19} \end{aligned}$$

Ибо, как установлено выше,

$$\begin{aligned} &\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))\eta[\tau_2, \varphi(\cdot)]dt = \\ &= \left[\xi[\tau_2, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, t, v(t))dt \right] \eta[\tau_2, \varphi(\cdot)] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, из (19) имеем

$$\pi z(\tau_2) = \int_0^{\tau_2} g_1(\tau_2 - t) dt \in \int_0^{\tau_2} G(\tau_2 - t) dt \subset M_1(t).$$

Таким образом, для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(\tau_2) \in M_1(t)$, это эквивалентно тому, что $z(\tau_2) \in M(t)$, т.е. преследование заканчивается за время τ_2 . Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука. Том 2. 576 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем.сб. 1980. 3(7). С. 307–330. <https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEN001815>
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев:Наукова думка, 1992, 384 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. Сатимов Н. Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
7. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. №1. С. 129–148. <https://www.mathnet.ru/rus/smj2627>
8. Мамадалиев Н. Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. №3 (43). С. 86–100. <https://www.mathnet.ru/rus/sjim627>
9. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №6. С. 860–873. <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745834>
10. Мамадалиев Н. А. О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. №6. С. 16–22. <https://www.mathnet.ru/rus/ivm6941>
11. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 5. С. 750–760. <https://doi.org/10.4213/mzm6346>
12. Мамадалиев Н. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. №3. С. 12–28. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-12-28>
13. Мамадалиев Н. А., Ибайдуллаев Т. Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. №11. С. 21–13. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-11-21-33>
14. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. №1. С. 129–148. <https://www.mathnet.ru/rus/smj2627>
15. Мамадалиев Н. Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. №3 (43). С. 86–100. <https://www.mathnet.ru/rus/sjim627>

16. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №6. С. 860–873. <https://elibrary.ru/item.asp?id=17745834>
17. Азамов А., Саматов Б.Т. О модифицированном третьем методе в задачах преследования, в сб.: Неклассические задачи математической физики, С.174-184(ФАН, Ташкент, 1985).
18. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967
19. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972

REZYUME

Ushbu maqola o'yinchilar boshqaruvidagi geometrik cheklovlar qo'yilganda neytral tipdagi chiziqli differensial-differensial tenglamalar sistemasi tomonidan tavsiflangan kvazichiziqli differensial o'yin masalasi tadqiq qilingan. Neytral tipdagi differensial-differensial tenglamalar uchun uchinchi quvish usuli va yo'nalish bo'yicha quvish usulining modifikatsiyalari ishlab chiqilgan. Muayyan cheklangan vaqt ichida o'yinni yakunlash uchun yangi etarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: kvazichiziqli differensial o'yin, quvish masalasi, neytral tipdagi differensial-ayirmali tenglama, terminal to'plam, quvlovchi, qochuvchi, boshqaruv.

RESUME

This paper examines quasilinear differential games described by a system of linear differential-difference equations of neutral type under geometric constraints on the players' controls. Modifications of the third pursuit method and the directional pursuit method for differential-difference equations of neutral type are developed. New sufficient conditions on the process parameters are obtained for game completion within a certain finite time.

Key words: quasilinear differential game, pursuit problem, differential-difference equations of neutral type, terminal set, pursuer, evader, control.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ЗАКОНА ТРЕНИЯ

МАМАТОВА НИГОРА ТУХТАБАЕВНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ

nigmamatova@yandex.ru

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача о распространении упругих волн в трубчатом полубесконечном стержне, контактирующем с окружающей упругой средой типа Винклера, при воздействии на торец экспоненциально убывающей динамической нагрузки. Исследуются последствия замены сигнатуры в законе трения на функцию Хевисайда. Используя метод интегральных соотношений, получено приближённое решение, результаты которого представлены в виде графических зависимостей скорости и напряжения от времени. Проведено сопоставление приближённых и точных решений, показавшее их удовлетворительное согласие. Установлены временные интервалы, в пределах которых допущение о замене сигнатуры функцией Хевисайда не противоречит закону Кулона.

Ключевые слова: упругая волна, сухое трение, винклеровское основание, ударная нагрузка, функция Хевисайда.

1. Введение

Движение разного рода стержневых элементов в механических системах обычно сопровождается трением. Одной из важнейших задач при этом является изучение влияния на волновой процесс трения между внешней средой и боковой поверхностью трубы или стержня.

Ряд интересных и важных задач в случае взаимодействия упругого стержня и жесткой среды при постоянной по величине силе сухого трения, действующей на контактной поверхности при наличии относительного движения, детально исследован в работах [1–12], задача о распространении продольных волн в стержне, на поверхности которого действует постоянная по амплитуде, но разная по направлению сила сухого трения, исследовалась в [11]. В этих работах внешняя среда, окружающая стержень, предполагается недеформируемой. Используется общий метод решения таких задач, который состоит в сведении рассматриваемой нелинейной задачи к ряду решаемых последовательно линейных задач. Основная проблема связана с определением границ областей по времени и продольной координате, внутри которых величина и направление силы трения постоянны. Направление действия сил трения зависит от знака относительной скорости частиц на боковой поверхности стержня. Решение в каждой из областей строится с учетом предварительно определенного знака скорости. Использование описанного подхода в [1-3, 6-8, 11], позволило получить решения для целого ряда задач при достаточно сложных законах нагружения стержня.

В данной работе применительно к перечисленным выше явлениям используется модель взаимодействия длинного тонкого упругого тела (трубчатого стержня) с окружающей его упругой же средой, представляющей собой линейное винклеровское основание, предложенная в работе [6].

В дифференциальном уравнении движения приведенном в [6], полагается, что сигнатура в законе трения заменяется функцией Хевисайда в виде $k = H(t - \frac{x}{a})$, ($H(t - \frac{x}{a})$ – единичная функция Хевисайда), избавившись таким образом от нелинейности в уравнении движения. Это допущение не всегда справедливо, и зависит от того какая нагрузка прикладывается, в частности для экспоненциально убывающей нагрузки.

В данной работе исследуются последствия такой замены на примере следующей задачи.

2. Постановка задачи и анализ решения.

Рассмотрим задачу о взаимодействии трубчатого стержня с внешней средой при действии на его торце экспоненциально убывающей динамической нагрузки полагая, что взаимодействие происходит по закону сухого трения Кулона при допущении [6], т.е. плотность силы трения определяется формулой

$$F_{mp} = k \frac{\chi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, k = H \left(t - \frac{x}{a} \right), \tag{1}$$

где ρ - плотность, χ - коэффициент пропорциональности, $\frac{\chi}{\rho}$ - имеет размерность ускорения. При этом, напряженно-деформированное состояние в возмущенной и невозмущенной частях стержня описывается соответственно уравнениями [1,6,8,11]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \left(t - \frac{x}{a} \right) \frac{\chi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, 0 < x < at, t > 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > at, t > 0 \tag{3}$$

где $0^2 = E/\rho$, E – модуль Юнга, ρ - постоянная плотность стержня.

Пусть в начальный момент времени полубесконечный трубчатый стержень был в состоянии покоя:

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x < \infty, \tag{4}$$

На торец стержня $x = 0$, при $t \geq 0$ прикладывается экспоненциально убывающая нагрузка

$$\sigma_0(t) = \sigma^0 5E @ (-\alpha t), \sigma^0 = const, \alpha = const. \tag{5}$$

Будем рассматривать осредненное по сечениям стержня одномерное движение. Время t будем отсчитывать от момента приложения давления, а ось Ox направим вдоль оси стержня.

Найти в области $x > 0, t > 0$ функцию $u(x, t)$ - решение уравнений (2) и (3), удовлетворяющее начальным условиям (4), граничному условию (5), а также динамическому условию непрерывности на фронте упругой волны $x = at$:

$$(\sigma + \rho a \cdot u_t)|_{x=at-0} = 0. \tag{6}$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{u(x, t)}{U_0}, \quad \bar{\sigma}(0, t) = \frac{\sigma(0, t)}{|\sigma(0, 0)|} = -\frac{\sigma_0(t)}{\sigma_0(0)}, \quad \sigma_0(0) > 0; \\ \bar{u}_x &= \frac{u_x(x, t)}{|u_x(0, 0+)|}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \frac{a^2 T^2}{l^2} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем черточки будем опускать. При этом задача (2) - (6), записанная в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H(t - x) \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \mu = \frac{\chi}{\rho a^2}, 0 < x < t, t > 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x > t, t > 0, \tag{9}$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x < \infty, \tag{10}$$

$$u_x(0, t) = -\sigma_0(t), t > 0 (\sigma_0(0) > 0), \tag{11}$$

$$(u_x + u_t)|_{x=t-0} = 0.$$

Решение задачи (8) - (12) будем искать приближенно, методом интегральных соотношений (МИС) [1-3]. Согласно МИС искомое решение ищется в виде многочлена n -го приближения, которое должно удовлетворять уравнению (8) и (9) в среднем, т.е. следующему интегральному соотношению

$$\int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx = \mu H(t - x) \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x} dx \tag{13}$$

Уравнение (13) при тривиальных начальных условиях (10) имеет тривиальное решение и поэтому интегральное соотношение удовлетворяется. Первое приближение решения уравнения (8) будем искать в виде

$$u(x, t) = A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2. \quad (14)$$

При этом скорость перемещения сечений стержня можно представить в виде

$$u_t(x, t) = a_0(t) + a_1(t)\frac{x}{t} + a_2(t)\left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad (15)$$

$$a_i(t) = t^i \frac{dA_i}{dt}, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (16)$$

Неизвестные функции $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$, $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ находятся в следующем порядке: из условия (11) и (16) определяются $A_1(t)$ и $a_1(t)$

$$A_1(t) = -\frac{\sigma_0(t)}{\sigma_0(0+)}, a_1(t) = -\frac{t}{\sigma_0(0+)} \frac{d\sigma_0(t)}{dt}. \quad (17)$$

Далее, воспользовавшись интегральным соотношением (13) учитывая (11), (17) и удовлетворяя условию (12) получаем следующие два уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 \frac{dA_2}{dt}\right) + 3\frac{da_0}{dt} + \frac{3}{2}\left(\frac{da_1}{dt} - \frac{a_1}{t}\right) - 2t\frac{dA_2}{dt} - 6A_2 - 3\mu \cdot \text{sign}(u_t) \cdot (A_1 + A_2t) = 0, \quad (18)$$

$$t^2 \frac{dA_2}{dt} + A_2t + a_0 + a_1 + A_1 = 0. \quad (19)$$

где $a_1(t)$ и $A_1(t)$ определены формулой (17).

Таким образом, получаем систему уравнений (14), (15), (18), (19), служащую для определения четырёх неизвестных $a_0(t)$, $a_2(t)$, u_t и u_x . Полученная система уравнений решена с использованием системы Maple18 при следующих начальных условиях

$$a_0(0) = 1, \quad A_2(0) = 0. \quad (20)$$

Численные расчеты упрощенной задачи и анализ результатов.

На фазовой плоскости (x, t) , возмущенной части стержня соответствует область $\Omega = \{x, t : 0 \leq x \leq t, 0 \leq t \leq \infty\}$, которую преобразованием $\zeta = \frac{x}{t}$ можно отобразить на отрезок единичной длины $0 \leq \zeta \leq 1$. Разбиваем отрезок $0 \leq \zeta \leq 1$ точками $\zeta_m = 0.1m = \frac{x_m}{t}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 10$) на 10 равных частей. Этим точкам в области Ω фазовой плоскости соответствуют отрезки одиннадцати прямых $x_m = 0.1 \cdot mt$ ($m = 0, 1, \dots, 10$), выходящих из начала координат. Если для фиксированного значения времени $0 < t_n \leq T$ ввести обозначение

$$\zeta(x_m, t_n) = \frac{x_m}{t_n} = 0.1 \cdot m \quad (m = 0, 1, \dots, 10), \quad (21)$$

то единичному отрезку $0 \leq \zeta(x_m, t_n) \leq 1$ соответствует отрезок $0 \leq x_m \leq t_n$ в области Ω , где n - номер расчетного промежутка времени. Расчеты произведены для пяти промежутков времени: $t_1 = 3$; $t_2 = 5$; $t_3 = 10$; $t_4 = 20$; $t_5 = T^*$, где T^* время завершения процесса деформирования и перехода в состояние равновесия.

На Рис. 1 показано изменение со временем скорости перемещения и напряжения. Здесь и далее (рис.1-рис.4) кривая $m = 0$ соответствует кривой наиболее близко расположенной к координатным осям, а наиболее удаленная соответствует $m = 10$.

Как видно, скорость и напряжение монотонно уменьшаются с ростом t . На отрезках времени $(0 \leq t \leq t_1 = 3)$ и $(0 \leq t \leq t_2 = 5)$ скорость, монотонно уменьшаясь, обращается в нуль в точке $\zeta_m = 0$ ($m = 0$) - на конце стержня при $t = t^*(m) = 4.94$ ($m = 0$). Здесь и в дальнейшем $t = t^*(m)$ - момент обращения скорости в нуль на сечении ζ_m рассматриваемого расчетного промежутка времени. На промежутке времени $0 \leq t < 4.94$ допущение (1) не противоречит закону Кулона. Однако, если скорость

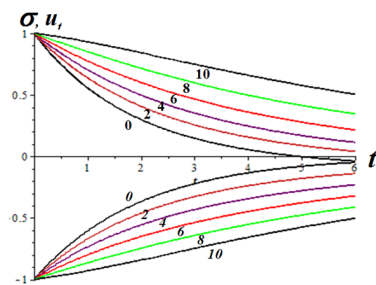


Рис. 13: Графики скорости и напряжения (соответственно выше и ниже оси t) от времени: $m = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.

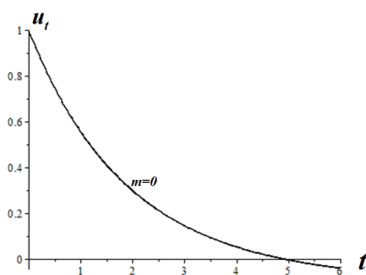


Рис. 14: Изменение скорости на конце стержня ($x = 0$) при $m = 0$.

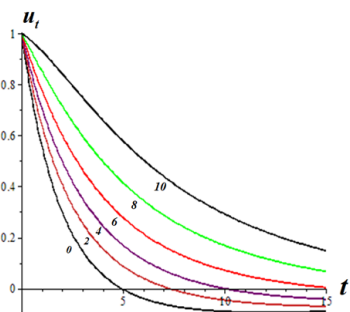


Рис. 15: Изменение скорости от времени для $t_5 = 15$ ($m=0,1,\dots,10$).

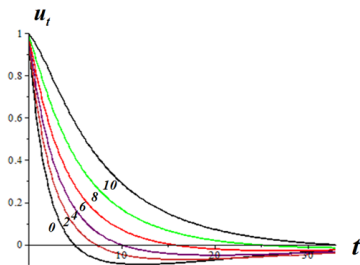


Рис. 16: Изменение скорости от времени для $t_5 = 35$ ($m=0,1,\dots,10$).

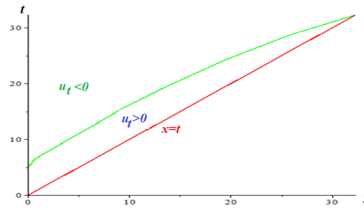


Рис. 17: Область на характеристической плоскости, где $u_t > 0$.

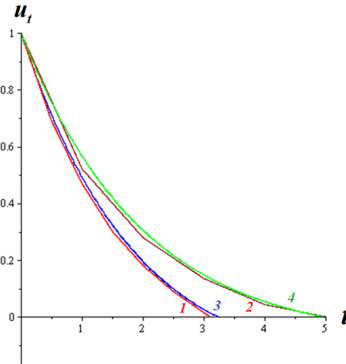


Рис. 18: Графики скоростей на конце ($x = 0$) стержня: кривые 1 и 2 – точное решение, 3 и 4- приближенное решение, соответственно для $\mu = 0.3$ и $\mu = 0.1$.

меняет знак, то (1) противоречит определению силы трения. Расчеты показывают (Рис.1, Рис.2), что при $t=4.94$ скорость обращается в нуль, а при $t > 4.94$ меняет знак и становится отрицательной.

Такое поведение скорости наблюдается и на более длительных промежутках времени (Рис.3, Рис.4).

Если отвлечься от физики явления, то графики приведенные на Рис.1-Рис.4 изображают решение краевой задачи (2) - (6) независимо от знака скорости. Однако в качестве задачи о взаимодействии стержня с внешней средой решение справедливо только при $t \leq t^*$. Область на характеристической плоскости, на которой выполняется последнее неравенство, приведена на Рис.5.

Верификация результатов осуществляется путем сравнения приближенного (МИС) и точного решений (Рис.6) для двух значений коэффициента пропорциональности: $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.3$. Как видно из Рис.6 графики скоростей, построенных по МИС и по точному решению располагаются довольно близко.

Примечание. Точное решение упрощенной задачи получено в [2]. Графики точного решения на Рис.6 построены по решению, полученном [2] в более удобном для расчетов виде:

$$u_t(0, t) = I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) - \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - \alpha \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau \right) + \frac{1}{4} \frac{\mu^2 \left(\int_0^t 1-e^{-\alpha(t-\tau)} I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau \right)}{\alpha} \tag{22}$$

где $I_0(t)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Заключение.

1. Представлено приближенное решение задачи о распространении упругой волны в трубчатом полубесконечном стержне, взаимодействующем с внешней средой по закону сухого трения согласно модели Винклера, при действии на его торце экспоненциально убывающей во времени динамической нагрузки;
2. Как известно, сила трения пропорциональна. В работе Филиппова в законе трения сигнум относительно скорости заменяется функцией Хевисайда, исследованы последствия замены сигнатуры в законе трения на функцию Хевисайда от тех же функций;

3. Показано, что на некотором промежутке времени допущение замены сигнатуры функцией Хевисайда не противоречит закону Кулона. Однако, если скорость меняет знак, то это допущение противоречит определению силы трения.
4. Приводится график области на характеристической плоскости, где полученное решение справедливо при такой замене, для экспоненциально убывающей нагрузки.
5. Получены графики, в которых скорость становится отрицательной в некоторых моментах времени, т.е. решение противоречит закону трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегматов А. Соударение жесткого тела и вязкопластического стержня конечной длины при наличии сухого трения с внешней средой. Узб. журнал «Проблемы механики», №1, 2024. С. 12-18.
2. Бегматов А. Связанная задача о соударении жесткого тела, двигающегося с постоянной скоростью, и вязкопластического стержня конечной длины. Узб. Журнал «Проблемы механики», 2023, №2. С. 34-42.
3. Abduvali Begmatov and Nigora Mamatova. Impact of rigid body and viscous-plastic rod of finite length. E3S Web of Conferences 401, 02003 (2023) CONMECHYDRO – 2023.
4. Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч.1// Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископ. 2012. №5. С.104-119.
5. Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч.2// Физ.-техн. пробл. разраб. полез. Ископ. 2013. №3. С.91-106.
6. Филиппов А.Н. Динамическое воздействие на трубопровод с учетом сухого трения на его поверхности. МГТ, 2019, №6, С.20-29
7. Филиппов А.Н. Распространение продольных упругих волн в стержне, окруженном средой типа Винклера // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1983, №1, С. 74-78.
8. Бегматов А., Маматова Н.Т. Внезапное нагружении упруго-пластического стержня, взаимодействующего с окружающей внешней средой. Прикладная механика и техническая физика. 2022., Т.63, №1, с. 138-152.
9. Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсмомодинамики сооружений. Книга 1. Ташкент.: «Наврўз», 2019, –268 с. ; Книга 2. Ташкент.: «Наврўз», 2021, – 172 с.
10. Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. -392 с.
11. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Московск. лицей, 1998, 261 с.
12. Юнин Е.К. Загадки и парадоксы сухого трения. Изд. Либроком, 2012,-128 с.
13. Джонсон К. Механика контактного разрушения. Пер. с англ. –М.: Мир, 1989. – 510 с.

REZYUME

Maqolada Winkler tipidagi elastik muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lgan yarim cheksiz sterjendagi elastik to'lqinlarning tarqalish masalasi ko'rib chiqilgan. Sterjenning uchiga eksponensial kamayuvchi dinamik yuklanish qo'yilganda, ishqalanish qonunidagi signatura funksiyasining Heavisida funksiyasi bilan almashtirilishining natijalari o'rganilgan. Integral munosabatlar usulidan foydalangan holda taqribiy yechim olingan bo'lib, natijalar tezlik va kuchlanishning vaqtga bog'liq grafik ko'rinishida keltirilgan. Taqribiy va aniq yechimlar taqqoslanib, ularning yetarli darajada mosligi aniqlangan.

Shuningdek, Heavisida funksiyasi bilan signatura funksiyasini almashtirish Kulon qonuniga zid bo'lmagan vaqt oralig'i aniqlangan.

Kalit so'zlar: elastik to'lqin, quruq ishqalanish, Winkler poydevori, zarba yuki, Heaviside funksiyasi.

RESUME

This paper considers the problem of elastic wave propagation in a semi-infinite tubular rod in contact with a Winkler-type elastic medium, subjected to an exponentially decreasing dynamic load on the end face. The consequences of replacing the signature in the friction law with the Heaviside function are investigated. Using the method of integral relations, an approximate solution is obtained, the results of which are presented as graphical dependences of velocity and stress on time. A comparison of the approximate and exact solutions is performed, showing their satisfactory agreement. Time intervals are established within which the assumption of replacing the signature with the Heaviside function is consistent with Coulomb's law.

Key words: elastic wave, dry friction, Winkler foundation, impact load, Heaviside function.

УДК 514.76

СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ВЕРШИНАМИ

Тиллаев Донёрбек Рустамбек угли

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ТАШКЕНТ
drtillyayev@mail.ru

РЕЗЮМЕ

Точки на общих выпуклых поверхностях классифицируются на три типа: регулярные, ребристые и конические. Выпуклые поверхности, не содержащие ребристых точек, называются поверхностями с вершинами. В настоящей работе изучается сферическое отображение таких поверхностей, а также исследуются свойства их внешней кривизны. Доказаны теоремы о внешней кривизне, характерные исключительно для поверхностей с вершинами.

Ключевые слова: Регулярные точки, ребристые точки, коническая точка, опорная плоскость, сферическое отображение, внешняя кривизна, полная замкнутая поверхность, поверхность с вершинами.

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты

По А.Д. Александрову выпуклая поверхность определяется как односвязная область границы выпуклого тела или полная поверхность выпуклого тела. Если вся граница выпуклого тела состоит из выпуклых многоугольников, такая поверхность называется выпуклым многогранником [1]. Следовательно, многогранник является частным случаем выпуклых поверхностей.

Свойства опорных плоскостей и касательных конусов выпуклых поверхностей, а также особенности их формы и пространственного расположения классифицированы в работах [9-11]. Характеристики сферического изображения и внешней кривизны выпуклых тел проанализированы в [12], где выполнено сопоставление соответствующих параметров для дискретных и непрерывных моделей. Динамические модели выпуклых поверхностей и закономерности изменения внешней кривизны исследованы в [13]; в частности, рассмотрена эволюция сферического изображения во времени и установлены свойства функции кривизны под влиянием сингулярных точек, включая рёбра и вершины. Выпуклые многогранники, не имеющие рёбер (то есть состоящие только из вершин), занимают особое место в задачах изометрии на сечениях и образуют специальный класс [14, 15].

Пусть F - выпуклая поверхность, а X - точка на этой поверхности. Рассмотрим множество всех кривых на поверхности, проходящих через точку $X \in F$. Множество касательных к этим кривым в точке $X \in F$ образует касательный конус поверхности F в точке X . Очевидно, что точка X является вершиной этого конуса.

Классификация точек поверхности F определяется формой ее касательного конуса. Если касательный конус действительно является конусом, точка поверхности называется конической. Если касательный конус вырождается в двугранный угол, точка называется ребристой. В случае, когда касательный конус вырождается в плоскость, точка называется регулярной. На многогранной поверхности встречаются все указанные типы точек, причем внутренние точки граней являются регулярными. Если поверхность F содержит только регулярные точки, ее уравнение принадлежит хотя бы к классу $C^1(D)$. Однако существуют выпуклые поверхности, содержащие все виды точек и при этом не являющиеся многогранниками.

Например, поверхность, заданная векторным уравнением

$$r = r(u, v) = (\cos 2u \cos u \cos v, \sin v, \cos 2u \sin u \cos v),$$

где $u \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, является выпуклой поверхностью с двумя вершинами и ребром, соединяющим эти вершины. График этой поверхности представлен на рис. 1.1.

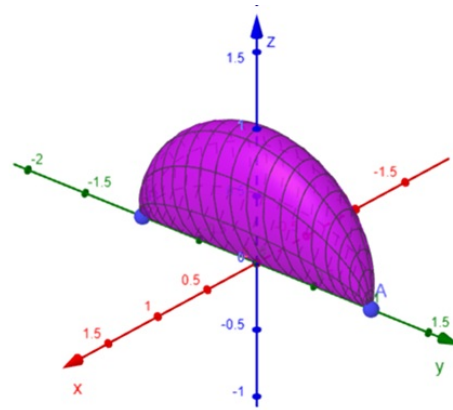


Рис. 19: График выпуклой поверхности с двумя вершинами и одним ребром.

Существуют поверхности, имеющие конечное число вершин; все остальные их точки являются регулярными, а ребристые точки отсутствуют. Такие поверхности принято называть поверхностями с вершинами [5, 6].

В настоящей работе исследуются свойства сферического отображения поверхностей с вершинами.

Плоскость π называется опорной к выпуклой поверхности F , если она имеет хотя бы одну общую точку с поверхностью F , а все остальные точки поверхности лежат в одном из полупространств, определяемых этой плоскостью [2].

Пусть опорная плоскость π в точке $X \in F$ задана в декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда сферическое отображение этой плоскости определяется точкой на единичной сфере S_2 , являющейся концом единичной нормали к плоскости. Координаты этой точки имеют вид:

$$X^* \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right\}.$$

Множество сферических образов всех опорных плоскостей точки $X \in F$ называется сферическим отображением точки X на сфере S_2 . Для регулярных точек поверхности сферическое отображение вырождается в одну точку на сфере, для ребристых точек оно представляет собой дугу окружности, для конических точек - выпуклую область на сфере S_2 [3,4].

Нас интересует поведение сферического отображения в окрестности конической точки поверхности.

Пусть D - выпуклая односвязная область на плоскости Oxy с границей Γ . Внутри области выделена точка A , и в пространстве задана замкнутая кривая L , однозначно проектирующаяся на край Γ области D . Если L является ломаной, то Γ - многоугольник, и вершины L проектируются в вершины Γ .

Рассмотрим множество поверхностей $F \in W(D)$ с краем L и вершиной \bar{A} , проектирующуюся в точку A , и выпуклостью в сторону $z > 0$.

В дальнейшем будем пользоваться понятием сферического отображения выпуклой поверхности, перенесенной на плоскость [3]. Под сферическим отображением, перенесенным на плоскость, понимается следующее: если точка $X \in D$ - проекция точки $X' \in F$ и $X^* \in S_2$ - сферическое отображение точки $X' \in F$, то $X^* \in S_2$ называется сферическим отображением точки $X \in D$ относительно поверхности F .

Лемма 1.1. Если поверхность $F \in W(D)$ является многогранным углом или конусом с вершиной в точке A , то сферическое отображение поверхности совпадает со сферическим отображением ее вершины A .

Доказательство. Пусть $F \in W(D)$ - поверхность, являющаяся многогранным углом или конусом с вершиной A , а D' - область, на которую проектируется F . Так как проекция M выпуклого множества $M' \subset F$ на область D является выпуклой, из свойств сферического отображения выпуклых поверхностей следует, что сферическое отображение перенесенной на плоскость выпуклой области $M \subset D$ также будет выпуклой областью. Значит сферическое отображение области D относительно поверхности $F \in W(D)$ также будет выпуклой областью на сфере S_2 .

Поверхность $F \in W(D)$ может быть только три типа:

1) Многогранный угол с вершиной в точке \bar{A} и краем L . В этом случае край L будет либо замкнутой ломаной, проектирующейся на многоугольник Γ , либо кусочно-гладкой замкнутой кривой, однозначно проектирующейся на гладкую кривую Γ - край области.

2) Конус с вершиной в точке \bar{A} ,

3) Поверхность с вершиной в точке \bar{A} .

В первых двух случаях опорные плоскости всех точек $X \in D$, отличных от точки A , совпадают с опорной плоскостью точки $X^{**} \in F$ - края области, причем точка X принадлежит отрезку X^*A . Сферические отображения точек совпадают со сферическим отображением отрезка X^*A . Следовательно, сферическое отображение области совпадает со сферическим отображением точки A .

Лемма 1.2. Если $F \in W(D)$ - поверхность с вершиной A , то ее сферическое отображение является выпуклым множеством, содержащим сферическое отображение вершины A .

Доказательство. Пусть F - поверхность с вершиной в точке A . Тогда каждой точке $X \in D$ соответствует регулярная точка $X' \in F$. В регулярной точке опорная плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности и является единственной. Если π_X - касательная плоскость точки $X \in D$, отличной от точки A , она не может быть опорной плоскостью точки A . Следовательно, сферическое отображение точки $X \in D$, отличной от точки A не может иметь общих точек со сферическим отображением точки A . Действительно, если бы сферические отображения имели общую точку, то отрезок, то отрезок $X'A'$ должен был бы принадлежать поверхности, что означало бы, что точки отрезка $X'A'$ являются ребристыми точками поверхности $F \subset D$. Это противоречит условию выбора F .

Следовательно, сферические отображения точек $X \in D$, отличных от точки A , не имеют общих точек со сферическим отображением точки A . Значит, сферическое отображение поверхности, являющейся поверхностью с вершиной в точке A , содержит сферическое отображение вершины A . Лемма доказана.

Рассмотренные свойства сферического отображения были приведены для поверхностей с одной вершиной. Для поверхностей с несколькими вершинами аналогичные свойства сохраняются: сферическое отображение каждой вершины представляет собой выпуклую область на сфере, при этом изображения различных вершин не пересекаются.

2. Внешняя кривизна поверхностей с вершинами

Внешняя кривизна множества определяется как площадь сферического отображения этого множества относительно поверхности и обозначается $\omega_F(M) = S(M^*)$ [3].

Пусть F - поверхность с вершинами, которые проектируются в точки A_1, A_2, \dots, A_k области D . Внешняя кривизна поверхности с вершинами обладает всеми свойствами внешней кривизны выпуклой поверхности, перенесенной на плоскость, как это было рассмотрено в работе [5]. Из свойств сферического отображения поверхности, приведенных в этой работе, вытекают некоторые особые свойства внешней кривизны поверхностей с вершинами.

Обозначим через $\bar{M} \subset D$ замыкание множества M и введем следующие обозначения: M^q обозначает множество M , не содержащее точек из A_i , но такое, что его замыкание \bar{M} содержит q точек из A_i ; обозначает множество M , которое содержит внутри себя p точек из , при этом в его замыкании \bar{M} находится q точек из A_i .

Свойства 2.1. Внешняя кривизна выпуклой поверхности с вершинами является неотрицательной, аддитивной функцией множества на поверхности.

Свойства 2.2. Внешняя кривизна $\omega_F(M)$ поверхности с вершинами обладает следующими свойствами

$$1. \omega_F(M) = \omega_F(\bar{M}),$$

$$2. \omega_F(M^q) = \omega_F(M),$$

$$3. \omega_F(pM^q) = \omega_F(M^q) + \sum_{i=1}^p \omega_i,$$

где ω_i внешняя кривизна вершины $A_i \in D$.

Рассмотрим последовательность областей M'_n , каждая из которых содержит единственную точку - вершину \bar{A} и образует последовательность вложенных областей:

$$M'_1 \supset M'_2 \supset \dots \supset M'_n \supset \dots$$

Свойства 2.3. Для последовательности множеств M'_n имеет место предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_F(M_n) = \omega(\bar{A}).$$

Свойства 2.4. Для последовательности $M_n \supset M'_{n+1}$. выполняется условие вполне аддитивности внешней кривизны выпуклой поверхности, то есть справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_F(M_n) = 0.$$

Доказательство перечисленных свойств следует от свойства сферического отображение выпуклой поверхности с вершинами.

3. Расположение поверхности с вершинами относительно касательных конусов вершин

Из определения поверхностей с вершинами следует, что такие поверхности имеют касательные-плоскости и опорные плоскости. Причем опорные плоскости и поверхности с вершинами имеют общие точки только в вершинах.

Пусть последовательность точек $\{X_n\} \in D$ стремится к точке $A_i \in D$, являющейся проекцией точки A'_i , где A'_i - вершины поверхности F , $i = 1, \dots, k$.

Теорема 3.1. Пусть последовательность точек X_n стремится к точке A_i . Тогда последовательность касательных плоскостей точек $X'_i \in$ стремится к касательной плоскости в точке A'_i , которая является касательной плоскостью к касательному конусу с вершиной в точке A'_i .

Доказательство теоремы следует из теоремы А.Д. Александрова о предельном положении опорных плоскостей, соответствующих сходящейся последовательности точек на выпуклой поверхности [1,2].

Обозначим через K_1, K_2, \dots, K_k касательные конусы F поверхности с вершинами в точках A_1, A_2, \dots, A_k в области D . Рассмотрим выпуклую оболочку K , натянутую на конусы K_k , и цилиндр H с образующими, параллельными оси Oz , направляющей которого является граница Γ области D . Пересечение выпуклой оболочки K и цилиндра H , представляющее собой замкнутую кривую, проектирующуюся на Γ , обозначим через L_k .

Теорема 3.2. Поверхность F с вершинами в точках A'_i $i = 1, \dots, k$, содержится внутри конуса K и имеет с ним общие точки в вершинах A_i . Край поверхности L' , лежащий на цилиндре H , располагается ниже, чем L_k .

Доказательство теоремы следует из леммы 1, 2 и теоремы 1.

Внешнюю кривизну выпуклых поверхностей можно рассматривать также в классе выпуклых поверхностей, определенных на сфере. В этом случае внешняя кривизна задается на сфере и обычно называется внешней кривизной, перенесенной на сферу [3].

Пусть выпуклая поверхность Φ определена на сфере. Тогда существует единичная сфера, из центра которой поверхность Φ однозначно проектируется на сферу. Под проектированием понимается следующее: каждый луч, выходящий из центра сферы, пересекает сферу и выпуклую поверхность ровно в одной точке, и этим точкам ставится в соответствие взаимно-однозначное отображение. Точка $X \in S_2^*$ называется проекцией точки $X' \in$, если точки X и X' лежат на одной луче, исходящем из центра сферы S_2^* .

Если $X^* \in S_2$ - сферическое отображение точки $X' \in$, то X^* называется сферическим отображением точки $X \in S_2^*$. При этом сферы S_2^* и S_2 нужно рассматривать как различные сферы единичного радиуса.

Внешняя кривизна множества $M' \in$ определяется как площадь его сферического отображение $M^* \subset S_2$. Эту внешнюю кривизну называют внешней кривизной множества $M \subset S_2^*$, перенесенной на сферу множества $M' \subset$, и обозначают через $\omega(M) = S(M^*)$.

Теорема 3.3. Пусть Φ - полная замкнутая выпуклая поверхность с вершинами A_1, A_2, \dots, A_k , обладающими однозначными проекциями на единичную сферу S_2^* . Тогда сферическое отображение Φ

является полной поверхностью единичной сферы S_2 , а сферические отображения вершин A_i образуют выпуклые области A_i^* на сфере S_2 , не имеющие общих точек.

Доказательство теоремы. По условию теоремы выпуклой поверхность Φ однозначно проектируется на сферу S_2^* . Это означает, что любая крайняя проходящая из центра сферы S_2^* пересекает поверхность в двух точках. Этим точки могут совпадать с точками A_i или не совпадать, не зависимости от этого в этих имеются параллельные опорные плоскости. К этим параллельным опорным плоскостям соответствуют диаметрально противоположные точки на сфере S_2^* [1,2]. Так как, это соответствие будет в произвольном направлении, сферический образ поверхности полностью заполняет сферу S_2 .

Сферическое отображение A_i^* вершины A_i будет выпуклой областью на сфере S_2 . Так как если плоскости α_i и β_i является опорными плоскостями вершины A_i и пересекаются то прямой l проходящей через эти вершину, то подмножество плоскостей пучка плоскостей проходящих через прямую l и проходящийся между α_i и β_i , также является опорной плоскостью.

Эти показывает если точка A_α^* и A_β^* сферические образы плоскостей α и β то отрезок дуги большой окружности сферы S_2 также принадлежит сферическому образу вершины A_i . Следовательно сферический образ вершины A_i является выпуклой областью на сфере S_2 . Но сферические образы разных вершин A_i и A_j $i \neq j$, не могут имеет общую точку. Если они имеют общие точки, то этому точке соответствует опорная плоскости проходящей через вершины A_i и A_j [1]. Это означает отрезок $A_i A_j$ принадлежит к поверхности Φ . Но это противоречит выбору Φ , она не имеет равно. Теорема доказана.

Следует отметить, что замкнутые поверхности, подобные друг другу, имеют одинаковое сферическое отображение. Отсюда следует, что внешняя кривизна подобных полных замкнутых выпуклых поверхностей также совпадает.

Заключения

Сферическое отображение поверхности с вершинами обладает особыми свойствами, отличающимися от свойств других типов поверхностей. В частности, внешняя кривизна выпуклых поверхностей с вершинами характеризуется признаками, уникальными для этого класса поверхностей. Используя свойства сферического отображения выпуклых поверхностей, показано, что полные поверхности полностью содержатся внутри выпуклых оболочек своих касательных конусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandrov A. D. Convex Polyhedra. Springer Monographs in Mathematics. 2005.
2. Alexandrov A. D. Intrinsic Geometry of Convex Surfaces, Chapman and Hall, CRC, 2010.
3. Bakelman I.Ya., A.L. Venger, B.E. Kantor. Introduction to Global Differential Geometry, Demand Book, Science, 2012 (in Russian).
4. Pogorelov A. V. Extrinsic Geometry of Convex Surfaces, Translations of Mathematical Monographs, AMS, 2015.
5. Artikbayev A., Tillayev D., Properties of External Curvature of Surfaces with Vertices // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2023. vol 4. No 1. P. 1-10.
6. Artikbayev A., Tillayev D.R., Restoration surfaces with vertices based on given external curvature // JP Journal of Geometry and Topology, 2025. vol 31, No 2, P 63-78.
7. Tillayev D.R., Reconstruction from the external curvature of a surface with a single vertex // Uzbekistan journal of Mathematics and Computer Science, 2025. Vol 1. No 1. P. 50-56.
8. A. Artikbayev, N. Ibodullayeva, Generalized External Curvature of a Surface, AIP Conference Proceedings, (2024).
9. Григорьев А.А., Выпуклый анализ и его приложения, СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. - 180 с.
10. Бенъямини И., Выпуклые тела и их свойства, Springer, 2005. - 320 с.
11. Рубинович А.Я., Свойства касательных конусов на выпуклых поверхностях // Siberian Mathematical Journal, 2005. Vol. 46, No 4. P. 789-802.

12. Козлов В.В., Динамика выпуклых поверхностей и внешняя кривизна // Uzbek mathematics Journal, 2012. Т. 67, № 5. - С. 3-28.
13. Пак И.Ф., Реконструкция выпуклых поверхностей по сферическому отображению // Journal of Geometry and Physics, 2023. Vol. 185. - P. 104-115.
14. Topvoldiyev F., Sharipov A., On Defects of Polyhedra Isometric on Sections at Vertices, AIP Conference Proceedings, 2024. vol. Uzbekistan, 2024.
15. A. Sharipov and F. Topvoldiyev, On invariants of surfaces with isometric on sections, Mathematics and Statistics 10 (2022), 523-528.

REZYUME

Umumiy qavariq sirtlarning nuqtalari uchta turga bo'linadi: regulyar, qirra va konussimon. Qirra nuqtalarga ega bo'lmagan qavariq sirtlar uchga ega sirtlar deb ataladi. Ushbu maqolada sferik tasvir o'rganiladi va uchga ega qavariq sirtlarning tashqi egiligi xossalari isbotlanadi. Faqat uchga ega sirtlarga xos bo'lgan tashqi egilish haqidagi teoremlar isbotlangan.

Kalit so'zlar: muntazam nuqtalar, qirra nuqtalar, konussimon nuqtalar, tayanch tekislik, sferik tasvir, tashqi egilik, to'liq yopiq sirt, uchga ega sirt.

RESUME

Points on general convex surfaces are classified into three types: regular, ribbed, and conical. Convex surfaces lacking ribbed points are termed surfaces with vertices. The present study examines the spherical mapping and establishes properties of the external curvature for convex surfaces with vertices. Theorems concerning the external curvature, which are characteristic exclusively of surfaces with vertices, have been proved.

Key words: regular points, ribbed points, conical point, support plane, spherical mapping, external curvature, complete closed surface, surface with vertices.

УДК 531.01:629.78

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ БАЗИС-ВЕКТОРА ДЛЯ УЧАСТКОВ НУЛЕВОЙ ТЯГИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ГАРФИНКЕЛЯ

Тожиев Рустам Исомиддин угли

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

rustamt96@mail.ru

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается проблема нахождения аналитических решений задачи оптимизации движения точки (центра масс космического аппарата) в гравитационном поле Гарфинкеля. В связи с непрерывностью составляющих базис-вектора (компонент реактивной силы) в точках перехода с одного участка траектории на другой, необходимо знать составляющие базис-вектора для участков нулевой тяги, соединяющихся с активными участками. В данной статье определяются составляющие базис-вектора для участков нулевой тяги в гравитационном поле Гарфинкеля. Решение вариационной задачи для участков с нулевой тягой определяется полным интегрированием уравнения Гамильтона-Якоби.

Ключевые слова: Вариационная задача Лаудена, гамильтонова система, реактивная сила, уравнение Гамильтона-Якоби, полный интеграл.

1. Введение.

Оптимизация траекторий космических аппаратов переменной массы в нецентральных гравитационных полях – одна из основных задач современной небесной механики и астрофизики. В центральных полях, описываемых законами Кеплера, такие задачи сравнительно легко решаются аналитическими методами и численным интегрированием. Однако в реальных условиях, особенно вблизи планет с обобщёнными потенциалами (например, Земли, Марса, Юпитера), гравитационное поле становится нецентральным из-за влияния высших гармоник [1]. Вторая зональная гармоника, учитывающая сплюснутость планеты по экватору, приводит к прецессии орбиты, изменению перигея и апогея, а также к возможной неустойчивости траекторий [2]. Вариационные задачи оптимизации траекторий на многоэтапных полётах (с чередованием активных и пассивных участков) были формализованы методом Лоудена [3], который сводит основную часть проблемы к интегрированию замкнутых гамильтоновых систем четырнадцатого порядка. Полёт разделяется на три типа участков: нулевой тяги (пассивные, где аппарат движется по баллистической орбите под действием гравитации), промежуточной тяги и максимальной тяги (режим полной мощности двигателя). Пассивные участки (нулевой тяги, НТ) играют ключевую роль, поскольку на них отсутствует расход топлива, и движение определяется только гравитационным потенциалом. Поскольку составляющие базис-вектора, определяющие направление реактивной силы, непрерывны в точках переключения с одного участка траектории на другой, то, следовательно, важно знать значения составляющих базис-вектора на участках нулевой тяги, которые соединяются с активными участками. В данной работе определяются компоненты базис-вектора для участков нулевой тяги в случае гравитационного поля Гарфинкеля [2].

2. Постановка задачи.

Известно, что дифференциальные уравнения вариационной задачи о движении точки (центр масс

космического аппарата) имеют следующий вид [3]

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \frac{cm}{M} \frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}(\vec{r}), \\ \dot{\vec{r}} &= \vec{v}, \quad \dot{M} = -m, \\ \dot{\vec{\lambda}} &= -\vec{\lambda}_r, \quad \dot{\lambda}_r = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}} \vec{\lambda}, \quad \dot{\lambda}_M = \frac{cm}{M^2} \lambda,\end{aligned}$$

где \vec{r} - радиус-вектор точки (центр масс космического аппарата), \vec{v} - её скорость; $M(t)$ - масса точки; c - относительная скорость истечения продуктов сгорания; m - секундный расход массы ($0 \leq m \leq \bar{m}$); \vec{g} - гравитационное ускорение; $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_r, \dot{\lambda}_M$ - множители Лагранжа, сопряженные скорости, радиусу-вектору и массе соответственно.

Гравитационное поле осесимметричной сфероидальной планеты можно аппроксимировать полем тяготения Гарфинкеля, которое частично учитывает возмущающий эффект второй зональной гармоники. Аппроксимирующее выражение для потенциала такого гравитационного поля даёт основные эффекты, обусловленные несферичностью Земли, и вместе с тем допускает интегрирование задачи в квадратурах на участках нулевой тяги методом Якоби. Силовая функция в планетоцентрической экваториальной системе сферических координат r, φ, θ имеет следующий вид [4]:

$$U(r, \theta) = f(r) + \frac{\Phi(\theta)}{r^2},$$

Здесь функции $f(r)$ и $\Phi(\theta)$ считаем произвольными. Для участков нулевой тяги первую группу уравнений (1) можно свести к квадратурам [2], что позволяет получить составляющие базис-вектора λ для этих участков. Учитывая, что $r(r, \varphi, \theta), v(v_1, v_2, v_3)$, первую группу дифференциальных уравнений (1) на участках НТ в случае гравитационного поля Гарфинкеля можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{df(r)}{dr} - 2 \frac{\Phi(\theta)}{r^3} + \frac{1}{r}(v_2^2 + v_3^2), \\ \dot{v}_2 &= -\frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_2 v_3}{r} \tan \theta, \\ \dot{v}_3 &= -\frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r} \tan \theta + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{d\theta}, \\ \dot{r} &= v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r \cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_3}{r}\end{aligned}$$

3. Метод Гамильтона-Якоби.

Эти уравнения первой группы, описывающие свободное движение в поле Гарфинкеля, нелинейны и не интегрируемы в лагранжевой форме без дополнительных преобразований. Для их аналитического решения применим метод Гамильтона-Якоби [2], который позволяет перейти к каноническим переменным и выполнить разделение переменных. Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - U(r, \varphi)$$

Обобщённые импульсы определяются как: $P_r = \dot{r}, P_\varphi = r^2 \dot{\varphi}, P_\theta = r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta$ Уравнение Гамильтона-Якоби можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - f(r) - \frac{\Phi(\theta)}{r^2} = 0$$

Функция S является полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби. Если механическая система консервативна, полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби можно искать следующим образом [2]:

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) - \alpha_1 t$$

$$\left(\left(\frac{\partial S_1(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta} \right)^2}{r^2} + \frac{\left(\frac{\partial S_3(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - 2f(r) - \frac{2\Phi(\theta)}{r^2} = 2\alpha_1$$

$$\left(\left(\frac{\partial S_1(r)}{\partial r} \right)^2 - 2f(r) - 2\alpha_1 + \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_3(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2}{\cos^2 \theta} \right) - 2\Phi(\theta) \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\left(\frac{\partial S_3(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2}{\cos^2 \theta} - 2\Phi(\theta) = \alpha_2$$

$$\left(\frac{\partial S_1(r)}{\partial r} \right)^2 - 2f(r) - 2\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2} = 0$$

$$S_1(r) = \int \sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr$$

$$\frac{\partial S_3(\varphi)}{\partial \varphi} = \alpha_3, \quad S_3(\varphi) = \alpha_3 \varphi$$

$$\left(\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(\alpha_3)^2}{\cos^2 \theta} - 2\Phi(\theta) = \alpha_2$$

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{(\alpha_3)^2}{\cos^2 \theta} + 2\Phi(\theta)} d\theta$$

$$S = \int \sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{(\alpha_3)^2}{\cos^2 \theta} + 2\Phi(\theta)} d\theta + \alpha_3 \varphi - \alpha_1 t.$$

(5) - полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, где α_i - произвольные постоянные.

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}; p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}; p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \beta_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3)$$

На основании условий (6) получаем общее решение уравнения Гамильтона-Якоби.

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_2 - \frac{(\alpha_3)^2}{\cos^2 \theta} + 2\Phi(\theta)}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_3$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{1}{\sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}} dr \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - \frac{(\alpha_3)^2}{\cos^2 \theta} + 2\Phi(\theta)}} d\theta - \frac{1}{2r^2} \int \frac{1}{\sqrt{2f(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}} dr \\ \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \varphi - \int \frac{\alpha_3}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \theta} + 2\Phi(\theta)}} d\theta\end{aligned}$$

Полученные уравнения разрешаем относительно произвольных постоянных α_i и β_i через обобщенные импульсы p_r, p_φ, p_θ и координаты r, φ, θ .

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - f(r) - \frac{\Phi(\theta)}{r^2} \\ \alpha_2 = P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\cos^2 \theta} - 2\Phi(\theta) \\ \alpha_3 = P_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = -t + \int \frac{1}{P_r} dr \\ \beta_2 = \frac{1}{2r^2} \int \frac{1}{P_r} dr - \frac{1}{2} \int \frac{1}{P_\theta} d\theta \\ \beta_3 = -\varphi + \int \frac{P_\varphi}{\cos^2 \theta P_\theta} d\theta \end{cases}$$

Таким образом, первая половина уравнений (1), то есть, система (3), сведена к квадратурам. Найденное решение разрешимо относительно произвольных постоянных. Поэтому можно применить следующую теорему Hagedorn'a [5,6,7] для определения составляющих базис-вектора (множителей Лагранжа).

4. Определение составляющих базис-вектора.

Пусть дана система уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\dot{\lambda}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Предположим, что для системы (7) найдено решение

$$x_i = x_i(c_1, \dots, c_n, t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

разрешимое относительно постоянных c_i :

$$c_i = c_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Тогда решение системы (8) будет определяться соотношениями

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_j}{\partial x_i} b_j, \quad (i = 1, \dots, n)$$

где c_j, b_j - произвольные постоянные.

Применим указанный метод к участкам НТ в гравитационном поле Гарфинкеля. Общее решение системы (3) содержит шесть произвольных постоянных: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, которые будут в дальнейшем соответствовать обозначениям $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ соответственно. Для определения составляющих базис-вектора $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ воспользуемся формулами (9):

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial c_i}{\partial q_k} b_i, \quad (k = 1, 2, 3),$$

где c_i, b_i – произвольные постоянные, $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ в сферических координатах.

$$\lambda_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} b_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial r} b_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial r} b_3 + \frac{\partial \beta_1}{\partial r} b_4 + \frac{\partial \beta_2}{\partial r} b_5 + \frac{\partial \beta_3}{\partial r} b_6;$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} b_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} b_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \theta} b_3 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} b_4 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} b_5 + \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta} b_6;$$

$$\lambda_3 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi} b_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi} b_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi} b_3 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \varphi} b_4 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \varphi} b_5 + \frac{\partial \beta_3}{\partial \varphi} b_6.$$

получим

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_r^2}{\partial r} - 2 \frac{p_\theta^2}{r^3} \right) - \frac{\partial f(r)}{\partial r} + 2 \frac{\Phi(\theta)}{r^3} \right) b_1 + \frac{b_4}{p_r} + b_5 \left(\frac{1}{2r^2 p_r} - \frac{1}{r^3} \int \frac{1}{p_r} dr \right);$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \left(\frac{b_1}{2 \cos^2 \theta} + \frac{b_2}{\cos^2 \theta} + b_3 \right) + b_6 \left(\int \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos^2 \theta P_\theta} d\theta - 1 \right);$$

$$\lambda_3 = \frac{b_1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial P_\theta^2}{\partial \theta} - 2 \frac{P_\varphi^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \left(\frac{\partial P_\theta^2}{\partial \theta} - 2 \frac{P_\varphi^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) b_2 - \frac{1}{2P_\theta} b_5 + \frac{p_\varphi}{\cos^2 \theta P_\theta} b_6.$$

Возникает вопрос: какая часть второй зональной гармоники не входит в потенциал Гарфинкеля. В [2] приводится значение этой части гамильтониана, которая принята за возмущающую функцию. Тогда невозмущённая часть гамильтониана позволяет найти функции $f(r)$ и $\Phi(\theta)$ для потенциала Гарфинкеля(2)

$$f(r) = \frac{\mu}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{A}{r^3}; \quad \Phi(\theta) = C \sin^2 \theta$$

где

$$A = \mu k \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right),$$

$$B = \frac{3}{2} \frac{\mu k}{a(1-e^2)} \sin^2 i,$$

$$C = -\frac{3}{2} \frac{\mu k}{a(1-e^2)},$$

$$k = \frac{1}{2} J_2 R^2 - \text{постоянные величины.}$$

Здесь J_2 - вторая зональная гармоника, μ -гравитационный параметр, R средний экваториальный радиус планеты; a, e, i - элементы невозмущённой кеплеровской орбиты в начальный момент времени.

Подставив (10) в (9), определим λ_i .

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_r^2}{\partial r} - 2 \frac{p_\theta^2}{r^3} \right) + \frac{\mu}{r^2} + \frac{B}{r^3} + \frac{A}{r^4} + 2 \frac{C \sin^2 \theta}{r^3} \right) b_1 + \frac{b_4}{p_r} + b_5 \left(\frac{1}{2r^2 p_r} - \frac{1}{r^3} \int \frac{1}{p_r} dr \right);$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \left(\frac{b_1}{2 \cos^2 \theta} + \frac{b_2}{\cos^2 \theta} + b_3 \right) + b_6 \left(\int \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos^2 \theta P_\theta} d\theta - 1 \right);$$

$$\lambda_3 = \frac{b_1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial P_\theta^2}{\partial \theta} - 2 \frac{P_\varphi^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) + \left(\frac{\partial P_\theta^2}{\partial \theta} - 2 \frac{P_\varphi^2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - 2C \sin 2\theta \right) b_2 - \frac{1}{2P_\theta} b_5 + \frac{p_\varphi}{\cos^2 \theta P_\theta} b_6.$$

Найденные λ_i представляют собой составляющие базис-вектора для движения точки на участках нулевой тяги в гравитационном поле Гарфинкеля. Эти компоненты могут быть использованы в качестве начальных условий для аналитического решения дифференциальных уравнений движения в поле Гарфинкеля на активных участках [8].

5. Заключение.

Таким образом, для вариационной задачи о движении точки (центр масс космического аппарата) в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты, представленном потенциалом Гарфинкеля, найдены составляющие базис-вектора для участков нулевой тяги. Задача интегрирования уравнений для базис-вектора заменена более простой задачей нахождения частных производных от известных функций. Результаты могут быть использованы при определении направления реактивной силы на активных участках, с которыми соединяются пассивные участки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Штерн. Введение в небесную механику. Москва. Мир, 1964
2. Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968. 352 с
3. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Москва. Мир, 1966
4. Коршунова Н.А., Тожиев Р.И. Аналитические решения для активных участков в случае гравитационного поля Гарфинкеля // Международная научно-практическая конференция “Инновации-2022”. Сборник научных статей. - Ташкент, 2022.- С. 274-275.
5. Азизов А.Г., Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета. Ташкент. ТашГУ, 1992, 84 с.
6. Azizov A.G., Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mech.- 1986.- V.38. №4.-С.297-306.
7. Hagedorn P. A short note on Hamiltonians linear in the momenta field // Celestial Mechanics. 1978, Vol.17, №.2, pp. 127-129.
8. Рузматов М.И., Коршунова Н.А. Составляющие базис-вектора на участках нулевой тяги в гравитационном поле Баррара. Международный симпозиум “Рахматулинские чтения”. Сборник научных статей- Ташкент, 2025.-С.202-203.

REZYUME

Ushbu maqolada Garfinkel tortishish maydonida nuqtaning (kosmik kemanding massa markazi) harakatini optimallashtirish muammosiga analitik yechimlarni topish muammosi ko'rib chiqiladi. Bir traektoriya segmentidan ikkinchisiga o'tish nuqtalarida asos vektor komponentlarining (reaktiv kuch komponenti) uzluksizligi tufayli faol segmentlarga ulanadigan nol turtki segmentlari uchun asos vektor komponentlarini bilish zarur. Ushbu maqolada Garfinkel tortishish maydonida nol turtki segmentlari uchun asos vektor komponentlari aniqlanadi. Nol turtki segmentlari uchun variatsion muammoning yechimi Hamilton-Jacobi tenglamasini to'liq integrallash orqali aniqlanadi.

Kalit so'zlar: Lauden variatsion masalasi, Gamilton tizimi, reaktiv kuch, Gamilton-Yakobi tenglamasi, to'liq integral.

RESUME

This article examines the problem of finding analytical solutions to the problem of optimizing the motion of a point (the center of mass of a spacecraft) in a Garfinkel gravitational field. Due to the continuity of the basis vector components (the reactive force component) at the transition points from one trajectory segment to another, it is necessary to know the basis vector components for the zero-thrust segments connecting to the active segments. This article determines the basis

vector components for zero-thrust segments in a Garfinkel gravitational field. The solution to the variational problem for zero-thrust segments is determined by completely integrating the Hamilton-Jacobi equation.

Key words: Lauden variational problem, Hamiltonian system, reactive force, Hamilton-Jacobi equation, complete integral.

УДК 519.95

ФОРМИРОВАНИЕ ПРЕЦЕДЕНТНОЙ БАЗЫ НА ОСНОВЕ КОМПАКТНОСТИ КЛАССОВ И СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Турсунмуротов Даврбек Худаёрович

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРЕЗМИ
mr.davrbek@mail.ru

Ходжаев Шукуржон Ахмедович

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
shukurxujayev1@gmail.com

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается задача оптимизации обучающей выборки на основе анализа компактности классов. Показано, что наличие шумовых и нетипичных объектов приводит к нарушению внутренней структуры данных и снижает обобщающую способность метрических алгоритмов распознавания. В качестве инструмента анализа используется мера компактности, позволяющая количественно оценить степень однородности объектов класса и выявить элементы, искажающие структуру признакового пространства. Предложенный подход основан на выявлении подмножеств объектов, ухудшающих компактность выборки, и их последующем исключении либо корректировке. Методика проверена на различных наборах данных и продемонстрировала способность повышать точность классификации без использования традиционных методов кросс-валидации. Полученные результаты подтверждают, что оптимизация обучающей выборки на основе анализа компактности является эффективным средством повышения устойчивости и качества работы моделей машинного обучения.

Ключевые слова: база прецедентов, компактность, шумовые объекты, регуляризация, метрический алгоритмы.

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты

Формирование базы прецедентов представляет собой процесс отбора, фильтрации и устранения тех данных обучающей выборки, которые могут нежелательно влиять на построение модели машинного обучения. Такая процедура включает исключение объектов по различным причинам: от наличия ошибок измерений или разметки до этических и правовых ограничений, связанных с использованием определённых признаков. В рамках формирования базы прецедентов удаляются нерелевантные, ошибочные или шумовые наблюдения, поскольку они искажают структуру данных, увеличивают число выбросов и могут приводить к некорректным решениям модели. Исключение подобных объектов способствует повышению однородности классов, уменьшению влияния аномалий и, как следствие, улучшению качества обобщения. Кроме того, устранение данных, содержащих предвзятые или дискриминирующие характеристики, позволяет снизить вероятность формирования смещённых закономерностей и делает модель более устойчивой и справедливой по отношению к различным группам объектов. Процедуры формирования и фильтрации базы прецедентов рассматриваются как важный этап повышения качества и эффективности алгоритмов машинного обучения. Основная цель таких операций заключается в усилении обобщающих свойств моделей, а также в уменьшении их комбинаторной сложности. Достигается это, как правило, путём выявления и исключения нетипичных или шумовых наблюдений и признаков на стадии подготовки обучающих данных[1]. В статье предложено изучать процесс формирования базы прецедентов для метрических методов распознавания посредством анализа компактности классов и выборки в целом. Такой подход позволяет количественно оценить степень внутренней согласованности объектов и выявить структуры, нарушаемые присутствием шумовых данных. В исследовании процедура формирования выборки включала корректировку диагностических объектов на основе клинической информации. Под корректировкой понималось

либо удаление ошибочных или сомнительных объектов, либо исправление неточностей в целевом признаке. Методика основывалась на сравнении уровня разделимости классов до и после корректировки, где использовалась функция конкурентного сходства. При этом отмечалось, что чрезмерная фильтрация шумовых объектов может привести к снижению репрезентативности данных. В статье также подчёркивается, что присутствие шумовых элементов способно существенно изменять структуру взаимосвязей в обучающей выборке при использовании метрических алгоритмов. Особое внимание уделяется тому, что шумовые объекты, согласно выбранной метрике, зачастую являются подмножеством граничных наблюдений, что делает их особенно значимыми при анализе структуры данных. Для оценки компактности были предложены следующие два показателя: Показатель, отражающий структуру взаимосвязей между объектами в интервале $(0;1]$. Допустимые значения этого параметра определяются количеством групп внутри каждого класса и их численностью. Метрика обобщающей способности алгоритмов распознавания, рассчитываемая как среднее количество объектов выборки (исключая шумовые), которые притягиваются одним эталонным объектом минимального покрытия. Данный показатель используется как альтернативный подход к кросс-валидации.

Определение объектов, обладающих шумовыми характеристиками

Шумовые объекты представляют собой элементы обучающей выборки, которые искажают типичную структуру данных вследствие наличия ошибок, аномалий или редких ситуаций, не отражающих общие закономерности. Такие объекты могут быть результатом некорректной разметки, измерительных погрешностей, выбросов или случайных факторов, не имеющих системной природы. Присутствие шумов в данных нарушает внутреннюю согласованность классов, снижает точность моделей, повышает их переобучаемость и ослабляет способность к обобщению[9]. Поэтому выявление и устранение шумовых объектов является важным этапом предварительной обработки данных и построения устойчивых алгоритмов машинного обучения. Однако в большинстве случаев шумы не поддаются непосредственному обнаружению, поскольку они могут внешне быть схожими с валидными объектами, но при этом разрушать локальные и глобальные статистические закономерности внутри классов. Эффективные методы борьбы с шумом должны учитывать не только отклонения отдельных объектов, но и структурные характеристики всего класса, такие как компактность, плотность и топология данных. Решение о включении (не включении) граничного объекта в множество шумовых принимается на основе анализа этого отношения[9]. Для анализа требуется определить пороговое значение λ и условия, на основе которых принимается решение[1].

На множестве граничных объектов $B = B(E_0, \rho)$ сформируем множество пар $BG = \{(S_i, S_j)\}, S_i \in K_t \cap B, i \geq 2, S_j \in CK_t \cap B, \rho(S_i, S_j) = \min_{S_v \in B \cap CK_t} \rho(S_i, S_v)$.

Для $(S_i, S_j) \in BG$ введём обозначения $r(S_i) = \rho(S_i, S_j), d(S_i) = \rho(S_i, S_v)$, где $S_v = \arg \min_{S_a \in E_0 \cap K_t \setminus \{S_i\}} \rho(S_j, S_a)$. Аналогично для $S_i \in CK_t \cap B$ определим

$$r(S_j) = \rho(S_k, S_j) = \min_{S_v \in B \cap K_t} \rho(S_v, S_j), \quad d(S_j) = \rho(S_j, S_\mu), \quad \text{где } S_\mu = \arg \min_{S_a \in E_0 \cap CK_t \setminus \{S_j\}} \rho(S_k, S_a).$$

Отношение

$$\frac{r(S_i)}{d(S_i)} < \lambda, 0 < \lambda < 1$$

рассматривается как необходимое условие отнесения объекта $S_i \in K_t \cap B$ к множеству шумовых. Достаточным условием является

$$\frac{r(S_i)}{d(S_i)} < \lambda \quad \text{и} \quad \frac{r(S_j)}{d(S_j)} \geq \lambda \quad (1)$$

Значение λ , в качестве параметра (коэффициента) регуляризатора, применяется для поиска экстремального значения меры компактности при фиксированных факторах. Решение об эффективности выбора факторов (мера расстояния между объектами, способ нормирования, состав набора признаков и т. д.), изменяющих структуру отношений объектов, как правило, принимается по результатам вычислительного эксперимента.

Вычисление меры компактности

Компактность в задачах распознавания образов отражает степень однородности и сгруппированности объектов одного класса в пространстве признаков. Высокая компактность означает, что объекты одного класса расположены близко друг к другу[4], что способствует более точному построению границ

между классами. Компактность служит важным индикатором качества обучающей выборки и является одним из факторов, определяющих способность модели к обобщению. Оценка компактности позволяет выявлять структурные нарушения, вызванные, в том числе, шумовыми объектами.

Рассматривается задача распознавания в стандартной постановке. Считается, что задано множество $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ объектов, разделённое на $l (l > 2)$ непересекающихся подмножеств (классов) K_1, \dots, K_l , $E_0 = \bigcup_{i=1}^l K_i$. Описание объектов производится с помощью набора из n разнотипных признаков $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$, ξ из которых измеряются в интервальных шкалах, $(n - \xi)$ – в номинальной. На множестве объектов E_0 задана метрика $\rho(x, y)$.

Обозначим через $L(E_0, \rho)$ – подмножество граничных объектов классов, определяемое на E_0 по метрике $\rho(x, y)$. Объекты $S_i, S_j \in K_i, t = 1, \dots, l$ считаются связанными между собой ($S_i \leftrightarrow S_j$), если $\{S \in L(E_0, \rho) \mid \rho(S_i, S_j) < r_i, H\rho(S_i, S_j) < r_j\} \neq \emptyset$, где $r_i (r_j)$ – расстояние до ближайшего от $S_i (S_j)$ объекта из C_K , $C_K = E_0 \setminus K_i$ по метрике $\rho(x, y)$.

Множество $G_v = \{S_{v_1}, \dots, S_{v_c}\}, c \geq 2, G_v \subset K_i, v < |K_i|$ представляет область (группу) со связанными объектами в классе K_i , если для любых $S_{v_i}, S_{v_j} \in G_v$ существует путь $S_{v_i} \leftrightarrow S_{v_k} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_{v_j}$. Объект $S_i \in K_i, t = 1, \dots, l$ принадлежит группе из одного элемента и считается несвязанным, если не существует пути $S_i \leftrightarrow S_j$ ни для одного объекта $S_i \neq S_j$ и $S_i \in K_i$. Требуется определить минимальное число непересекающихся групп из связанных и несвязанных объектов по каждому классу $K_i, t = 1, \dots, l$.

При определении минимального числа групп из связанных и несвязанных объектов классов используется $L(E_{\theta, \rho})$ – подмножество граничных объектов (оболочка) классов по заданной метрике ρ и описание объектов в новом пространстве из бинарных признаков. Для выделения оболочки классов для каждого $S_i \in K_i, t = 1, \dots, l$ строится упорядоченная по $\rho(x, y)$ последовательность

$$S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_{m-1}}, S_i = S_{i_0} \quad (2)$$

Пусть $S_{i\beta} \in CK_t$ ближайший к S_i объект из (1) не входящий в класс K_k .

Обозначим через $O(S_i)$ окрестность радиуса $r_i = \rho(S_i, S_{i\beta})$ с центром в S_i , включающую все объекты, для которых $\rho(S_i, S_{i\tau}) < r_i, \tau = 1, \dots, \beta - 1$. В $O(S_i)$ всегда существует непустое подмножество объектов [7]

$$\Delta_i = \{S_{i\alpha} \in O(S_i) \mid \rho(S_{i\beta}, S_{i\alpha}) = \min_{S_{i\tau} \in O(S_i)} \rho(S_{i\beta}, S_{i\tau})\}. \quad (3)$$

По (3) принадлежность объектов к оболочке классов определяется как

$$L(E_0, \rho) = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i.$$

Множество объектов оболочки из $K_t \cap L(E_0, \rho)$ обозначим как

$$L_t(E_0, \rho) = \{S^1, \dots, S^\pi\}, \pi \geq 1.$$

Значение $\pi = 1$ однозначно определяет вхождение всех объектов класса в одну группу. При $\pi \geq 2$ преобразуем описание каждого объекта $S_i \in K_k$ в $S_i = (y_{i1}, \dots, y_{i\pi})$, где

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \rho(S_i, S^j) < r_i, \\ 0, & \rho(S_i, S^j) \geq r_i. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть по (4) получено описание объектов класса K_k в новом (бинарном) признаковом пространстве, $\Omega = K_k, \theta$ – число непересекающихся между собой групп объектов, $S_\mu \vee S_\eta, S_\mu \wedge S_\eta$ – соответственно операции дизъюнкции и конъюнкции по бинарным признакам объектов $S_\mu, S_\eta \in K_k$. Пошаговое выполнение алгоритма разбиения объектов K_k на непересекающиеся группы G_1, \dots, G_θ такого.

- Шаг 1: $\theta = 0$;
- Шаг 2: Выделить объект $S \in \Omega, \theta = \theta + 1, Z = S, G_\theta = \emptyset$;

- **Шаг 3:** Выполнять Выбор $S \in \Omega$ и $S \wedge Z = true$, $\Omega = \Omega \setminus S$, $G_\theta = G_\theta \cup S$, $Z = Z \vee S$ пока $\{S \in \Omega \mid S \wedge Z = true\} \neq \emptyset$;
- **Шаг 4:** Если $\Omega \neq \emptyset$, то идти 2;
- **Шаг 5:** Конец.

Результаты разбиения объектов классов на непересекающиеся группы алгоритмом предлагается оценивать с помощью специальных мер компактности.

Пусть представители класса $K_i \cap (E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j)$, $i = 1, \dots, l$ разделены на минимальное число μ непересекающихся групп объектов $G_{i1}, \dots, G_{i\mu}$ по алгоритму из п. 2, $\mu = |G_{ij}|$, $j = 1, \dots, \mu$, $\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij} = m_i$. Для анализа результатов разбиения класса K_i на непересекающиеся группы с учетом их числа, представительности (по количеству объектов) и удаления шумовых объектов предлагается использовать такую структурную характеристику как оценка компактности[3]

$$\Theta_i = \frac{\sum_{j=1}^{\mu} m_{ij}^2}{m_i^2} \quad (5)$$

Очевидно, что множество допустимых значений Θ_i по (5) лежат в интервале $\left[\frac{1}{m_i}, 1\right]$. Если группа G_{i1} содержит все объекты из $K_i \cap (E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j)$, то $\Theta_i = 1$. Усредненная оценка компактности обучающей выборки в целом производится с учетом доли $\left(\frac{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|}{m}\right)$ исключенных из рассмотрения по (1) шумовых объектов как

$$R\left(E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i, \rho\right) = \frac{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|}{m} \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{|E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i|} = \frac{\sum_{i=1}^l m_i \Theta_i}{m} \quad (6)$$

Значения (5) и (6) косвенно свидетельствуют об однородности (неоднородности) структуры обучающей выборки. Чем ближе сходство групп по числу входящих в них объектов класса, тем ближе значение (5) $\rightarrow \frac{1}{m_i}$, а (6) $\rightarrow \frac{1}{m}$. При $R(E_0 \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i, \rho) = 1$ число групп объектов на $E_0 \setminus \bigcup_{j=1}^l D_j$ равно числу классов. Множество значений по (5) и (6) соответственно в $\left[\frac{1}{m_i}, 1\right]$ и $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ предлагается рассматривать в качестве меры компактности классов и выборки в целом. Значения мер компактности в указанных выше интервалах можно использовать для обнаружения скрытых закономерностей по базам данных.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу распознавания в стандартной постановке. Будем считать, что задано множество из m объектов $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$, разделённое на l непересекающихся классов K_1, \dots, K_l . Описание объектов производится с помощью n разнотипных признаков $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$, ξ из которых измеряются в интервальных шкалах, $n - \xi$ – в номинальной. На множестве объектов E_0 задана метрика $\rho(x, y)$.

Введём обозначения множеств:

$$B(E, \rho) = \left\{ S \in E \mid \rho(S_i, S) = \min_{S_j \in K_j, S_d \in CK_j} \rho(S_i, S_d) \right\} - \text{границных объектов классов;}$$

$T \subset B(E_0, \rho)$ – шумовых объектов, определяемых на E_0 по метрике $\rho(x, y)$ $E = E_0 \setminus T$.

Объекты $S_i, S_j \in K_t$, $t = 1, \dots, l$ считаются связанными между собой $S_i \leftrightarrow S_j$, если

$$\{S \in B(E, \rho) \mid \rho(S, S_i) < r_i \text{ и } \rho(S, S_j) < r_j\} \neq \emptyset \quad (7)$$

где $r_i(r_j)$ – расстояние до ближайшего от $S_i(S_j)$ объекта из дополнения

$CK_t(CK_t = E \setminus K_t)$ к K_t по метрике $\rho(x, y)$ [8].

Множество $G_{tv} = \{S_{v_1}, \dots, S_{v_c}\}, c \geq 2, G_{tv} \subset K_t, v < |K_t|$ представляет область (группу) со связанными объектами в классе K_t , если для любых $S_{v_i}, S_{v_j} \in G_{tv}$ существует путь $S_{v_i} \leftrightarrow S_{v_k} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow S_{v_j}$. Объект $S_i \in K_t, t = 1, \dots, l$ принадлежит группе из одного элемента и считается несвязанным, если не существует пути $S_i \leftrightarrow S_j$ ни для одного объекта $S_j \neq S_i$ и $S_j \in K_t$. Считается, что на множестве E определен жадный алгоритм формирования множества эталонов минимального покрытия E_{ob} и вычисления меры компактности[1]

$$\mu(E, p) = |E|/|E_{ob}| \quad (8)$$

Близость к эталону $S \in E_{ob} \cap K_t$ вычислим по локальной метрике $p_s(x, y) = a_s p(x, y)$, где a_s – параметр, определяемый по граничным объектам из $E \cap CK_t$. Мера компактности (8) рассматривается как среднее число объектов из E притягивается одним эталоном минимального покрытия [10] из E_{ob} .

Требуется определить мощность множества шумовых объектов T и его состав, при котором

$$\mu(E, p) = \max_{T \subset E_0} \mu(E_0 \setminus T, p). \quad (9)$$

Процесс формирования минимального покрытия обучающей выборки эталонами реализуется путём последовательного выполнения следующих этапов:

- выделение множества граничных объектов классов $B(E_0, \rho)$ по заданной метрике $p(x, y)$;
- поиск и удаление шумовых объектов $T \subset B(E_0, \rho)$ из множества граничных;
- разбиение объектов классов на непересекающиеся группы по отношению связности по множеству граничных на $E = E_0 \setminus T$;
- формирование минимального покрытия из эталонов по каждой группе.

Предложенная процедура определения минимального покрытия эталонами и вычисления значения меры компактности (9) служат основой для формирования многообразия баз прецедентов для реализации алгоритмов метода «ближайший сосед». Условия изменения структуры отношений между объектами выборки, часть из которых перечислена в [6], объясняют причину появления такого многообразия.

Оптимизационный подход к отбору эталонов, основанный на минимизации функционала полного скользящего контроля, был рассмотрен в исследовании. При разбиении выборки на обучающую и контрольную части предполагалось, что в обе подвыборки попадут объекты из множества эталонов. Однако проблема численного решения такой оптимизационной задачи для больших данных оставалась нерешенной.

В данной работе для уменьшения вычислительной сложности процедуры отбора эталонов используется предобработка данных. Она включает в себя разделение выборки на непересекающиеся группы внутри каждого класса. Предполагается, что с увеличением объема данных и удалением выбросов изменчивость конфигурации выборки по множеству граничных объектов классов будет уменьшаться. Эта тенденция может быть оценена по снижению разброса следующих параметров:

- числа непересекающихся групп внутри классов, определяемых на основе связности объектов через систему пересекающихся гипершаров;
- представительности эталонов минимального покрытия, вычисляемого по группам объектов классов с несферической конфигурацией;
- величины зазора (отступа) между представителями разных классов.

Выводы из анализа этих параметров востребованы при оценке обобщающей способности алгоритмов. Однако использование асимптотических методов для этого имеет в основном теоретическую ценность, поскольку они предполагают чрезмерно большие обучающие выборки, что делает их непрacticными.

Вычислительный эксперимент.

Для демонстрации влияния коэффициентов регуляризации на значение меры компактности, а также для анализа их связи с обобщающей способностью алгоритмов метода ближайшего соседа были использованы наборы данных Spambase [10]. Значения количественных признаков были приведены к диапазону $[0;1]$ с помощью дробно-линейного преобразования.

Для оценки эффективности отбора эталонных объектов в качестве прецедентов для обучения был выполнен эксперимент на выборке Spambase [10], содержащем 4204 объекта. Данные были разделены на две равные по объёму выборки с использованием чередующегося порядка индексов (чётные и нечётные) внутри каждого класса. Обе выборки – Chet и Nechet – применялись как для обучения, так и для контроля. Результаты отбора прецедентов по этим двум выборкам представлены в таблице 1. В качестве прецедентов рассматривались эталоны минимального покрытия, которые формировались с использованием локальных метрик, вычисляющих расстояния по нормализованным описаниям объектов в диапазоне $[0;1]$.

Jadval 14: Оптимальные значения коэффициентов регуляризации на данных Spambase

Метрика	Коэффициент регуляризации	Число объектов шумовых	Число эталонов (Chet, Nechet)	Компактность по (8)
Евклида	0,7	70	395 (196, 199)	10,2915
Чебышева	0,7	115	370 (233, 137)	10,7490
Чебышева/(1+Евклида)	0,6	82	498 (239, 259)	8,1157
Евклида/(1+Чебышева)	0,8	83	400 (201, 199)	10,0991

Для оценки обобщающей способности алгоритмов распознавания в качестве прецедентов были взяты эталоны минимального покрытия выборок Chet и Nechet. Точность классификации при использовании метода ближайшего соседа с евклидовой метрикой представлена в табл.2. В скобках приведены результаты для обучающих выборок без удаления шумов и отбора эталонов. Нормировка данных на контрольной выборке выполнялась на основе параметров обучающего набора.

Jadval 15: Точность распознавания по метрике Евклида

Прецеденты по выборке	Контрольная выборка	
	Chet	Nechet
Chet	–	88,20 (87,01)
Nechet	88,73 (88,63)	–

В табл.2. представлены результаты кросс-тестирования между выборками Chet и Nechet. В первой строке база из 246 эталонов (см. табл.1.), построенная на выборке Chet, использовалась для классификации 2102 объектов из Nechet. Во второй строке 223 эталона из Nechet применялись для тестирования 2102 объектов Chet.

Заключение

Проведённое исследование показало, что использование меры компактности является перспективным инструментом для анализа структуры обучающих данных и выявления шумовых объектов. Оптимизация обучающей выборки на основе компактности позволяет устранить элементы, нарушающие внутреннюю согласованность классов, тем самым повышая качество классификации и устойчивость метрических алгоритмов распознавания. Разработанная методика демонстрирует, что предварительная фильтрация выборки способна существенно улучшать обобщающую способность моделей без увеличения их сложности. Кроме того, подход обеспечивает более глубокое понимание распределения данных, что делает его полезным при формировании репрезентативных обучающих выборок. Таким образом, анализ компакт-

ности может рассматриваться как эффективный и универсальный механизм для повышения качества машинного обучения, особенно в задачах, чувствительных к структуре признакового пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатъев Н.А., Турсунмуротов Д.Х. Цензурирование обучающих выборок с использованием регуляризации отношений связности объектов классов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2024. Т. 24, №2. С. 322-329. doi: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-322-329
2. Игнатъев Н.А. Турсунмуротов Д.Х. Об регуляризаторах в метрических алгоритмах распознавания // ВЕСТНИК НУУЗ, 2023, №1. С. 254-261.
3. Игнатъев Н.А. О мере компактности объектов классов // Труды конференции “Проблемы современной топологии и её приложения” Ташкент 11-12 мая 2017 г. С. 283-285.
4. Загоруйко Н.Г. Гипотезы компактности и компактности в методах анализа данных // Сиб. журн. индустр. математики, Т.1. - №1. - 1998. - С. 1 14-126.
5. Ignatyev N.A. Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis, V. 28. - №4. - 2018. - P. 590-597.
6. Турсунмуротов Д.Х. Оценка структуры отношений объектов с учётом плотности распределения данных // “СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА” Сборник докладов республиканской научно-технической конференции Самарканд, 26-27 октября 2022 г. С 83-88.
7. Воронцов К.В. Лекции по логическим алгоритмам классификации. Учебный курс, Санк - Петербург, 2007, 53с. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/LogicAlgs.pdf>.
8. Вапник В. Н., “Полная статистическая теория обучения”, Автомат. и телемех., 2019, №11, 24-58; V. N. Vapnik, “Complete statistical theory of learning”, Autom. Remote Control, 80:11 (2019), 1949-1975.
9. Игнатъев Н.А. Интеллектуальный анализ данных на базе непара-метрических методов классификации и разделения выборок объектов поверхностями: монография - Ташкент: Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 2010. - 140 с.
10. <https://archive.ics.uci.edu/dataset/94/spambase>

REZYUME

Ushnu maqolada sinflarning kompaktligini tahlil qilish asosida o'quv tanlovini optimallashtirish masalasi ko'rib chiqiladi. Shuni ko'rsatadiki, shovqinli va noodatiy obyektlarning mavjudligi ma'lumotlarning ichki tuzilmasini buzadi hamda metrikaning asosidagi tanib olish algoritmlarining umumlashtirish qobiliyatini pasaytiradi. Tahlil vositasi sifatida sinf obyektlarining bir xilligini miqdoriy baholash va belgi fazosi strukturasi buzilishini keltirib chiqaruvchi elementlarni aniqlash imkonini beruvchi kompaktnlik o'lchovi qo'llaniladi.

Taklif etilgan yondashuv tanlov kompaktnligini yomonlashtiruvchi obyektlar to'plamini aniqlash va ularni tanlovdan chiqarish yoki tuzatishga asoslanadi. Metodika turli ma'lumotlar to'plamlarida sinovdan o'tkazildi va an'anaviy kross-valitatsiya usullaridan foydalanmasdan turib ham klassifikatsiya aniqligini oshira olishi namoyish qilindi. Olingan natijalar shuni tasdiqlaydiki, kompaktnlik tahliliga asoslangan o'quv tanlovini optimallashtirish mashinaviy o'qitish modellari barqarorligi va ishlash sifatini oshirishning samarali vositasidir.

Kalit so'zlar: pretsedentlar bazasi, kompaktnlik, shovqin obyektlar, regulyarizatsiya, metrik algoritmlar.

RESUME

The article addresses the problem of optimizing the training sample based on the analysis of class compactness. It is shown that the presence of noisy and atypical objects disrupts the internal data

structure and reduces the generalization ability of metric recognition algorithms. A compactness measure is used as an analysis tool, allowing for a quantitative assessment of the degree of homogeneity of class objects and identification of elements that distort the structure of the feature space.

The proposed approach is based on identifying subsets of objects that degrade sample compactness and their subsequent exclusion or correction. The methodology has been tested on various datasets and has demonstrated the ability to improve classification accuracy without using traditional cross-validation methods. The obtained results confirm that optimizing the training sample based on compactness analysis is an effective means of enhancing the stability and quality of machine learning models.

Key words: case database, compactness, noisy objects, regularization, metric algorithms.

УДК 517.55

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОГО ГЛИНСТОГО СЛАНЦА**Хайдаров Илхом Кудратович**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ НИЗАМИ, ТАШКЕНТ
i.khaydarov@npuu.uz**РЕЗЮМЕ**

Тензор деформации ϵ в пористой среды является функцией напряжения σ и порового давления p . Дополнительные осмотические эффекты присутствуют в некоторых породах, таких как сланцы. Показано, что эти эффекты в свою очередь модифицирует термодинамику системы. А именно выражение внутренней энергии появляется дополнительное слагаемое, обусловленное химическими потенциалами μ^r из всех химических видов в поровой жидкости. Вследствие этого в соотношениях деформации - напряжение появляется слагаемое обусловленные химическими потенциалами.

Ключевые слова: пористая среда, насыщающая жидкость, упругие параметры, тензор напряжений, парциальная плотность, закон Дарси, химический потенциал.

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты

Дисперсное состояние является основным состоянием матери, так как большая часть вещества во Вселенной находится в виде пыли. В земных условиях человеку приходится сталкиваться с большим разнообразием дисперсных (аэрозольных) систем – атмосферные аэрозоли (облака, туманы), от которых зависит погода и климат на Земле, аэрозоли в различных сферах производства (порошковая металлургия, угольная промышленность, технология лакокрасочного производства и т.д.), а также бытовые аэрозоли, образующиеся при распыливании различных пестицидов, освежителей воздуха, парфюмерных жидкостей и т.д.

Многофазные (в простейшем случае двухфазные) течения играют важную роль в ряде технологии и в рабочих процессах энергетических и двигательных установок. В качестве примеров можно привести нанесение функциональных покрытий на конструкционные материалы, процессы барботаж, флотации, седиментации, получение порошков металлов распыливание и движение капель горючего в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей, движение частиц конденсированной фазы в сопловых блоках твердотопливных ракетных двигателей, процессы сжигания распыленного твердого топлива в котельных установках и т.д.

Многофазные течения подчиняются основным законам сохранения гидрогазодинамики. Однако при этом уравнения имеют более сложную структуру, чем в случае однофазных течений. В многофазных системах обязательно присутствуют поверхности раздела фаз, на которых свойства сплошной среды изменяются скачкообразно. Это принципиально отличает многофазные системы от однофазных (в том числе и многокомпонентных), где таких скачков нет [1].

Глина является одним из наиболее распространенных типов горных пород, слагающих до 11% всего объема земной коры. С ними часто приходится иметь дело при возведении фундаментов зданий и строительстве различных инженерных сооружений. Они повсеместно используются как сырье для производства керамики, кирпича, цемента, а также в качестве наполнителя при изготовлении резины, бумаги, буровых растворов и т.д. Глины обладают высокой адсорбционной способностью, и их успешно применяют для очистки масел, красок, вина, отбеливания тканей, а также как естественные экологические барьеры для борьбы с распространением техногенных загрязнений [2]. В частности, среди магматических месторождений имеются важные классы, образование которых связано с проявлением в силикатных расплавах

при определенных условиях явления несмесимости, хотя в последнее время основное внимание в исследовании динамики формирования крупных месторождений магматических сульфидных руд уделяется расслоенным базитовым плутонам [4].

1. Термодинамика двухфазной среды с поверхностью – активным веществом.

Рассмотрим двухфазную среду с термодинамическим равновесием в объеме V , которая является жидкостью с каплями в ней, и эти капли могут быть, например, маслом. Обозначаем водную массу в пределах указанного объема как M_1 , масляную массу как M_2 и массу поверхностно - активного вещества как M_c . Первый закон термодинамики, приведенный ниже представляет собой гидродинамической системы [5], анализируемой здесь:

$$d\tilde{E}_0 = Td\tilde{S} - pdV + \mu_1dM_1 + \mu_2dM_2 + \mu_c dM_c + \tilde{\sigma}d\tilde{\Sigma}. \quad (1)$$

Здесь \tilde{E}_0 , \tilde{S} - внутренняя энергия и энтропия системы в объеме V ; T - температура; p - давление; $\tilde{\sigma}$ - поверхностное натяжение на границе раздела между водой и маслом; $\tilde{\Sigma} = \zeta J$ - общая площадь поверхности границы раздела между водными и масляными каплями; J - количество капель в объеме; μ_1, μ_2, μ_c химические потенциалы компоненты 1, 2 и поверхностно - активного вещества. Падением давления в "жидкостных подсистемах" можно пренебречь в дальнейших рассуждениях. Уравнением (1) вводится химические потенциалы. Для гидродинамического описания нам необходимо ввести физические плотности:

$$\left(\tilde{E}_0, \tilde{S}, M_1, M_2, M_c, \tilde{\Sigma} \right) = (E_0, S, \rho_1, \rho_2, \rho_c, \zeta J) V. \quad (2)$$

Подставляя соотношения из (2) в (1), приходим к первому принципу термодинамики для единицы объем среды:

$$dE_0 = TdS - pdV + \mu_1d\rho_1 + \mu_2d\rho_2 + \mu_c d\rho_c + \zeta\tilde{\sigma}dJ. \quad (3)$$

Давление можно определить через термодинамическую формулу [7]:

$$p = -E_0 + TS + \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \mu_c\rho_c + \zeta\tilde{\sigma}J. \quad (4)$$

Введем плотность среды, содержащей воду, масло и поверхностно - активное вещество:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_c. \quad (5)$$

В терминах новых переменных, формула (3) принимаем следующий вид:

$$dE_0 = TdS + \mu_1d\rho + (\mu_2 - \mu_1)d\rho_2 + (\mu_c - \mu_1)d\rho_c + \zeta\tilde{\sigma}dJ. \quad (6)$$

Поскольку выполняется соотношение $\rho_2 = M/V = mN/V = mJ$, мы приходим к локальной форме первого принцип термодинамики четырех – параметрической термодинамической системы

$$dE_0 = TdS + \mu_1d\rho + \zeta\tilde{\sigma}dJ + (\mu_c - \mu_1)\rho_c = TdS + \mu_1d\rho + \frac{\zeta\tilde{\sigma}}{m}d\rho_2 + (\mu_c - \mu_1)\rho_c. \quad (7)$$

$$\vec{\sigma} = \tilde{\sigma} + \frac{m}{\zeta}(\mu_2 - \mu_1), \quad (8)$$

$$p = -E_0 + TS + \mu_1\rho + (\mu_c - \mu_1)\rho_c + \zeta\tilde{\sigma}J, \quad (9)$$

$$dp = SdT + \rho d\mu_1 + \rho_c d(\mu_c - \mu_1) + \zeta J d\tilde{\sigma}. \quad (10)$$

здесь m – масса капли, $\mu_2 \neq \mu_1$.

Формула (7) описывает локальное термодинамическое равновесие. Для относительного взаимного движения двух компонентов, следует обобщить теорию [9] для случая без локального равновесия. Разность скоростей $w = u - v$ континуума воды – масла можно рассматривать как уменьшение степени свободы [10]:

$$\begin{aligned} dE_0 &= TdS + \mu_1d\rho + \zeta\tilde{\sigma}dJ + (\mu_c - \mu_1)d + (u - v)dj_0 = \\ &= TdS + \mu_1d\rho + \frac{\zeta\tilde{\sigma}}{m}d\rho_2 + (\mu_c - \mu_1)d\rho_c + (u - v)dj_0, \end{aligned}$$

$$p = -E_0 + TS + \mu_1 \rho + (\mu_c - \mu_1) \rho_c + \zeta \tilde{\sigma} J + (u - v) j_0,$$

$$dp = SdT + \rho d\mu_1 + \rho_c d(\mu_c - \mu_1) + \zeta J d\tilde{\sigma} + j_0 d(u - v).$$

Здесь j_0 – плотность относительного импульса; u – скорость континуума капли; v – скорость континуума воды. Кинетическое слагаемое для двухскоростной среды был введен в соответствии с [7].

2. Соотношения деформации – напряжений с учетом химических потенциалов.

Пусть f свободная энергия Гельмгольца пористой системы (т.е. скелет + поровой жидкости) температуры T и S энтропии отнесенную на единицу объема пористого тела. Имеем

$$df = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \sum_{r=1}^R \mu^r dm^r - SdT.$$

Здесь растворитель (обычно вода) и $R - 1$ других видов в поровой жидкости. Масса m^r каждого вида в единице объема пористого материала измеряется в молях.

Химические потенциалы компонентов в растворе запишем в виде [11]

$$\mu^r = \mu_0^r + RT \ln x^r \gamma^r = \mu_0^r + RT \ln a^r,$$

где μ_0^r является химический потенциал вида r в равновесном состоянии, x^r – частичное молярная доля видов r , γ^r является коэффициент активности и $a^r = x^r \gamma^r$ является активность r -го вида. R – газовая постоянная. В идеальном растворе $\gamma^r = 1$. Химический потенциал μ_0^r является функцией давления и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \mu_0^r}{\partial p} = v^r = \frac{1}{\rho^r},$$

где v^r – объем моля вещества.

Далее пренебрегаем влиянием температуры. Обычно в лабораторных условиях это выполняется. Определим свободную энергию Гельмгольца f_0 связанную с твердой частицей в виде

$$df_0 = d(f - \mu^r m^r) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \sum_{r=1}^R m^r d\mu^r.$$

Так как df_0 является полным дифференциалом. Принимая ε_{ij} и μ^r в качестве независимых переменных состояния, получим

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \mu^r} = -\frac{\partial m^r}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial m^r}{\partial \mu^s} = \frac{\partial m^s}{\partial \mu^r}. \quad (12)$$

Таким образом, в этих переменных соотношения деформация – напряжений имеет вид

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \sum_r D_{ij}^r d\mu^r \quad (13)$$

$$dm^r = D_{ij}^r d\varepsilon_{ij} + \sum_s A^{rs} d\mu^s \quad (14)$$

где мы использовали (11), чтобы определить перекрестные коэффициенты D_{ij}^r в (13) и (14), где $A^{rs} = A^{sr}$, в силу (12). Кроме того, можем рассмотреть свободную энергию Гиббса

$$d\left(f - \sum_r \mu^r m^r - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}\right) = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \sum_r m^r d\mu^r.$$

Снова в силу полного дифференциала, и принимая σ_{ij} и μ^r , как переменных состояния, получим

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mu^r} = \frac{\partial m^r}{\partial \sigma_{ij}} \quad (15)$$

и соотношения (12) имеет место, как и раньше. Следовательно

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}d\sigma_{kl} + \sum_r Q_{ij}^r d\mu^r \quad (16)$$

$$dm^r = Q_{ij}^r d\sigma_{ij} + \sum_s B^{rs} d\mu^s \quad (17)$$

где мы использовали (15), чтобы определить перекрестные коэффициенты Q_{ij}^r в (16) и (17), и где $B^{rs} = B^{sr}$, в силу (13).

Далее будем использовать напряжение σ_{ij} и химические потенциалы μ^r в качестве независимых переменных состояния. При этом входящие в эти соотношения коэффициенты S_{ijkl} , Q_{ij}^r , и B^{sr} определяются из экспериментов. Эксперименты по уплотнению глины в контакте с большим резервуаром были выполнены в работах [12,13]. В каждом эксперименте состав пластового флюида поддерживался постоянным, а приложенное напряжение варьировались: результаты дают информацию о коэффициентах S_{ijkl} . Химический состав пластового флюида варьировался в пределах одного эксперимента либо изменением раствора $CaCl_2$ на раствор $NaCl$, либо путем изменения концентрации соли. Наблюдение степени набухания глин в зависимости от концентрации соли могут также быть выполнены на микроскопическом уровне, с использованием рентгеновской дифракции для измерения расстояния между частицами глины (см., например, [14, 15]). Таким образом, эти информации позволяют определить перекрестные коэффициенты Q_{ij}^r .

3. Однокомпонентная поровая жидкость

В однокомпонентной поровой жидкости, $a^r = x^r = \gamma^r = 1$, и, следовательно, согласно формуле $\mu^1 = dp/d\rho^1$. Отклик сланца будет зависеть только от порового давления жидкости в резервуаре и приложенного напряжения. Если система является изотропным, соотношения (16) и (17) упрощаются и принимают вид

$$d\varepsilon_{ij} = S_1 d\sigma_{ij} + S_2 \delta_{ij} d\sigma_{kk} + \delta_{ij} \sum_r Q^r d\mu^r \quad (18)$$

$$dm^r = Q^r d\sigma_{kk} + \sum_s B^{rs} d\mu^s \quad (19)$$

и мы видим, что для моделирования необходимы четыре материальных коэффициента. В изотропной пористой среде, соотношения (18) и (19) можно записать в виде [16]

$$2\mu\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{v}{v+1} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3(v_u - v)}{B(v+1)(v_u+1)} \sigma_{kk} p \delta_{ij},$$

$$m - m_0 = \frac{3\rho_0(v_u - v)}{2\mu B(v+1)(v_u+1)} \left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B} p \right).$$

Здесь были выбраны четыре материальных коэффициента: модуль сдвига μ , насыщенные и ненасыщенные коэффициенты Пуассона v и v_u , и параметр Скемптона B , который связывает ненасыщенный отклик порового давления и приложенные напряжения.

4. Уравнения движения

Если отклонения от термодинамического равновесия невелики, то массовый поток q^r r -го вида может быть представлено в виде

$$q_i^r = - \sum_s L_{ij}^{rs} \nabla_j \mu^s,$$

где $L_{ij}^{rs} = L_{ij}^{sr}$ согласно принципу Онсагера. Так как мы рассматриваем однокомпонентные поровые жидкости, насыщаемая пористая среда является изотропной и для таких сред в гидравлическом случае справедлив закон Дарси [9, 17]:

$$q^1 = - \frac{1}{\chi \rho \rho^1} \nabla \rho,$$

где ρ^1 - парциальная плотность пористой жидкости (воды), ρ - полная плотность континуума, χ - коэффициент межфазного трения.

Закон сохранения массы для каждого вида имеет место

$$\frac{\partial m^r}{\partial t} + \text{div} q^r = 0,$$

и следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(Q_{ij}^r d\sigma_{ij} + \sum_s B^{rs} d\mu^s \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_s L_{ij}^{rs} \nabla_j \mu^s \right).$$

Электронеутральность подразумевает, чтобы не должно быть никаких наращиваний изменения в любой точки. Если z^r - валентность r - го вида, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_s q_i^r z^r \right) = 0.$$

Потенциалы течений будут созданы для того, чтобы сохранить электронеутральность. Удобно ввести потенциалы течения Ψ в химические потенциалы r - го вида следующим образом $\mu^r = \hat{\mu}^r + z^r F \Psi$, где $\hat{\mu}^r$ -химический потенциал (r - го вида), соответствующий локальной концентрации ионов, воды и глины. Ионные потоки принимают вид

$$q_i^r = - \sum_s L_{ij}^{rs} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\mu}^s + z^s F \Psi),$$

и потенциал течения Ψ является решением уравнения Пуассона следующего вида

$$\sum_r z^r \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_s L_{ij}^{rs} \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\mu}^s + z^s F \Psi) \right] = 0.$$

с нулевым граничным условием Дирихле для контакта с высокой проводимостью жидкости или пористой породы.

Если заданы потоки, тогда выполняется условия непротекания и непроводящей границы. Если ион адсорбируется на стенках пор, он будет путешествовать только медленно, через скалы, и соответствующие коэффициенты переноса L_{ij}^{rs} будут малы. Если химические эффекты пренебрежимо малы (например, если пористость в пределах сланца является большим, из-за оттока), то будет доминировать конвективное течение, с дополнительной диффузией ионов по отношению к объемной жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-31-00120).

ЛИТЕРАТУРА

1. Архив В.А., Усанина А.С. Движение частиц дисперсной фазы в несущей среде: учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. – 252 с.
2. Соколов В.Н. Глинистые породы и их свойства // Соросовский образовательный журнал, 2000, т. 6, No. 9, с.59-65.
3. Бэрнэм У.К. Значение летучих компонент // Эволюция изверженных пород. М., 1983, с. 425-467.
4. Доровский В.Н., Аверкин Ю.А. Гидродинамика трехфазной объемной кристаллизации многокомпонентных сред. Новосибирск, 1989, 26 с. (Препринт / ИГиГ СО АН СССР; No.11).
5. Dorovsky V., Perepechko Yu., Sorokin K. Two – Velocity Flow Containing Surfactant // J. Engineering Thermophysics, 2017, Vol. 26, No. 2, pp. 160-182.
6. Landau, L.D. and Lifschitz, E.M., Statistical Physics, vol. 5, Butterworth-Heinemann, 1980.
7. Landau, L.D. and Lifschitz, E.M., Fluid Mechanics, vol. 6, Butterworth-Heinemann, 1987.
8. Dorovsky, V.N., The Hydrodynamics of Particles Suspended in a Melt with the Self-Consistent Concentration Field of an Admixture, I: Comp.Math. Appl., 1998, vol. 35, no. 11, pp. 27-37.

9. Blokhin, A.M. and Dorovsky, V.N., *Mathematical Modeling in the Theory of Multivelocity Continuum*, Nova Sci., 1995.
10. Леонтович М.А. – Введение в термодинамику. Статистическая физика. М., Наука, 1983, 416 с.
11. Sherwood J.D. Biot poroelasticity of a chemically active shale // *Proc. R. Soc. Lond.A*, 1993, v. 440, pp. 365-377.
12. Mesri G., Olson R.E. Consolidation characteristics of Montmorillonite//, 1971, v. 21, pp.341-352.
13. Denis J.H. Compaction and swelling of Ca-smectite in water and in solutions: water activity measurements and matrix resistance to compaction // *Clays Clay Miner.*, 1991, v. 39, pp. 35-42.
14. Slade P.G., Quirck J.P., Norrish K. Crystalline swelling of smectite samples in concentrated NaCl solutions in relation to layer charge // *Clays Clay Miner.*, 1991, v. 39, pp. 234-238.
15. Denis J.H., Keall M.J., Hall P.L., Meeten G.H. Influence of Potassium concentration on the swelling and compaction of mixed (Na, K) ion-exchanged montmorillonite // *Clay Miner.*, 1991, v. 26, pp. 255-268.
16. Имомназаров Х.Х. Аналог формул К. Терцаги и А. Скемптона для пористых сред, описываемыми тремя упругими параметрами // *Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2016. XI Междунар. науч. конгр., апреля 2016. Т.1, с. 178-182.*
17. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально – краевые задачи механики двухскоростных сред, *Изд-во НУУЗ им. Мирзо Улугбека*, 2012, 212с.

REZYUME

G'ovakli muhitdagi ε deformatsiya tenzori σ kuchlanish va p g'ovak bosimining funksiyasidir. Ba'zi tog' jinslarida, masalan, slanetslarda qo'shimcha osmotik effektlar mavjud. Bu effektlar, o'z navbatida tizimning termodinamikasini o'zgartirishi ko'rsatilgan. Xususan, ichki energiya ifodasi g'ovak suyuqligidagi barcha kimyoviy turlarning μ^r kimyoviy potentsiallari tufayli qo'shimcha had hosil qiladi. Natijada, deformatsiya-kuchlanish munosabatlari kimyoviy potentsiallar tufayli hadni o'z ichiga oladi.

Kalit so'zlar: g'ovakli muhit, to'yingan suyuqlik, elastik parametrlar, kuchlanish tenzori, qisman zichlik, Darsi qonuni, kimyoviy potentsial.

RESUME

The strain tensor ε in a porous medium is a function of stress σ and pore pressure p . Additional osmotic effects are present in some rocks, such as shales. It is shown that these effects, in turn, modify the thermodynamics of the system. Specifically, the expression for internal energy adds an additional term due to the chemical potentials μ^r of all chemical species in the pore fluid. Consequently, the strain-stress relationships include a term due to the chemical potentials.

Key words: Porous medium, saturating fluid, elastic parameters, stress tensor, partial density, Darcy's law, chemical potential.

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ КОНВЕКЦИЕЙ-ДИФфуЗИЕЙ
В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ****Хайиткулов Бобомурод Хайитович**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА, ТАШКЕНТ
b.hayitqulov@mail.ru**РЕЗЮМЕ**

Данная работа посвящена численному решению нестационарной задачи оптимального размещения источников тепла минимальной мощности. Постановка задачи требует одновременного выполнения двух условий. Первое условие - обеспечить нахождение температуры в пределах минимальных и максимальных температур за счет оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. Второе условие заключается в том, чтобы суммарная мощность источников тепла, используемых для обогрева, была минимальной. Эта задача изучалась в стационарных условиях в работах других учёных. Однако в нестационарном случае задача не рассматривалась. Поскольку найти непрерывное решение краевой задачи сложно, то ищем численное решение задачи. Трудно найти интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Найдено численное значение функции Грина в виде матрицы. Предложен новый алгоритм численного решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными параболического типа. Предложена новая методика численного решения. Построена математическая и численная модель процессов, описываемых уравнением конвекции-диффузии, заданным для первой краевой задачи. Краевая задача изучается для двумерного случая. Для численного решения задачи использовалась неявная конечно-разностная схема. По этой схеме была создана система разностных уравнений. Сформированная система разностных уравнений приведена к задаче линейного программирования. Задача линейного программирования решается с помощью М-метода. При каждом значении времени решается задача линейного программирования. Предложен новый подход к численному решению задач. Приведена общая блок-схема алгоритма решения нестационарной задачи оптимального управления размещением источников тепла с минимальной мощностью. Разработан алгоритм и программное обеспечение для численного решения задачи. Приведено краткое описание программного обеспечения. На конкретных примерах показано, что численное решение краевой задачи находится в заданных пределах, сумма оптимально размещенных источников тепла с минимальной мощностью дает минимум функционалу. Визуализированы результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: нестационарные задачи, оптимальное размещение, источники тепла, уравнения конвекции-диффузии, М-метод.

Введение. Одним из самых распространенных объектов в различных сферах деятельности человека является система источников тепла, тепловой баланс в отапливаемых помещениях. Математическое моделирование таких систем ставит задачу об оптимальном размещении источников тепла в отапливаемых помещениях, что связано с ресурсосберегающими инженерными технологиями. Задача оптимального размещения источников тепла отапливаемых площадей всегда была актуальной при проектных работах в строительстве, теплицах и других технических и технологических сферах. Задачи этого типа были изучены для стационарного случая. Однако задача оптимального размещения источников тепла с минимальной мощностью для нестационарного случая не изучена.

В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скалярные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены способы оценки значений функционала на множестве возможных мест

размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ. В работе [2] рассмотрены задачи оптимального нагрева помещения на основе принципа максимума Понтрягина. В работе [3] рассмотрена задача энергоэффективного теплоснабжения здания в системе центрального отопления. В работе [4] изучена дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии, получен аналог принцип максимума, позволяющий определить моменты включения и выключения источника максимальной мощности. В работе [5] изучена задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением теплопроводности. Управляющий параметр задан в граничном условии и достиг минимума функционала, задаваемого интегральным квадратичным выражением. Показан метод нахождения допустимого управления, дающего минимум функционалу.

В работах [6-8] разработаны метод и алгоритм решения нестационарной задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на простых геометрических областях так, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла обеспечивали заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре, заполненной однородной или неоднородной средой. В работе [9] рассмотрена краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела.

В работе [10] численно решается уравнение конвекции-диффузии в двумерной геометрии для моделирования теплопередачи. Проведено тестирование и получены результаты для случаев граничных условий трех типов. Отметим, также, что в работах [11-13] рассмотрены численные схемы с явным конвективным и неявным диффузионным переносом.

В данной работе рассмотрена задача управления конвекцией-диффузией на основе оптимизации линейного целевого функционала с учетом ограничений, которая решается на основе аппроксимации и сведения к задаче линейного программирования. В работе предлагаются метод и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах, путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Для проведения вычислительных экспериментов было разработано программное обеспечение.

Постановка задачи и ее конечно-разностная аппроксимация. В области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти функцию $f(x, y, t) \geq 0$ такую, что для любого $t \in [0, T]$ линейный функционал

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t) dy dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

достигал минимума и удовлетворялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \chi(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - v(x, y, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \\ a < x < b, \quad c < y < d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \\ u(a, y, t) &= \mu_1(y, t), \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t), \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, c, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, d, t) = \mu_4(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < t \leq T, \\ m(x, y, t) &\leq u(x, y, t) \leq M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t ; $\chi(x, y, t) > 0$ – коэффициент диффузии (температуропроводности); $v(x, y, t)$ – скорость конвекции по соответствующим направлениям; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условия сопряжения $\mu_1(c, t) = \mu_3(a, t)$, $\mu_1(d, t) = \mu_4(a, t)$, $\mu_2(c, t) = \mu_3(b, t)$, $\mu_2(d, t) = \mu_4(b, t)$. Функции $m(x, y, t)$ и $M(x, y, t)$ – имеют смысл функций минимальной и максимальной температуры в области D соответственно. Мощность объемных источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Пусть $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \chi(x, y, t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v(x, y, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$. Оператор L , определенный в $L_2(D)$, имеет обратный L^{-1} . Здесь L^{-1} – интегральный оператор с непрерывным ядром (функция Грина). Используя его, можно записать задачу (1)-(3) в следующем виде:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(x, y, t) \geq 0, \quad m(x, y, t) \leq (L^{-1}f)(x, y, t) \leq M(x, y, t). \quad (4)$$

Поскольку трудно найти непрерывное решение задачи (1)-(4), ищем численное решение задачи. В этом случае, используя неявную схему, заменяем задачу (2) конечно-разностным уравнением.

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\overline{\omega}_{h_1 h_2}^\tau = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2} \times \overline{\omega}^\tau = \{(x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau), i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, k = \overline{0, N_3}\}$ с шагами $h_1 = (b - a)/N_1, h_2 = (d - c)/N_2, \tau = T/N_3$.

Неявная разностная схема для условия (2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \chi_{ij}^{k+1} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) - \\ & v_{ij}^{k+1} \left(\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{2h_1} + \frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{2h_2} \right) + f_{ij}^{k+1}, \\ & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ & u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \\ & u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{N_1j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, N_2, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1, \\ & u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}), \quad u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad k = 0, 1, \dots, N_3 - 1. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Здесь $\chi_{ij}^{k+1} = \chi(x_i, y_j, t_{k+1}), v_{ij}^{k+1} = v(x_i, y_j, t_{k+1}), f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1})$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{2\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} \right), \quad X^+ = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_1} \right), \quad X^- = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_1} \right), \\ Y^+ &= \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} + \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_2} \right), \quad Y^- = \left(-\frac{\chi_{ij}^{k+1}}{h_2^2} - \frac{v_{ij}^{k+1}}{2h_2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{XY} Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Y^- & \overline{XY} Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} Y^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & \overline{XY} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$G = A^{-1}.$$

Аппроксимируем задачу (1)-(5) в виде задачи линейного программирования. Разделим область D по x, y, t соответственно на N_1, N_2, N_3 равных частей: $D = \bigcup_{k=1}^{N_3} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} D_{ij}^k$, где $D_{ij}^k = \{(x, y, t), x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, t_{k-1} \leq t \leq t_k\}, i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = \overline{1, N_3}$. В пространстве $L_2(D)$ функции $f_{ij}^k = f(x_i, y_j, t_k), (x, y, t) \in D_{ij}^k (i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3})$ определяются как кусочно-постоянные функции. Отсюда получим $f(x, y, t) \approx \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij}^k$.

Пусть $g_{pq} = G, m_{ij}^k = m(x_i, y_j, t_k), M_{ij}^k = M(x_i, y_j, t_k), \tilde{f}_q^k = f_{ij}^k, N = (N_1 - 1)(N_2 - 1), (p = q, q = (i - 1)(N_2 - 1) + j), p = \overline{1, N}, q = \overline{1, N}, i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = \overline{1, N_3}$. Подставим выражение $f(x, y, t)$ в (1) и заменим неравенство (4) на сеточные функции.

После этого получим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
 J_k\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\text{mes}D_{ij}^k) f_{ij}^k \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \\
 m_{ij}^k &\leq \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k \leq M_{ij}^k, \quad p = \overline{1, N}, \\
 i &= \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3}, \\
 \tilde{f}_q^k &\geq 0, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N_3.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Задача (6) решается М-методом (методом искусственного базиса) [14, 15]. Численное решение задачи (2) находится с помощью $u_{ij}^k = \sum_{q=1}^N g_{pq} \tilde{f}_q^k$. Найденная \tilde{f}_q^k является функцией, дающей минимум функционалу (1).

Результаты вычислительных экспериментов. Для приближенного решения задачи (1)-(6) разработано программное обеспечение на языке C#. Для представления результатов разработаны графические модули. На блок-схеме (рис. 1) приведен общий алгоритм решения задачи с использованием численного метода для вычисления J_{\min} .

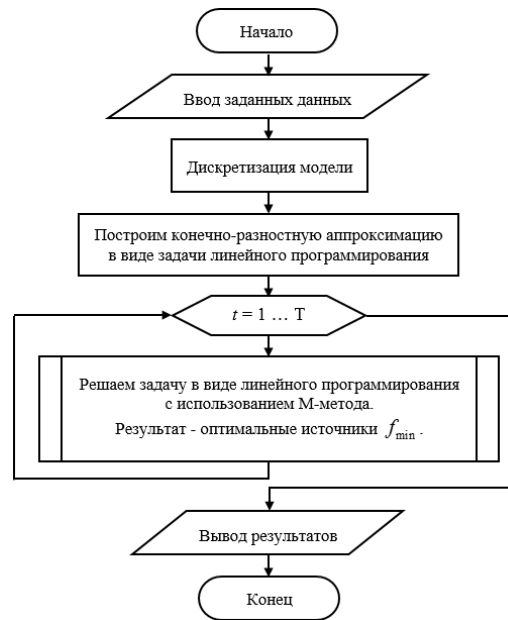
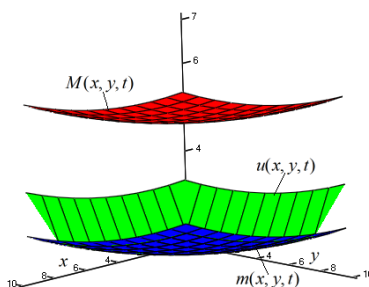
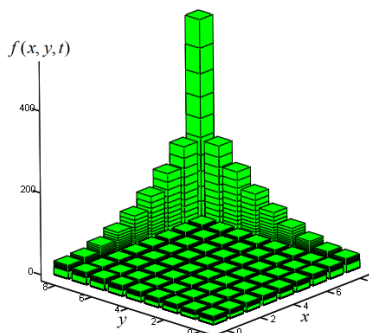


Рис. 20: Блок-схема общего алгоритма решения задачи

Пример. Требуется найти оптимальное размещение источников тепла с минимальной мощностью в прямоугольнике. В качестве расчётной области используется квадрат $x, y \in [0, 1]$ с функциями коэффициентом диффузии $\chi(x, y, t) = x^2 y^2 t$ м²/с и компонентами скорости $v(x, y, t) = xyt$ м/с. Начальное и граничные условия определяются функциями: $u_0(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ м/с, $\mu_1(y, t) = 2 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_2(y, t) = 3 + y^2 + t^2$ м/с, $\mu_3(x, t) = 2 + x^2 + t^2$ м/с, $\mu_4(x, t) = 3 + x^2 + t^2$ м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями: $m(x, y, t) = 1 + x^2 + y^2 + t^2$ К, $M(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$ К, а окончание времени $T = 1$. Расчётная сетка с числом источников $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times N_3 = 9 \times 9 \times 10$. На рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (6). Минимум при численном решении значение функционала равен $J_{\min} = 23.74$ К·м/с. Представлены результаты с минимальным (границы с синим цветом, ниже), максимальным (границы с красным цветом, выше) и приближенным (зеленым цветом, посередине) значениями температуры. На рис. 3 показано оптимальное расположение источников тепла с минимальной мощностью.

Рис. 21: График решения задачи (6) при $t = T$ Рис. 22: Оптимальное размещение источников тепла $f(x, y, t)$

Как видно из рисунка 2, решение краевой задачи лежит в пределе минимальных и максимальных температур, т.е. удовлетворяет неравенству (3). Видно, что значение $u(x, y, t)$ практически равно минимальной температуре. Это означает, что функционал $J_k\{f\}$ достигает минимума.

Заключение Предложены методика и алгоритм решения нестационарной задачи поддержания температуры внутри области в заданных пределах путем оптимального размещения источников тепла в прямоугольнике. Задача решена на основе численного моделирования процесса конвекции-диффузии и последовательного решения задач линейного программирования. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают достижение функционалом минимума и решение основной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов А. В., Кулибанов В. Н. Задача оптимального выбора координат доразбуривания добывающих скважин на нефтяных месторождениях. Автоматика и телемеханика, 2002, № 11. С. 3–12.
2. Мирская С. Ю., Сидельников В. И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления. Техничко-технологические проблемы сервиса, 2014, № 4(30). С. 75–78.
3. Сабденов К. О., Байтасов Т. М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления. Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов, 2015, Т. 326, № 8. С. 53–60.
4. Исламов Г.Г., Коган Ю. В. Дифференциально-разностная задача управления процессом диффузии. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2008, вып. 1. С. 121–126.
5. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управлении процессом теплопроводности квадратичным функционалом качества. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, Т. 57, № 12. С. 2053–2064.

6. Хайиткулов Б. Х. Конечно-разностный метод решения нестационарных задач управления конвекцией-диффузией. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2021, № 57. С. 45–52.
7. Khaitkulov B. Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body. Solid State Technology, 2020, vol. 63, no 17. P. 583–592.
8. Хайиткулов Б. Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3. С. 85–98.
9. Тухтасинов М. Т., Абдуолимова Г. М., Хайиткулов Б. Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле. Бюллетень Института математики, 2019, № 1. С. 1–10.
10. Лебо И. Г., Симаков А. И. Решение уравнения конвекция-диффузия для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. Вестник МГТУ МИРЭА, 2014, № 3(4). С. 195–205.
11. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для нестационарных задач конвекции-диффузии. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998, Т. 38, № 2. С. 207–219.
12. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва : ЛИБРОКОМ, 2015. 248 с.
13. Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции. Сибирский журнал вычислительной математики, 2012, Т. 15, № 4. С. 359–369.
14. Dantzig G. B. Linear programming and extensions. Princeton : Princeton University Press, 2016. 656 p.
15. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник. – 3-е изд. Москва : Финансы и статистика, 2009. 640 с.

REZYUME

Ushbu ish minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirishning nostatsionar masalasini sonli yechishga bag'ishlangan. Masalaning qo'yilishi bir vaqtning o'zida ikkita shartning bajarilishini talab qiladi. Birinchi shart to'g'ri to'rtburchakka minimal quvvatli issiqlik manbalarini optimal joylashtirish orqali temperaturani minimal va maksimal temperaturalar oralig'ida bo'lishini ta'minlashdan iborat. Ikkinchi shart isitish uchun sarflangan issiqlik manbalarining umumiy quvvati minimal bo'lishini ta'minlashdan iborat. Statsionar holda ushbu masala boshqa olimlarning ishlarida o'rganilgan. Nostatsionar holda esa qaralmagan. Chegaraviy masala yechimini uzluksiz holda topish qiyin bo'lgani uchun masalaning sonli yechimini qidiramiz. Uzluksiz yadroli (Grin funksiyasi) integral teskari operatorni topish qiyin. Grin funksiyaning sonli qiymatini matritsa ko'rinishida topamiz. Parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanuvchi jarayonlarda minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini sonli yechishning yangi algoritmi taklif qilingan. Boshqacha qilib aytganda yangicha sonli yechish metodikasi taklif qilingan. Birinchi chegaraviy masala uchun berilgan konveksiya-diffuziya tenglamasi orqali tavsiflanuvchi jarayonlarning matematik va sonli modeli qurilgan. Chegaraviy masala ikki o'lchovli hol uchun o'rganilgan. Masalani sonli yechishda oshkormas chekli ayirmali sxemadan foydalanilgan. Ushbu sxema yordamida ayirmali tenglamalar sistemasi hosil qilingan. Hosil qilingan ayirmali tenglamalar sistemasi chiziqli programmalash masalasiga keltirilgan. Chiziqli programmalash masalasi M-metoddan foydalanib yechilgan. Vaqtning har bir qiymatida chiziqli programmalash masalasi yechiladi. Masalani sonli yechishning yangicha yondashuvi taklif qilingan. Minimal quvvatli issiqlik manbalari joylashuvini optimal boshqarishning nostatsionar masalasini yechish algoritmining umumiy blok-sxemasi keltirilgan. Qo'yilgan masalani sonli yechish uchun algoritm va dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan. Dasturiy ta'minotning qisqacha tavsifi keltirilgan. Chegaraviy masalaning sonli yechimi berilgan oraliqlarda yotishi, optimal joylashtirilgan minimal quvvatli issiqlik manbalarining yig'indisi funksionalga minimum berishi konkret misolda ko'rsatilgan.

Hisoblash eksperimentining natijalari vizuallashtirilgan.

Kalit soʻzlar: nostatsionar masala, optimal joylashtirish, issiqlik manbalari, konveksiya-diffuziya tenglamalari, M-metod.

RESUME

This work is devoted to the numerical solution of the non-stationary problem of optimal placement of heat sources of minimum power. The statement of the problem requires the simultaneous fulfillment of two conditions. The first condition is to ensure that the temperature is within the limits of minimum and maximum temperatures due to the optimal placement of heat sources with a minimum power in the rectangle. The second condition is that the total power of the heat sources used for heating is minimal. This problem was studied under stationary conditions in the works of other scientists. However, the problem was not considered in the non-stationary case. Since it is difficult to find a continuous solution to the boundary value problem, we are looking for a numerical solution to the problem. It is difficult to find an integral operator with a continuous kernel (Green's function). The numerical value of the Green's function is found in the form of a matrix. A new algorithm for the numerical solution of a non-stationary optimal control problem for the placement of heat sources with a minimum power in processes described by parabolic partial differential equations is proposed. A new technique for numerical solution is proposed. A mathematical and numerical model of the processes described by the convection-diffusion equation given for the first boundary value problem is constructed. The boundary value problem is studied for the two-dimensional case. An implicit finite difference scheme was used to solve the problem numerically. According to this scheme, a system of difference equations was created. The formed system of difference equations is reduced to a linear programming problem. The problem of linear programming is solved using the M-method. For each time value, a linear programming problem is solved. A new approach to the numerical solution of problems is proposed. A general block diagram of the algorithm for solving the non-stationary problem of optimal control of the placement of heat sources with a minimum power is given. An algorithm and software for the numerical solution of the problem have been developed. A brief description of the software is given. A concrete example shows that the numerical solution of the boundary value problem lies in the given intervals, and that the sum of optimally placed heat sources with minimal power gives a minimum to the functional. The results of the computational experiment are visualized.

Key words: non-stationary problems, optimal placement, heat sources, convection-diffusion equations, M method.