O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI XABARLARI, 2025, [1/2]
ISSN 2181-7324

FALSAFA
http://journals.nuu.uz
Social sciences

UDK:514.112.4

Zavqiddin BOZOROV,
V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Buxoro bo‘linmasi katta ilmiy xodimi, Buxoro davlat universiteti dotsenti, PhD
E-mail: zavqiddinbozorov2011@mail.ru
Dilfuza G‘AFFAROVA,
Navoiy davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi

BuxDPI dotsenti G‘.Qurbonov taqrizi asosida

THE USE OF PROBLEMATIC EDUCATIONAL TECHNOLOGY IN THE TEACHING OF THE TOPIC OF APPROXIMATE CALCULATION OF EXACT INTEGRALS

Annotation

This article presents suggestions and recommendations on the use of interactive methods in teaching the topic of approximate calculation of specific integrals of the section of integrals, one of the main fundamental concepts of the science of mathematical analysis. In it, the topic of approximate calculation of specific integrals is explained using problematic educational technologies.

Key words: Modern innovative technologies, accurate integrals, approximate calculation of exact integrals, rectangular method, trapezoidal method,method of parabolas, problematic educational technology.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ТЕМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация

В данной статье представлены предложения и рекомендации по использованию интерактивных методов при преподавании темы приближенного вычисления определенных интегралов раздела интегралы, являющегося одним из основных понятий предмета математического анализа. тема приближенного вычисления конкретных интегралов объясняется с использованием проблемных образовательных технологий.

Ключевые слова: Современные инновационные технологии, точные интегралы, приближенное вычисление определенных интегралов, метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол, технология проблемного обучения.

ANIQ INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH MAVZUSINI O‘QITISHDA MUAMMOLI TA’LIM TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISH

Annotatsiya

Ushbu maqolada matematik analiz fanining asosiy tayanch tushunchalaridan biri bo‘lgan integrallar bo’limining “Aniq integrallarni taqribiy hisoblash” mavzusini o’qitishda interfaol metodlardan foydalanishga oid taklif va tavsiyalar keltirilgan. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash mavzusi muammoli ta’lim texnologiyalaridan foydalangan holda tushuntirilgan.

Kalit so‘zlar: Zamonaviy innovatsion texnologiyalar, aniq integrallar, ma’lum integrallarni taqribiy hisoblash, to‘rtburchaklar usuli, trapetsiya usuli, parabola usuli, muammoli o‘qitish texnologiyasi.

Kirish. Hozirgi kunda ta’lim metodlarining ko‘plab turlari mavjud bo‘lib, ushbu ta’lim metodlarini ta’lim jarayoniga tatbiq etishda turlicha yondashuvlardan foydalanib kelinmoqda. Bu ishlarda matematik analiz fanini o‘qitishda ta’lim metodlarini, texnologiyalarini, jumladan, muammoli ta’lim texnologiyasini qo‘llab o‘qitish bo‘yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilgan.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Oliy ta’lim muassasalarida matematika turkumiga kiruvchi fanlardan ma’ruza mashg‘ulotlarini o‘qitish bilan birga amaliy mashg‘ulotlar ham muhim ahamiyatga ega[1]. Amaliy mashg‘ulotlar asosan misol va masalalar yechish orqali ma’ruza darslarida o‘tilgan nazariy ma’lumotlarni amaliyot bilan bog‘lashni, talabalarning mavzuga oid ko‘nikmalarini hosil qilishni ta’minlaydi [2]. Matematika fanida amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etishga qo‘yiladigan eng muhim talablardan biri har bir mashg‘ulotda tanlanadigan mavzuni ilmiy asoslangan bo‘lishidir, ya’ni mashg‘ulotdan ko‘zlangan maqsad talabalarning imkoniyatlarini hisobga olgan holda mavzu hajmini belgilash uning murakkabligini aniqlash, olingan nazariy ma’lumotlar va avvalgi o‘rganilgan mavzu bilan bog‘lash, talabalarga taqdim etiladigan topshiriq va mustaqil ishlarni ketma-ketligini aniqlash, mashg‘ulotda lozim bo‘ladigan jihozlarni belgilash va qo‘shimcha qurollar bilan boyitish, o‘qitish texnologiyalaridan foydalangan holda muammoli vaziyatni yaratishdir. Buning uchun esa matematik analiz fanini o‘qitish jarayonida ilg‘or pedagogik texnologiyani qo‘llash yaxshi samara beradi [2]. Chunki o‘qitishning interfaol shakllari ta’lim va tarbiya masalalarini samarali tashkil etishga, talabalarning bilish faoliyatini kuchaytirishga qaratilgan o‘quv mashg‘ulotlarini takomillashtirish yo‘llaridan biridir [1,3]. Ushbu ilg‘or o‘qitish texnologiyalaridan biri muammoli ta’lim texnologiyasi sanaladi. Mazkur texnologiya talabalarga muammoli vaziyatlarni yaratish va o‘z ustida mustaqil ishlashga, mustaqil qarorlar qabul qilishga yo‘naltirish bilan samarali hisoblanadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu maqolada amaliy mashg‘ulot darslarida Aniq integrallarni taqribiy hisoblash mavzusini o‘qitishda muammoli ta’lim texnologiyasidan foydalanishga oid taklif va tavsiyalar keltiriladi. Dastavval mavzuning nazariy qismi bo‘lgan aniq integrallni taqribiy hisoblash usullari talabalarga eslatib o‘tiladi.

Qadim zamonlardan buyon odamlar ekin maydoni yuzalarini o‘lchash uchun ekin maydonini kichik to‘rtburchaklarga ajratib, so‘ngra ularning yuzlarini qo‘shib maydon yuzi kattaligini taqribiy topishgan. Xuddi shu usulni Arximed geometrik figuralarni yuzi va hajmini topishda qo‘llagan. Nyuton barcha fizikaviy hodisalar differensiallash va integrallash amallarining ketma-ket takrorlanish natijasida ro‘y berishini kuzatadi. Shu prinsipni qo‘llab ko‘pgina natijalarga erishadi.

Integral tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo’lib matematika, fizika, mexanika va boshqa fanlarning eng kuchli quroli hisoblanadi. Egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzi, egri chiziq yoyi va uzunligi, hajmi, bajarilgan ish, tezlik, yo’llarni va inersiya momentlarini hisoblash ishlarining hammasi integral hisoblashga keltiriladi.

Odatda, aniq integrallar Nyuton-Leybnis formulasi yordamida hisoblanadi. Bu formuladan funksiya integrallanuvchi bo‘lganda foydalanish qulay. Ammo boshlang‘ich funksiyani topish masalasi doim oson hal bo‘lavermaydi. Agar boshlang‘ich funksiyani topish ko‘p vaqt talab qilsa, berilgan aniq integralni taqribiy hisoblashga to‘g‘ri keladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ko‘pincha, to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiya va parabolalar formulalari yordamida taqribiy hisoblanadi.

1^0. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi.

$[a,b]$ segmentni $x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$ nuqtalar yordamida n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz.

Ushbu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)+R_n \qquad (*)$$

formula to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi deyiladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, (*) formulaning qoldiq hadi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \quad (a \le c \le b)$$

bo‘ladi

2^0. Trapetsiyalar formulasi.

Ushbu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]+R_n \qquad (**)$$

formula trapetsiyalar formulasi deyiladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, (**) formuladagi qoldiq had

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad (a \le c \le b)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

3^0. Simpson formulasi.

Ushbu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+2k\cdot\frac{b-a}{2n}\right)+\right.$$

$$\left.+4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(2k+1)\cdot\frac{b-a}{2n}\right)\right]+R_n \qquad (***)$$

formula Simpson (parabolalar) formulasi deyiladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz $f^{(4)}(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, (***) formuladagi qoldiq had

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c) \quad (a \le c \le b)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Mavzuning nazariy qismi talabalarga takrorlanib o‘tilgandan so‘ng, ularga mavzuni chuqurroq o‘zlashtirishlari uchun quyidagi muammoli masala qo‘yiladi: Yuqoridagi 3 ta formuladan qaysinisi orqali biz aniq integralni qiymatini taqribiy hisoblasak xatolik kam chiqadi, ya’ni biz javobga ko‘proq yaqinlashgan bo‘lamiz. Aslida mavzuning nazariy qismini yaxshi tushungan talabalar uchun bu savolga javob berish muammo tug‘dirmaydi. Lekin nazariy ma’lumotlarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri mag‘zini chaqish aksariyat talabalar uchun qiyinlik qiladi. Bu muammoni hal qilish uchun bir nechta misollarni ko‘rib chiqib keyin umumiy xulosa qilishimiz mumkin. Dastlab integral ostidagi funksiya integrallanuvchi bo‘lgan misolni ko‘ramiz.

1-misol. Ushbu

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

integralni hisoblang.

◄ Avvalo bu integralni Nyuton-Lebnis formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

Endi $[0,1]$ segmentni

$$x_0=0; x_1=0.25; x_2=0.5; x_3=0.75; x_4=1$$

4 ta teng bo‘lakka bo‘lib, berilgan integralni to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblaymiz.

Buning uchun eng avvalo berilgan $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ funksiyani $x_0,\ldots,x_4$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$x_0=0,\ f(x_0)=1,\ \ x_1=0.25,\ f(x_1)=0.941,\ \ x_2=0.5,\ f(x_2)=0.8,$$

$$x_3=0.75,\ f(x_3)=0.64,\ \ x_4=1,\ f(x_4)=0.5,$$

Ravshanki, bu holda $[a,b]=[0,1]\quad b-a=1, n=4$

To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi bo‘yicha:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{4}\left[1+0.941+0.8+0.64\right]=0.8452$$

Bu holda absolyut xatolik, agar, $\pi\approx 3.1415$ deb olsak, $\Delta=0,0598$ ga teng.

Trapetsiyalar formulasi bo‘yicha:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{8}\left[1+0.5+2\cdot(0.941+0.8+0.64)\right]=0.7827$$

Bu holda absolyut xatolik $\Delta=0,0027$ ga teng.

Simpson formulasi bo‘yicha:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{12}\left[1+0.5+4\cdot(0.941+0.64)+2\cdot 0.8\right]=0.7853.$$

Bu holda absolyut xatolik $\Delta=0,0001$ ga teng. ►

Bundan ko‘rinadiki, yuqoridagi misolimizda Simpson formulasi orqali aniq integralni taqribiy hisoblash aniqligi yuqori ekan.

Talabalarga mustaqil ishlashlari uchun quyidagi misollarni taqdim qilamiz: $I=\int_0^2 \frac{x^2}{1-x^2}dx$, $I=\int_0^2 \left(2^x+3^x\right)^2 dx$, $I=\int_0^\pi \left(x\cdot\sin x\right)^2 dx$.

Bunda talabalar 3 guruhga bo‘linib, har bir guruhga alohida misol beriladi.

Yuqoridagi misollarda integralning qiymatini Nyuton-Lebnits formulasi orqali hisoblab bo‘linadigan hollarini ko‘rdik. Endi boshlang‘ich funksiyasini topish murakkab yoki boshlang‘ich funksiyasini topib bo‘lmaydigan misollarni qaraymiz. Lekin bu funksiyalarning aniq integralini taqribiy hisoblab bo‘ladi.

Masala. Universitet talabalarining 20 % i davlat granti asosida tahsil oladi. Universitet rahbariyati talabalarning 100 tasini tanlov asosida saralab olib, chet elga o‘qishini davom ettirishga jo‘natishni rejalashtirgan. Tanlovda jami 400 ta talaba ishtirok etgan bo‘lsa, chet elga yuborish uchun tanlab olingan talabalarning kamida 80 tasi davlat granti asosida o‘qiyotgan talabalar bo‘lish ehtimoli nechchi % ga teng?

◄ Izoh: Agar n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma ketligida biror hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas $p\ (0<p<1)$ soniga teng bo‘lsa, bu tajribalardan hodisaning ro‘y berishlar soni m ning m_1 va m_2 qiymatlarning orasida bo‘lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Bunda $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ -Laplasning integral funksiyasi deb ataladi. Bunda $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$ va $x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$ ga teng bo‘ladi. $\Phi(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvallarda berilgan bo‘ladi.

Bizga ma'lumki $f(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}$ funksiyaning integralini elementar funksiyalar yordamida topib bo'lmaydi. Bu integralni jadvaldan foydalanmay yechishimiz uchun $f(z)$ funksiyaning aniq integrali taqribiy qiymatini Simpson usuli orqali topamiz.Quyidagi yordamchi masalani qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$I=\int_0^2 e^{-x^2}dx$$

integralni hisoblang.

◄ $[0,2]$ segmentni

$x_0=0; x_1=1; x_2=2;$

2 ta teng bo'lakka bo'lib, berilgan integralni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblaymiz. (Biz ko'proq bo'lakka bo'lsak ham bo'lar edi. Lekin hisoblashni qiyinlashtirmaslik maqsadida teng 2 ta bo'lakka bo'ldik.)

Buning uchun eng avvalo berilgan $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyani x_0, x_1, x_2 nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$x_0=0,\ f(x_0)=1,\ \ x_1=1,\ f(x_1)=0.3690,\ \ x_2=2,\ f(x_2)=0.0185$$

Ravshanki, bu holda $[a,b]=[0,2]\quad b-a=2, n=2$

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi bo'yicha:

$$I=\int_0^2 e^{-x^2}dx=1+0.3690=1.3690$$

Trapetsiyalar formulasi bo'yicha:

$$I=\int_0^2 e^{-x^2}dx=\left[\frac{1+0.0185}{2}+0.3690\right]=0.8782$$

Simpson formulasi bo'yicha:

$$I=\int_0^2 e^{-x^2}dx=\frac{1}{3}\left[1+0.0185+4\cdot 0.3690\right]=0.8315$$

. ►

Endi yuqorida berilgan masalaga qaytadigan bo'lsak, uni quyidagicha hisoblashimiz mumkin. Eng avvalo x_1 va x_2 ning qiymatini topaylik. Bu yerda $p=0.2, q=0.8, n=400, m_1=80, m_2=100$ ekanligidan $x_1=\dfrac{80-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=0$ va $x_2=\dfrac{100-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}}=2.5$ bo'ladi. Demak

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2.5} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

integralning taqribiy qiymatini hisoblashimiz kerak. Buning uchun $[0;2.5]$ kesmani 5 ta teng bo'lakka bo'ib ($x_0=0; x_1=0.5; x_2=1; x_3=1.5; x_4=2; x_5=2.5$), $f(z)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$z_0=0,\ f(z_0)=1,\quad z_1=0.5,\ f(z_1)=0.8834,\quad z_2=1,\ f(z_2)=0.6075,\ z_3=1.5,\ f(z_3)=0.3260,$$

$$z_4=2,\ f(z_4)=0.1363,\ z_5=2.5,\ f(z_5)=0.0444,$$

Simpson formulasi bo'yicha:

$$\int_0^{2,5} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2.5-0}{15}\Big(1+0.0444+2\cdot\big(0.6075+0.1363\big)+4\cdot\big(0.8834+0.3260\big)\Big)=1.2282$$

$$P_{400}(80,100)=\frac{1.2282}{4.4406}=0.2765\approx 0.28$$

Javob: Ehtimollik 28 % ga teng ekan.

Tahlil va natijalar. Shuni ta'kidlash kerakki nuqtalar soni qancha ko'p bo'lsa aniq integralning qiymati ham shuncha aniq chiqadi(lekin hisoblash ko'payadi).

Shu usulda hisoblash uchun quyidagi misollarni talabalarga taqdim qilamiz: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$,

$I=\int_0^{\pi}\dfrac{x}{a^2\cos^2+b^2\sin^2 x}dx$, $I=\int_0^{\pi}e^{\sin x}dx$.

Misollar to‘liq ishlangandan so‘ng, talabalarga quyidagi savol (muammo) bilan murojaat qilamiz: “Shu 3 ta usuldan foydalanmay turib ham qaysi holda aniq integralning qiymati aniqroq chiqishini oldindan aytish mumkinmi?”

Talabalar fikri tinglaniladi, to‘g‘ri javobga yo’naltiriladi. So‘ng o‘qituvchi tomonidan yakuniy xulosa beriladi: Yuqoridagi 3 ta formulalar(to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiya, Simpson)ning qoldiq hadlariga qaraladi. Parabolalar usulida qoldiq hadda $f(x)$ funksiya hosilasining eng yuqori darajasi qatnashayapti. Bundan ko‘rinadiki Simpson formulasida qoldiq had eng kichkina chiqadi.

Xulosa va takliflar. Yuqoridagi tahlillardan ko’rinadiki, agar integral ostidagi funksiya murakkab bo‘lsa, tegishli aniq integralni hisoblashda taqribiy usullarini qo‘llash lozim bo‘ladi. Demak aniq integral qiymatini integral osti funksiya boshlang‘ichini topmasadan ham hisoblash mumkin ekan.

ADABIYOTLAR

1. Artiqova G.A.. Matematikadan amaliy mashg`ulotlar metodik tizimini maxsus texnologiyalar asosida takomillashtirish// Pedagogika fanlari bo`yicha falsafa doktori (PhD) avtoreferati.-Toshkent -22 b. (2020).
2. Xoliqov S.X.. Bo‘lg‘usi matematika o‘qituvchilarini tayyorlash jarayonida differensial tenglamalar modulini o‘qitish metodikasini takomillashtirish // Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) ilmiy darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya.– Toshkent – 108 b. (2022)
3. Sharipov E.O. Akademik litseylarda matematik analiz asoslarini o`qitish metodikasi // Pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) ilmiy darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya.– Toshkent – 195 b. (2019)